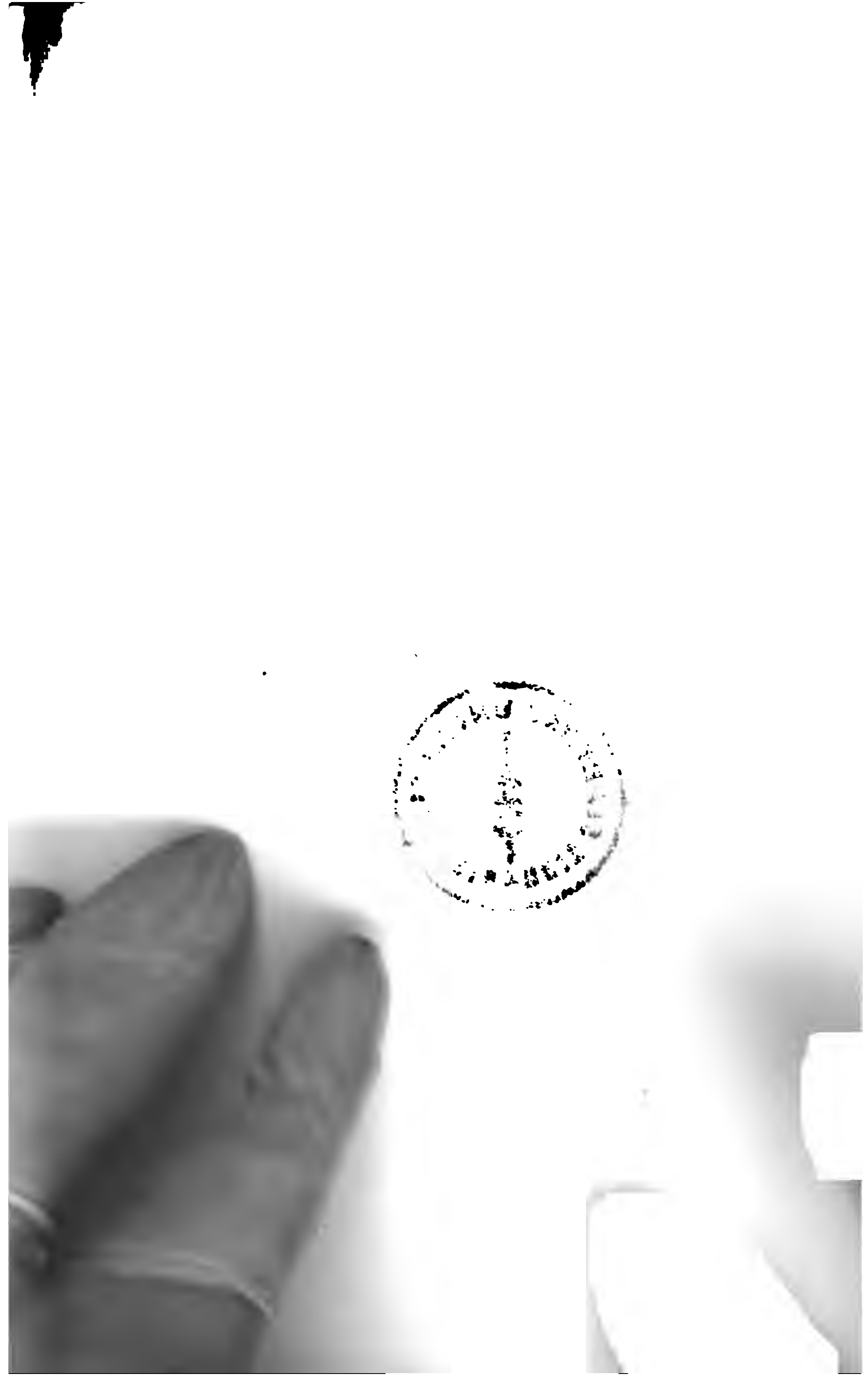










SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

HUNDERTZWEITER BAND.

WIEN, 1893.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

SITZUNGSBERICHTE

DER

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

CII. BAND. ABTHEILUNG II. a.

JAHRGANG 1893. — HEFT I BIS X.

(MIT 18 TAFELN UND 135 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1893.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT.



SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CII. BAND. I. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK



I. SITZUNG VOM 5. JÄNNER 1893.

Herr Intendant Hofrath Ritter v. Hauer übernimmt als Alterspräsident den Vorsitz und stellt den Antrag, dass der Herr Generalsecretär der kaiserl. Akademie ersucht werde, der Frau Gemalin des Herrn Vicepräsidenten Hofrathes Stefan das tiefe Bedauern über dessen schwere Erkrankung im Namen der Classe mit dem Wunsche auf baldige Wiedergenesung auszudrücken.

Die Mitglieder der Classe stimmen diesem Antrage unter allgemeiner Theilnahme bei.

Hierauf gibt der Vorsitzende Nachricht von dem am 18. December v. J. erfolgten Ableben des ausländischen Ehrenmitgliedes dieser Classe Sir Richard Owen in London.

Die anwesenden Mitglieder erheben sich zum Zeichen des Beileides von ihren Sitzen.

Das Ehrenmitglied der kaiserl. Akademie, Se. Excellenz Dr. Alexander Freiherr v. Bach, spricht seinen Dank aus für die ihm aus Anlass der Vollendung seines achtzigsten Geburtsjahres von der Akademie übersendete Beglückwünschungs-Adresse.

Der Secretär legt das erschienene Heft VIII (October 1892) des 101. Bandes der Abtheilung I der Sitzungsberichte, ferner das Heft X (December 1892) des 13. Bandes der Monatshefte für Chemie vor.

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Arithmetische Untersuchungen«.

Das c. M. Herr Prof. H. Weidel übersendet folgende vier Arbeiten aus dem I. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien:

1. »Studien über Quercetin und seine Derivate« (VIII. Abhandlung), von Dr. J. Herzig und Th. v. Smoluchowski.
2. »Studien über Quercetin und seine Derivate« (IX. Abhandlung), von Dr. J. Herzig und Th. v. Smoluchowski.
3. »Notiz über Methylbrasilin«, von Dr. J. Herzig.
4. »Über Isocarbostyril«, von Albert Fernau.

Der Secretär legt eine Abhandlung von Prof. F. J. Obenrauch an der Landes-Oberrealschule in Brünn vor, betitelt: »Zur Complanation des dreiachsigen Ellipsoides mittelst elliptischer Coordination«.

Das w. M. Herr Prof. Sigm. Exner überreicht eine im physiologischen Institute der k. k. Universität in Wien ausgeführte Untersuchung von Dr. L. Réthi, betitelt: »Der periphere Verlauf der motorischen Rachen- und Gaumennerven«.

Das w. M. Herr Intendant Hofrath F. Ritter v. Hauer überreicht eine Abhandlung von Dr. A. Bittner in Wien, unter dem Titel: »Decapoden des pannonischen Tertiärs«.

Diese Arbeit gliedert sich in drei Abschnitte:

1. Beschreibung der tertiären Decapoden von Klausenburg.

2. Tertiäre Brachyuren aus Croatien.

3. Tertiäre Brachyuren von Walbersdorf im Ödenburger Comitate.

Herr Dr. Alois Kreidl, Assistent am physiologischen Institute der k. k. Universität in Wien, überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Weitere Beiträge zur Physiologie des Ohrlabyrinthes. II. Mittheilung. Versuche an Krebsen«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Antonio Favaro, Per il Terzo Centenario della inagurazione dell'insegnamento di Galileo Galilei nello studio di Padova. 7 Dicembre 1892. Firenze, 1892; 4°.

Carlo F. Ferraris, Onoranze Centenarie a Galileo Galilei. Discorso pronunziato il 7 Dicembre 1892 nell'Aula Magna della R. Università di Padova. Padova, 1892; 4°.

II. SITZUNG VOM 12. JÄNNER 1893.

Herr Intendant Hofrath Ritter v. Hauer übernimmt als Alterspräsident den Vorsitz.

Der Vorsitzende gibt der tiefen Trauer Ausdruck über das am 7. Jänner d. J. erfolgte Ableben des Vicepräsidenten der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften

des Herrn k. k. Hofrathes

DR. JOSEF STEFAN.

Die anwesenden Mitglieder geben ihr Beileid durch Erheben von den Sitzen kund.

Der Secretär legt das erschienene Heft VIII (October 1892) des 101. Bandes der Abtheilung I der Sitzungsberichte, ferner den II. Band (Jahrgang 1881) der von der Buchhandlungsfirma Mayer & Müller in Berlin durch anastatisches Verfahren hergestellten Neuauflage der Monatshefte für Chemie vor.

Die königliche Akademie der Wissenschaften in Turin übermittelt das Programm für den neunten Bressa'-schen Preis.

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit des Herrn Alfred Beill: »Über den Einfluss der Temperatur auf die Ozonbildung«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Arthur Cayley, The Collected Mathematical Papers. Vol. V. Cambridge, 1892; 4°.

Omboni, G., Achille de Zigno. Cenni biografici estratti dal discorso d'apertura della riunione della Società Geologica Italiana in Vicenza nel Settembre 1892. Padova, 1892; 8°.

Volger, G. H. Otto, Die Lichtstrahlen. Allgemein-verständliche Begründung eines bisher nur beiläufig behandelten, wichtigen Abschnittes der »physiologischen Optik«. Emden, 1892; 8°.

III. SITZUNG VOM 19. JÄNNER 1893.

Herr Intendant Hofrath Ritter v. Hauer übernimmt als Alterspräsident den Vorsitz.

Der Secretär legt das erschienene Heft IX (November 1892) des 101. Bandes der Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte vor.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. C. Toldt überreicht eine für die Denkschriften bestimmte Abhandlung: »Über die massgebenden Gesichtspunkte in der Anatomie des Bauchfelles und der Gekröse«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Lang überreicht ein Abhandlung von Director Dr. J. M. Eder und Herrn E. Valent in Wien: »Über das Emissionsspectrum des elemen taren Siliciums und den spectrographischen Nach weis dieses Elementes«.

Ferner überreicht Herr Hofrath v. Lang eine zweit Abhandlung von Director Dr. J. M. Eder und Herrn E. Valenta »Über das Linienspectrum des elementaren Kohlen stoffes im Inductionsfunken und über das ultra violette Funkenspectrum nasser und trockener Hol kohle«.

Das w. M. Herr Hofrath Director J. Hann überreicht ein Abhandlung von Dr. Max Margules, betitelt: »Luftbew gungen in einer rotirenden Sphäroidschale«. (II. Thei

Herr Dr. Gustav Kohn, Privatdocent an der k. k. Universität in Wien, überreicht eine Abhandlung: »Über symmetrische Functionen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung«.

Herr Dr. Carl Diener, Privatdocent an der k. k. Universität in Wien, erstattet einen kurzen Bericht über die im Sommer des verflossenen Jahres im Auftrage der kaiserl. Akademie und der indischen Regierung unternommene geologische Expedition in den Central-Himalaya von Johar, Hundés und Painkhánda und legt die von ihm während derselben angefertigten Photogramme und Skizzen vor.



Luftbewegungen in einer rotirenden Sphäroidschale

(II. Theil)

von

Max Margules.

(Mit 6 Tafeln.)

Die mannigfachen Luftbewegungen, welche in einer rotirenden, von der Kugelgestalt wenig abweichenden Schale vorkommen können, lassen sich in eine Reihe einfacher Bewegungen auflösen, wenn man annimmt: Die relative Geschwindigkeit der Luft bleibe innerhalb solcher Grenzen, dass es genügt, in den Differentialgleichungen der Bewegung nur die in Beziehung auf alle Veränderlichen linearen Glieder zu behalten. Es wird auch vorausgesetzt, dass die Temperatur constant ist, und dass die Wände der Schale sehr nahe und geschlossene Niveauflächen sind.

Die Zahl der einfachen Bewegungen, in welche jedwede aus gegebenen Anfangsbedingungen entstehende Bewegung zerfällt, ist unendlich gross. Wenn man sie jedoch classificirt und für einige Classen die Rechnung durchgeführt hat, so kann man auch die bei den übrigen Bewegungsformen eintretenden Verhältnisse einigermassen überblicken. Eine Classe — die zonale — haben wir schon im ersten Theil behandelt. Die nun folgenden wollen wir numeriren.

Die erste Classe umfasst jene Bewegungen, bei denen diametrale Punkte eines Parallelkreises gleich grosse (geo-

[1] Der erste Theil Sitzungsber., Bd. 101, II. a, S. 597 (1892).

graphisch) entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeit haben; in dem einen ist der Druck ebensoviel über dem Mittel, als in dem andern unter demselben.

In der zweiten Classe haben diametrale Punkte eines Breitekreises gleiche und gleichgerichtete Geschwindigkeit und gleichen Druck. In zwei Punkten aber, welche auf einem Breitekreis um die Länge $\pi/2$ abstehen, herrschen entgegengesetzte Geschwindigkeiten, in dem einen Überdruck, in dem andern eben so grosser Minderdruck.

Ähnlich verhält es sich in der dritten Classe mit zwei Punkten, welche in der Länge um $\pi/3$ verschieden sind.

Im Allgemeinen erhält man, wenn eine der relativen Geschwindigkeit der Luft proportionale Reibung eingeführt wird, eine Lösung der Bewegungsgleichungen in folgender Form:

$$\begin{aligned} b &= e^{-\alpha t}[\cos(h\lambda+\beta t)\,\varphi_1(\omega) - \sin(h\lambda+\beta t)\,\varphi_2(\omega)] \\ c &= e^{-\alpha t}[\sin(h\lambda+\beta t)\,\psi_1(\omega) + \cos(h\lambda+\beta t)\,\psi_2(\omega)] \\ \varepsilon &= e^{-\alpha t}[\sin(h\lambda+\beta t)E_1(\omega) + \cos(h\lambda+\beta t)E_2(\omega)]. \end{aligned}$$

Die Bezeichnungen sind wie im ersten Theil, t die Zeit, ω Polabstand, λ Länge (ostwärts), b meridionale Geschwindigkeit (südwärts), c zonale Geschwindigkeit (ostwärts), ε relativer Überdruck, α, β Constante; hiezu kommt noch h eine ganze positive Zahl (oder Null), welche die Classe der particulären Lösung bestimmt. $h = 0$ gehört zu der zonalen Classe.

Jede solche Lösung stellt eine Wellenbewegung dar, und zwar eine nach Osten oder nach Westen fortschreitende Welle, je nachdem β negativ oder positiv ist. Für die ruhende Kugelschale besteht kein Unterschied zwischen ostwärts und westwärts wandernden Wellen; es gibt stets zwei Lösungen, welche sich nur durch das Vorzeichen von β unterscheiden. Diese lassen sich zu einer stehenden Schwingung vereinigen. Gibt man jedoch der Schale eine geringe Rotationsgeschwindigkeit (wobei man auch ihre Gestalt so zu ändern hat, dass die Begrenzungen Niveauflächen bleiben), so gehen jene zwei Lösungen in andere über, welche sich nicht allein durch das Vorzeichen, sondern auch durch die Grösse von β, also in der Schwingungsdauer, überdies noch in der Form der Druckvertheilung und des Windsystems unterscheiden. Der Unter-

schied wächst mit der Rotationsgeschwindigkeit. Demnach gibt es auch in der rotirenden Schale keine stehenden Schwingungen ausser der zonalen Classe.

In jeder Classe gibt es wieder zwei Gruppen von Bewegungen, die paren und imparen Formen, und in jeder Gruppe unendlich viele Typen, wie man sich nach den Beispielen für $k = 0$ leicht vorstellen kann.

Für das reibungslose System der rotirenden Schale (und in allen Fällen der ruhenden Schale) vereinfachen sich die Lösungen dadurch, dass die φ_2, ψ_2, E_2 beziehungsweise den φ_1, ψ_1, E_1 proportional sind. In diesen Fällen sind die Classen durch die Zahl der Doppelmeridiane oder axialen Schnitte bestimmt, welche von jedem Breitekreise die Theile mit Überdruck abgrenzen gegen die Theile mit Minderdruck. Also gibt es in der ersten Classe eine solche Schnittebene, welche mit der Welle wandert, in der zweiten Classe zwei senkrechte Ebenen, in der dritten Classe drei Ebenen, welche die Schale in sechs gleiche Theile trennen.

In allen diesen Fällen hat man Meridiane als Linien mittleren Druckes. Wenn nun $E(\omega)$ mehrmals durch Null hindurchgeht, so ergeben sich noch die entsprechenden Breitekreise als Mitteldrucklinien. Ein Gebiet hohen oder niedrigen Druckes liegt in einem von Meridianen und Parallelkreisen begrenzten Viereck oder Dreieck, im einfachsten Fall in einem ganzen Sector der Schale.

Bei Annahme der Reibung werden aber für die rotirende Schale in den einfachen Wellen die Mitteldrucklinien Curven von anderer Form.

Zur Ausführung der Rechnungen dient, wie im ersten Theil, das von Laplace erfundene, von Lord Kelvin[1] erläuterte und erweiterte Verfahren.

Die Entwicklungen werden noch weitläufiger, besonders aber die Ausrechnung der Wurzeln jener Kettenbruchgleichungen, welche die Schwingungsdauern der einzelnen Wellen liefern,

---

[1] Sir William Thomson: On an alleged error in Laplace's theory of tides Phil. Mag. (4) 50 (1875), p. 227. Note on the »Oscillations of the first species« in Laplace's theory of tides, daselbst p. 279. General integration of Laplace's differential equation of tides, p. 388.

viel mühsamer, wenn man die zonale Classe verlässt. Zwischen den folgenden Classen findet man in dieser Beziehung keinen grossen Unterschied mehr.

Die langathmigen Rechnungen haben den Zweck, alle in einer rotirenden Schale von constanter Temperatur möglichen Luftbewegungen zu beschreiben, für welche die linearen Glieder der aërodynamischen Gleichungen ausreichen. Es ist darum wichtig nachzuweisen, dass die hier behandelten einfachen Bewegungen jede aus gegebenen Anfangsbedingungen abgeleitete freie Luftbewegung zusammensetzen. Der Nachweis wird dadurch geführt, dass man zunächst die in der ruhenden Schale möglichen Bewegungsformen aufsucht, das sind Wellen und stationäre Strömungen; dann zeigt, wie sich jede derselben ändert, wenn man die Schale rotiren lässt. Die Wellen der ruhenden Schale verwandeln sich dabei in solche, die der Rotationsrichtung entgegen (sehr rasch) wandern, und in Wellen, welche in der Rotationsrichtung (langsamer) fortschreiten; die stationären Bewegungen gehen auch in Wellen über, welche (sehr langsam) gegen die Rotationsrichtung sich fortpflanzen. Die letzteren werden westliche Wellen zweiter Art genannt.

Für eine Schale von der Grösse und Rotationsgeschwindigkeit der Erde besteht, wenn die Luftbewegung bei beträchtlicher Reibung stattfindet, ein sehr wichtiger Unterschied zwischen den Wellen verschiedener Art. Die östlich wandernden und die westlichen Wellen zweiter Art erlöschen bei grosser Reibung viel langsamer als die westlichen Wellen erster Art. In jenen beiden folgt die Bewegung der Buys-Ballot'schen Regel fast vollständig, in den rasch gedämpften ist sie grossentheils der Regel entgegengesetzt. Ähnlich wie in der zonalen Classe zeigt sich auch allgemein, dass bei grossen Werthen der Reibungsconstante diejenigen Bewegungen die beständigsten sind, welche überwiegend im Sinne des Druckgefälles und der genannten Regel verlaufen. Luftbewegungen anderer Art sind nicht ausgeschlossen. Dass sie auf der Erde nicht beobachtet werden, ist leicht erklärlich. Da man es hier immer mit verwickelten Bewegungen zu thun hat, welche aus der Übereinanderlagerung vieler einfachen Formen entstehen, so werden die beständigen zumeist die rasch erlöschenden Formen überdecken.

Unter den Umständen, welche darauf hinweisen, dass die Luftbewegungen auf der Erde bei sehr grosser Reibung stattfinden, ist noch einer, welchen ich hervorheben will; die Beobachtung, dass, wenn ein Druckminimum über einen Ort wandert, Windstille gleichzeitig mit dem niedrigsten Drucke eintritt. Das ist bei einer fortschreitenden Welle im reibungslosen Mittel ganz anders. Die Druckextreme treten zugleich mit dem stärksten Wind ein, und zwar bläst der Wind beim Druckmaximum in der Fortpflanzungsrichtung, beim Druckminimum entgegengesetzt.

In einer langen, geraden Röhre bewege sich die Luft in der Richtung der Axe (x-Axe) mit der Geschwindigkeit u und erleide dabei eine Reibung lu. (Man vergleiche den dritten Abschnitt des ersten Theils). Fig. 1 stellt die bekannten Verhältnisse einer im reibungslosen Mittel fortschreitenden einfachen Luftwelle dar. Die Werthe des Überdrucks als Ordinaten auf die x-Axe aufgetragen (positiv aufwärts) sind zu jeder Zeit durch eine Sinuslinie dargestellt; die kleinen Pfeile geben die Windrichtung an, die Punkte Orte stärksten Windes, die Ringe ∘ Orte der Windstille, der grosse Pfeil die Fortpflanzungsrichtung.

Bei einem von Null verschiedenen Werthe des l ändern sich die Verhältnisse in dem Sinne, dass die Bewegung vorwiegend in der Richtung des Druckgefälles verläuft (während sie im reibungslosen Mittel gerade zur Hälfte mit dem Gefälle, zur Hälfte gegen dasselbe geschieht).

In Fig. 2 für gleiche Wellenlänge sieht man, dass in diesem Falle die Windstillen näher an die Orte der Druckextreme heranrücken, doch dürfen sie mit denselben nicht zusammenfallen, wenn die Welle überhaupt fortschreiten soll. Mit wachsendem Werth von l kommt es schliesslich dazu, dass die Druckvertheilung gegen das Windsystem um ein Viertel Wellenlänge verschoben ist. Von da ab sind bei der gegebenen Wellenlänge nur stehende Schwingungen möglich.

Die Bewegungsgleichung und die Continuitätsgleichung sind:

$$-c^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + lu, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

eine particuläre Lösung derselben:

$$\varepsilon = Ce^{-\alpha t} \sin(\beta t + ax), \quad u = -cCe^{-\alpha t} \sin(\beta t + ax + \eta)$$

(c Fortpflanzungsgeschwindigkeit im reibungslosen Mittel, α, β, a, η Constante)

$$\alpha = \frac{l}{2}, \quad \beta = \sqrt{c^2 a^2 - \frac{l^2}{4}}, \quad \sin\eta = \frac{\alpha}{ca}, \quad \cos\eta = \frac{\beta}{ca}$$

Ein anderes Beispiel, welches fortschreitende Wellen in einer ebenen Luftschicht, bei schachbrettartiger Vertheilung der Gebiete hohen und niedrigen Druckes darstellt, will ich hier anschliessen. Die Bewegungsgleichungen (u, v Geschwindigkeiten nach der x- beziehungsweise y-Axe)

$$-c^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + lu, \quad -c^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t} + lv, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

lassen diese Lösung zu:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= Ce^{-\alpha t} \sin(\beta t + ax) \cos by \\ u &= \frac{-acC}{\sqrt{a^2 + b^2}} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + ax + \eta) \cos by \\ v &= \frac{-bcC}{\sqrt{a^2 + b^2}} e^{-\alpha t} \cos(\beta t + ax + \eta) \sin by \end{aligned}\right\} \left[\begin{aligned} \alpha &= \frac{l}{2}, \\ \beta &= \sqrt{c^2(a^2 + b^2) - \frac{l^2}{4}} \\ \sin\eta &= \frac{\alpha}{c\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \cos\eta &= \frac{\beta}{c\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}\right].$$

Fig. 3 gilt für den Fall $l = 0$. Die Gebiete hohen und niedrigen Druckes sind in Rechtecke eingeschlossen, deren Seiten den mittleren Druck haben. Die Orte hohen Druckes sind durch ausgezogene Curven, die des niedrigen Druckes durch gestrichelte angedeutet. Man hat hier eine Combination fortschreitender und stehender Schwingungen, welche eine gute Analogie bietet zu den Luftbewegungen in einer ruhenden Kugelschale.

Fig. 4 gilt für einen Werth von l, welcher noch das Fortschreiten der Welle gestattet. Es ist eine Bedingung der Fortpflanzung, dass der Wind im Druckmaximum in der Richtung des Fortschreitens, im Druckminimum entgegengesetzt weht, so dass die Windstillen hinter den Druckextremen wandern.

Obgleich die Verhältnisse der relativen Bewegung in der rotirenden Schale verwickelter sind, ergibt sich auch hier, dass bei einer reibungslos fortschreitenden Welle der Wind im Druckmaximum die Richtung der Fortpflanzung hat, im Minimum die entgegengesetzte, und die Windstillen gerade in Punkten mittleren Druckes liegen; und ebenso wie in den angeführten Beispielen kommen bei grosser Reibung die Windstillen nahe an die Orte höchsten und niedrigsten Druckes heran, ohne sie ganz zu erreichen. Der Wind in diesen Orten ist dann aber sehr schwach im Vergleich mit den Winden an den Orten grossen Druckgefälles. (In Betreff der westlichen Wellen zweiter Art ist hier für das reibungslose System eine Einschränkung zu machen.)

Die erwähnte Beobachtung, dass Druckminimum und Windstille bei einer über die Erde wandernden Welle nahezu mit einander fortschreiten, hängt mit der Thatsache zusammen, dass die Luft von Orten höheren Drucks zu Orten niedrigeren Drucks im gleichen Niveau fliesst, und in beiden Beobachtungen kann man ein sicheres Merkmal dafür sehen, dass die Luftbewegung auf der Erde unter grosser Reibung stattfindet.

In der ruhenden Schale verwandelt sich bei einem gewissen Werth der Reibung jede fortschreitende Welle in zwei stehende Schwingungen. Jener Grenzwerth ist durch die Schwingungsdauer des Wellentypus im reibungslosen System bestimmt.

In der rotirenden Schale gibt es dagegen (ausser der zonalen Classe) auch bei grosser Reibung nur fortschreitende Wellen. Es ist demnach sicher, dass schon die Rotation allein die Ortsveränderung der Gebiete hohen und niedrigen Druckes auf der Erde bedingt. Ausserdem können zahlreiche Umstände, welche aus den Prämissen unserer Rechnung ausgeschlossen sind, auf die Fortpflanzung Einfluss haben.

Nach Ferrel's Ansicht hat man die allgemeinen Strömungen der Atmosphäre (Passatwinde) als die wichtigste Ursache des Fortschreitens der Cyklonen anzusehen. Sie führen die Luftwirbel mit, wie ein Wasserstrom die kleinen Wirbel fortträgt, welche in ihm entstehen. Damit soll es zusammenhängen, dass die Fortpflanzungsrichtung der Gebiete niedrigen Druckes in den Tropen vorwiegend westlich, in höheren Breiten östlich ist.

Unsere Rechnung kann diese Meinung nicht genauer prüfen. Beschränkt man sich, wie es hier geschieht, auf die Glieder der Bewegungsgleichungen, welche in Beziehung auf alle Veränderlichen linear sind, so superponiren sich die Bewegungen verschiedener Art, ohne einander zu stören. Eine constante Strömung könnte unter solcher Annahme die Fortpflanzung der Wellen nicht beeinflussen. Wenn beispielsweise ein Druckminimum östlich fortschreitet, so muss der Säule über dem Orte, wo jetzt das Minimum liegt, binnen der folgenden Stunde mehr Luft zugeführt als entzogen werden, dagegen der Säule über einem östlich davon gelegenen Punkte mehr entzogen als zugeführt werden; das könnte eine stationäre Strömung nicht leisten, wenn sich ihre Geschwindigkeit zu den in der Welle vorhandenen Geschwindigkeiten addirt. Ähnlich darf man auch in den oben angeführten einfachen Beispielen eine Strömung in der Richtung des Fortschreitens oder gegen dieselbe zu den Wellenbewegungen hinzufügen, ohne an deren Fortpflanzung etwas zu ändern.

Die Bemerkung kann kein entscheidendes Argument gegen Ferrel's Ansicht sein; es wäre wohl möglich, dass man diese Meinung bestätigt findet, wenn man, wie es für die stationären Bewegungen wohl nothwendig ist, die quadratischen Glieder berücksichtigt.

6. Reibungsloses System. Wandernde Wellen in der rotirenden und in der ruhenden Schale.

Die Differentialgleichungen der relativen Bewegung reibungsloser Luft in einer rotirenden Niveauschale, welche nur wenig von der Kugelgestalt abweicht, sind

$$\left.\begin{aligned} -\frac{RT}{S}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega} &= \frac{\partial b}{\partial t} - 2\nu\cos\omega\,.\,c, \\ -\frac{RT}{S}\frac{\partial\varepsilon}{\sin\omega\,\partial\lambda} &= \frac{\partial c}{\partial t} + 2\nu\cos\omega\,.\,b, \\ -\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} &= \frac{1}{S\sin\omega}\left(\frac{\partial(b\sin\omega)}{\partial\omega} + \frac{\partial c}{\partial\lambda}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

bei gleicher Bezeichnung wie im ersten Theil. Es sei nur erinnert, dass die Länge λ ostwärts wachsend gezählt wird und

dass ein positives ν zu einem nach Osten rotirenden Sphäroid gehört.

Lösungen der Gleichungen (1) suchen wir in der Form:

$$\left.\begin{aligned} b = \varphi(\omega)\cos(h\lambda+nt), \quad c = \psi(\omega)\sin(h\lambda+nt), \\ \varepsilon = E(\omega)\sin(h\lambda+nt) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

h soll Null oder eine positive ganze Zahl sein. $h = 0$ entspricht der zonalen Classe. Wenn $h = 1$, wollen wir die Bewegungen als solche erster Classe bezeichnen; wenn $h = 2$, als Bewegungen zweiter Classe u. s. f.

Die den Lösungen zugeschriebene Form stellt Wellenbewegungen dar. Ist h von Null verschieden, so hat man es mit wandernden Wellen zu thun, mit westwärts oder ostwärts fortschreitenden, je nachdem n positiv oder negativ ist.

$T = 2\pi/n$ ist die Schwingungsdauer in jedem Punkte der Schale, hT die Umlaufsdauer der Welle.

Als neue Bezeichnungen sollen noch angeführt werden:

$$q = \frac{2\nu}{n}, \quad z = \frac{n^2 S^2}{RT}$$

Diese sind mit den im ersten Theil angewandten Zeichen p und $\varkappa$ verbunden durch die Gleichungen $q = p^{-1/2}$ und:

$$q^2 z = \frac{4\nu^2 S^2}{RT} = \varkappa.$$

Durch die Entwicklungen, welche aus der Annahme (2) folgen, wird man zu Kettenbruchgleichungen $F(\varkappa, q) = 0$ geführt, deren Wurzeln q die bei einem gegebenen Werth von $\varkappa$ möglichen Schwingungsdauern bestimmen. Solcher Gleichungen hat man in jeder Classe zwei, eine für die paren Lösungen, eine andere für die imparen Lösungen. Als pare bezeichnen wir die Bewegungen, für welche der Äquator Symmetrieebene ist.

Jede der erwähnten Kettenbruchgleichungen hat unendlich viele Wurzeln q; die dazu gehörenden Wellen sind als Typus I, II, III... der Classe h bezeichnet.

Die Bewegungsgleichungen gehen durch die Annahmen (2) über in:

$$\left.\begin{array}{c}\frac{RT}{nS}\frac{dE}{d\omega}=\varphi+q\cos\omega.\psi,\quad -\frac{RT}{nS}\frac{hE}{\sin\omega}=q\cos\omega.\varphi+\psi\\ nS.\sin\omega.E+\frac{d(\varphi\sin\omega)}{d\omega}+h\psi=0\end{array}\right\}\quad(3)$$

Setzt man in die letzte dieser Gleichungen den Werth von ψ aus der zweiten ein, so erhält man:

$$E=\frac{nS}{RT}\frac{\sin\omega}{h^2-z\sin^2\omega}\left(\frac{d(\varphi\sin\omega)}{d\omega}-hq\cos\omega.\varphi\right). \qquad (A)$$

Ferner hat man aus (3):

$$\varphi=\frac{RT}{nS}\cdot\frac{\frac{dE}{d\omega}+q\cos\omega\cdot\frac{hE}{\sin\omega}}{1-q^2\cos^2\omega},\quad \psi=-\frac{RT}{nS}\cdot\frac{q\cos\omega\cdot\frac{dE}{d\omega}+\frac{hE}{\sin\omega}}{1-q^2\cos^2\omega}.$$

Die Gleichung für φ kann man auch so schreiben:

$$\sin^{-hq}\omega\frac{d}{d\omega}(\sin^{hq}\omega.E)=\frac{nS}{RT}(1-q^2+q^2\sin^2\omega).\varphi. \qquad (B)$$

Aus *(A)* und *(B)* liesse sich φ oder E eliminiren, wodurch man eine einzige Differentialgleichung erhielte. Doch sind die Gleichungen in der angeführten Form für die Rechnung bequemer.

Es gelingt leicht, Lösungen der Gleichungen *(A)*, *(B)* zu finden, wenn man setzt:

$$\varphi=\cos\omega\,\Sigma a_j\sin^j\omega,\quad E=\frac{nS}{RT}\Sigma A_j\sin^j\omega$$

oder

$$\varphi=\Sigma\mathfrak{a}_j\sin^j\omega,\qquad E=\frac{nS}{RT}\cos\omega\,\Sigma\mathfrak{A}_j\sin^j\omega,$$

wobei j, mit Null beginnend, die Reihe der positiven ganzen Zahlen durchläuft. Die erste Annahme führt zu paren, die andere zu imparen Bewegungen. Es entfallen die ungeraden a_j, $\mathfrak{a}_j$ und die geraden A_j, $\mathfrak{A}_j$, wenn die Classenzahl h ungerade ist, andernfalls die geraden a_j, $\mathfrak{a}_j$ und die ungeraden A_j, $\mathfrak{A}_j$.

Man trennt demnach die Rechnung zweckmässigerweise in vier Theile: Pare und impare Lösungen ungerader und gerader Classen.

Pare Lösungen ungerader Classen. Setzt man die Reihen

$$\varphi = \cos\omega\,(a_0 + a_2\sin^2\omega + \ldots),\quad E = \frac{nS}{RT}(A_1\sin\omega + A_3\sin^3\omega + \ldots)$$

in die Gleichungen *(A)* *(B)* ein, so folgen zwei Systeme von Beziehungen zwischen den Coëfficienten

aus *(A)*	aus *(B)*
$h^2A_1 = (1-hq)a_0$	$(1+hq)A_1 = (1-q^2)a_0$
$h^2A_3 - zA_1 = (3-hq)a_2 - (2-hq)a_0$	$(3+hq)A_3 = (1-q^2)a_2 + q^2a_0$
$h^2A_5 - zA_3 = (5-hq)a_4 - (4-hq)a_2$	$(5+hq)A_5 = (1-q^2)a_4 + q^2a_2$
. . . .	. . . .

und nach Elimination der $A_1, A_3, \ldots$

$$h^2\frac{(1-q^2)a_0}{1+hq} = (1-hq)a_0$$

$$h^2\frac{(1-q^2)a_2+q^2a_0}{3+hq} - z\frac{(1-q^2)a_0}{1+hq} = (3-hq)a_2 - (2-hq)a_0$$

$$h^2\frac{(1-q^2)a_{j+2}+q^2a_j}{j+3+hq} - z\frac{(1-q^2)a_j+q^2a_{j-2}}{j+1+hq} = (j+3-hq)a_{j+2} - (j+2-hq)a_j,$$

$$j = 2, 4, 6\ldots$$

Wenn $h = 1$, ist die erste der Gleichungen eine Identität und a_0 bleibt unbestimmt. Für $h = 3$ ist $a_0 = 0$ und a_2 unbestimmt. Im Allgemeinen ist a_{h-1} der erste Coëfficient, welcher nicht verschwindet. Die erste nicht identische Gleichung gibt eine Relation zwischen a_{h-1} und a_{h+1},

$$\frac{a_{h+1}}{a_{h-1}} = \frac{(h+hq)[(h+1)(h+2)-hq]-(2+h+hq)(1-q^2)z}{2(2+2h)(h+hq)}.$$

Die folgende Gleichung enthält drei Coëfficienten a_{h-1}, a_{h+1}, a_{h+3}, die nächste wieder drei, deren Indices um 2 erhöht sind u. s. f. Die allgemeine Gleichung des Systems bringen wir in die Form

$$\frac{a_j}{a_{j-2}} = \frac{(j+3+hq)q^2z}{N_{j+1} - (j+1+hq)(j+3-h)(j+3+h)\dfrac{a_{j+2}}{a_j}},$$

worin

$$N_{j+1} = (j+1+hq)[(j+2)(j+3)-hq] - (j+3+hq)(1-q^2)z.$$

Ersetzt man a_{j+2}/a_j wieder durch einen Bruch, welcher aus der folgenden Gleichung des Systems berechnet ist und sich von dem vorhergehenden nur durch Erhöhung der Indices um 2 unterscheidet, setzt in diesen auf ähnliche Art den Werth für a_{j+4}/a_{j+2} ein, u. s. f., so erhält man einen unendlichen Kettenbruch.

Das Verhältniss der zwei ersten Coëfficienten ist nun gegeben durch

$$\frac{a_{h+1}}{a_{h-1}} = \cfrac{(h+4+hq)q^2z}{N_{h+2} - \cfrac{Z_{h+4}}{N_{h+4} - \ldots}}.$$

Vergleicht man diesen Werth mit dem vorhin aus der ersten nichtidentischen Gleichung berechneten, so folgt

$$0 = N_h - \cfrac{Z_{h+2}}{N_{h+2} - \cfrac{Z_{h+4}}{N_{h+4} - \ldots}} \qquad (P)$$

wenn man noch die Bezeichnung einführt

$$Z_{j+3} = (j+3-h)(j+3+h)(j+1+hq)(j+5+hq)q^2z.$$

Für die erste Classe $h = 1$ hat man

$$\left.\begin{array}{l|l} N_1 = (1+q)(2.3-q)-(3+q)(1-q^2)z & \\ N_3 = (3+q)(4.5-q)-(5+q)(1-q^2)z & Z_3 = 2.4(1+q)(5+q)q^2z \\ N_5 = (5+q)(6.7-q)-(7+q)(1-q^2)z & Z_5 = 4.6(3+q)(7+q)q^2z \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} (P_1)$$ [1]

Für die dritte Classe $h = 3$

$$\left.\begin{array}{l|l} N_3 = (3+3q)(4.5-3q)-(5+3q)(1-q^2)z & \\ N_5 = (5+3q)(6.7-3q)-(7+3q)(1-q^2)z & Z_5 = 2.8(3+3q)(7+3q)q^2z \\ N_7 = (7+3q)(8.9-3q)-(9+3q)(1-q^2)z & Z_7 = 4.10(5+3q)(9+3q)q^2z \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} (P_3)$$

Ersetzt man z durch $\varkappa . q^{-2}$, so erscheint (P) als die zur Bestimmung von q für einen gegebenen Werth von $\varkappa$ dienende

[1] In N_1 und Z_3 kommt der gemeinschaftliche Factor $1+q$ vor. Die Wurzel $q = -1$ der Gleichung (P, P_1) ist für unsere Aufgabe bedeutungslos. Die Werthe N_1 und Z_3 sind nur der Symmetrie wegen nicht durch $1+q$ dividirt worden.

Gleichung. Hat man eine Wurzel q dieser Gleichung, beispielsweise für $h = 1$ gefunden, so erhält man daraus zunächst die Schwingungsdauer einer Welle erster Classe, man berechnet die Verhältnisse $a_2/a_0, a_4/a_2, \ldots$ hat also φ, dann auch ψ und E, also eine particuläre Lösung der Gleichungen (3).

Pare Lösungen gerader Classen. Mit den Reihen

$$\varphi = \cos\omega(a_1 \sin\omega + a_3 \sin^3\omega + \ldots),\quad E = \frac{nS}{RT}(A_0 + A_2 \sin^2\omega + \ldots)$$

verläuft die Rechnung ganz ähnlich, wie im vorigen Falle. Nur die zonalen Bewegungen $h = 0$ erfordern eine abgesonderte Rechnung. Für alle anderen ist a_{h-1}, beziehungsweise A_h der erste Coëfficient, welcher nicht verschwindet. Das Verhältniss a_j/a_{j-2} ist durch dieselbe Gleichung wie vorhin bestimmt, nun sind für j ungerade Zahlen einzusetzen. Der Quotient der zwei ersten Coëfficienten ist wieder durch zwei Ausdrücke gegeben, woraus zur Bestimmung von Q eine Gleichung der Form (P) folgt, in welcher jetzt $h = 0, 2, 4\ldots$ zu setzen ist.

Für die zonalen Bewegungen wurde die Rechnung im ersten Theil geführt. Doch ist dort die Entwicklung von φ nach Potenzen von $\cos\omega$ vorgenommen. Mit der hier gewählten Form erhält man auch die Kettenbruchgleichung in anderer Gestalt. Dass die neue Gleichung mit (11a) des ersten Theils identisch ist, erweist sich durch die Gleichheit der Wurzeln.

Für $h = 0$ erhält man

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{2.3-(1-q^2)z}{2.4} = \frac{q^2z}{4.5-(1-q^2)z - \cfrac{4.6q^2z}{6.7-(1-q^2)z - \ldots}}$$

$$\left.\begin{array}{ll} N_0 = 2.3-(1-q^2)z & \\ N_2 = 4.5-(1-q^2)z & Z_2 = 2.4q^2z \\ N_4 = 6.7-(1-q^2)z & Z_4 = 4.6q^2z \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (P_0)$$

Für die zweite, vierte... Classe lassen sich die Werthe der N und Z in (P) unmittelbar aus den vorhin für N_{j+1} und Z_{j+3} gegebenen Gleichungen berechnen.

Man hat für $h = 2$

$$\left.\begin{array}{l|l}
N_2 = (2+2q)(3.4-2q)-(4+2q)(1-q^2)z & \\
N_4 = (4+2q)(5.6-2q)-(6+2q)(1-q^2)z & Z_4 = 2.6(2+2q)(6+2q)q^2z \\
N_6 = (6+2q)(7.8-2q)-(8+2q)(1-q^2)z & Z_6 = 4.8(4+2q)(8+2q)q^2z \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots
\end{array}\right\} (P_2).$$

Impare Lösungen ungerader Classen. Aus den Annahmen

$$\varphi = \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_2 \sin^2\omega + \mathfrak{a}_4 \sin^4\omega + \dots,\quad E = \frac{nS}{RT}\cos\omega(\mathfrak{A}_1 \sin\omega + \mathfrak{A}_3 \sin^3\omega + \dots)$$

ergeben sich die Relationen

$$\begin{array}{c|c}
h^2\mathfrak{A}_1 = (1-hq)\mathfrak{a}_0 & (1+hq)\mathfrak{A}_1 = (1-q^2)\mathfrak{a}_0 \\
h^2\mathfrak{A}_3 - z\mathfrak{A}_1 = (3-hq)\mathfrak{a}_2 & (3+hq)\mathfrak{A}_3 - (2+hq)\mathfrak{A}_1 = (1-q^2)\mathfrak{a}_2 + q^2\mathfrak{a}_0 \\
h^2\mathfrak{A}_5 - z\mathfrak{A}_3 = (5-hq)\mathfrak{a}_4 & (5+hq)\mathfrak{A}_5 - (4+hq)\mathfrak{A}_3 = (1-q^2)\mathfrak{a}_4 + q^2\mathfrak{a}_2 \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
\text{aus } (A) & \text{aus } (B)
\end{array}$$

dann durch Elimination der $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_2 \dots$ ein System von Gleichungen zwischen den Coëfficienten $\mathfrak{A}$.

$$(1+hq)\mathfrak{A}_1 = (1-q^2)\frac{h^2\mathfrak{A}_1}{1-hq}$$

$$(3+hq)\mathfrak{A}_3 - (2+hq)\mathfrak{A}_1 = (1-q^2)\frac{h^2\mathfrak{A}_3 - z\mathfrak{A}_1}{3-hq} + q^2\frac{h^2\mathfrak{A}_1}{1-hq}$$

$$(j+2+hq)\mathfrak{A}_{j+2} - (j+1+hq)\mathfrak{A}_j = (1-q^2)\frac{h^2\mathfrak{A}_{j+2} - z\mathfrak{A}_j}{j+2-hq} + q^2\frac{h^2\mathfrak{A}_j - z\mathfrak{A}_{j-2}}{j-hq}$$

$$j = 3, 5, \dots$$

Setzt man noch

$$\mathfrak{N}_j = (j+2-hq)[j(j+1)-hq]-(j-hq)(1-q^2)z,$$

so lässt sich die letzte Gleichung so schreiben:

$$\frac{\mathfrak{A}_j}{\mathfrak{A}_{j-2}} = \frac{(j+2-hq)q^2z}{\mathfrak{N}_j - (j-hq)(j+2-h)(j+2+h)\dfrac{\mathfrak{A}_{j+2}}{\mathfrak{A}_j}},$$

woraus man einen Kettenbruch zur Bestimmung des Verhältnisses zweier aufeinanderfolgender Coëfficienten $\mathfrak{A}$ erhält.

Für $h = 1$ bleibt $\mathfrak{A}_1$ unbestimmt, für $h = 3$ ist $\mathfrak{A}_1 = 0$, $\mathfrak{A}_3$ unbestimmt. Der erste Coëfficient, welcher nicht verschwindet, ist $\mathfrak{A}_h$.

Die Gleichung, in welcher $\mathfrak{A}_h$ und $\mathfrak{A}_{h+2}$ allein vorkommen, bringt man in diese Form

$$\frac{\mathfrak{A}_{h+2}}{\mathfrak{A}_h} = \frac{(h+2-hq)[h(h+1)-hq]-(h-hq)(1-q^2)z}{2(2+2h)(h-hq)}.$$

Aus allen folgenden Gleichungen ergibt sich

$$\frac{\mathfrak{A}_{h+2}}{\mathfrak{A}_h} = \cfrac{(h+4-hq)q^2 z}{\mathfrak{R}_{h+2} - \cfrac{\mathfrak{Z}_{h+4}}{\mathfrak{R}_{h+4} - \dots}}$$

worin

$$\mathfrak{Z}_{j+2} = (j+2-h)(j+2+h)(j-hq)(j+4-hq)q^2 z.$$

Man erhält nun zur Bestimmung von q die Gleichung

$$0 = \mathfrak{R}_h - \cfrac{\mathfrak{Z}_{h+2}}{\mathfrak{R}_{h+2} - \cfrac{\mathfrak{Z}_{h+4}}{\mathfrak{R}_{h+4} - \dots}} \qquad (J)$$

Für die erste Classe, $h = 1$

$$\left.\begin{array}{l|l}
\mathfrak{R}_1 = (3-q)(1.2-q)-(1-q)(1-q^2)z & \\
\mathfrak{R}_3 = (5-q)(3.4-q)-(3-q)(1-q^2)z & \mathfrak{Z}_3 = 2.4(1-q)(5-q)q^2 z \\
\mathfrak{R}_5 = (7-q)(5.6-q)-(5-q)(1-q^2)z & \mathfrak{Z}_5 = 4.6(3-q)(7-q)q^2 z \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots
\end{array}\right\} (J_1)$$

Für die dritte Classe, $h = 3$

$$\left.\begin{array}{l|l}
\mathfrak{R}_3 = (5-3q)(3.4-3q)-(3-3q)(1-q^2)z & \\
\mathfrak{R}_5 = (7-3q)(5.6-3q)-(5-3q)(1-q^2)z & \mathfrak{Z}_5 = 2.8(3-3q)(7-3q)q^2 z \\
\mathfrak{R}_7 = (9-3q)(7.8-3q)-(7-3q)(1-q^2)z & \mathfrak{Z}_7 = 4.10(5-3q)(7-3q)q^2 z \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots
\end{array}\right\} (J_3)$$

Bei den imparen Lösungen erhält man zuerst E und leitet daraus φ und ψ ab.

Impare Lösungen gerader Classen.

$$\varphi = \mathfrak{a}_1 \sin\omega + \mathfrak{a}_3 \sin^3\omega + \dots,\quad E = \frac{nS}{RT}\cos\omega(\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_2 \sin^2\omega + \dots).$$

Die Entwicklung ist ganz ähnlich derjenigen für die ungeraden Classen, nur hat man auch hier die zonale Classe von den übrigen geraden Classen gesondert zu behandeln.

Die Gleichung (J) zur Bestimmung von q hat dieselbe Form wie zuvor.

Man erhält für zonale Bewegungen, $h = 0$, $\mathfrak{A}_0$ unbestimmt

$$\left.\begin{array}{ll} \mathfrak{N}_0 = 1.2-(1-q^2)z & \\ \mathfrak{N}_2 = 3.4-(1-q^2)z & \mathfrak{Z}_2 = 2.4q^2z \\ \mathfrak{N}_4 = 5.6-(1-q^2)z & \mathfrak{Z}_4 = 4.6q^2z \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{array}\right\} \qquad (J_0)$$

für die zweite Classe, $h = 2$, $\mathfrak{A}_0 = 0$, $\mathfrak{A}_2$ unbestimmt

$$\left.\begin{array}{l|l} \mathfrak{N}_2 = (4-2q)(2.3-2q)-(2-2q)(1-q^2)z & \\ \mathfrak{N}_4 = (6-2q)(4.5-2q)-(4-2q)(1-q^2)z & \mathfrak{Z}_4 = 2.6(2-2q)(6-2q)q^2z \\ \mathfrak{N}_6 = (8-2q)(6.7-2q)-(6-2q)(1-q^2)z & \mathfrak{Z}_6 = 4.8(4-2q)(8-2q)q^2z \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \qquad (J_2)$$

Luftbewegungen in der ruhenden Kugelschale. Die einfachen Bewegungsformen, aus denen sich jede Bewegung der Luft in einer ruhenden Schale von constanter Temperatur zusammensetzt, lassen sich, sofern sie Wellen sind, zwar aus den für die rotirende Schale geltenden Gleichungen leicht ableiten, wenn in jeder Gruppe, die aus (A) und (B) entstehenden Beziehungen benützt werden, mit dem Werthe $q = 0$. Man findet sie jedoch ebenso schnell durch directe Rechnung.

Setzt man in (1) $\nu = 0$, und eliminirt dann b und c, so folgt

$$\frac{1}{\sin\omega}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega}\sin\omega\right)+\frac{1}{\sin^2\omega}\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\lambda^2}-\frac{S^2}{RT}\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2}=0.$$

Führt man ferner ein

$$\varepsilon = \mathrm{E}(\omega,\lambda)\sin(nt+\delta), \quad \delta \text{ constant}, \quad \frac{n^2S^2}{RT} = j(j+1),$$

so erhält man

$$\frac{1}{\sin\omega}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial\omega}\sin\omega\right)+\frac{1}{\sin^2\omega}\frac{\partial^2\mathrm{E}}{\partial\lambda^2}+j(j+1)\mathrm{E}=0,$$

die Gleichung der Kugelflächenfunctionen; wenn man die Lösungen auf die ganze Kugelfläche zu erstrecken wünscht, nimmt man die j als ganze positive Zahlen an.

Mit dem Werthe

$$\mathrm{E}(\omega,\lambda) = E(\omega)\sin(h\lambda+\zeta), \quad \zeta \text{ constant},$$

worin auch h wieder als ganze positive Zahl (oder Null) zu nehmen ist, geht die letzte Differentialgleichung über in

$$\frac{1}{\sin\omega}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{dE}{d\omega}\sin\omega\right)-\frac{h^2E}{\sin^2\omega}+j(j+1)E=0.$$

Vermöge aller Substitutionen und des Umstandes, dass eine lineare Function möglicher Lösungen wieder eine Lösung gibt, können wir schreiben

$$\varepsilon = E(\omega)\sin(h\lambda \pm nt) \quad \text{oder} \quad \varepsilon = E(\omega)\sin h\lambda.\sin nt.$$

Die erste Form stellt eine ostwärts oder westwärts wandernde Welle dar, die andere eine stehende Schwingung.

Will man nicht für E oder E unmittelbar die aus den Entwicklungen der Kugelfunctionen bekannten Formen anschreiben so kann man setzen

$$\frac{RT}{nS}E(\omega) = A_0 + A_1\sin\omega + A_2\sin^2\omega + \dots \quad \text{(pare Lösungen)}$$

oder

$$\frac{RT}{nS}E(\omega) = \cos\omega(\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1\sin\omega + \mathfrak{A}_2\sin^2\omega + \dots \quad \text{(impare Lösungen)}$$

und von jeder dieser Reihen bleiben nur gerade oder ungerade Glieder, je nachdem die Classenzahl h gerade oder ungerade ist.

$h^2A_0 = 0$	$(1-h^2)A_1 = 0$
$(2^2-h^2)A_2 + j(j+1)A_0 = 0$	$(3^2-h^2)A_3 + [j(j+1)-1.2]A_1 = 0$
$(4^2-h^2)A_4 + [j(j+1)-2.3]A_2 = 0$	$(5^2-h^2)A_5 + [j(j+1)-3.4]A_3 = 0$
. . . .	. . . .

$-h^2\mathfrak{A}_0 = 0$	$(1-h^2)\mathfrak{A}_1 = 0$
$(2^2-h^2)\mathfrak{A}_2 + [j(j+1)-1.2]\mathfrak{A}_0 = 0$	$(3^2-h^2)\mathfrak{A}_3 + [j(j+1)-2.3]\mathfrak{A}_1 = 0$
$(4^2-h^2)\mathfrak{A}_4 + [j(j+1)-3.4]\mathfrak{A}_2 = 0$	$(5^2-h^2)\mathfrak{A}_5 + [j(j+1)-4.5]\mathfrak{A}_3 = 0$
. . . .	. . . .

Der erste von Null verschiedene Coëfficient ist in jedem Falle A_h, beziehungsweise $\mathfrak{A}_h$. Wenn h gerade ist, so muss man für die paren Lösungen auch j als gerade Zahl nehmen, bei den imparen zu geraden h ungerade j. Die Reihen bleiben immer

endlich und haben im ersten Fall $^1/_2(j-h)+1$, im andern Fall $^1/_2(j+1-h)$ Glieder.

Einige Lösungen, die man zum Vergleich mit den analogen für die rotirende Schale brauchen wird, will ich anführen.

Nimmt man

$$\varepsilon = \frac{nS}{RT} E(\omega) \sin(h\lambda + nt),$$

so folgt aus den Bewegungsgleichungen (1) für die ruhende Schale ($\nu = 0$)

$$b = \frac{dE}{d\omega} \cos(h\lambda + nt), \quad c = -\frac{hE}{\sin\omega} \sin(h\lambda + nt).$$

Die Schwingungsdauer ist

$$T = \frac{2\pi}{n} = \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}} \cdot \frac{2\pi S}{\sqrt{RT}}.$$

Wellen erster Classe, $h = 1$

[1] $j = 1$, $\varepsilon = A_1 \sin\omega \sin(\lambda + nt)$, $nS = \sqrt{1.2RT}$

[2] $j = 3$, $\varepsilon = A_1(\sin\omega - \frac{5}{4}\sin^3\omega)\sin(\lambda + nt)$, $nS = \sqrt{3.4RT}$

. . . .

[3] $j = 2$, $\varepsilon = \mathfrak{A}_1 \cos\omega \sin\omega \sin(\lambda + nt)$, $nS = \sqrt{2.3RT}$

$j = 4$, $\varepsilon = \mathfrak{A}_1 \cos\omega(\sin\omega - \frac{7}{4}\sin^3\omega)\sin(\lambda + nt)$, $nS = \sqrt{4.5RT}$

Wellen der zweiten Classe, $h = 2$

$j = 2$, $\varepsilon = A_2 \sin^2\omega \sin(2\lambda + nt)$, $nS = \sqrt{2.3RT}$

$j = 4$, $\varepsilon = A_2(\sin^2\omega - \frac{7}{6}\sin^4\omega)\sin(2\lambda + nt)$, $nS = \sqrt{4.5RT}$

. . . .

$j = 3$, $\varepsilon = \mathfrak{A}_2 \cos\omega \sin^2\omega \sin(2\lambda + nt)$, $nS = \sqrt{3.4RT}$

$j = 5$, $\varepsilon = \mathfrak{A}_2 \cos\omega(\sin^2\omega - \frac{3}{2}\sin^4\omega)\sin(2\lambda + nt)$, $nS = \sqrt{5.6RT}$

---

[1] Fig. 5.

[2] Fig. 6.

[3] Fig. 7.

Es hat keine Schwierigkeit, die Lösung für jeden Typus irgend einer Classe zu finden.[1] Aber die so dargestellten einfachen Bewegungen genügen nicht, um eine aus gegebenen Anfangsbedingungen entstehende Bewegung im reibungslosen System der ruhenden Schale darzustellen. Es kommen noch diejenigen Lösungen hinzu, welche zu stationären Bewegungen gehören, nämlich

$$\varepsilon = 0, \quad b = \Phi(\omega, \lambda), \quad c = \Psi(\omega, \lambda),$$

wobei Φ und Ψ nur durch die Continuitätsgleichung gebunden sind

$$\frac{\partial(\Phi \sin\omega)}{\partial\omega} + \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda} = 0.$$

Eine der Functionen bleibt willkürlich. Wir wollen auch die stätionären Bewegungen in Classen eintheilen, indem wir setzen

$$\Phi(\omega,\lambda) = \Phi^{(0)}(\omega) + \Phi^{(1)}(\omega)\cos\lambda + \Phi_1(\omega)\sin\lambda + \Phi^{(2)}(\omega)\cos 2\lambda + \ldots$$

womit statt der willkürlichen Function zweier Veränderlichen eine Reihe willkürlicher Functionen von ω eingeführt wird.

Wenn nun Druck und Geschwindigkeit für die Zeit $t = 0$ als Functionen von ω, λ gegeben sind, so werden sich die Amplituden und Phasen der einzelnen Wellen, ferner die $\Phi(\omega)$ den Anfangsbedingungen gemäss bestimmen lassen. Obgleich man zu diesem Zwecke eine Menge von Formeln anschreiben muss, welche in der Folge keine Anwendung finden, soll doch der Weg, auf welchem die Bestimmung zu geschehen hat, deutlich bezeichnet werden.

[Der Beweis dafür, dass sich jede Luftbewegung in der rotirenden Schale aus den Elementarformen zusammensetzt, für welche die Gleichungen vorhin abgeleitet wurden, beruht auf dieser Überlegung: Jede in der rotirenden Schale mögliche Bewegung muss, wenn man die Rotationsgeschwindigkeit stufenweise herabsetzt, auf eine analoge Bewegung in der ruhenden Schale übergeführt werden. Hat man also alle

---

[1] Lord **Rayleigh**, Theorie des Schalles (Braunschweig 1880). Bd. 2, Cap. 18.

elementaren Bewegungsformen für den Fall $\nu = 0$ gefunden, und kann man zeigen, wie sie sich ändern, wenn ν zu einem gegebenen Werth ansteigt, so ist man sicher, alle einfachen Formen beschrieben oder angedeutet zu haben, aus denen sich jedwede Bewegung in der rotirenden Schale zusammensetzen lässt.]

Wenn ε für $t = 0$ als Function von ω, λ gegeben ist, kann man es folgendermassen zerlegen

$$\varepsilon = e^{(0)}(\omega) + e^{(1)}(\omega)\cos\lambda + e_1(\omega)\sin\lambda + e^{(2)}(\omega)\cos 2\lambda + \ldots$$

Ähnlich verfährt man mit den Anfangswerthen von b, c. Wären die von λ freien Glieder allein vorhanden, so entstünde eine zonale Bewegung. Aus den Gliedern, welche $\cos\lambda$ und $\sin\lambda$ enthalten, eine Bewegung erster Classe, aus den zunächst folgenden eine Bewegung zweiter Classe u. s. f.

Man wird also die einzelnen Classen gesondert behandeln können. Es sei gegeben für $t = 0$

$$\varepsilon = e_1(\omega)\sin\lambda + e^{(1)}(\omega)\cos\lambda,$$
$$b = f_1(\omega)\sin\lambda + f^{(1)}(\omega)\cos\lambda, \quad c = g_1(\omega)\sin\lambda + g^{(1)}(\omega)\cos\lambda.$$

Dann wird für jeden folgenden Theil die Druckvertheilung und die Bewegung der Luft in der ruhenden Schale dargestellt sein durch

$$\varepsilon = \sum (A_j \sin\xi_j + B_j \sin\zeta_j) E_j(\omega)$$
$$b = \frac{RT}{S}\sum\left(\frac{A_j}{n_j}\cos\xi_j - \frac{B_j}{n_j}\cos\zeta_j\right)\frac{dE_j}{d\omega} + \Phi^{(1)}(\omega)\cos\lambda + \Phi_1(\omega)\sin\lambda$$
$$c = \frac{RT}{S}\sum\left(-\frac{A_j}{n_j}\sin\xi_j + \frac{B_j}{n_j}\sin\zeta_j\right)\frac{E_j}{\sin\omega}$$
$$+\frac{d(\Phi_1\sin\omega)}{d\omega}\cos\lambda - \frac{d(\Phi^{(1)}\sin\omega)}{d\omega}\sin\lambda$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist

$$\xi_j = \lambda + n_j t + \delta_j, \quad \zeta_j = \lambda - n_j t + \vartheta_j.$$

Die $E_j(\omega)$ sind die zur ersten Classe gehörenden, vorhin abgeleiteten Functionen, also mit dem Factor $\sin\lambda$ oder $\cos\lambda$ versehen, Kugelflächenfunctionen.

Zur Bestimmung der Constanten A_j, B_j, δ_j, ϑ_j und der Functionen $\Phi^{(1)}$, Φ_1 dienen sechs Gleichungen, von denen wir nur drei notiren

$$e_1(\omega) = \sum (A_j \cos \delta_j + B_j \cos \vartheta_j) E_j(\omega)$$

$$f_1(\omega) = \frac{RT}{S} \sum \left(-\frac{A_j}{n_j} \sin \delta_j + \frac{B_j}{n_j} \sin \vartheta_j \right) \frac{dE_j}{d\omega} + \Phi_1(\omega)$$

$$g_1(\omega) = \frac{RT}{S} \sum \left(-\frac{A_j}{n_j} \cos \delta_j + \frac{B_j}{n_j} \cos \vartheta_j \right) \frac{E_j}{\sin \omega} - \frac{d(\Phi^{(1)} \sin \omega)}{d\omega}$$

Man hat vier unendliche Reihen von Constanten und zwei willkürliche Functionen zur Darstellung der sechs gegebenen Functionen von ω. Φ_1 und $\Phi^{(1)}$ kann man noch in eine Summe von Functionen zerlegen, welche aus Kugelfunctionen so abgeleitet sind, wie die Werthe $dE_j/d\omega$, d. h. man kann die stationären Bewegungen der ersten Classe nach Typen zerlegen, statt der zwei willkürlichen Functionen unendlich viele Functionen von gegebener Form, jedoch mit zwei Reihen unbestimmter Constanten einführen und danach die Bestimmung aller Constanten mittels des Laplace'schen Verfahrens durchführen.

In ganz gleicher Weise ist die Aufgabe für die zweite und jede folgende Classe, also auch für den allgemeinsten Fall, zu lösen.

Die Figuren 5, 6, 7, 8 stellen Bewegungen der ersten Classe in der ruhenden Kugelschale dar, wobei die Kugel in Mercator's Projection gezeichnet ist. Die drei ersten gelten für westwärts wandernde Wellen. Man braucht nur das Blatt von oben nach unten zu kehren, um die entsprechenden Figuren für ostwärts fortschreitende Wellen zu sehen. Die Curven Fig. 5, 6, 7 stellen Linien gleichen Druckes dar; die beigeschriebenen Zahlen geben den Druck $p_0(1+\varepsilon)$ an, wenn der mittlere Druck p_0 mit 1000 bezeichnet ist. Die kleinen Pfeile bezeichnen die Windrichtung, die daneben eingeklammerten Zahlen die Windgeschwindigkeit ($m \cdot \sec^{-1}$). Die unten angeführte Umlaufsdauer gilt für eine Schale von der Grösse der Erde und für trockene Luft von der absoluten Temperatur 273°.

Die Curven in Fig. 8, welche eine stationäre Bewegung bei constantem Druck darstellt, sind Strömungslinien.

7. Reibungsloses System. Beispiele von Wellen erster und zweiter Classe in der rotirenden Schale.

Wir wollen zunächst die paren Lösungen der ersten Classe für Sphäroide von verschiedener Rotationsgeschwindigkeit ν berechnen und die Rechnung an diejenige für die ruhende Schale anschliessen. Der mittlere Radius der Schale S, die Gasconstante R und die Temperatur T sollen in allen Fällen gleich angenommen werden, nur ν bestimmt den Werth von $\varkappa$. Für die folgenden Beispiele ist

$$2\pi S = 4.10^7\, m \qquad RT = 287.273\, m^2 \sec^{-2}$$

gesetzt.

Die erste Aufgabe ist die Berechnung der Wurzeln q, z aus der Gleichung (P) mit den Werthen (P_1). Für die ruhende Schale $q = 0$ wurde gefunden $z = 1.2$ Typus I, $z = 3.4$ Typus II,... Geht man zu einer langsam rotirenden Schale über, so wird man eine sehr wenig verschiedene Umlaufsdauer der Welle, also einen wenig veränderten Werth von $z = n^2 S^2/(RT)$ bei einem kleinen Werth von q zu erwarten haben. Man kann zuerst für den Typus I zu einem kleinen q den zugehörigen Werth von z aus (P, P_1) in der Nähe von 2 durch Versuche finden, für den Typus II in der Nähe von 12. Oder man kann sich auch eines Näherungsverfahrens bedienen, ähnlich dem im ersten Theil beschriebenen. (Genauere Angaben über das Näherungsverfahren im folgenden Abschnitt.) — Da S, R, T gegeben sind, so bestimmen sich aus q und z die Werthe von ν und n, also die Rotationsdauer der Schale und die Umlaufsdauer der Welle. Diese geben wir im folgenden immer in Stunden an.

$$\frac{1}{60.60}\,\frac{2\pi}{\nu} \quad \text{und} \quad h \cdot \frac{1}{60.60}\,\frac{2\pi}{n}.$$

Haben wir erst für einen kleinen Werth q das zugehörige z gefunden, so gehen wir stufenweise zu grösseren Werthen der Rotationsgeschwindigkeit über. So ist der Theil *A)* der folgenden Tabelle berechnet für positive q, also für westwärts fortschreitende Wellen der ersten Classe.

Bei allen Typen dieser westwärts wandernden Wellen nimmt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit wachsender Rotations-

geschwindigkeit der Schale zu. Es ändert sich aber nicht nur die Umlaufsdauer der Welle, sondern auch die Druckvertheilung und das Windsystem mit dem Werthe von ν. Das System, welches für die ruhende Schale eine einfache Bewegungsform, eine unveränderliche fortschreitende Welle darstellt, ist für eine rotirende Schale schon eine sehr complicirte Form, welche in eine unendliche Zahl von Wellen zerfällt, deren jede mit einer anderen Geschwindigkeit wandert.

Sehr auffallend tritt dies hervor, wenn man die allereinfachste Welle Typus I par der ersten Classe verfolgt von $\nu = 0$ bis zu dem Werthe ν, welcher einer Rotationsdauer der Schale von 24 Stunden angehört. In der ruhenden Schale ist die Welle so beschaffen, dass zu jeder Zeit auf einer Halbkugel der Druck über dem Mittelwerth, auf der andern unter demselben liegt; es gibt nur ein Druckmaximum und ein Minimum und die Extreme fallen in diametrale Punkte des Äquators. In einer langsam rotirenden Schale wird die Druckvertheilung noch nicht viel geändert, aber wenn ν zu dem angeführten Werthe gewachsen ist, hat $E(\omega)$ ein Maximum und zwei Minima; auf jener Sphäroidhälfte, wo am Äquator der Druck über dem Mittel ist, haben die höheren Breiten Druck unter dem Mittel. Die Parallelkreise von 47° Breite sind Linien mittleren Druckes. Betrachtet man die Fig. 9, so möchte man meinen, dass sie eine Bewegung vom Typus II darstellt.

Um in jedem einzelnen Falle die Form der Wellen und das Windsystem kennen zu lernen, muss man die Formeln für φ, ψ, E ausrechnen, dann die Zahlenwerthe dieser Grössen für mehrere ω, schliesslich b, c, [illegible] für mehrere Werthepaare ω, λ.

Ebenso wie die positven q für die westwärts fortschreitenden Wellen rechnet man die negativen Wurzeln q, welche für ostwärts wandernde Wellen gelten, zu einem gegebenen Werthe von $\varkappa$ aus der Gleichung (P, P_1). (Man vergleiche Theil B) der Tabelle.)

Innerhalb der Grenzen der Tabelle nimmt die Umlaufsdauer dieser Wellen Typus I mit wachsender Rotationsgeschwindigkeit zu. Es scheint, dass in allen Typen der östlichen Wellen die Umlaufsdauer anfangs (bei kleinem $\varkappa$) zunimmt, dann wieder abnimmt. Im zweiten Typus tritt dies deutlicher hervor.

Pare Wellen erster Classe.[1]

x	Rotations-dauer der Schale (Stunden)	A) Westwärts wandernde Wellen erster Art			B) Ostwärts wandernde Wellen			C) Westwärts wandernde Wellen zweiter Art		
		$q = \frac{2\nu}{n}$	$z = \frac{n^2 S^2}{RT}$	Umlaufs-dauer der Welle (Stunden)	q	z	Umlaufs-dauer der Welle (Stunden)	q	z	Umlaufs-dauer der Welle (Stunden)
Typus I.										
0	∞	0	2·000	28·07	0	2·000	28·07	6·000	0	∞
0·1	251·0	0·2107	2·2504	26·45	—0·2356	1·802	29·57	6·055	0·002728	760·0
0·2	177·5	0·2902	2·375	25·76	—0·3395	1·735	30·13	.	.	.
1·0	79·38	0 574	3·035	22·78	—0·812	1·517	32·23	.	.	.
1·905	57·52	.	.	.	.	.	.	7·000	0·03887	201·3
2·0	56·13	0·737	3·682	20·68	—1·191	1·410	33·43	.	.	.
5·0	35·50	0·965	5·369	17·13	—1·985	1·269	35·23	.	.	.
10·0	25·10	1·135	7·76	14·25	.	.	.	.	.	.
10·94	**24·00**	**1·156**	**8·187**	**13·87** [2]	**—3·047**	**1·178**	**36·57** [3]	**10·89**	**0·09225**	**180·7** [4]
13·06	21·97	1·200	9·07	13·18	.	.	.	.	.	.

Typus II.

0	∞	0	12·000	11·46	0	12·000	11·46	20·00	0	∞
0·1	251·0	0·09075	12·142	11·39	—0·09149	11·947	11·48	.	.	.
1·0	79·38	0·280	12·75	11·12	—0·2872	12·124	11·40	.	.	.
5·0	35·50	0·575	15·10	10·21	—0·613	13·3	10·88	.	.	.
10·94	24·00	0·7686	18·52	9·22	—0·8518	15·09	10·22	25·79	0·01645	309·5

Typus III.

0	∞	0	30·0	7·25	0	30·0	7·25	42·0	0	∞
10·94	24·00	0·553	35·8	6·63	—0·564	34·4	6·77	47·68	0·004812	572·2

[1] q, z Wurzelpaare der Gleichung (P, P_1)

[2] Fig. 9.

[3] Fig. 10.

[4] Fig. 11.

Bei sehr geringer Rotationsgeschwindigkeit der Schale wird die Form der Wellen nur sehr wenig von derjenigen in der ruhenden Schale verschieden. Man darf erwarten, dass die der Rotationsrichtung entgegen wandernden Wellen eine kleinere, die in der Rotationsrichtung fortschreitenden eine grössere Umlaufsdauer haben. Könnte die Welle Typus I in einer Schale von der Rotationsdauer 251 Stunden noch die gleiche absolute Umlaufsdauer behalten wie bei $\nu = 0$, nämlich 28·07 Stunden, so wäre die relative Umlaufsdauer der westwärts wandernden Welle 25·25, die der ostwärts wandernden 31·60 Stunden. Statt dessen findet man 26·45 und 29·57 Stunden.

Wenn ν zu grösseren Werthen anwächst, so wird die Form der Welle eine ganz andere, und es lässt sich ohne Berechnung der Wurzeln q auch nicht annäherungsweise voraussehen, wie sich die Umlaufsdauer ändert.

Für einen gegebenen Werth von $\varkappa$ ist bei negativem q das zum Typus I gehörende q die absolut grösste Wurzel der Gleichung (P, P_1). Für $\varkappa = 10 \cdot 94$ ist es $q = -3 \cdot 047$. Man kann mit dem $\varkappa$ unendlich viele kleinere q finden, die zu den folgenden Typen parer östlicher Wellen gehören, aber kein grösseres negatives q. Anders bei den positiven q. Hier ist bei $\varkappa = 10 \cdot 94$ das dem Typus I angehörende $q = 1 \cdot 156$ nicht die grösste Wurzel von (P, P_1), sondern es gibt noch unendlich viele grössere, so $q = 10 \cdot 89, 25 \cdot 79, 47 \cdot 68, \ldots$. Man überzeugt sich leicht davon, dass diese Wurzeln zu Wellen gehören, welche aus den stationären Bewegungen der ruhenden Schale hervorgehen. Wir wollen sie als westwärts wandernde Wellen zweiter Art bezeichnen.

Könnte eine solche Welle Typus I in der Schale von der Rotationsdauer 251 Stunden dieselbe absolute Umlaufsdauer haben wie die analoge Bewegung in der ruhenden Schale, nämlich eine unendlich grosse, so wäre die relative Umlaufsdauer 251 Stunden. Man findet sie jedoch dreimal so gross. Diese Wellen unterscheiden sich von den übrigen nicht allein durch die sehr grosse Umlaufsdauer, sondern auch durch die Art, wie sich diese Dauer mit dem Typus ändert. Während alle änderen Wellen desto schneller fortschreiten, je höher bei

gegebener Classe der Typus (d. h. je grösser die Zahl der Mitteldrucklinien, welche mit Breitekreisen zusammenfallen), verhalten sich die Wellen zweiter Art umgekehrt.

Zur Auffindung der vollständigen paren Lösungen erster Classe der Gleichungen (1), beziehungsweise der Gleichungen (3), dienen, wenn die zu $\varkappa$ gehörenden q bekannt sind, die Formeln

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi = \cos\omega(a_0 + a_2 \sin^2\omega + \ldots), \quad \psi = \alpha_0 + \alpha_2 \sin^2\omega + \ldots, \\
&E = \frac{nS}{RT}(A_1 \sin\omega + A_3 \sin^3\omega + \ldots), \quad a_0 \text{ willkürlich}, \\
&\frac{a_2}{a_0} = \frac{(5+q)\varkappa}{X_3 - \cfrac{Z_5}{X_5 - \ldots}}, \quad \frac{a_4}{a_2} = \frac{(7+q)\varkappa}{X_5 - \cfrac{Z_7}{X_7 - \ldots}}, \quad \ldots [X, Z \text{ aus } (P_1)] \\
&\alpha_0 = -a_0, \quad \alpha_2 = -\frac{3q(a_2 - a_0) + a_2}{3+q}, \quad \alpha_4 = -\frac{5q(a_4 - a_2) + a_4}{5+q}, \ldots \\
&A_1 = \frac{(1-q^2)a_0}{1+q}, \quad A_3 = \frac{(1-q^2)a_2 + q^2 a_0}{3+q}, \quad A_5 = \frac{(1-q^2)a_4 + q^2 a_2}{5+q}, \ldots
\end{aligned}\right\} (p_1)$$

Danach kann man für alle Fälle, in denen vorhin q angegeben wurde, die Druckvertheilung und das Windsystem berechnen. Sowohl die Anführung der φ, ψ, E für viele Einzelfälle, als auch deren Zusammenstellung in tabellarischer Form würde zu grossen Raum einnehmen. Ich habe es darum vorgezogen, durch graphische Darstellung einige Formen der Wellen vorzuführen.

Die Figuren 9, 10, 11 stellen die paren Wellen erster Classe Typus I in einer reibungslosen Schale von der Rotationsdauer 24 Stunden dar. Man vergleiche sie mit den analogen Figuren 5 und 8, welche die entsprechenden Bewegungen in der ruhenden Schale darstellen.

Nur in einem Fall halte ich es für nützlich, die Formeln vollständig hierherzusetzen, damit die Änderung der Lösungen anschaulich werde, welche eintritt, wenn man von der ruhenden Schale zu einer sehr langsam rotirenden übergeht. In den folgenden Formeln sind die drei Arten von Wellen Typus I der ersten Classe par für $\varkappa = 0$ und $\varkappa = 0{\cdot}1$ nebeneinander gestellt.

Pare Wellen erster Classe Typus I in der ruhenden Schale und in einer Schale von der Rotationsdauer 251 Stunden.

Westliche Wellen erster Art.

$\varkappa = 0,\quad \varphi = a_0 \cos\omega,\quad \psi = -a_0,\quad 10^3 E = a_0 . 5{\cdot}052 \sin\omega,\quad \mathrm{T} = 28{\cdot}07$ St.

$\varkappa = 0{\cdot}1 \begin{cases} \varphi = a_0 \cos\omega (1 + 0{\cdot}010012 \sin^2\omega + 0{\cdot}000036 \sin^4\omega), \\ \psi = a_0 (-1 + 0{\cdot}1918 \sin^2\omega + 0{\cdot}0020 \sin^4\omega) \\ 10^3 E = a_0 (4{\cdot}232 \sin\omega + 0{\cdot}090 \sin^3\omega),\quad \mathrm{T} = 26{\cdot}45 \text{ Stunden.} \end{cases}$

Östliche Wellen.

$\varkappa = 0,\quad \varphi = a_0 \cos\omega,\quad \psi = -a_0,\quad 10^3 E = -a_0\, 5{\cdot}052 \sin\omega,\quad \mathrm{T} = 28{\cdot}07$ St.

$\varkappa = 0{\cdot}1 \begin{cases} \varphi = a_0 \cos\omega (1 + 0{\cdot}010010 \sin^2\omega + 0{\cdot}000036 \sin^4\omega) \\ \psi = a_0 (-1 - 0{\cdot}2561 \sin^2\omega - 0{\cdot}0025 \sin^4\omega) \\ 10^3 E = -a_0 (5{\cdot}926 \sin\omega + 0{\cdot}113 \sin^3\omega + 0{\cdot}001 \sin^5\omega),\quad \mathrm{T} = 29{\cdot}57 \text{ Stunden.} \end{cases}$

Stationäre Bewegung,[1] bez. westliche Welle zweiter Art.

$\varkappa = 0,\quad \varphi = a_0 \cos\omega,\quad \psi = a_0 (-1 + 2 \sin^2\omega),\quad E = 0,\quad \mathrm{T} = \infty$

$\varkappa = 0{\cdot}1 \begin{cases} \varphi = a_0 \cos\omega (1 + 0{\cdot}008730 \sin^2\omega + 0{\cdot}000029 \sin^4\omega) \\ \psi = a_0 (-1 + 1{\cdot}9875 \sin^2\omega + 0{\cdot}0238 \sin^4\omega) \\ 10^3 E = a_0 (0{\cdot}9432 \sin\omega + 0{\cdot}7491 \sin^3\omega + 0{\cdot}0054 \sin^5\omega),\quad \mathrm{T} = 760{\cdot}0 \text{ Stunden.} \end{cases}$

Wir haben nun eine Übersicht aller paren Bewegungen erster Classe in der rotirenden Schale. Der Überblick über die Rechnung wird noch vollständiger, wenn man in der Gleichung (P, P_1) z als Function von q auffasst. Lässt man q alle positiven und negativen Werthe durchlaufen, so bilden die zugehörigen z eines jeden Typus eine zusammenhängende Reihe von Werthen. Wenn man die q als Abscissen, die z des Typus I als Ordinaten aufträgt, so erhält man für die negativen und positiven q eine stetig verlaufende Curve; diese reicht von $q = -\infty$ bis etwa $q = 1{\cdot}5$ und gehört zu den östlichen und westlichen Wellen erster Art, für Schalen von jeder Rotationsgeschwindigkeit von

[1] Fig. 8.

Null bis ∞; in der Nähe des angegebenen q wird z unendlich gross und geht zu einem unendlichen negativen Werth über; dann nimmt z ab, bleibt aber negativ, bis es bei $q = 6$ durch Null hindurchgeht. Für grössere q hat z durchwegs positive Werthe, welche zu den Wellen zweiter Art Typus I gehören. Ähnlich verlaufen die Curven für die anderen Typen. Die negativen z bei reellem q haben keine Bedeutung für unsere Aufgabe. Sie würden nämlich ein imaginäres ν fordern.

Für impare Wellen erster Classe, Gleichung (J, J_1) habe ich nur zu Typus I die Wurzelpaare q, z berechnet, welche zu $\varkappa = 0 \cdot 1$ gehören. Für die westwärts wandernde Welle erster Art $q = 0 \cdot 1273$, $z = 6 \cdot 171$, Umlaufsdauer der Welle $15 \cdot 98$ Stunden; für die östliche Welle $q = -0 \cdot 13012$, $z = 5 \cdot 906$, Umlaufsdauer $16 \cdot 33$ Stunden; für die westliche zweiter Art $q = 2 \cdot 007$, $z = 0 \cdot 02483$, Umlaufsdauer $251 \cdot 9$ Stunden, beinahe gleich der Rotationsdauer der Schale. Auf ein im Raume festes Coordinatensystem bezogen, würde sich die letztgenannte Bewegung als nahezu stationär erweisen.

Für eine ruhende Schale ist in den entsprechenden Fällen die Umlaufsdauer $16 \cdot 20$ Stunden $(q = 0, z = 6)$, beziehungsweise $\infty . (q = 2, z = 0)$.

Die Bewegungen erster Classe sind die einzigen, bei denen Wind an den Polen anzutreffen ist. In der zonalen Classe erscheinen die Pole als Knoten, in der zweiten und in jeder folgenden Classe kann schon wegen des Umstandes, dass mehrere Richtungen am Pol gleiche Bedeutung haben, ein Wind nicht vorkommen. Nur in der ersten Classe gibt es am Pole eine einzige bevorzugte Richtung, in der Linie mittleren Druckes.

Ich habe auch für die zweite Classe pare Wellen, Gleichung (P, P_2), einige Rechnungen ausgeführt, jedoch nur für den Typus I. Beachtenswerth ist es, dass für $\varkappa = 10 \cdot 94$ die westlichen Wellen erster und zweiter Art hier eine viel grössere, die ostwärts fortschreitenden beinahe gleiche Umlaufsdauer haben wie die entsprechenden Typen I der ersten Classe. Eine Welle der zweiten Classe, die westliche zweiter Art, ist in Fig. 12 dargestellt.

Pare Wellen zweiter Classe,[1] Typus I.

$\varkappa$	Rotations-dauer der Schale (Stunden)	$q = \frac{2\nu}{n}$	$z = \frac{n^2 S^2}{RT}$	Schwingungsdauer	Umlaufsdauer der Welle
				Stunden	
A) **Westwärts wandernde Wellen erster Art.**					
0	∞	0	6·000	16·20	32·4
0·2586	156·1	0·2	6·465	15·61	31·2
10·94	**24·00**	**0·9944**	**11·06**	**11·94**	**23·9**
11·13	23·79	1·0	11·13	11·90	23·8
B) **Ostwärts wandernde Wellen.**					
0	∞	0	6·000	16·20	32·4
0·2260	167·0	—0·2	5·651	16·70	33·4
1·318	69·15	—0·5	5·274	17·28	34·6
4·880	35·93	—1·0	4·880	17·97	35·9
10·48	24·52	—1·5	4·66	18·39	36·8
10·94	**24·00**	**—1·535**	**4·643**	**18·42**	**36·8**
C) **Westwärts wandernde Wellen zweiter Art.**					
0	∞	6·0	0	∞	∞
0·5562	106·4	6·1	0·01495	324·6	649·2
8·921	26·58	7·5	0·1586	99·67	199·3
10·94	**24·00**	**7·811**	**0·1798**	**93·74**	**187·5** [2]

[1] q, z Wurzelpaare der Gleichung (P, P_2).

[2] Fig. 12.

8. Reibung. Erlöschende wandernde Wellen in der rotirenden Schale.

Nimmt man an, dass die Luft in der rotirenden Schale eine der relativen Geschwindigkeit proportionale Reibung erfährt, so sind die Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} -\frac{RT}{S}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega} &= \frac{\partial b}{\partial t} + lb - 2\nu\cos\omega . c, \\ -\frac{RT}{S}\frac{\partial\varepsilon}{\sin\omega\partial\lambda} &= \frac{\partial c}{\partial t} + lc + 2\nu\cos\omega . b \\ -\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} &= \frac{1}{S\sin\omega}\left(\frac{\partial(b\sin\omega)}{\partial\omega} + \frac{\partial c}{\partial\lambda}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Die Reibungsconstante l ist im dritten Abschnitt definirt. Als neue Bezeichnungen werden eingeführt ($i = \sqrt{-1}$)

$$n - li = r, \quad \frac{2\nu}{r} = q, \quad \frac{nrS^2}{RT} = z,$$

so dass q und r für $l = 0$ dieselbe Bedeutung haben, welche ihnen im reibungslosen System gegeben wurde. Wir setzen

$$b = ie^{i(h\lambda+nt)}\varphi(\omega), \quad c = e^{i(h\lambda+nt)}\psi(\omega), \quad \varepsilon = e^{i(h\lambda+nt)}E(\omega), \qquad (5)$$

worin h eine positive ganze Zahl (oder Null für zonale Bewegungen) sein soll. n, φ, ψ, E werden im Allgemeinen complexe Grössen sein; die reellen Theile von b, c, ε und die Factoren von i werden zwei Lösungen der Bewegungsgleichungen darstellen, welche sich nur in der Phase unterscheiden.

Man erhält zunächst

$$\left.\begin{aligned} \frac{RT}{rS}\frac{dE}{d\omega} = \varphi + q\cos\omega . \psi, \quad -\frac{RT}{rS}\frac{hE}{\sin\omega} = q\cos\omega . \varphi + \psi \\ nS\sin\omega . E + \frac{d(\varphi\sin\omega)}{d\omega} + h\psi = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

daraus ebenso wie im sechsten Abschnitt zwei Beziehungen zwischen φ, E

$$E = \frac{rS}{RT}\frac{\sin\omega}{h^2 - z\sin^2\omega}\left(\frac{d(\varphi\sin\omega)}{d\omega} - hq\cos\omega . \varphi\right) \qquad (A)$$

$$\sin^{-hq}\omega\frac{d}{d\omega}(\sin^{hq}\omega E) = \frac{rS}{RT}(1 - q^2 + q^2\sin^2\omega)\varphi . \qquad (B)$$

Die weitere Rechnung wird sich zunächst von der für das reibungslose System geführten in nichts unterscheiden, als dass r in der Formel für E an Stelle von n tritt. Um die paren Lösungen ungerader Classen zu erhalten, wird man

$$\varphi = \cos\omega(a_0 + a_2 \sin^2\omega + \ldots), \quad E = \frac{rS}{RT}(A_1 \sin\omega + A_3 \sin^3\omega + \ldots)$$

zu setzen haben, wodurch man zur Gleichung (P, P_1) für die erste Classe, (P, P_3) für die dritte Classe... gelangt.

Der wesentliche Unterschied gegen den früher behandelten Fall besteht darin, dass man nicht die Wurzeln q einer der Gleichungen (P) oder (J) unmittelbar zu einem gegebenen Werth von $\varkappa$ suchen kann.

Führt man die Bezeichnungen ein

$$q = Xe^{\xi i}, \quad z = Ze^{\zeta i}, \quad \frac{n}{2\nu} = \frac{\beta + \alpha i}{2\nu} = Ne^{\gamma i}$$

(X, Z, N, α, β, γ, ξ, ζ reell), so wird

$$\frac{r}{2\nu} = \frac{1}{q} = X^{-1}e^{-\xi i} = \frac{\beta + (\alpha - l)i}{2\nu}$$

$$\varkappa = \frac{4\nu^2 S^2}{RT} = \frac{2\nu}{n} qz = \frac{XZ}{N} e^{(\xi+\zeta-\gamma)i}.$$

Da $\varkappa$ reell sein muss, so folgt $\xi + \zeta - \gamma = 0$. Man hat ferner

$$X^{-1}\cos\xi = N\cos\gamma = \frac{\beta}{2\nu}, \quad X^{-1}\sin\xi = \frac{l-\alpha}{2\nu}, \quad N\sin\gamma = \frac{\alpha}{2\nu}.$$

Ist ein Werthpaar q, z gefunden worden, welches eine der Gleichungen (P) oder (J) erfüllt, so erhält man für $\varkappa$, l, β, α aus den eben abgeleiteten Beziehungen die Werthe:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa &= X^2 Z \frac{\cos(\xi+\zeta)}{\cos\xi}, & \frac{l}{2\nu} &= X^{-1}\frac{\sin(2\xi+\zeta)}{\cos(\xi+\zeta)} \\ \frac{\beta}{2\nu} &= X^{-1}\cos\xi, & \frac{\alpha}{2\nu} &= X^{-1}\cos\xi\tan(\xi+\zeta) \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

[Diese ersetzen den geänderten Bezeichnungen gemäss die Gleichungen (29) des ersten Theiles.] Jedes Werthpaar, welches zu einem positiven $\varkappa$ führt, liefert eine brauchbare Lösung. Man

kann aber nicht errathen, wie q zu wählen ist, damit es sammt dem zugehörigen z eine Lösung mit gegebenen Werthen $\varkappa$, l herbeiführe. Es müssten also für jede der Gleichungen (P) oder (J) sehr umfangreiche Tabellen der Wurzelpaare gerechnet werden, aus denen man diejenigen, welche man braucht, heraussuchen könnte.

Die Aufgabe fordert, dass l positiv sei. Hätte man ein Paar q, z gefunden, welches zu einem positiven $\varkappa$, aber zu negativem l führt, so könnte man daraus unmittelbar eine Lösung für dasselbe $\varkappa$ und ein positives l ableiten durch Umkehrung der Vorzeichen von ξ und ζ. Da in den Gleichungen (P), (J) ausser q und z nur reelle Grössen vorkommen, so müssen $Xe^{-\psi i}$ und $Ze^{-\psi i}$ ein Wurzelpaar sein, wenn $Xe^{\psi i}$ und $Ze^{\psi i}$ eines sind.

Während mit ξ, ζ auch l, α das Zeichen ändern, bleiben $\varkappa$ und β ungeändert.

Die Berechnung von φ, ψ, E wird ebenso wie bei reellen Wurzeln zu geschehen haben. Hat man beispielsweise ein complexes Wurzelpaar q, z der Gleichung (P, P_1) gefunden, so lässt sich daraus eine particuläre Lösung der Gleichungen (4), beziehungsweise (6) ableiten, mittels der Formeln:

$$\varphi = \cos \omega (a_0 + a_2 \sin^2 \omega + \ldots)$$

$$a_0 \text{ willkürlich, } \quad \frac{a_2}{a_0} = \frac{(5+q)q^2 z}{X_3 - \cfrac{Z_5}{X_5 - \ldots}}, \quad \frac{a_4}{a_2} = \frac{(7+q)q^2 z}{X_5 - \cfrac{Z_7}{X_7 - \ldots}}, \ldots$$

wobei die Werthe X, Z aus (P_1) zu entnehmen sind. Für die Berechnung von ψ und E ist auch ganz ähnlich wie bei den Lösungen für das reibungslose System zu verfahren. Die Coëfficienten α und A bestimmen sich aus (p_1), und der gemeinsame Factor der A ist $rS/(RT)$.

Setzt man schliesslich

$$\varphi = \varphi_1(\omega) + i\varphi_2(\omega), \quad \psi = \psi_1 + i\psi_2, \quad E = E_1 + iE_2$$

und nimmt in den Gleichungen (5) den Factor von i als Lösung, so folgt

$$\left.\begin{aligned} b &= e^{-\alpha t}[\varphi_1 \cos(h\lambda+\beta t) - \varphi_2 \sin(h\lambda+\beta t)] \\ c &= e^{-\alpha t}[\psi_1 \sin(h\lambda+\beta t) + \psi_2 \cos(h\lambda+\beta t)] \\ z &= e^{-\alpha t}[E_1 \sin(h\lambda+\beta t) + E_2 \cos(h\lambda+\beta t)] \end{aligned}\right\} \qquad (5')$$

Wenn $l = 0$, verschwinden α und φ_2, ψ_2, E_2; die Form der Lösung geht in diejenige über, welche für das reibungslose System in der Gleichung (2) angenommen wurde.

Man erhält als particuläre Lösungen der Bewegungsgleichungen (4) erlöschende Wellen. Es liesse sich zeigen, dass jede in der rotirenden Schale aus gegebenen Anfangsbedingungen entstehende Luftbewegung, wenn eine der relativen Geschwindigkeit proportionale Reibung angenommen wird, sich aus solchen Wellen zusammensetzt. Der Nachweis ist ebenso wie für das reibungslose System im Anschluss an den analogen Beweis für die ruhende Schale zu führen.

Das Näherungsverfahren, dessen ich mich bediene, um zusammengehörende Werthe von q, z zu finden, will ich für die Gleichung (P, P_1) anführen und wähle zu diesem Zweck die Bezeichnungen

$$w_1 = (1+q)(2.3-q), \quad w_2 = (3+q)(1-q^2),$$
$$w_3 = 2.4(1+q)(5+q)q^2$$
$$w_4 = (3+q)(4.5-q), \quad w_5 = (5+q)(1-q^2) + \frac{4.6(3+q)(7+q)}{M}q^2,$$
$$M = N_5 - \cfrac{Z_7}{N_7 - \cfrac{Z_9}{N_9 - \dots}}$$

Die Gleichung (P, P_1) hat nun folgende Gestalt

$$0 = w_1 - w_2 z - \frac{w_3}{w_4 - w_5 z},$$

woraus

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{w_1}{w_2} + \frac{w_4}{w_5} + \frac{w_3}{w_2 w_5}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{w_1}{w_2} + \frac{w_4}{w_5} + \frac{w_3}{w_2 w_5}\right)^2 - \frac{w_1 w_4}{w_2 w_5}}. \qquad (8)$$

Nimmt man für q irgend einen Werth an, so sind w_1, w_2, w_3, w_4 gegeben, nur w_5 enthält in M das gesuchte z. Man muss nun errathen, in welcher Gegend die Grösse M liegt und zunächst einen angenäherten Werth M_1 dafür einsetzen, mit diesem die erste Annäherung von z, wir nennen sie $(z)_1$, aus der Gleichung (8) rechnen. Dieses $(z)_1$ setzt man in N_5, Z_7, N_7... ein und rechnet ein neues M, es sei M_2, damit den neuen Werth w_5 und einen

andern Werth von z, die zweite Annäherung $(z)_2$ u. s. f., bis der Unterschied zweier aufeinanderfolgender Näherungswerthe den gewünschten Grad der Genauigkeit anzeigt.

In den meisten Fällen hätte man mit complexem q auf diese Art sehr langwierige Rechnungen auszuführen, wenn der erste Werth von M zu weit vom wahren entfernt ist. Ich verfahre am liebsten so: Für ein reelles $q = X$ habe ich das zugehörige z schon gefunden, nun gehe ich zu einem $q = Xe^{\xi i}$ über, nehme ξ zuerst sehr klein an, z. B. arc 5°, es wird dann auch M nur wenig von dem Werth abweichen, den es für $Xe^{0^\circ i}$ hatte. Man kann jenen reellen Werth als ersten Näherungswerth M_1 einsetzen, die Rechnung ausführen und kommt so meistens schon bei der zweiten Approximation zu dem richtigen oder ausreichend genauen M. Will man jetzt z für denselben Modul von q und für ein grösseres ξ rechnen, so kann man wieder einen angenäherten Werth M einsetzen, durch die Annahme, es ändere sich M von $\xi = 5^\circ$ bis $\xi = 10^\circ$ auf ähnliche Art wie zwischen $\xi = 0^\circ$ und $\xi = 5^\circ$. Dadurch erspart man viel Zeit, aber die Berechnung der complexen Wurzelpaare ist immerhin eine sehr mühsame Arbeit.

In Betreff des Vorzeichens der Quadratwurzel in (8) kann bei solchem stufenweisen Vorgang kein Zweifel entstehen, da man bei sehr kleinem ξ dasselbe Zeichen wie bei reellem q anzuwenden hat und dann für grössere ξ ein Zeichenwechsel nur eintritt, wenn der Ausdruck unter der Wurzel durch Null hindurchgeht.

9. Reibung. Beispiele von fortschreitenden erlöschenden Wellen erster Classe.

Für westwärts fortschreitende pare Wellen erster Classe, erster Art, Typus I war bei $\varkappa = 10 \cdot 94$, also für ein Sphäroid, dessen Rotationsdauer 24 Stunden beträgt, $q = 1 \cdot 156$, $z = 8 \cdot 187$.[1] Von diesem Werthe q ausgehend setze man dann $q = 1 \cdot 156 e^{5^\circ i}$ und suche auf die vorhin auseinandergesetzte Art das zugehörige z. Dann berechne man aus den Gleichungen (7) $\varkappa, l, \alpha, \beta$. Man wird finden $\varkappa$ kleiner als $10 \cdot 94$, l, α, positiv, auch β positiv und sehr wenig von dem Werthe n verschieden, welcher

[1] Erste Tabelle $A)$ im 7. Abschnitt.

zu dem reellen q gehört. Es ist damit eine Lösung verbunden, welche eine westwärts fortschreitende erlöschende Welle darstellt für ein Sphäroid, dessen Rotationsdauer mehr als 24 Stunden beträgt. Lässt man den Modul von q ungeändert und geht zu grösseren Werthen des Argumentes über, so erhält man Lösungen, welche zu immer kleineren $\varkappa$, also zu langsamer rotirenden Sphäroiden gehören. Will man Lösungen für $\varkappa = 10\cdot94$ haben, so muss man sie bei jenen $q = Xe^{\xi i}$ suchen, deren Modul grösser ist als 1·156. Wir führen im Theil *A)* der folgenden Tabelle die Werthe von z und $\varkappa$, l, α, β für $X = 1\cdot2$ und mehrere Werthe von ξ an. Für S und RT sind dieselben Werthe, wie im 7. Abschnitt, angenommen.

Solange $\xi < \pi/2$ bleibt β positiv, man erhält westwärts wandernde Wellen. Bevor aber ξ bis $\pi/2$ anwächst, wird $\zeta + \xi = \pi/2$, also $\varkappa = 0$. Bei grösserem ξ würde $\varkappa$ negativ und die Lösung bedeutungslos. Man hätte nun, um für $\varkappa = 10\cdot94$ und für alle Werthe der Reibungsconstante $l = 0$ bis $l = \infty$ die Lösungen Typus I zu finden, zunächst für mehrere X ebensolche Rechnungen auszuführen, wie sie hier mit dem Modul 1·2 gemacht wurden. Zwischen $X = 1\cdot156$ und $X = 1\cdot2$ wird l bei $\varkappa = 10\cdot94$ alle Werthe zwischen Null und 0·35 annehmen, die grösseren l gehören zu grösseren X. Hätte man ausführliche Tabellen der complexen Wurzelpaare, welche an die reellen Paare q, z zu Typus I anschliessen und darüber hinaus, so könnte man daraus für jedes $\varkappa$ und jedes l die zugehörigen Werthe q, z entweder direct entnehmen oder durch Interpolation leicht finden.

Ebenso wäre dann für Typus II und die höheren Typen zu verfahren. Wir müssen uns aber, weil die Rechnungen sehr viel Zeit brauchen, darauf beschränken, sie für den Typus I der ersten Classe theils durchzuführen, grösstentheils auch nur anzudeuten.

Wir gehen nun zu den ostwärts fortschreitenden Wellen über. Für diese war in der ersten Classe Typus I bei $\varkappa = 10\cdot94$ $q = -3\cdot047$[1] $= 3\cdot047\, e^{\pi i}$. Man wird zuerst benachbarte Werthe von X und ξ in Betracht ziehen. Würde man da ξ etwas grösser als π annehmen, so käme man zu negativem l. Wir wählen also ξ kleiner als π. Zwischen $\xi = \pi$ und $\xi = \pi/2$ bleibt β

[1] Erste Tabelle *B)* im 7. Abschnitt.

Erlöschende pare Wellen erster Classe, Typus I.[1]

(T Umlaufsdauer der Welle, Θ Rotationsdauer der Schale.)

$q = Xe^{\xi i}$		$z = Ze^{\zeta i}$		$\varkappa$	l	α	β	T	Θ
X	ξ	Z	ζ		(Stunde^{-1})			Stunden	
A) **Westwärts fortschreitende Wellen erster Art.**									
1·2	0°	9·07	0°	13·06	0	0	0·477	13·18	21·97
1·2	6°24'	9·172	16°58'	12·20	0·249	0·198	0·458	13·72	22·73
1·2	8° 0'	9·187	23°53'	11·34	0·335	0·274	0·440	14·28	23·57
1·2	**8°30'**	**8·980**	**25°18'**	**10·88**	**0·352**	**0·287**	**0·430**	**14·60**	**24·07**
B) **Ostwärts fortschreitende Wellen.**									
3·6	180°	1·150	0°	14·90	0	0	—0·170	37·02	20·57
3·6	170°	1·148	1°24'	14·94	0 055	0·025	—0·167	31·54	20·54
2·8	180°	1·194	0°	9·361	0	0	—0·173	36·33	25·95
2·8	170°	1·192	1°37'	9·36	0·055	0·025	—0·170	36·89	25·95
2·8	150°	1·176	4°57'	9·646	0·159	0·071	—0·152	41·32	25·56
2·8	100°	1·006	16°36'	20·34	0·339	0·088	—0·044	141·9	17·60
2·8	90°	0·944	22° 4'	∞	∞	0	0	∞	0
1·0	180°	1·445	0°	1·455	0	0	—0·191	32·91	65·81
1·0	97°	1·576	19°50'	5·837	0·472	0·092	—0·047	134·8	32·86
1·0	**93°27'**	**1·590**	**21°10'**	**11·00**	**0·593**	**0·069**	**—0·032**	**197·0**	**23·93**
1·0	90°	1·609	22°17'	∞	∞	0	0	∞	0
0·2	180°	1·828	0°	0·073	0	0	—0·214	29·4	293·6
0·2	91°	1·975	5°38'$_6$	0·524	0·659	0·086	—0·010	628·5	109·7
0·2	90°	1·979	5°41	± ∞	∞	0	0	∞	0
0·2	85°	.	.	(neg.)	.	.	.	.	.
[2]0·2	80°	2·013	5°47'$_7$	0·034	0·487	0·346	0·025	247·2	429·3
[2]0·2	0°	2·238	0°	0·089	0	0	0·237	26·5	265·3
C) **Westwärts fortschreitende Wellen zweiter Art.**									
7	0°	0·0389	0°	1·905	0	0	0·031	201·3	57·52
7	10°	0·0584	36°56'	1·984	0·039	0·033	0·031	200·3	56·36
7	20°	0·0946	42°54'	2·248	0·074	0·062	0·032	197·2	52·95
7	40°	0·1706	30°48'	3·589	0·122	0·094	0·033	191·5	41·90
7	**65°50'**	**0·2680**	**4°26'**	**10·88**	**0·153**	**0·085**	**0·030**	**204·3**	**24·12**
7	80°	0·3268	—12°13'	34·87	0·188	0·057	0·023	271·0	13·44

[1] q, z Wurzelpaare der Gleichung (P, P_1).

[2] Westwärts fortschreitende Wellen erster Art.

negativ, man erhält ostwärts wandernde Wellen. Werthe des X, welche grösser sind als 3·047, führen nicht zu $\varkappa = 10{\cdot}94$. Wenn bei demselben X das ξ von π bis $\pi/2$ abnimmt, so wächst $\varkappa$ bis ∞ an. Lässt man ξ noch weiter abnehmen, so springt $\varkappa$ zu $-\infty$ über und behält in dem folgenden Intervalle negative, jedoch mit ξ abnehmende Werthe; dieses Intervall ist für unsere Aufgabe bedeutungslos. $\varkappa$ erreicht die Null, wobei man schon eine Lösung für die ruhende Schale erhält, und steigt dann mit positiven Werthen an bis $\xi = 0$. In diesem Bereiche erhält man aber nicht ostwärts, sondern westwärts wandernde Wellen, weil β positiv ist, wenn $\xi < \pi/2$. Man vergleiche in der vorhergehenden Tabelle die zwei letzten Zeilen des Theiles *B)*.

Man hat schliesslich noch eine westwärts wandernde Welle zweiter Art, erste Classe Typus I zu rechnen. Im reibungslosen System gehört für diesen Fall zu $\varkappa = 10{\cdot}94$ der Werth $q = 10{\cdot}89$.[1] Ein gewisser Werth von q, mit einem X, das von 10·89 wenig verschieden ist, und sehr kleinem ξ wird eine Lösung mit demselben $\varkappa$ und einem sehr kleinen l liefern. Man überzeugt sich durch einen Versuch, dass man, um $\varkappa = 10{\cdot}94$ zu erhalten, X kleiner nehmen muss als 10·89 und ξ positiv. Da wir eine Lösung mit einem grossen Werth der Reibungsconstante l haben wollen, so wählen wir den Modul von q viel kleiner, $X = 7$. Mit diesem ist die Tabelle *C)* gerechnet. Um bei $\varkappa = 10{\cdot}94$ ein noch grösseres l zu erhalten, hätte man X kleiner anzunehmen, z. B. 5. In diesem Falle beginnt bei $\xi = 0$ die Tabelle mit einem negativen $\varkappa$; wenn ξ wächst, erreicht $\varkappa$ die Null und geht dann zu positiven Werthen über.

Bei der Discussion der Lösungen für das reibungslose System, Gleichung (P, P_1), Typus I, haben wir bemerkt, dass wenn $q = Xe^{0^\circ i}$ alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, die zugehörenden Lösungen sowohl die ostwärts, wie die westwärts wandernden Wellen beider Arten darstellen, und dass ein Stück zwischen $q = 1{\cdot}5$ beiläufig und $q = 6$ bedeutungslosen, weil negativen $\varkappa$ zukommt. Würde man $q = Xe^{10^\circ i}$ setzen und nun das X alle Werthe zwischen $-\infty$ und $+\infty$ durch-

[1] Erste Tabelle *C)* im 7. Abschnitt.

laufen lassen, so bekäme man wieder in den entsprechenden Lösungen Wellen aller Arten, östliche für $X = -\infty$ bis nahe an $X = 0$, westliche erster Art für die nun folgenden X und westliche zweiter Art von einem Werthe ab, der etwas kleiner ist als 6, bis zum unendlichen X; inzwischen ist wieder ein Stück mit negativem $\varkappa$. (Für die östlichen Wellen, negative X, wäre das Vorzeichen von ξ zu ändern, um positive l zu erhalten.) Ebenso hätte man mit $X = e^{20^\circ i}$ zu verfahren u. s. f. bis zu $X e^{90^\circ i}$. Man erhielte so leidlich ausreichende Tabellen für den Typus I, erste Classe pare Wellen.

Nun wäre die Rechnung für Typus II derselben Classe auszuführen, dann für höhere Typen, dann ebenso für andere Classen parer Wellen und für einige Classen imparer Wellen. Wer sich nur die Mühe nimmt, ein einziges complexes Wurzelpaar q, z der Gleichung (P, P_1) zu finden, wird einsehen, dass die Berechnung ausführlicher Tabellen eine sehr zeitraubende Beschäftigung ist. Ich muss mich darauf beschränken, aus den bisher ausgeführten Rechnungen einige Folgerungen zu ziehen.

Für eine Schale, deren Rotationsdauer 24 Stunden beträgt, wollen wir zunächst den Einfluss der Reibung auf die Umlaufsdauer und auf die Abschwächung des Überdruckes sowohl als der Geschwindigkeiten betrachten.

Westliche Welle erster Art, Typus I.

$l = 0$, Umlaufsdauer 13·9 Stunden,
$l = 0 \cdot 352$ Stunde^{-1}, » 14·6 »
Abschwächung in 24 Stunden $\frac{1}{983}$.

Östliche Welle, Typus I.

$l = 0$, Umlaufsdauer 36·6 Stunden,
$l = 0 \cdot 593$ Stunde^{-1}, » 197 »
Abschwächung in 24 Stunden $\frac{1}{5 \cdot 2}$.

Westliche Welle zweiter Art, Typus I.

$l = 0$, Umlaufsdauer 130·7 Stunden,
$l = 0 \cdot 153$ Stunde^{-1}, » 204 »
Abschwächung in 24 Stunden $\frac{1}{7 \cdot 7}$.

Da die Zahlen für die drei Wellen sich nicht auf gleiche Werthe der Reibungsconstante beziehen, so muss man noch mit Hilfe der Tabelle zu errathen versuchen, wie die Änderung der Umlaufsdauer und die Abschwächung sich verhalten wird, wenn l von Null bis ∞ wächst. Man bemerkt, dass die westliche Welle erster Art eine weitaus geringere Änderung der Umlaufsdauer, dagegen eine viel grössere Abschwächung erfährt als jede der beiden anderen.

Die Zahlen in *A)*, welche ohnehin für Sphäroide von wenig verschiedener Umlaufsdauer gelten, lassen erkennen, dass α mit l sehr rasch wächst. Es wird also die westliche Welle erster Art (Typus I, wie man deutlich genug sieht, und bei allen Typen, wie auch in den höheren Classen, ist derselbe Verlauf sicher zu erwarten), umso schneller erlöschen, je grösser die Reibung.

Anders die östliche Welle. Aus *B)* sieht man, dass das Verhältniss α/l immer kleiner ist als $^1/_2$ und dass es bei sonst gleichen oder nahe gleichen Umständen umso kleiner wird, je grösser l. Bei unendlich grosser Reibung wird α Null. In diesem Grenzfall gibt es auch keine Bewegung; die Druckvertheilung ändert sich nicht. Die Umlaufsdauer der ostwärts wandernden Wellen wird mit der Reibung sehr merklich wachsen.

Wir wollen uns hier erinnern, dass die beiden soeben besprochenen Arten von Wellen sich an Schwingungen in der ruhenden Schale anschliessen lassen, und dass man mit jedem angenommenen Werth von l eine stetige Reihe der Werthe α, β erhalten muss, wenn $\varkappa$ von Null bis 10·94 oder zu einem beliebig grossen Werthe wächst. In der ruhenden Schale ist (man vergl. Abschnitt 3),

wenn

$$\frac{l}{2} < \frac{\sqrt{j(j+1)RT}}{S}, \quad \alpha = \frac{l}{2}, \quad \beta = \pm\sqrt{\frac{j(j+1)RT}{S^2} - \frac{l^2}{4}};$$

dagegen wenn

$$\frac{l}{2} > \frac{\sqrt{j(j+1)RT}}{S}, \quad \alpha_1 = \frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{j(j+1)RT}{S^2}},$$

$$\alpha_2 = \frac{l}{2} - \sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{j(j+1)RT}{S^2}}, \quad \beta = 0.$$

Man hat also zunächst bei kleinen Werthen der Reibung in der ruhenden Schale das constante Verhältniss 1/2 zwischen dem Erlöschungsexponenten und dem Reibungscoëfficienten. Dieses Verhältniss wird, wenn man die Schale rotiren lässt, vergrössert für jene Welle, welche der Rotationsrichtung entgegen fortschreitet, es wird kleiner für die in der Rotationsrichtung wandernde Welle.

Bei sehr grossem l hat man nur stehende Schwingungen in der ruhenden Schale, und zwar eine Art, welche sehr rasch erlischt (α_1 nahe l) und eine andere, welche um so beständiger ist, je grösser l (α_2 nahe Null). Offenbar geht in der ostwärts rotirenden Schale die erste Art in westliche Wellen, die andere in östliche über.

In der ruhenden Schale haben wir endlich noch Bewegungen mit dem Erlöschungsexponenten l gefunden (welche den stationären Bewegungen des reibungslosen Systems entsprechen und bei constantem Druck stattfinden). Diese gehen für die rotirende Schale in die westlichen Wellen zweiter Art über. Man sieht aus *C)*, dass das Verhältniss α/l mit zunehmender Rotationsgeschwindigkeit der Schale abnimmt, dass also diese Wellen in der rotirenden Schale langsamer erlöschen, als die analogen Bewegungen in der ruhenden.

Betrachtet man die Figuren 9, 10, 11, welche die drei Wellen im reibungslosen System darstellen, so bemerkt man, dass zwar in allen sehr bedeutende Geschwindigkeiten gegen das Gefälle vorkommen, dass aber in Beziehung auf die Buys-Ballot'sche Regel ein auffallender Unterschied zwischen ihnen besteht. In der westlichen Welle erster Art, Fig. 9, ist die Druckvertheilung durchwegs jener Regel entgegengesetzt; die östlichen Wellen und die westlichen zweiter Art halten die Regel ein.

Vergleicht man damit die Fig. 13, 14, 15, welche analoge Wellen bei Reibung darstellen, so sieht man in Fig. 13 sowohl die Geschwindigkeiten gegen das Gefälle, als auch die Abweichung von der Buys-Ballot'schen Regel sehr deutlich, während in Fig. 14 und Fig. 15 keine merkliche Bewegung von Orten niedrigern zu Orten höheren Druckes vorkommt, das Gebiet des Druckminimums auf der nördlichen Halbkugel links, auf der südlichen rechts von der Windrichtung liegt.

Es zeigt sich, dass jene Bewegungen, welche im reibungslosen System der rotirenden Schale der Buys-Ballot'schen Regel zuwiderlaufen, bei Reibung am schnellsten erlöschen.

Ähnlich war es auch in der zonalen Classe. Dort sind es die stehenden Schwingungen, welche bei $l = 0$ eine der Regel gerade entgegengesetzte Druckvertheilung haben, dagegen die stationären, in den Parallelkreisen verlaufenden Bewegungen, bei welchen die Regel gilt. Die aus den letzteren bei Reibung hervorgehenden Bewegungen, welche als ausfüllende bezeichnet wurden, erlöschen langsamer als die zonalen Schwingungen.

Es ist oben gesagt worden, dass in der Fig. 14 keine merkliche Bewegung gegen das Gefälle zu erkennen ist. Das bezieht sich jedoch nur auf den Maassstab, in welchem die Zeichnung hier ausgeführt ist. Im Orte des Druckmaximums muss ein (wenngleich sehr schwacher) Wind in der Fortpflanzungsrichtung der Welle herrschen, im Druckminimum ein Wind in entgegengesetzter Richtung.

Ich will dies für die östliche Welle aus den Formeln nachweisen, welche für diesen Fall aus dem Wurzelpaare $q = 1\cdot 0\, e^{93^\circ 27' i}$, $z = 1\cdot 590\, e^{21^\circ 10' i}$ der Gleichung (P, P_1) abzuleiten sind. Nimmt man $a_0 = -2$, so folgt aus der Kettenbruchentwicklung $a_2 = 0\cdot 279 + i\,0\cdot 144$, $a_4 = -0\cdot 010 - i\,0\cdot 014$. Man erhält schliesslich die Lösung in der Form (5′), wo $h = 1$ zu setzen ist und

$$\varphi_1(\omega) = \cos\omega(-2\cdot 00 + 0\cdot 28 \sin^2\omega - 0\cdot 01 \sin^4\omega)$$
$$\varphi_2(\omega) = \cos\omega(\qquad 0\cdot 14 \sin^2\omega - 0\cdot 01 \sin^4\omega)$$

$$\psi_1(\omega) = 2\cdot 00 - 0\cdot 55 \sin^2\omega - 0\cdot 11 \sin^4\omega + 0\cdot 01 \sin^6\omega$$
$$\psi_2(\omega) = \qquad -2\cdot 18 \sin^2\omega + 0\cdot 31 \sin^4\omega - 0\cdot 01 \sin^6\omega$$

$$10^3 E_1(\omega) = 25\cdot 1 \sin\omega - 1\cdot 7 \sin^3\omega - 0\cdot 3 \sin^5\omega$$
$$10^3 E_2(\omega) = 23\cdot 6 \sin\omega - 9\cdot 7 \sin^3\omega + 0\cdot 8 \sin^5\omega$$

Für $\omega = 90^\circ$ ist

$$10^3\varepsilon = 27\cdot 6 e^{-\alpha t} \sin(\lambda + \beta t + 32{^\circ}2), \quad b = 0,$$
$$c = 2\cdot 31\, e^{-\alpha t} \sin(\lambda + \beta t - 54{^\circ}5).$$

Zur Zeit t liegt der niedrigste Druck an der Stelle $\omega = 90^\circ$, $\lambda = 237\cdot 8 - \beta t$, dort ist $c = -2\cdot 31\, e^{-\alpha t} \sin 3{^\circ}3$, der höchste

Druck an der Stelle $\omega = 90°$, $\lambda + \beta t = 57 \cdot 8$, mit $c = 2 \cdot 31 e^{-\alpha t} \sin 3°3$. Wird der mittlere Druck mit 1000 bezeichnet, so beträgt zur Zeit $t = 0$ das Maximum 1027·6, das Minimum 972·4, im Maximum herrscht sehr schwacher Wind 0·13 ($m.\mathrm{sec}^{-1}$) ostwärts, im Minimum entgegengesetzter Wind von gleicher Geschwindigkeit. Die Orte absoluter Windstille liegen bei dieser Welle, welche mit einer Umlaufsdauer von 197 Stunden ostwärts wandert, um 3°3 westlich vom Druckmaximum und vom Druckminimum.

Auf der folgenden Seite findet man die Tabellen, nach denen die Fig. 13, 14, 15 für die Zeit $t = 0$ gezeichnet sind. Man vergleiche diese Figuren mit 9, 10, 11, welche für das reibungslose System gelten. Besonders fällt bei der westlichen Welle erster Art auf, wie sich die Meridiane und Parallelkreise mittleren Druckes der Fig. 9 in die Mitteldrucklinie bei Reibung zusammensetzen, so dass die im reibungslosen System getrennten drei Gebiete niedrigen Druckes in Fig. 13 vereinigt erscheinen. Bei der östlichen Welle bemerkt man, dass die in der reibungslosen Welle abgeflachten Curven gleichen Druckes sich bei Reibung derjenigen Form nähern, welche sie in der ruhenden Schale haben (Fig. 5), dass also die Druckvertheilung derjenigen nahekommt, welche durch die Kugelfunction $C \sin \omega \sin \lambda$ dargestellt ist. Eine ähnliche Bemerkung haben wir bei den ausfüllenden Bewegungen der zonalen Classe gemacht.

Bei allen Wellen Fig. 13, 14, 15 sind die Linien gleichen Druckes, besonders stark die Mitteldrucklinie und die ihr zunächstliegenden Curven nach der Richtung des Fortschreitens ausgebaucht; in den zwei ersten am Äquator, in der letzten zwischen dem Äquator und der Breite der Druckextreme.

Die gestrichelten Linien bezeichnen die Stellen, wo die zonale Geschwindigkeitscomponente verschwindet. Die punktirten Linien haben die gleiche Bedeutung für die meridionale Geschwindigkeit.

Erlöschende pare Wellen erster Classe, Typus I.

ω	$e^{\alpha t}.1000\,\varepsilon$		$e^{\alpha t}\,b$		$e^{\alpha t}\,c$	
A) **Westliche Welle erster Art.** (Fig. 13.) $\varkappa = 10\cdot88$, $l = 0\cdot351$, $\alpha = 0\cdot287$, $\beta = 0\cdot430$, Umlaufsdauer der Welle 14·6 Stunden, Abschwächung in 24 Stunden 1/983, ($a_0 = 8$).						
0°	0·0 sin $(\lambda+\beta t$	$-145°)$	8·0 cos $(\lambda+\beta t$	$+\ 0°)$	−8·0 sin $(\lambda+\beta t$	$+\ 0°)$
15°	5·0	−140°	8·3	+ 4°	−8·1	+ 5°
30°	8·1	−124°	9·0	+15°	−8·0	+ 16°
45°	8·6	− 86°	9·4	+27°	−7·5	+ 27°
60°	12·0	− 27°	8·4	+39°	−5·8	+ 35°
75°	21·0	+ 4°	5·1	+45°	−3·5	+ 30°
90°	25·8	+ 11°	0·0	+45°	−2·6	+ 20°
B) **Östliche Welle.** (Fig. 14.) $\varkappa = 11\cdot00$, $l = 0\cdot593$, $\alpha = 0\cdot069$, $\beta = -0\cdot0316$, Umlaufsdauer 197 Stunden. Abschwächung in 24 Stunden 1/5·23, ($a_0 = -2$).						
0°	0·0 sin $(\lambda+\beta t$	$+\ 43°)$	−2·0 cos $(\lambda+\beta t$	$-\ 0°)$	2·0 sin $(\lambda+\beta t$	$-\ 0°)$
15°	8·8	+ 43°	−1·9	− 0°	2·0	− 4°
30°	16·3	+ 41°	−1·7	− 1°	1·9	− 16°
45°	21·7	+ 38°	−1·3	− 2°	2·0	− 31°
60°	25·0	+ 35°	−0·9	− 3°	2·1	− 43°
75°	27·0	+ 33°	−0·5	− 5°	2·2	− 52°
90°	27·6	+ 32°	0·0	− 4°	2·3	− 55°
C) **Westliche Welle zweiter Art.** (Fig. 15.) $\varkappa = 10\cdot83$, $l = 0\cdot153$, $\alpha = 0\cdot085$, $\beta = 0\cdot0305$, Umlaufsdauer 204 Stunden. Abschwächung in 24 Stunden 1/7·68, ($a_0 = 7$).						
0°	0·0 sin $(\lambda+\beta t$	$+\ 8°)$	7·0 cos $(\lambda+\beta t$	$+\ 0°)$	7·0 sin $(\lambda+\beta t$	$+180°)$
15°	−20·3	+ 10°	6·5	+ 3°	5·0	+179°
30°	−25·6	+ 13°	5·1	+12°	1·5	+124°
45°	−21·9	+ 16°	3·4	+24°	3·7	+ 51°
60°	−14·8	+ 13°	2·1	+38°	5·0	+ 49°
75°	− 9·0	− 3°	0·9	+48°	6·4	+ 65°
90°	− 7·7	− 15°	0·0	+52°	6·5	+ 69°

Eine Bemerkung, welche sich in Betreff der westlichen Wellen erster Art aufdrängt, möchte ich noch zum Schluss anführen. In der Abhandlung »Über die Schwingungen periodisch erwärmter Luft« (Sitzungsber. 1890) habe ich einige Rechnungen zur Theorie der täglichen Barometerschwankung unter gewissen vereinfachenden Annahmen ausgeführt. Es ergab sich, dass in einer reibungslosen rotirenden Luftschale halbtägige Druckschwankungen von grosser Amplitude durch geringe wellenartige Anregungen derselben Periode entstehen können, beispielsweise durch halbtägige Temperaturwellen von sehr kleiner Amplitude; während ganztägige Druckwellen von gleich grosser Amplitude nur durch viel grössere Temperaturschwankungen entstehen könnten. Lord Kelvin hatte, ohne die Rechnung durchzuführen, vorausgesagt, die grosse halbtägige Barometerschwankung lasse sich nur durch die Annahme erklären, dass eine freie Welle (zweiter Classe) in der Luftschale nahezu die Schwingungsdauer von 12 Stunden hat, also eine erzwungene Welle mit dieser Periode relativ grosse Amplitude erlangt. In der citirten Abhandlung habe ich die erzwungenen Schwingungen berechnet, aber für die analogen freien Wellen sind die Rechnungen erst hier durchgeführt. Für eine reibungslose Luftschale von der Grösse und Rotationsdauer der Erde und von der absoluten Temperatur 273° hat man:

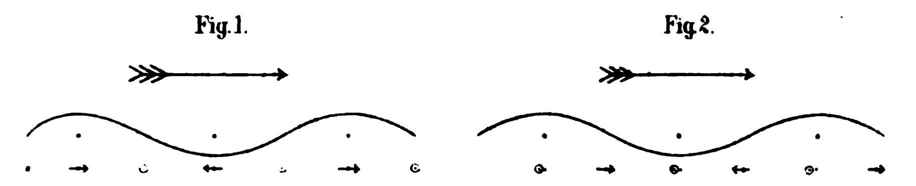
Freie Wellen erster Classe, westwärts, Umlaufsdauer 13·87, 9·22, 6·63...; 130·7, 309·5, 572·2... Stunden, also diejenige, welche 24 Stunden am nächsten kommt, 13·87 Stunden (Erste Tabelle im 7. Abschnitt.)

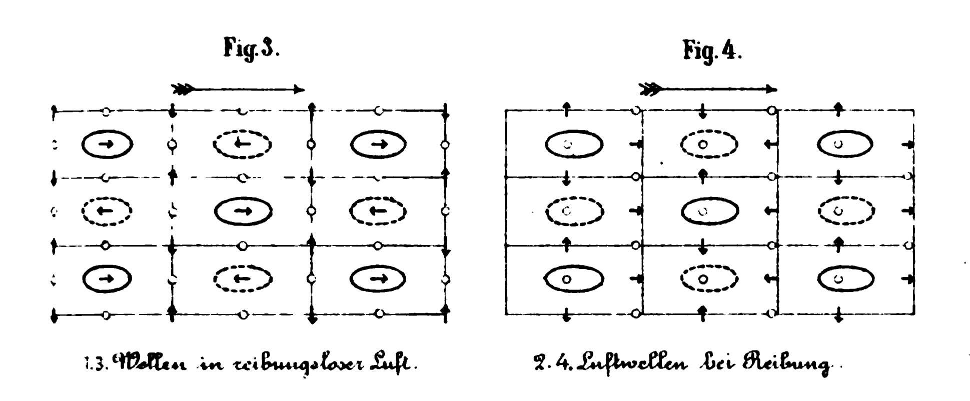
Freie Wellen zweiter Classe, westwärts, Schwingungsdauer 11·94 Stunden für Typus I und kleinere Werthe für die höheren Typen der ersten Art, 187·5 für Typus I und grössere Werthe für die höheren Typen der zweiten Art, also die Schwingungsdauer, welche 12 Stunden am nächsten kommt, 11·94 Stunden (Zweite Tabelle im 7. Abschnitt.)

Die Umlaufsdauer aller anderen westlichen Wellen erster und zweiter Art in einer Schale, welche in 24 Stunden eine Umdrehung macht, ist in der ersten Classe weiter von 24 Stunden entfernt als 13·87. Nun haben wir gesehen, dass sich diese Dauer durch ziemlich grosse Reibung nur auf 14·6 Stunden

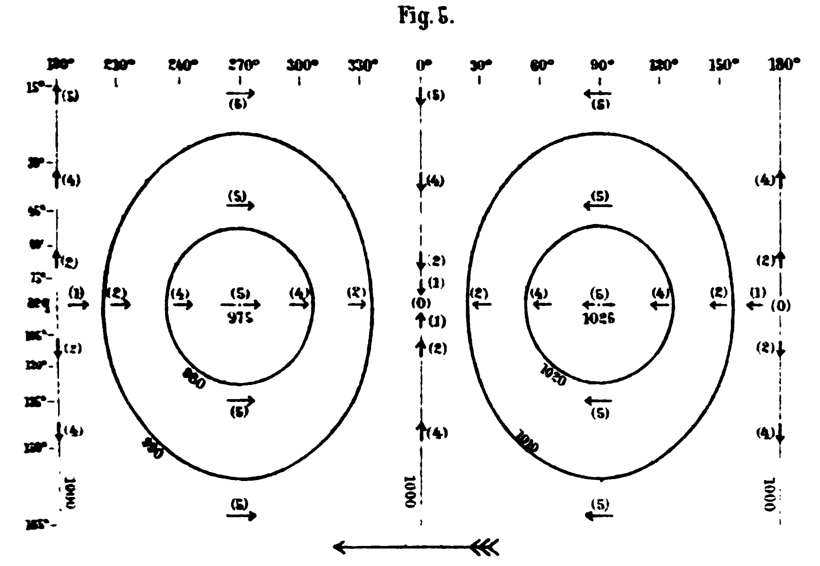
erhöht. Es ist wahrscheinlich, dass Ähnliches für die zweite Classe gelten wird, dass also auch bei Reibung die Schwingungsdauer einer freien westlichen Welle zweiter Classe näher bei 12 Stunden, als die einer freien Welle erster Classe bei 24 Stunden liegt. Danach würde auch bei Reibung die halbtägige erzwungene Druckschwankung eine relativ grössere Amplitude haben als die ganztägige.

Die Rechnung für erzwungene Wellen bei Reibung ist für die rotirende Luftschale viel leichter zu führen, als diejenige für freie Wellen, weil man den mühsamsten Theil, die Aufsuchung der Periode, erspart. Eine ausführliche Behandlung dieser Aufgabe wird in einer künftigen Mittheilung erfolgen.





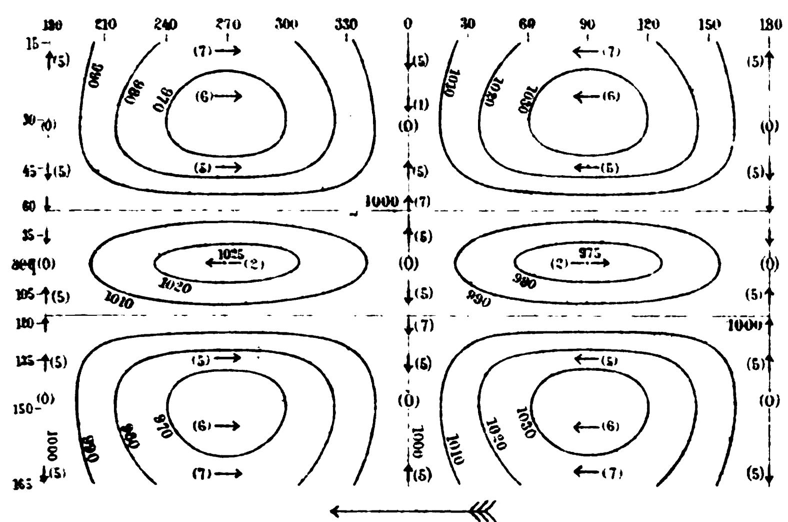
1.3. Wellen in reibungsloser Luft. 2.4. Luftwellen bei Reibung.



Ruhende Schale. reibungsloses System. Westwärts wandernde pare Welle erster Classe. Typus I. Umlaufsdauer 28.07 Stunden.

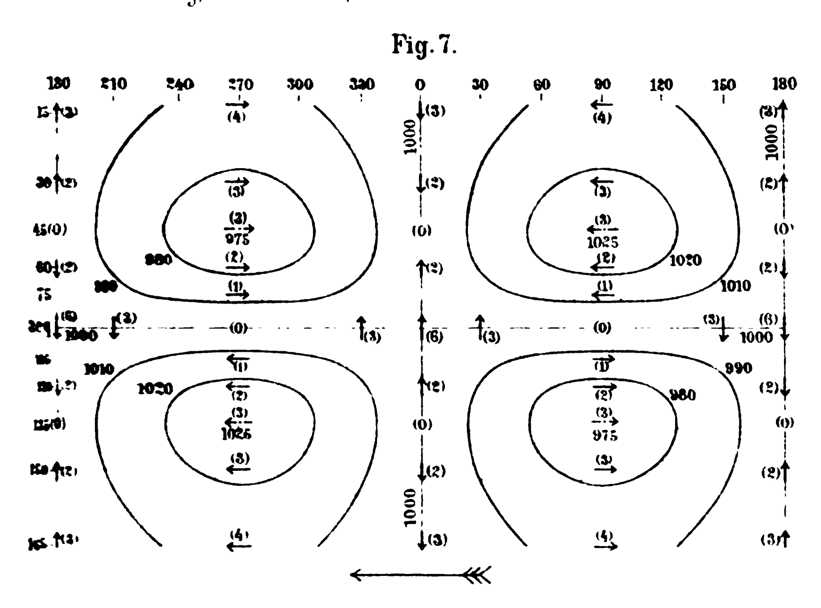
Lith. Anst v. J. Barth in Wien

Fig. 6.



Ruhende Schale, reibungsloses System. Westwärts wandernde pare Welle erster Classe Typus II. Umlaufsdauer 11.46 Stunden.

Fig. 7.



Ruhende Schale, reibungsloses System. Westwärts wandernde impare Welle erster Classe Typus I. Umlaufsdauer der Welle 16·20 Stunden

Lith. Anst. v. J. Barth in Wien

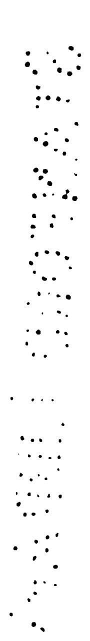
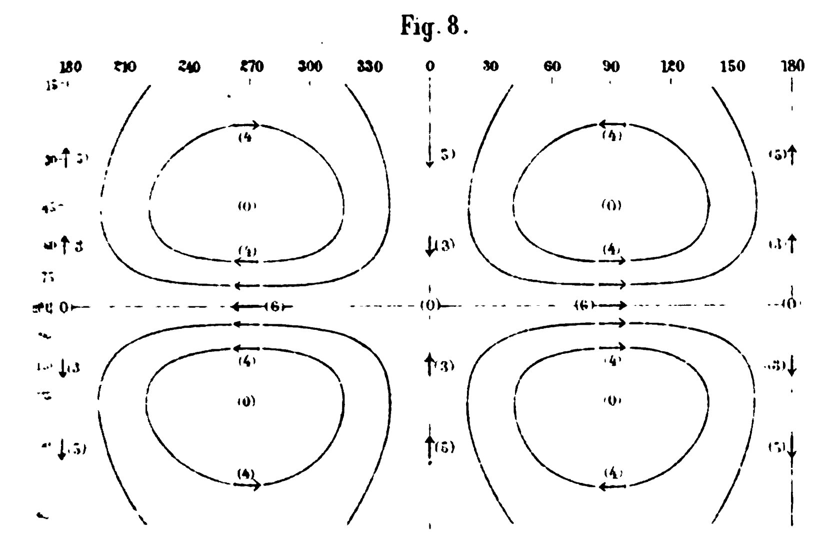
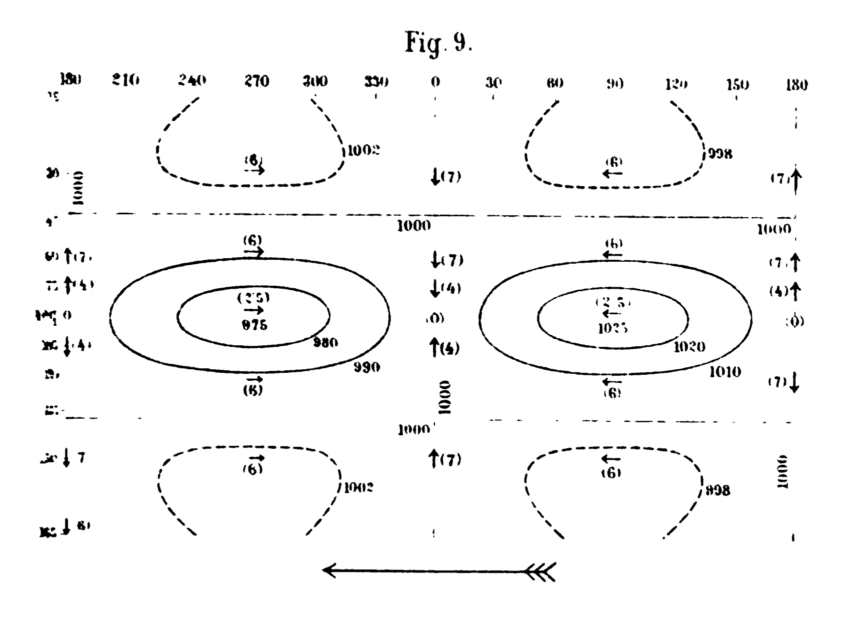


Fig. 8.



Ruhende Schale. Reibungsloses System. Stationäre pare Bewegung erste Classe Typus I (Strömungslinien).

Fig. 9.



Reibungsloses System. Rotationsdauer der Schale 24 Stunden. Westwärts wandernde pare Welle erster Classe. Typus I. Umlaufsdauer der Welle 13·87 Stunden.

Lith. Anst v. J. Barth in Wien

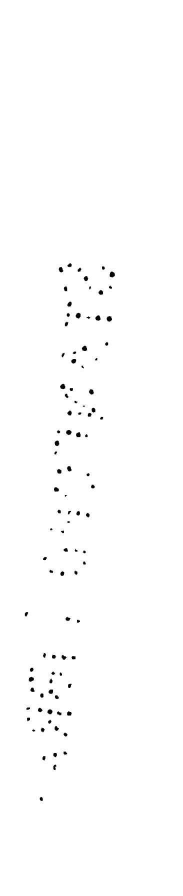
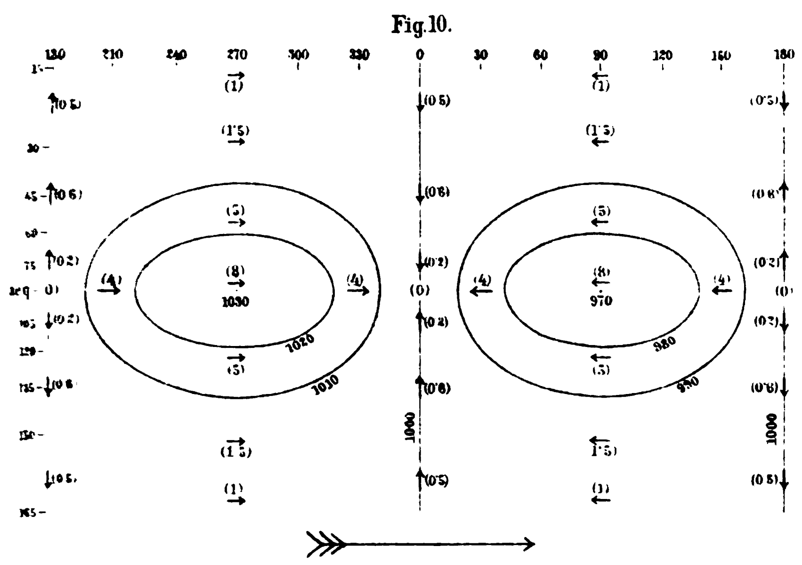
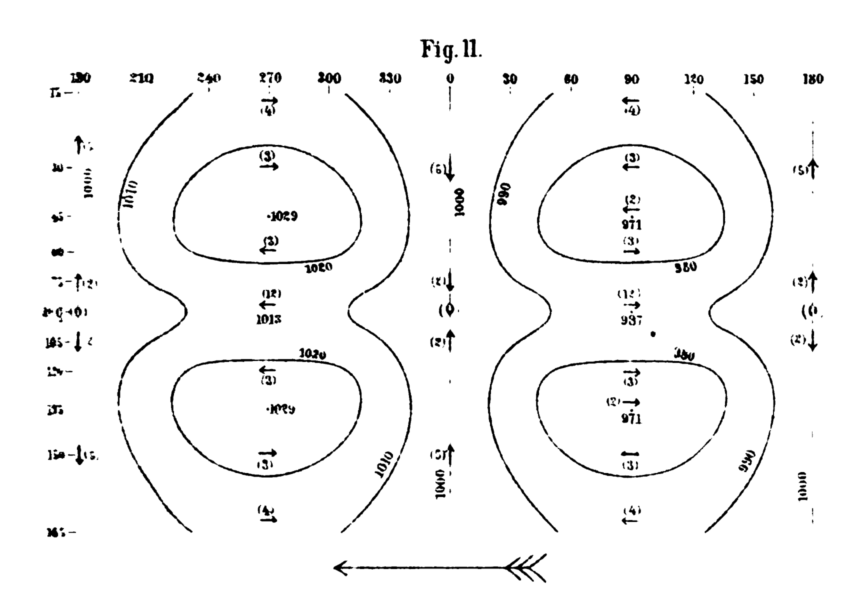


Fig. 10.



Reibungsloses System Rotationsdauer der Schale 24 Stunden Ostwärts wandernde paare Welle erster Classe Typus I. Umlaufsdauer der Welle 35·57 Stunden

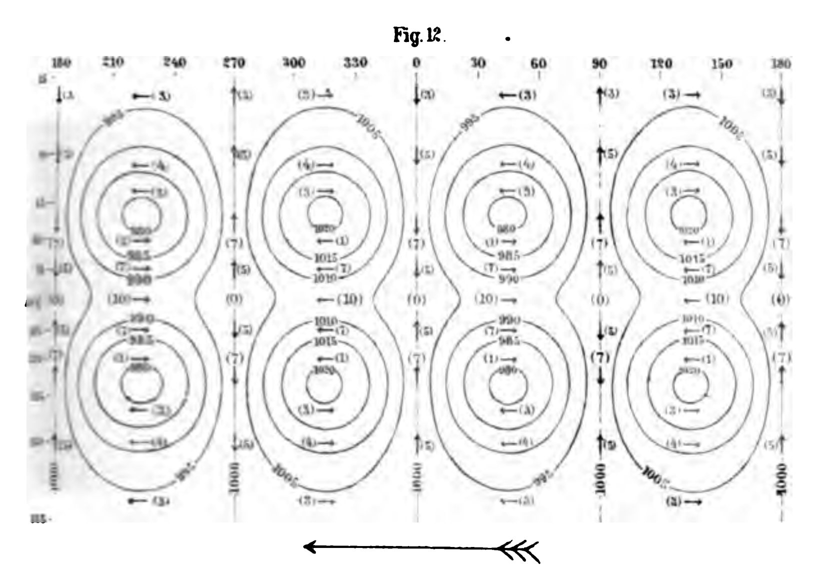
Fig. 11.



Reibungsloses System Rotationsdauer der Schale 24 Stunden Westwärts wandernde Welle zweiter Art erste Classe Typus I Umlaufsdauer der Welle 130·7 Stunden

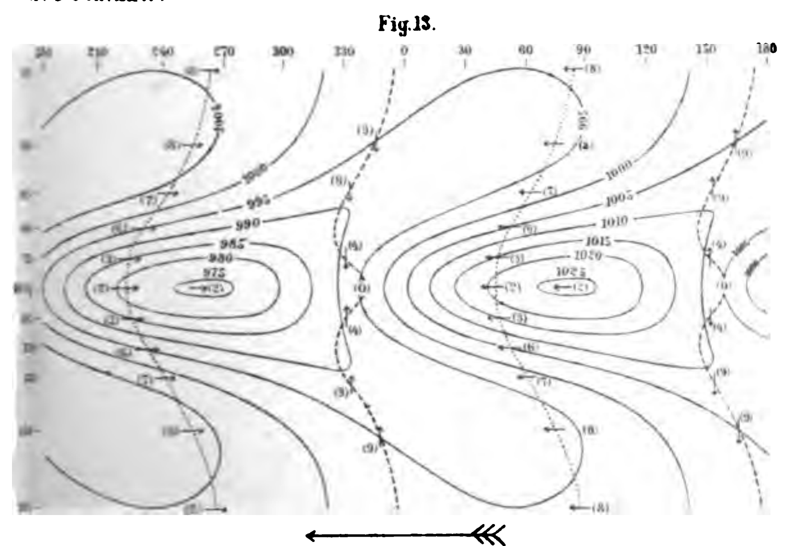
Lith. Anst v. J. Barth in Wien

Fig. 12.



Reibungsloses System. Rotationsdauer der Schale 24 Stunden. Westwärts wandernde Welle zweiter Art, zweite Classe Typus I Umlaufsdauer der Welle 87·5 Stunden.

Fig. 13.



Rotationsdauer der Schale 24·07 Stunden. Reibungsconstante $\ell = 0{\cdot}352$ (Stunde^{-1}) Westwärts wandernde erlöschende Welle erster Classe Typus I. Umlaufsdauer [illegible] Stunden Abschwächung in 24 Stunden $\frac{1}{983}$

Lith. Anst v. J. Barth, in Wien

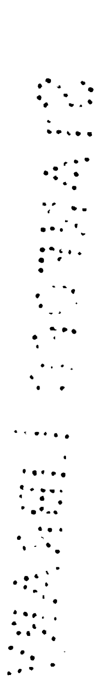
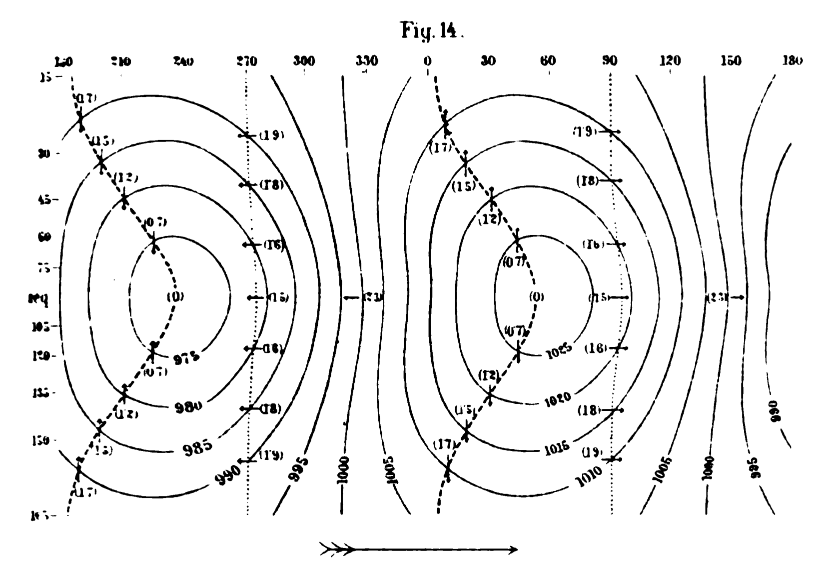
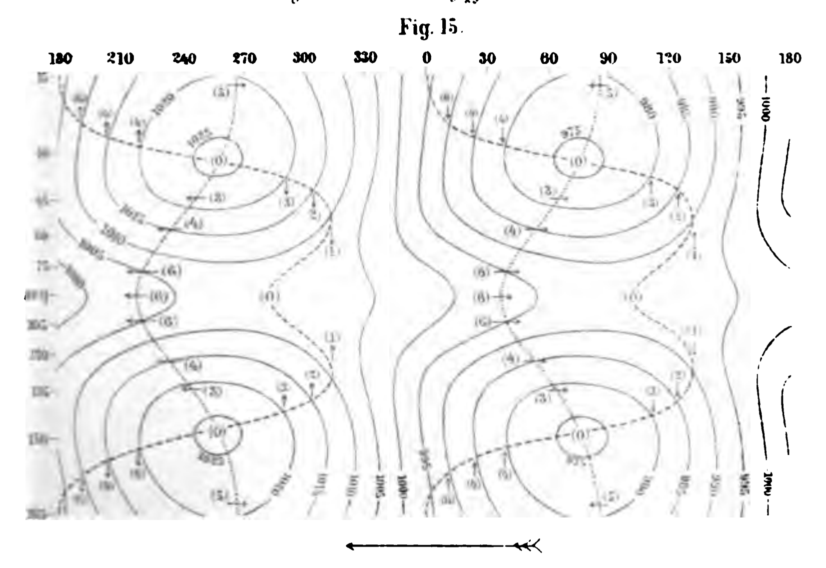


Fig. 14.



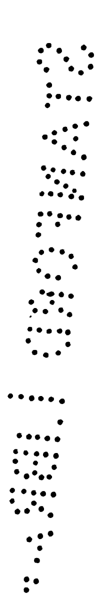
Rotationsdauer der Schale 23·93 Stunden. Reibungsconstante $f = 0·593$ (Stunde^{-1}) Ostwärts wandernde erlöschende Welle erster Classe Typus I. Umlaufsdauer 107 Stunden. Abschwächung in 24 Stunden $\frac{1}{5·23}$.

Fig. 15.



Rotationsdauer der Schale 24·12 Stunden. Reibungsconstante $f = 0·153$ (Stunde^{-1}) Erlöschende Westwärts fortschreitende Welle zweiter Cl., erste Classe Typus I. Umlaufsdauer 204 Stunden. Abschwächung in 24 Stunden [illegible].

Lith. Anst. v. J. Barth in Wien.



SITZUNGSBERICHTE

DER

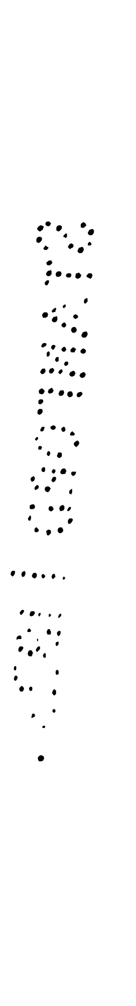
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CII. BAND. II. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



IV. SITZUNG VOM 3. FEBRUAR 1893.

Herr Intendant Hofrath Ritter v. Hauer führt den Vorsitz.

Der Secretär legt das erschienene Heft I (Jänner) 1893 des 14. Bandes der Monatshefte für Chemie vor.

Das k. und k. Reichs-Kriegs-Ministerium (Marine-Section) übersendet der kaiserlichen Akademie eine Mittheilung betreffend die relative Schwerebestimmung durch Pendelbeobachtungen, welche bisher auf S. M. Kriegsschiffen mittelst des Pendelapparates nach dem Systeme Sterneck ausgeführt wurden und noch weiterhin behufs Ermittelung über die Vertheilung der Schwerkraft auf der Erdoberfläche ausgeführt werden sollen.

Herr Prof. Dr. V. Hilber in Graz dankt für die ihm zur geologischen Erforschung der Gebirge im westlichen und nordwestlichen Thessalien aus der Boué-Stiftung bewilligte Reise-Subvention.

Herr Prof. Dr. L. Weinek, Director der k. k. Sternwarte in Prag übermittelt seine neuesten Mondarbeiten nach den Photographien der Lick-Sternwarte am Mt. Hamilton (Californien), und zwar:

1. Langrenus, 20fach vergrössert. — 2. Flammarion, nördlich von Ptolemäus (vergl. Gaudibert's Mondkarte), 20fach vergrössert. — 3. Vendelinus-Langrenus, Doppelbild in 20facher Vergrösserung. — 4. Vendelinus-Langrenus in 10facher Vergrösserung.

Herr Prof. Dr. Anton Fritsch in Prag übermittelt die Pflichtexemplare des eben erschienenen II. Heftes zum III. Bande

(in der Reihe Heft X) seines mit Unterstützung der kaiserlichen Akademie herausgegebenen Werkes: »Fauna der Gaskohle und der Kalksteine der Permformation Böhmens«, welches die *Selachii (Traquairia, Protacanthodes, Acanthodes)* und die *Actinopterygii (Megalichthys, Trissolepis)* enthält. (Mit Taf. 103—112.)

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. »Beitrag zur Kenntniss des Kobalts«, von Prof. Ed. Donath an der k. k. technischen Hochschule in Brünn.
2. »Die Maxima und Minima der Functionen von mehreren Veränderlichen« (II. Nachtrag), von Prof. Dr. O. Stolz an der k. k. Universität zu Innsbruck.

Herr Dr. Alfred Nalepa, Professor an der k. k. Lehrerbildungsanstalt in Linz, übersendet eine vorläufige Mittheilung über »Neue Gallmilben« (6. Fortsetzung).

Das w. M. Herr Prof. J. Wiesner überreicht eine im pflanzenphysiologischen Institute der k. k. Universität in Wien von Dr. W. Figdor ausgeführte Arbeit, betitelt: »Versuche über die heliotropische Empfindlichkeit der Pflanze«.

Das w. M. Herr Hofrath V. v. Lang überreicht eine von Prof. Dr. A. Wassmuth in Innsbruck eingesandte Abhandlung: »Über die Lösung des Magnetisirungsproblems durch Reihen«.

Das w. M. Herr Hofrath Director J. Hann überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: »Einige Resultate der anemometrischen Aufzeichnungen in Wien 1873—1892.«

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit des Herrn Angelo Simonini: »Über den Abbau der fetten Säuren zu kohlenstoffärmeren Alkoholen.« (II. Mittheilung.)

Das w. M. Herr Hofrath Prof. C. Toldt überreicht eine Abhandlung aus dem anatomischen Institute der k. k. Universität in Wien von Dr. G. Kobler und Dr. O. v. Hovorka: »Über den Neigungswinkel der Stammbronchi«.

Herr Gejza v. Bukowski in Wien überreicht mit Bezugnahme auf die im akadem. Anzeiger vom 1. December v. J., Nr. XXV, veröffentlichte vorläufige Mittheilung über seine im Auftrage der kaiserl. Akademie unternommene geologische Forschungsreise im südwestlichen Kleinasien eine Abhandlung unter dem Titel: »Die levantinische Molluskenfauna der Insel Rhodus«.

Herr Dr. Norbert Herz in Wien überreicht eine Mittheilung: »Über die Alfonsinischen Tafeln und die im Besitze der k. k. Hofbibliothek in Wien befindlichen Handschriften derselben«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Salmonowitsch, P., Newton's Gesetz der Wärmetransmission in Anwendung zur Baukunst. (Praktische Thermokinetik.) (Mit 10 Tafeln.) St. Petersburg, 1892; 8°.

V. SITZUNG VOM 9. FEBRUAR 1893.

Herr Intendant Hofrath Ritter v. Hauer führt den Vorsitz.

Der Secretär legt das erschienene Register zum XIII. Band (Jahrgang 1892) der Monatshefte für Chemie vor.

Das w. M. Herr Director E. Weiss übersendet eine Abhandlung von Prof. G. v. Niessl an der k. k. technischen Hochschule in Brünn: »Bahnbestimmung des Meteors vom 7. Juli 1892«.

Das w. M. Herr Prof. Fr. Brauer überreicht den mit Herrn Julius Edlen v. Bergenstamm verfassten VI. Theil der Zweiflügler des kaiserl. Museums, Vorarbeiten zu einer Monographie der *Muscaria schizometopa* P. III.

VI. SITZUNG VOM 16. FEBRUAR 1893.

Herr Intendant Hofrath Ritter v. Hauer führt den Vorsitz.

Der Secretär legt das erschienene Heft VIII—X (October bis December 1892) des 101. Bandes der Abtheilung II. b. der Sitzungsberichte vor.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. C. Freih. v. Ettingshausen in Graz übersendet eine Abhandlung für die Denkschriften: »Über neue Pflanzenfossilien aus den Tertiärschichten Steiermarks«.

Herr Prof. Dr. Jos. Finger in Wien übersendet eine Abhandlung: »Über den Hauptpunkt einer beliebigen Axe eines materiellen Punktsystems«.

Herr Prof. Dr. R. Klemensiewicz übersendet eine Arbeit aus dem Institute für allgemeine und experimentelle Pathologie der k. k. Universität zu Graz von Dr. G. Neumann, betitelt: »Beiträge zur Biologie anaërobiontisch wachsender gasbildender Bakterienarten«.

Das w. M. Herr Hofrath Director F. Steindachner überreicht eine Abhandlung des Herrn Friedrich Siebenrock, Assistenten am k. k. naturhistorischen Hofmuseum in Wien, betitelt: »Das Skelet von *Brookesia superciliaris* Kuhl.«

Das w. M. Herr Hofrath Director A. Kerner v. Marilaun überreicht eine im botanischen Museum der k. k. Universität in Wien von Herrn Dr. Julius Steiner ausgeführte Abhandlung, betitelt: »Beiträge zur Lichenenflora Griechenlands und Egyptens«.



Über die Lösung des Magnetisirungsproblems durch Reihen

von

Prof. Dr. **A. Wassmuth** in Innsbruck.

(Mit 1 Textfigur.)

I.

Bezeichnet V das inducirende, Q das inducirte und $\varphi = V+Q$ das Gesammtpotential, so erhält man, wenn noch k die Magnetisirungszahl vorstellt, bekanntlich die Componenten des magnetischen Momentes aus

$$A = -k\frac{d\varphi}{dx},\quad B = -k\frac{d\varphi}{dy},\quad C = -k\frac{d\varphi}{dz}$$

und die Oberflächendichte:

$$h = k\frac{d\varphi}{dn_i} = k\frac{d(V+Q)}{dn_i}.$$

Es ist

$$Q = k\int\frac{ds}{r}\,\frac{d(V+Q)}{dn_i}, \tag{1}$$

wo sich die Integration auf die Oberfläche des inducirten Körpers bezieht. Die Lösung des Magnetisirungsproblems läuft also in erster Linie darauf hinaus, aus dieser gewissermassen transcendenten Gleichung das Oberflächenpotential Q, das ausserdem gewisse wohlbekannte Eigenschaften haben muss, zu bestimmen.

Die enormen Schwierigkeiten dieser Aufgabe hatten zuerst Beer[1] und dann später C. Neumann[2] und Riecke[3] darauf geführt, Q durch Reihenentwicklungen auszudrücken, die nach V und aus V gebildeten Functionen fortschreiten. Beer und C. Neumann haben hiezu die bekannte von Green gegebene Gleichung:

$$4\pi V_i = \int V \frac{d\frac{1}{r}}{dn_i} ds - \int \frac{ds}{r} \frac{dV}{dn_i} \tag{2}$$

benützt, während Riecke von der Betrachtung der Kraftröhren ausgeht. Will man nach einerlei Methode vorgehen, so ist es nützlich, das Gesammtpotential φ analog der Gleichung (2) auszudrücken. Es wird:

$$4\pi k\varphi = k\int \varphi \frac{d\frac{1}{r}}{dn_i} ds - k\int \frac{ds}{r} \frac{d\varphi}{dn_i};$$

addirt man hiezu Gleichung (1), so ergibt sich:

$$Q_i + 4\pi k\varphi_i = k\int \varphi_s \frac{d\frac{1}{r}}{dn_i} ds \tag{3a}$$

oder

$$(1+4\pi k)\,Q_i + 4\pi k V_i = k\int (Q_s + V_s) \frac{d\frac{1}{r}}{dn_i} ds. \tag{3b}$$

Geht man nun von der Gleichung (2) aus und setzt:

$$\left.\begin{aligned} \int \frac{ds}{r} \frac{dV}{dn_i} &= 4\pi V_1 \\ \int \frac{ds}{r} \frac{dV_1}{dn_i} &= 4\pi V_2 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

. . . .

[1] Beer, Elektrostatik, 155—169.

[2] C. Neumann, Logar. Potential, 248. L. Weber, Grunert's Arch. 61.

[3] Riecke, Wied. Ann., 13.

so hat man

$$
\begin{aligned}
V_i + V_1 &= \frac{1}{4\pi}\int V \frac{d\frac{1}{r}}{dn_i} ds \\
V_1 + V_2 &= \frac{1}{4\pi}\int V_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dn_i} ds \\
V_2 + V_3 &= \frac{1}{4\pi}\int V_2 \frac{d\frac{1}{r}}{dn_i} ds. \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Hieraus leitet man weiter ab:

$$
\begin{aligned}
V + V_1 &= \frac{1}{4\pi}\int V \frac{d\frac{1}{r}}{dn_i} ds \\
V_1 + V_2 &= \frac{1}{4\pi}\int V_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dn_i} ds \\
V_1 + 2V_2 + V_3 &= \frac{1}{4\pi}\int (V_1 + V_2) \frac{d\frac{1}{r}}{dn_i} ds \\
V_1 + 3V_2 + 3V_3 + V_4 &= \frac{1}{4\pi}\int (V_1 + 2V_2 + V_3) \frac{d\frac{1}{r}}{dn_i} ds \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

so dass also von der zweiten Gleichung an der links auftretende Theil sich unter dem Integralzeichen in der nächstfolgenden Gleichung wiederfindet.

Werden nun diese Gleichungen (6) der Reihe nach mi $1, \rho, \rho^2, \rho^3 \ldots$ multiplicirt und addirt, und wird zur Abkürzung:

$$
Q_i = \rho V_1 + \rho^2 (V_1 + V_2) + \rho^3 (V_1 + 2V_2 + V_3) + \ldots \tag{7}
$$

gesetzt, so folgt:

$$
Q_i + \rho V_i = \frac{\rho}{4\pi}\int (Q + V) \frac{d\frac{1}{r}}{dn_i} ds.
$$

Diese Gleichung wird vollständig identisch mit der obigen Gleichung ($3b$), wenn man nur $\rho = \frac{4\pi k}{1+4\pi k}$ nimmt.

Die Gleichung 7 stellt die von Riecke gefundene, in allen praktischen Fällen convergente Reihenentwicklung dar.

Multiplicirt man hingegen die Gleichungen (5) der Reihe nach mit $\varkappa, \varkappa^2, \varkappa^3 \ldots$, addirt sie hierauf und wählt:

$$Q = \varkappa V_1 + \varkappa^2 V_2 + \varkappa^3 V_2 \ldots, \tag{8}$$

so stösst man wiederum auf die obige Gleichung ($3b$), sobald man $\varkappa = 4\pi k$ nimmt. Die Gleichung (8) stellt die älteste von Beer gegebene Reihenentwicklung dar.

Um auch die von C. Neumann gegebene Entwicklung zu finden, hat man im Wesentlichen nach ihm zu setzen:

$$\begin{aligned} \int V \frac{d\frac{1}{r}}{dn_i} ds &= 4\pi V' \\ \int V' \frac{d\frac{1}{r}}{dn_i} ds &= 4\pi V'' \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{9}$$

so dass:

$$\begin{aligned} V' - V_i &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{ds}{r} \frac{dV}{dn_i} \\ V'' - V' &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{ds}{r} \frac{dV'}{dn_i} \\ V''' - V'' &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{ds}{r} \frac{dV''}{dn_i} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{10}$$

ist.

Werden diese Gleichungen der Reihe nach mit $\varkappa, \varkappa^2, \varkappa^3 \ldots$ multiplicirt, addirt und wird:

$$\varkappa V + \varkappa^2 V' + \varkappa^3 V'' + \ldots = 4\pi k . \Phi$$

gesetzt, so folgt:

$$\Phi . 4\pi k \left| \frac{1}{\varkappa} - 1 \right| - V = k \int \frac{ds}{r} \frac{d\Phi}{dn} .$$

Diese Gleichung stimmt mit (1) überein, sobald:

$$4\pi k\left[\frac{1}{\varkappa}-1\right]=1,\quad \Phi=Q+V,\quad \text{d. i. } \varkappa=\frac{4\pi k}{1+4\pi k}$$

genommen wird. C. Neumann's Entwicklung lautet also:

$$\Phi=Q+V=\frac{1}{1+4\pi k}\left[V+\frac{4\pi k}{1+4\pi k}V'+\left(\frac{4\pi k}{1+4\pi k}\right)^2 V''+\dots\right] \tag{11}$$

Eine vierte, wie es scheint, noch nicht veröffentlichte Reihenentwicklung erhält man, indem man sich, ähnlich wie früher, aus (10) die Gleichungen:

$$\begin{aligned} V'-V&=\frac{1}{4\pi}\int\frac{ds}{r}\frac{dV}{dn}\\ V''-2V'+V&=\frac{1}{4\pi}\int\frac{ds}{r}\frac{d(V'-V)}{dn}\\ V'''-3V''+3V'-V&=\frac{1}{4\pi}\int\frac{ds}{r}\frac{d(V''-2V'-V)}{dn}\end{aligned} \tag{12}$$

. . . .

ableitet, dieselben der Reihe nach mit $\rho, \rho^2, \rho^3\dots$ multiplicirt, sie addirt und

$$V+\rho(V'-V)+\rho^2(V''-2V'+V)+\dots=\Phi$$

wählt. Man erhält so:

$$\Phi-V=\frac{\rho}{4\pi}\int\frac{ds}{r}\frac{d\Phi}{dn_i},$$

hat also $\Phi=Q+V$, $\rho=4\pi k$ zu setzen.

Diese Reihe lautet:

$$\varphi=Q+V=V+4\pi k(V'-V)+(4\pi k)^2[V''-2V'+V]+\dots \tag{13}$$

und hat demnach Ähnlichkeit mit der Beer'schen, in die sie thatsächlich übergeführt werden kann.

Zwischen den einzelnen aus V abgeleiteten Functionen bestehen nämlich mehrere Beziehungen. So findet man aus (5) und (9) durch allmäliges Substituiren:

$$
\begin{aligned}
V+V_1 &= V' \\
V_1+V_2 &= V''-V' \\
V_2+V_3 &= V'''-2V''+V' \\
V_3+V_4 &= V''''-3V'''+3V''-V' \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{14a}
$$

oder

$$
\begin{aligned}
V_1 &= V'-V \\
V_2 &= V''-2V'+V \\
V_3 &= V'''-3V''+3V'-V \\
V_4 &= V''''-4V'''+6V''-4V'+V \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{14b}
$$

und ebenso aus (4) und (10):

$$
\begin{aligned}
V'-V &= V_1 \\
V''-V' &= V_2+V_1 \\
V'''-V'' &= V_3+2V_2+V_1 \\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{15a}
$$

$$
\begin{aligned}
V' &= V_1+V \\
V'' &= V_2+2V_1+V \\
V''' &= V_3+3V_2+3V_1+V \\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{15b}
$$

Man erkennt, dass die Gleichungen (5) durch (14*a*), (10) durch (15*a*), (9) durch (15*b*) und (14*b*) oder (12) durch (4) ersetzt werden können. Die vierte Reihenentwicklung (13) fällt, wie man mittelst (14*b*) sieht, mit der Beer'schen Reihe zusammen. Desgleichen geht die Riecke'sche Reihe (7) mit Hilfe von (15*a*) über in:

$$Q = \rho(V'-V)+\rho^2(V''-V')+\rho^3(V'''-V'')+\ldots; \quad \rho = \frac{4\pi k}{1+4\pi k},$$

woraus sich die C. Neumann'sche Formel:

$$Q+V = (1-\rho)[V+\rho V'+\rho_3 V'' + \ldots]$$

ohneweiters ergibt. Man ersieht, dass man es eigentlich nur mit zwei Typen von Reihen zu thun hat; auf der einen Seite ist die Beer'sche und die hier als vierte bezeichnete, auf der anderen Seite die von C. Neumann, respective Riecke gegebene Entwicklung. Stets ist der Grundgedanke der, Q, ausgehend von der Gleichung (2), durch eine Reihe von Oberflächenbelegungen zu erschöpfen.

[1] Riecke l. c. 480.

II.

Es ist selbstverständlich kein Zweifel, dass die im Vorhergehenden erwähnten Reihen für das Flächenpotential Q die Thomson'sche Grenzgleichung:

$$(1+4\pi k)\frac{dQ}{dn_i}+\frac{dQ}{dn_a}=-4\pi k\frac{dV}{dn_i} \qquad (16a)$$

oder

$$(1+4\pi k)\frac{d\varphi}{dn_i}+\frac{d\varphi}{dn_a}=0 \qquad (16b)$$

befriedigen müssen; interessant wäre es nur, nachzusehen, in welcher Art dies in jedem einzelnen Falle geschieht. Im Nachfolgenden soll aber die Aufgabe allgemeiner gefasst und jene Methoden entwickelt werden, aus denen man ausgehend von der Thomson'schen Grenzgleichung unter gewissen Annahmen auf Reihenentwicklungen für Q geführt wird. Zu dem Ende soll sowohl V wie Q als (convergente) Reihe von Gliedern, denen gewisse, physikalisch deutbare Bedingungen vorgeschrieben werden, gedacht sein. So sei vorerst:

$$\begin{aligned} V &= (V-\varkappa V_1)+\varkappa(V_1-\varkappa V_2)+\varkappa^2(V_2-\varkappa V_3)+\ldots \\ &= U_1 \quad + \quad U_2 \quad + \quad U_3 \quad = \sum_1^{\infty} U_z \qquad (17) \end{aligned}$$

eine convergente Reihe, so dass also die Bedingungsgleichung

$$\frac{dV}{dn_i}+\frac{dV}{dn_a}=\sum_1^{\infty}\left(\frac{dU_z}{dn_i}+\frac{dU_z}{dn_a}\right)=0$$

jedenfalls erfüllt ist, welche Bedeutung V_1, V_2,... respective U_1, U_2...und die Constante $\varkappa$ auch haben mögen.

Diesen bisher noch willkürlichen Functionen U_1, U_2.... werde nun die Bedingung:

$$\frac{dU_z}{dn_i}+\frac{dU_z}{dn_a}=-4\pi k\cdot\frac{dU_{z-1}}{dn_i} \qquad (18)$$

in der Art vorgeschrieben, dass dieselbe für $z=1, 2, 3, \ldots \infty$ gelten solle und $U_0=-V$ (man denke 17 auf Null gebracht)

genommen werde. Die Möglichkeit einer solchen Entwicklung des V in eine $\sum_{1}^{\alpha} U_z$ vorausgesetzt, erscheinen dann die $U_z \ldots U_2$ die im Unendlichen verschwinden und sonst endlich und stetig sind, als Flächenpotentiale und zwar gehört zu U_z die Dichte: $k \frac{dU_{z-1}}{dn_i}$.

Setzt man in 18 der Reihe nach: $z = 1, 2 \ldots \infty$ und stets $U_z = \varkappa^{z-1}[V_{z-1} - \varkappa V_z]$, so gelangt man zu den Gleichungen:

$$\frac{dU_1}{dn_i} + \frac{dU_1}{dn_a} = +4\pi k \frac{dV}{dn_i}$$

d. i.

$$-\varkappa\left[\frac{dV_1}{dn_i} + \frac{dV_1}{dn_a}\right] = 4\pi k \frac{dV}{dn_i},$$

$$\frac{dU_2}{dn_i} + \frac{dU_2}{dn_a} = -4\pi k \frac{dU_1}{dn_i}$$

d. i.

$$-\varkappa\left[\frac{dV_2}{dn_i} + \frac{dV_2}{dn_a}\right] = 4\pi k \frac{dV_1}{dn_i}$$

u. s. w., so dass allgemein:

$$\frac{dV_z}{dn_i} + \frac{dV_z}{dn_a} = -\frac{4\pi k}{\varkappa} \frac{dV_{z-1}}{dn_i}, \quad z = 1, 2 \ldots, \; V_0 = V \quad (19)$$

ist.

Die Grössen $V_1, V_2, \ldots$ erscheinen also ebenfalls als Flächenpotentiale, sind aber jetzt nicht mehr willkürlich, sondern jede kann aus der vorhergehenden und schliesslich V_1 aus V abgeleitet werden.

In ähnlicher Art sei auch:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \ldots = \sum_{1}^{\infty} Q_z$$

eine convergente Reihe und $Q_1, Q_2, \ldots$ ebenso wie Q selbst Flächenpotentiale, für die die Bedingung:

$$\frac{dQ_z}{dn_i} + \frac{dQ_z}{dn_a} = -\varkappa^z \frac{dV_{z-1}}{dn_i} \qquad z = 1, 2 \ldots \infty \tag{20}$$

vorgeschrieben werde.

Nun sollen die Q_z die Thomson'sche Gleichung:

$$\sum_1^\infty z \left[(1 + 4\pi k) \frac{dQ_z}{dn_i} + \frac{dQ_z}{dn_a}\right] = -4\pi k \frac{dV}{dn_i}$$

befriedigen, d. h. es soll wegen (20):

$$-\sum_1^\infty \varkappa^z \frac{dV_{z-1}}{dn_i} + 4\pi k \sum_1^\alpha \frac{dQ_z}{dn_i} = -4\pi k \frac{dV}{dn_i}$$

oder

$$-\varkappa \frac{dV}{dn_i} - \varkappa \left[\varkappa \frac{dV_1}{dn_i} + \varkappa^2 \frac{dV_2}{dn_i} + \ldots + \varkappa^z \frac{dV_z}{dn_i} + \ldots\right] +$$

$$+ 4\pi k \left[\frac{dQ_1}{dn_i} + \frac{dQ_2}{dn_i} + \ldots + \frac{dQ_z}{dn_i} + \ldots\right] = -4\pi k \frac{dV}{dn_i}$$

sein. Dividirt man durch $4\pi k$, so sieht man, dass sich als Lösung:

$$\varkappa = 4\pi k, \quad Q_z = \varkappa^z V_z = (4\pi k)^z . V_z, \tag{21}$$

d. i. die Beer'sche Entwicklung:

$$Q = 4\pi k . V_1 + (4\pi k)^2 . V_2 + \ldots$$

ergibt.

Dabei ist nun nach (19):

$$\frac{dV_z}{dn_i} + \frac{dV_z}{dn_a} = -\frac{dV_{z-1}}{dn_i}, \tag{22}$$

d. h. V_z erscheint als Flächenpotential mit der Dichte

$$\sigma_z = \frac{1}{4\pi} \frac{dV_{z-1}}{dn_i}, \tag{23}$$

oder es muss

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{4\pi}\int \frac{ds}{r}\frac{dV}{dn_i} \\ V_2 &= \frac{1}{4\pi}\int \frac{ds}{r}\frac{dV_1}{dn_i} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

sein; die hier gebrauchten Functionen V_1, V_2,... fallen also mit den obigen (cf. 4) vollständig zusammen.

Die Gleichung (20) kann auch geschrieben werden:

$$\frac{dQ_z}{dn_i} + \frac{dQ_z}{dn_a} = -4\pi k \frac{dQ_{z-1}}{dn_i} \qquad (25)$$

und gibt uns eine Beziehung zwischen Q_z und Q_{z-1}, die der zwischen U_z und U_{z-1} (18) ganz analog ist. Diese Gleichung (25) gilt auch für $z = 1$, indem aus $Q_z = \varkappa^z V_z$, $Q_0 = V_0 = V$ $Q_1 = \varkappa V_1$ folgt.

U_z ist nach (18) ein Flächenpotential mit der Dichte $k \frac{dU_{z-1}}{dn_i}$ und analog stellt auch Q_z ein Flächenpotential mit der Dichte $k \frac{dQ_{z-1}}{dn_i}$ vor.

Addirt man die Gleichungen (18) und (25) und setzt:

$$U_z + Q_z = \varphi_z$$

so erhält man:

$$\frac{d\varphi_z}{dn_i} + \frac{d\varphi_z}{dn_a} = -4\pi k \frac{d\varphi_{z-1}}{dn_i}, \quad z = 1, 2, 3 \dots \infty \qquad (26)$$

wobei also:

$$\varphi = \sum_1^\infty \varphi_z \text{ und } \varphi_0 = U_0 + Q_0 = -V + V = 0$$

ist.

Der Theil φ_z des Gesammtpotentials φ erscheint als Flächenpotential mit der Dichte $h_z = k \frac{d\varphi_{z-1}}{dn_i}$ und die schliessliche

Dichte h entsteht durch Übereinanderlagerung der Mengen mit den diesbezüglichen Dichten h_z. Es ist ja:

$$h = k\frac{d\varphi}{dn_i} = k\frac{d\sum\limits_1^\infty \varphi_z}{dn_i} = k\sum_1^\infty \frac{d\varphi_z}{dn_i} =$$

$$= k\sum_2^\infty \frac{d\varphi_{z-1}}{dn_i} = \sum_2^\infty h_z = \sum_1^\infty h_z$$

da $h_1 = 0$ ist.

Da:

$$\varphi_z = U_z + Q_z = [(4\pi k)^{z-1} V_{z-1} - (4\pi k)^z V_z] + (4\pi k)^z . V_z =$$
$$= (4\pi k)^{z-1} V_{z-1}$$

und somit:

$$h_z = k\frac{d\varphi_{z-1}}{dn_i} = k.(4\pi k)^{z-2}\frac{dV_{z-2}}{dn_i}$$

ist, so hat man

$$\varphi = V + Q = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots = V + 4\pi k . V_1 + (4\pi k)^2 V_2 + \ldots$$

und die dazu gehörigen Oberflächendichten aus:

$$h = 0 + k.\frac{dV}{dn_i} + k.4\pi k\frac{dV_1}{dn_i} + \ldots$$

Das Potential φ_z, entstanden durch die Belegung mit der Dichte:

$$h_z = k.(4\pi k)^{z-2}\frac{dV_{z-2}}{dn_i},$$

inducirt selbst die nächste Dichte

$$h_{z+1} = k.(4\pi k)^{z-1}\frac{dV_{z-1}}{dn_i} = k.\frac{d\varphi_z}{dn_i} \quad \text{u. s. w.}$$

III.

Etwas weniger einfach gestaltet sich die Entwicklung, wenn wir es versuchen, wiederum ausgehend von der Thomson'-

schen Grenzgleichung, auch zur zweiten Type der Reihen, zur Riecke-Neumann'schen zu gelangen.

Das inducirende Potential V sei durch die als convergent gedachte Reihe:

$$V = (V - V') + (V' - V'') + \ldots = U' + U'' + \ldots; \quad (27)$$
$$U^{(z)} = V^{(z-1)} - V^{(z)}$$

ausgedrückt und den bisher noch unbekannten Functionen $V^{(z)}$ werde die Bedingung:

$$\frac{d\,[V^{(z-1)} - V^{(z)}]}{dn_i} + \frac{d\,[V^{(z-1)} - V^{(z)}]}{dn_a} = + \frac{d\,V^{(z-1)}}{dn_i} \quad (28)$$

auferlegt, die wegen:

$$V^{(z-1)} = [V^{(z-1)} - V^{(z-2)}] + [V^{(z-2)} - V^{(z-3)}] + \ldots + [V' - V] + V$$
$$= -[U^{(z-1)} + \ldots U'] + V$$

auch die Form:

$$\frac{dU^{(z)}}{dn_i} + \frac{dU^{(z)}}{dn_a} = \frac{d\,V^{(z-1)}}{dn_i} = -\left[\frac{dU^0}{dn_i} + \frac{dU'}{dn_i} + \ldots + \frac{dU^{(z-1)}}{dn_i}\right] \quad (2$$

erhalten kann, wenn noch $U^0 = -V$ genommen wird.

Aus (28) ergeben sich die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \frac{d[V' - V]}{dn_i} + \frac{d[V' - V]}{dn_a} &= -\frac{dV}{dn_i} \\ \frac{d[V'' - V']}{dn_i} + \frac{d[V'' - V']}{dn_a} &= -\frac{dV'}{dn_i} \quad (28') \\ \ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots \end{aligned}$$

d. h. es sind $V' - V$, $V'' - V'$, ... Flächenpotentiale mit den Dichten:

$$\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dn_i}, \quad \frac{1}{4\pi}\frac{dV'}{dn_i} \ldots$$

Werden die Abkürzungen:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{ds}{r}\,\frac{dV}{dn_i}, \quad V_2 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{ds}{r}\,\frac{dV_1}{dn_i} \ldots$$

— es sind also dieselben wie in (24) oder (4) — eingeführt, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} V' &= V + V_1 \\ V'' &= V' + \frac{1}{4\pi}\int \frac{dV'}{dn_i}\frac{ds}{r} = V_2 + 2V_1 + V \\ V''' &= V_3 + 3V_2 + 3V_1 + V \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

so dass durch V alle übrigen Grössen $V', V''\dots$ gegeben sind. Die Summation von (28') liefert noch:

$$\sum_1^\infty \frac{dV^{(z-1)}}{dn_i} = \sum_1^\infty \left[\frac{dU^{(z)}}{dn_i} + \frac{dU^{(z)}}{dn_a}\right] = 0, \tag{31}$$

was mit der Gleichung $\frac{dV}{dn_i} + \frac{dV}{dn_a} = 0$ im Einklange steht.

Analog wie früher sei Q durch die convergente Reihe:

$$Q = Q' + Q'' + \dots = \sum_1^\infty Q^{(z)}$$

ausgedrückt und sollen die Q die der (29) analoge Bedingung:

$$\frac{dQ^{(z)}}{dn_i} + \frac{dQ^{(z)}}{dn_a} = -\rho^z \frac{dV^{(z-1)}}{dn_i}, \tag{32}$$

wo ρ eine noch zu bestimmende Constante ist, erfüllen. Nun lautet die Thomson'sche Grenzgleichung:

$$\sum (1 + 4\pi k)\frac{dQ^{(z)}}{dn_i} + \frac{dQ^{(z)}}{dn_a} = -4\pi k \frac{dV}{dn_i},$$

d. i. wegen 32:

$$4\pi k \sum_1^\infty \frac{dQ^{(z)}}{dn_i} - \sum_1^\infty \rho^z \frac{dV^{(z-1)}}{dn_i} = -4\pi k \frac{dV}{dn_i}$$

oder

$$4\pi k\left[\frac{dQ'}{dn_i} + \frac{dQ''}{dn_i} + \dots\right] - \rho\left[\frac{dV}{dn_i} + \rho\frac{dV'}{dn_i} + \dots\right] = -4\pi k \frac{dV}{dn_i}.$$

Werden nun hierin mit Hilfe der Gleichungen:

$$V' = V - U'$$
$$V'' = V - U' - U''$$
$$V''' = V - U' - U'' - U'''$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

die Grössen V', V'', V''' durch die U', U'', U'''... ausgedrückt und $\rho < 1$ angenommen, so ergibt sich:

$$4\pi k \left[\frac{dQ'}{dn_i} + \frac{dQ''}{dn_i} + \ldots\right] -$$
$$- \frac{\rho}{1-\rho}\left[\frac{dV}{dn_i} - \rho\frac{dU'}{dn_i} - \rho^2\frac{dU''}{dn_i} - \ldots\right] = -4\pi k\frac{dV}{dn_i}.$$

Diese Gleichung führt zu dem Schlusse:

$$\frac{\rho}{1-\rho} = 4\pi k \text{ d. i. } \rho = \frac{4\pi k}{1+4\pi k} \text{ und } Q^{(z)} = -\rho^z U^{(z)}, \quad (33)$$

da $Q^{(z)}$ und $\rho^z U^{(z)}$ als Flächenpotentiale im Unendlichen verschwinden müssen und demnach sich nicht um eine Constante unterscheiden können.

Die Substitution (33) führt (32) in (29) über und hätte umgekehrt unter gewissen Voraussetzungen daraus erschlossen werden können.

Es ist also:

$$Q = \sum_1^\infty Q_z = -\sum_1^\infty \rho^z U^{(z)} = -\sum_1^\infty \rho^z [V^{(z-1)} - V^{(z)}]$$

oder:

$$Q = -\rho V + \rho V' - \rho^2 V' + \rho^2 V'' - \rho^3 V'' + \rho^3 V''' - \ldots$$

und

$$\varphi = Q + V = (1-\rho)[V + \rho V' + \rho^2 V'' + \ldots], \quad (34)$$

das ist aber thatsächlich wegen $\rho = \frac{4\pi k}{1+4\pi k}$, $1-\rho = \frac{1}{1+4\pi k}$ nichts Anderes als die obige Gleichung (11), d. h. die C. Neumann'sche, respective bei Einführung der V_1, ... die Riecke'sche Entwicklung.

Setzt man wiederum $\varphi^{(z)} = U^{(z)} + Q^{(z)}$, so liefern (29) und (32):

$$\frac{d\varphi^{(z)}}{dn_i} + \frac{d\varphi^{(z)}}{dn_a} = (1-\rho^z)\frac{dV^{(z-1)}}{dn_i},$$

d. h. dass die zu φ_z gehörige Dichte:

$$h_z = -\frac{1}{4\pi}(1-\rho^z)\frac{dV^{(z-1)}}{dn_i}, \tag{35}$$

oder dass wegen (29):

$$h_z = +\frac{1}{4\pi}(1-\rho^z)\left[-\frac{dV}{dn_i} + \frac{1}{1-\rho}\frac{d\varphi'}{dn_i} + \frac{1}{1-\rho^2}\frac{d\varphi''}{dn_i} + \dots + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{1-\rho^{z-1}}\frac{d\varphi^{z-1}}{dn_i}\right] \tag{36}$$

ist. Diese Gleichung zeigt uns, wie sich die Dichte h_z aus den einzelnen, von den verschiedenen Kräften $-\frac{dV}{dn_i}, \frac{d\varphi'}{dn_i} \dots$ ausgehenden Inductionsacten schliesslich aufbaut. Aus (35) erhält man noch:

$$h_{z+1} = \left[h_z + \frac{1}{4\pi}\frac{d\varphi^{(z)}}{dn_i}\right]\frac{1-\rho^{z+1}}{1-\rho^z}, \tag{37}$$

welche Gleichung erkennen lässt, wie aus h_z und der durch die Belegung h_z bedingten Kraft $\frac{d\varphi^{(z)}}{dn_i}$ die neue Dichte h_{z+1} entsteht.

Die gesammte, schliesslich auf dem inducirten Körper befindliche Dichte ist:

$$h = k\frac{d\varphi}{dn_i} = k\sum\frac{d\varphi^{(z)}}{dn_i} = \sum H_z,$$

wenn

$$H_z = k\frac{d\varphi^{(z)}}{dn_i} = \frac{1}{4\pi}\frac{\rho}{1-\rho}\frac{d\varphi^{(z)}}{dn_i} \tag{38}$$

gesetzt wird. Hiemit werden die Gleichungen (36) und (37):

$$h_z = \frac{1-\rho}{\rho}.[1-\rho^z]\left[-k\frac{dV}{dn_i} + \frac{H'}{1-\rho} + \frac{H''}{1-\rho^2} + \dots + \frac{H^{(z-1)}}{1-\rho^{z-1}}\right] \tag{39}$$
$$h_{z+1} = \left[h_z + \frac{1-\rho}{\rho}H_z\right]\frac{1-\rho^{z+1}}{1-\rho^z}.$$

Die Formel (39) zeigt, wie h_z aus $H^{(z-1)} \ldots H'' \ldots H', V$ gebildet wird; hiemit lässt sich $\varphi^{(z)} = \int \frac{ds}{r} . h_z$ und demnach auch $H_z = k \frac{d\varphi^{(z)}}{dn_i}$ im Allgemeinen bestimmen.

Man kann aber auch von der Reihe (34) ausgehen und

$$\varphi = \sum_1^\infty \Phi_z$$

nehmen, wo $\Phi_z = (1-\rho)\rho^{z-1} V^{z-1}$ ist. Hiemit wird:

$$h = k \frac{d\varphi}{dn_i} = k \sum \frac{d\Phi_z}{dn_i} = \sum S_z,$$

wenn die Oberflächendichte:

$$S_z = k \frac{d\Phi_z}{dn_i} = \frac{\rho^z}{4\pi} \frac{dV^{(z-1)}}{dn_i}$$

gesetzt wird. Da nun nach (35) die zu $\varphi^{(z)}$ gehörige Dichte

$$h_z = -\frac{1-\rho^z}{4\pi} \cdot \frac{dV^{(z-1)}}{dn_i}$$

ist, so wird schliesslich

$$S_z = -\frac{\rho^z}{1-\rho^z} h_z \tag{40}$$

$$h = \sum S_z = -\sum \frac{\rho^z}{1-\rho^z} h_z .$$

Wie man sieht, lassen sich aus der Thomson'schen Grenzgleichung alle bisher bekannten Reihenentwicklungen für φ ableiten. Es kommt bei dieser Methode wesentlich darauf an, sowohl das inducirende wie das inducirte Potential (V und Q) in Summanden zu zerlegen, die als Flächenpotentiale gewisse Bedingungen (18 und 20, 29 und 32) erfüllen. Die Verallgemeinerung der letzteren liegt nahe, und steht zu hoffen, dass man auf diesem Wege zu neuen Entwicklungen gelangen wird,[1]

---

[1] Wenn man z. B. in (32) statt ρ^z allgemeiner $f(z)$ schreibt, so ist es auch hier möglich, die Grenzgleichung zu befriedigen.

zumal man für das inducirende Potential V Reihenentwicklungen kennt.

IV.

Als eine nicht uninteressante Anwendung der obigen Entwicklung in Reihen möge für einen speciellen Fall die Frage erledigt werden, inwieweit sich die Einführung des Begriffes: »magnetischer Widerstand« rechtfertigen[1] lasse.

Zu dem Ende werde ein Ring (etwa aus Eisen) betrachtet, der an einer Stelle durch eine schmale Luftspalte, durch Schnitte, die durch die Axe gehen, unterbrochen und gleichmässig und vollständig mit Draht umwickelt sei.

Wäre die Luftspalte nicht vorhanden, d. h. der Ring geschlossen, so müsste bekanntlich $Q_i = 0$, $\varphi_i = V_i$ sein; in unserem Falle verschwindet zwar Q_i nicht, bleibt aber immer sehr klein. Macht man von der in allen praktischen Fällen convergirenden Entwicklung von Riecke-Neumann (Gleichung 34) Gebrauch, so ist bis auf Glieder höherer Ordnung:

$$Q = -\rho(V - V') = +\rho V_1 = \frac{k}{1+4\pi k}\int \frac{ds}{r}\,\frac{dV}{dn_i} \tag{41}$$

d. h. Q erscheint als ein Oberflächenpotential mit der Dichte:

$$h = \frac{k}{K}\,\frac{dV}{dn_i},$$

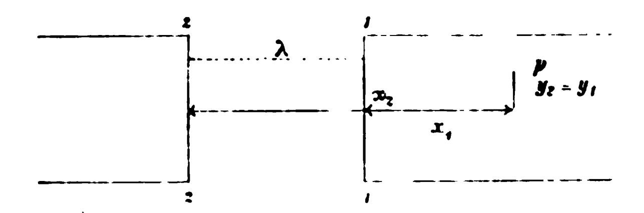
wenn $1+4\pi k = K$ genommen wird.

Diese Dichte h tritt nur an den Querschnitten der Spalte auf, da sonst überall (an der Oberfläche des Eisens) $\frac{dV}{dn_i} = 0$ ist.

Die Mittellinie des Ringes werde mit x bezeichnet und ihre positive Richtung falle mit der Richtung der magnetisirenden Kraft $-\frac{dV}{dx} = 4\pi ni$ zusammen, wo i die Stromstärke, n die

[1] Die folgende Ableitung wurde am 30. März 1892 im naturwiss.-med. Vereine in Innsbruck vorgetragen; veröffentlicht wurde nur das Resultat der Rechnung (cf. e. g. Phil. Mag., December 1892). In anderer Art behandelt Du Bois die Frage. Du Bois, Phil. Mag., Oct. 1890 und Wied. Ann. 46.

Zahl der Windungen für die Längeneinheit vorstellt. Die Dichtigkeiten auf den beiden Querschnitten sind demnach



$h_1 = -\frac{k}{K} 4\pi ni$ und $h_2 = +\frac{k}{K} 4\pi ni$, wo h_1 zu grösserem x (als h_2) gehört. Hiemit wird:

$$Q = -\frac{k}{K} 4\pi ni [U'_1 - U'_2] \tag{42}$$

wo U'_1 und U'_2 Potentiale von einfachen Belegungen von der Dichte $+1$ darstellen.

Ist N die Zahl aller Kraftlinien, die durch den kreisförmig gedachten Querschnitt $A = R^2\pi$ des Eisens gehen, so ist die magnetische Induction:

$$B = \frac{N}{A} = K . \left(-\frac{d\varphi}{dx} \right)$$

oder, wegen

$$\varphi_i = V_i + Q_i = V_i - \frac{k}{K} 4\pi ni [U'_1 - U'_2]$$

$$-\frac{d\varphi}{dx} = +4\pi ni + \frac{k}{K} 4\pi ni \left[\frac{dU'_1}{dx} - \frac{dU'_2}{dx} \right]$$

Nun ist in hinreichender Näherung das Potential U einer Kreisscheibe vom Halbmesser R und der Dichte $+1$ für einen Punkt xy, falls die x in die Axe des Kreises fallen (Mascart und Joubert, §. 736),

$$U = 2\pi [f_0 + f_1 y^2]$$

wobei

$$u^2 = R^2 + x^2,\ f_0 = u - x,\ f_1 = -\frac{1}{4} \frac{d^2 u}{dx^2}$$

gesetzt ist und die Reihe convergirt, wenn $y < u$ ist. Werden die Coordinaten des ins Auge gefassten Punktes p im Eisen in Bezug auf den ersten Kreis mit x_1, y_1 und in Bezug auf den zweiten mit $x_2 y_2$ bezeichnet, so kann, da beide Belege nur auf sehr nahe Punkte im Eisen wirken, d. h. x_1 und x_2 klein bleiben, $y_2 = y_1$ und $x_2 - x_1 = \lambda$ d. i. gleich der mittleren Breite der Luftspalte gesetzt werden; es ist eben wegen der Kleinheit der Spalte erlaubt, die beiden Schnitte als zu einander parallel anzunehmen.

Man erhält so bis auf Glieder höherer Ordnung:

$$\frac{dV_1}{dx} - \frac{dV_2}{dx} = -\frac{2\pi\lambda}{R} \tag{43}$$

oder

$$-\frac{d\varphi}{dx} = 4\pi ni\left|1 - \frac{2\pi\lambda}{R}\cdot\frac{k}{K}\right| = \frac{4\pi ni}{1 + \frac{2\pi\lambda}{R}\frac{k}{K}}$$

Setzt man noch $n = \frac{S}{l}$, wo S die Zahl aller Windungen und l die ganze mittlere Länge des Ringes bezeichnet, so findet man für die Zahl N der durch den Ring gehenden Kraftlinien den Ausdruck:

$$N = \frac{4\pi Si}{\frac{l}{K.R^2\pi} + \frac{2\pi k}{K^2}\frac{l}{R}\cdot\frac{\lambda}{R^2\pi}} = \frac{4\pi Si}{w_1 + w_2} \tag{44}$$

Zu dem Widerstande des Eisens $w_1 = \frac{l}{K.R^2\pi}$ tritt also wirklich ein weiterer Widerstand $w_2 = \frac{2\pi k}{K^2}\frac{l}{R}\cdot\frac{\lambda}{R^2\pi}$ hinzu; derselbe ist der Breite λ der Luftspalte direct und dem Querschnitte derselben umgekehrt proportional und hängt noch von dem Factor $\frac{2\pi k}{K^2}\frac{l}{R}$, der nahe $\frac{1}{K}\left(\frac{l}{2R}\right)$ ist, ab. Ist noch r der Radius des Ringes für die Mittellinie $l = 2r\pi$, so wird der Widerstand der Luftspalte

$$w_2 = \frac{1}{K}\left(\frac{r\pi}{R}\right)\frac{\lambda}{R^2\pi}.$$

Nennt man für $\lambda = 0$ d. i. für den geschlossenen Ring die magnetische Induction $B_0 = \frac{N_0}{R^2 \pi} = \frac{\frac{4\pi S i}{l}}{K}$ und B, wie oben, die für den geschlitzten Ring, so erhält man die Beziehung

$$B = B_0 \left[1 - \frac{2\pi k}{K} \frac{\lambda}{R} \right]$$

worin $B_0 = HK$ gesetzt werden kann, falls $H = 4\pi n i$ die magnetisirende Kraft vorstellt. Ein beabsichtigter Vergleich dieser Formel mit den bekannt gewordenen Versuchen liess sich nicht durchführen, da nicht alle Daten hiezu angegeben sind.

Es muss noch hervorgehoben werden, dass diese Methode auch für andere Formen der Luftspalten, z. B. für solche, wo ein Cylinder oder zwei ineinander steckende Cylinder auftreten, mit einigen Abänderungen gebraucht werden kann.

Die Maxima und Minima der Functionen von mehreren Veränderlichen

(II. Nachtrag)

von

O. Stolz in Innsbruck.

In zwei Abhandlungen mit dem nämlichen Titel, welche im 99. und 100. Bande der Sitzungsberichte gedruckt sind, habe ich zwei Methoden auseinandergesetzt, nach welchen die Extreme der expliciten Functionen von zwei und mehr Veränderlichen $x_1 \ldots x_m$ ermittelt werden können. Die erste, welche von L. Scheeffer begründet wurde, geht davon aus, die obere und untere Grenze der gegebenen Function $f(x_1 \ldots x_m)$ unter der Voraussetzung zu bestimmen, dass $x_1^2 + \ldots + x_m^2$ gleich ist einer willkürlichen Constanten r^2, welche übrigens beliebig klein angenommen werden darf. Die zweite Methode kommt, wie Herr A. Mayer hervorhebt,[1] auf das bereits von Lagrange benützte Verfahren[2] zurück, zunächst die obere und untere Grenze von $f(x_1 \ldots x_m)$ unter der Bedingung zu ermitteln, dass eine der Veränderlichen, z. B. x_1, constant bleibt, während für alle übrigen $(x_2, x_3 \ldots x_m)$ der Spielraum von $-x_1$ bis x_1 vorbehalten wird. Es sei mir nunmehr gestattet, noch einige Bemerkungen über die genannten zwei Verfahrungsweisen nachzutragen. Hiebei handelt es sich stets um den Fall, dass $f(x_1 \ldots x_m)$ in der Nachbarschaft der zu untersuchenden Stelle $x_1 = a_1 \ldots x_m = a_m$ sich in eine Reihe nach ganzen positiven

[1] Vergl. Berichte der k. Sächs. Gesellsch. der Wissensch., mathem.-physik. Classe, 1892, S. 85.

[2] Vergl. Théorie des fonctions (1813), p. 256.

Potenzen von $x_1-a_1\ldots x_m-a_m$ entwickeln lässt. Der Kürze wegen ist $a_1=a_2=\ldots=a_m=0$ gesetzt.

1. Wenn wir die zweite Methode auf eine Function von zwei Veränderlichen xy an der Stelle $x=0$, $y=0$ anwenden, so kommt es zunächst darauf an, obere und untere Grenze einer gegebenen ganzen Function $G(x,y)$ ohne constantes Glied sowohl bei constantem x und Beschränkung von y auf das Intervall $(-x, x)$, als auch bei constantem y und Beschränkung von x auf das Intervall $(-y, y)$ zu bestimmen. Diese Aufgabe wurde in der Abhandlung im 100. Bande, Nr. 3 gelöst. Es ist jedoch noch zu bemerken, dass von den dort aufgestellten Reihen $y=P_1(x)$, $P_2(x)\ldots$ nur diejenigen in Betracht zu ziehen sind, deren Summe bei gehörig kleinem $|x|$ ihrem Betrage nach kleiner als $|x|$ ausfällt. Daher fallen von der Gesammtheit jener Reihen ohne Weiteres jene fort, deren erstes Glied x in einer niedrigeren als der ersten Potenz oder die erste Potenz x neben einem Coëfficienten, dessen Betrag grösser als 1 ist, enthält. Endlich bei positivem, beziehungsweise negativem x jene Reihen, in welchen auf $\pm x$ als erstes Glied ein mit ihm gleichbezeichnetes folgt. So kann a. a. O. p. 1176 die Reihe $x=90y+\ldots=Q(y)$ ausseracht gelassen werden.[1]

Ferners möge man a. a. O. p. 1178 nach Z. 4 einschalten: »Dazu, dass $G_n(x,y)$ die im Satze von Nr. 4 verlangte Beschaffenheit habe, ist hinreichend, dass die Reihen $G_n(x, \overline{\varphi}_1(x))$ u. s. w. mit einer Potenz der Veränderlichen, sei es x oder y, beginnen, deren Exponent nicht grösser als n ist«.[2]

---

[1] Die Berücksichtigung derselben bringt indess a. a. O. keinen Fehler mit sich. $\psi_1(y)$ ist zwar gleich y zu setzen. Da aber $G(Q(y),y)<G(y,y)$ ist, so ist, falls der erstere Ausdruck positiv ist, auch der letztere positiv. Wäre aber der erstere negativ, so könnte man daraus über das Zeichen des letzteren Nichts entnehmen. Wenn es sich also darum handelt, nachzuweisen, dass der Werth $G(0,0)=0$ kein Extrem von $G(x,y)$ ist, so müssen die im Texte angegebenen Reihen in der That weggelassen werden.

[2] Ausserdem bitte ich folgende Fehler in der Abhandlung im 100. Bande zu verbessern: S. 1167, Z. 4 v. u. statt Nr. 3 l. Nr. 1. — S. 1174, Z. 15 v. u. statt: nun l. nur, Z. 12 und 7 v. u. statt: grösste l. kleinste. — S. 1176, Z. 6 statt ∓ 27 l. -243 und streiche in Z. 7: »je nachdem x positiv oder negativ ist.« — Ferner ist Bd. 99, S. 508, Z. 8 v. u. nach »Coëfficienten« einzuschalten: »welche nicht eine geradfache Wurzel der Gleichung $G(x,y)=0$ ist«. Es werden

2. Die beiden Methoden führen, auf eine Function von m Veränderlichen $x_1, x_2 \dots x_m$ angewandt, in letzter Linie[1] darauf hinaus, $m-1$ Gleichungen zwischen $x_1, x_2 \dots x_m$ nach $m-1$ dieser Veränderlichen durch Reihen aufzulösen. So verlangt das auf Lagrange zurückgehende Verfahren, dass man z. B. die $m-1$ Gleichungen

$$\frac{\partial G}{\partial x_2} = 0 \dots \frac{\partial G}{\partial x_m} = 0, \tag{1}$$

worin G eine ganze Function von $x_1, x_2 \dots x_m$ ohne constantes Glied bedeutet, nach $x_2 \dots x_m$ in jeder möglichen Weise durch Reihen auflöse, welche nach steigenden ganzen oder gebrochenen Potenzen von x_1 fortschreiten und zugleich mit x_1 verschwinden. Dass das im Allgemeinen zu leisten ist, lässt sich leicht einsehen. Durch Elimination einer der Veränderlichen, z. B. x_m, aus den Gleichungen (1) werden wir $m-2$ Gleichungen zwischen $x_1 \dots x_{m-1}$

$$G_r^{(1)}(x_1 \dots x_{m-1}) = 0 \quad (r = 1, 2 \dots m-2) \tag{2}$$

gewinnen und hieraus durch Elimination einer anderen Veränderlichen, z. B. x_{m-1} $m-3$ Gleichungen zwischen $x_1 \dots x_{m-2}$ u. s. f. Auf diese Weise werden wir endlich zu zwei Gleichungen zwischen drei von den Veränderlichen, etwa $x_1 x_2 x_3$,

$$G_1^{(m-3)}(x_1, x_2, x_3) = 0 \qquad G_2^{(m-3)}(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{3}$$

gelangen. Bilden wir ihre Resultante etwa nach x_3, so erhalten wir die Schlussgleichung

$$G^{(m-2)}(x_1, x_2) = 0. \tag{4}$$

Wir stellen nun alle Reihen auf, welche nach steigenden ganzen oder gebrochenen Potenzen von x_1 fortschreiten, zugleich mit x_1 verschwinden und in die linke Seite von (4) anstatt x_2 eingeführt, sie zum Verschwinden bringen. Jeder solchen Reihe $x_2 = P_2(x_1)$ entspricht mindestens eine gemeinschaftliche Wurzel

---

nämlich durch das a. a. O. erwähnte Verfahren auch solche wiederholte Wurzeln y dieser Gleichung gefunden, welche ganze Functionen von x ohne constantes Glied sind.

[1] Vergl. Bd. 99, S. 507; Bd. 100, S. 1179.

x_3 der Gleichungen (3). Um sie alle zu finden, braucht man nur jede der Gleichungen

$$G_1^{(m-1}(x_1, P_2(x_1), x_3) = 0 \qquad G_2^{(m-1}(x_1, P_2(x_1), x_3) = 0$$

nach x_3 auf jede Weise durch nach steigenden ganzen oder gebrochenen Potenzen von x_1 fortschreitenden Reihen ohne constantes Glied aufzulösen und die beiden Gleichungen genügenden abzusondern. Ist eine von diesen letzteren Reihen $x_3 = P_3(x_1)$, so gewinnt man aus den (3) vorhergehenden Eliminationsgleichungen, nachdem man darin $x_2 = P_2(x_1)$, $x_3 = P_3(x_1)$ gesetzt hat, in der soeben beschriebenen Art mindestens eine Potenzreihe von $x_1 : P_4(x_1)$, welche für x_4 in eine jede Gleichung eingesetzt, sie identisch erfüllt. Fährt man so fort, bis man die Gleichungen (1) nach x_m aufgelöst hat, so gelangt man zu Auflösungen der Gleichungen (1):

$$x_2 = P_2(x_1),\ x_3 = P_3(x_1)\ldots x_m = P_m(x_1),$$

welche nach steigenden ganzen oder gebrochenen Potenzen von x_1 fortschreitende Reihen ohne constantes Glied sind, und zwar zu allen solchen Systemen.

3. Allein nicht immer führt das auseinandergesetzte Verfahren zum gewünschten Ziele. Es ist ja möglich, dass die zu einer der Zeilen (1), (2)...(3) gehörigen Gleichungen bei der Elimination einer der Veränderlichen nicht so viele Gleichungen liefern, um die noch übrigen Veränderlichen bis auf zwei aus ihnen eliminiren zu können. Dies tritt dann ein, wenn von ihren linken Seiten mindestens zwei einen in allen oder einem Theile der Veränderlichen ganzen Theiler T gemeinsam haben. Ihre Resultante nach einer von ihnen verschwindet dann identisch, und es geht das in Rede stehende System von Gleichungen im Allgemeinen in zwei solche Systeme über, wovon eines mindestens eine Gleichung weniger als dieses enthält. Zwar wenn T nicht zugleich mit allen in ihm vorhandenen Veränderlichen verschwindet, oder wenn T wohl mit ihnen zugleich verschwindet, aber bei hinlänglicher Verkleinerung der absoluten Beträge der Veränderlichen für kein anderes reelle System derselben, so darf man den Factor T ohne Weiteres als bedeutungslos weglassen. Wenn aber jeder positiven Zahl ε Systeme von

reellen Werthen der Veränderlichen, ein jeder absolut genommen kleiner als ε, so entsprechen, dass für sie $T = 0$ ist, so haben wir, wie bemerkt, die Gleichung $T = 0$ zusammenzustellen mit jener, deren linke Seite nicht durch T theilbar ist. Zu jedem Systeme der Veränderlichen, welches diesen Gleichungen genügt, lassen sich Werthe der übrigen so bestimmen, dass für diese Werthe von $x_1 \ldots x_m$ zusammen die Gleichungen (1) bestehen.

4. Fassen wir nun in der That das Lagrange'sche Verfahren, bei welchem die Werthe von $G(x_1 x_2 \ldots x_m)$ unter der Voraussetzung, dass x_1 constant und die übrigen Veränderlichen mit x_1 durch die Gleichungen (1) zusammenhängen, zu bestimmen sind, ins Auge, so ist zu zeigen, dass die Function $G(x_1 x_2 \ldots x_m)$, auch wenn zwischen $x_1 \ldots x_m$ nur die am Schlusse von Nr. 3 erwähnten Gleichungen, welche zur Darstellung von $x_2 \ldots x_m$ als Functionen von x_1 nicht ausreichen, bestehen, bloss von x_1 abhängt.

Der Beweis dieses Satzes ist sehr einfach. Nehmen wir an, jedem Systeme beliebiger Werthe von $x_1 \ldots x_r$ lassen sich Werthe der übrigen Veränderlichen $x_{r+1} \ldots x_m$ so zuordnen, dass für alle diese Werthe $x_1 \ldots x_m$ zusammen, die Functionen $\frac{\partial G}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial G}{\partial x_m}$ zugleich verschwinden und denken wir uns für jedes solche System $x_1 \ldots x_m$ die ganze Function $G(x_1 \ldots x_m)$ berechnet. Nun betrachten wir $x_{r+1} \ldots x_m$ als Functionen von $x_1 \ldots x_r$. Dann erscheint dieses $G(x_1 \ldots x_m)$ als zusammengesetzte Function von $x_1 \ldots x_r$, welche wir mit $\psi(x_1 \ldots x_r)$ bezeichnen wollen. Wir differenziren ψ nach $x_2 \ldots x_r$. Unterscheiden wir die aus $\frac{\partial G}{\partial x_2}$ u. s. w. durch die soeben erwähnte Substitution für $x_{r+1} \ldots x_m$ hervorgehenden Ergebnisse von den allgemeinen $\frac{\partial G}{\partial x_2}$ u. s. w., worin $x_1 \ldots x_m$ von einander unabhängig sind, durch Klammern, so finden wir

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial G}{\partial x_k}\right) + \left(\frac{\partial G}{\partial x_{r+1}}\right)\frac{\partial x_{r+1}}{\partial x_k} + \ldots + \left(\frac{\partial G}{\partial x_m}\right)\frac{\partial x_m}{\partial x_k}$$
$$(k = 2 \ldots r).$$

Für die in Rede stehenden Werthsysteme $x_1 \ldots x_m$ verschwinden $\left(\frac{\partial G}{\partial x_2}\right) \ldots \left(\frac{\partial G}{\partial x_m}\right)$; es ist mithin

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = 0 \ldots \frac{\partial \psi}{\partial x_r} = 0.$$

Also hängt $\psi(x_1 \ldots x_r)$ thatsächlich bloss von x_1 ab. Dieser Schluss gilt für jedes zusammengehörige System eindeutig definirter Zweige der Functionen $x_{r+1} \ldots x_m$, woferne die Werthe $x_1 \ldots x_r$ nicht gerade zu einer singulären Stelle derselben gehören. Für die Praxis dürfte schon das soeben erlangte Ergebniss genügen. Man kann es aber insoferne vervollständigen, als man die Beziehung der Functionen von x_1, welche verschiedenen Systemen eindeutiger Zweige von $x_{r+1} \ldots x_m$ entsprechen, zu einander festzustellen sucht. Das wollen wir wenigstens an dem einzigen von den hier berührten Fällen, welcher bei Ermittelung der Extreme einer ganzen Function der drei Veränderlichen $x_1 x_2 x_3$ auftreten kann, durchführen.

5. Hilfssätze. 1. »Haben die beiden partiellen Ableitungen einer ganzen Function von x und y: $G(x, y)$, d. h. $\frac{\partial G}{\partial x}$ und $\frac{\partial G}{\partial y}$ einen zugleich mit x und y verschwindenden, irreduciblen Theiler $H(x, y)$ gemein, so lässt sich $G(x, y)$ auf die Form bringen:

$$G(x, y) = H(x, y)^2 K(x, y) + c,$$

worin auch $K(x, y)$ eine ganze Function von xy, c eine Constante bedeutet.« — Dabei soll $H(x, y)$ bei Zulassung aller reellen und complexen Zahlen unzerlegbar sein, so dass z. B. x^2+y^2 als das Product der beiden linearen Factoren $x+yi$ und $x-yi$ erscheint.

Beweis. Es genügt anzunehmen, dass in $H(x, y)$ zum mindesten y wirklich vorkommt. Da $H(0, 0) = 0$ ist, so gibt es wenigstens eine nach steigenden ganzen oder gebrochenen Potenzen von x fortschreitende Reihe $P(x)$ ohne constantes Glied, wofür die hinsichtlich x identische Gleichung $H(x, P(x)) = 0$ besteht. Bilden wir $G(x, P(x)) = \varphi(x)$, so schliessen wir wie oben, dass

$$\varphi'(x) = \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right) P'(x)$$

ist $\frac{\partial G}{\partial x}$ und $\frac{\partial G}{\partial y}$ enthalten beide den Factor $H(x, y)$; also ist

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi'(x) = 0.$$

$\varphi(x)$ ist mithin eine Constante, und zwar ist $\varphi(x) = G(0, 0)$. Betrachten wir nun die ganze Function von x und y:

$$G_1(x, y) = G(x, y) - G(0, 0)$$

als solche von y, so haben die Gleichungen $G_1(x, y) = 0$ und

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial y} = 0$$

die Wurzel $y = P(x)$ gemein, somit enthält $G_1(x, y)$ den Factor $(y - P(x))^2$. Bemerken wir zunächst nur, dass die Gleichungen $G_1(x, y) = 0$ und $H(x, y) = 0$ in der Umgebung der Stelle $x = 0$, $y = 0$ für jeden Werth von x eine gemeinsame Lösung $y = P(x)$ haben. Daraus folgt nämlich, dass $G_1(x, y)$ durch $H(x, y)$ theilbar ist.[1] Genau dasselbe gilt aber auch von den beiden Ausdrücken $G_1(x, y) : H(x, y)$ und $H(x, y)$. Wir finden demnach

$$G_1(x, y) = G(x, y) - G(0, 0) = H(x, y)^2 K(x, y),$$

worin $K(x, y)$ eine ganze Function von x und y bedeutet, w. z. b. w.

Um zu zeigen, dass der erste Satz richtig bleibt, wenn wir $H(x, y)$ bloss als unzerlegbar bei alleiniger Zulassung der reellen Zahlen betrachten, haben wir noch zu zeigen den

2. Satz. »Haben $\frac{\partial G}{\partial x}$ und $\frac{\partial G}{\partial y}$ die mit x und y zugleich verschwindenden irreduciblen Theiler $H_1(x, y) \ldots H_k(x, y)$, welche von einander verschieden sind, gemein, so lässt sich $G(x, y)$ auf die Form bringen:

$$G(x, y) = \{H_1(x, y) \ldots H_k(x, y)\}^2 K(x, y) + c,$$

---

[1] Vergl. Biermann, Theorie der analytischen Functionen, 1887, S. 196.

worin $K(x, y)$ eine ganze Function von x und y, c eine Constante bedeutet.« — Dabei sollen $H_1(x, y) \ldots H_k(x, y)$ wie oben $H(x, y)$ gegenüber den complexen Zahlen unzerlegbar sein.

Beweis. Wir haben nach dem ersten Satze zunächst nur

$$G(x, y) = H_1(x, y)^2 K_1(x, y) + G(0, 0) = H_2(x, y)^2 K_2(x, y) + G(0, 0)$$

unter $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$ ganze Functionen von x und y verstanden.

Mithin ist aber

$$H_1(x, y)^2 K_1(x, y) = H_2(x, y)^2 K_2(x, y).$$

Da $H_1(x, y)$ von $H_2(x, y)$ verschieden ist, so muss $K_1(x, y)$ durch $H_2(x, y)^2$ theilbar sein. Also ist $K_1(x, y) = H_2(x, y)^2 L_1(x, y)$ zu setzen, worin $L_1(x, y)$ ein in x und y ganzes Polynom bezeichnet. Wir finden demnach

$$G(x, y) - G(0, 0) = H_1(x, y)^2 H_2(x, y)^2 L_1(x, y).$$

Weiter muss aber

$$G(x, y) = H_3(x, y)^2 K_3(x, y) + G(0, 0)$$

sein, woraus durch Zusammenstellung mit der vorhergehenden Gleichung sich ergibt, dass $L_1(x, y) = H_3(x, y)^2 L_2(x, y)$, also

$$G(x, y) - G(0, 0) = \{H_1(x, y) H_2(x, y) H_3(x, y)\}^2 L_2(x, y)$$

sein muss, unter $L_2(x, y)$ eine ganze Function von xy verstanden. U. s. f.

Aus dem ersten Satze leiten wir noch den nachstehenden ab, wenn wir auch davon zunächst keinen Gebrauch machen werden.

3. Satz. »Es sei $G(y_1 \ldots y_m)$ eine ganze Function von $y_1 \ldots y_m$ ($m \geqq 3$). Haben alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial G}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial G}{\partial y_m}$ einen (auch bei Zulassung der complexen Zahlen) irreducibeln Theiler $H(y_1 \ldots y_m)$, welcher bei der Substitution $y_1 = y_2 = \ldots = y_m = 0$ verschwindet, so ist $G(y_1 \ldots y_m) - G(0 \ldots 0)$ durch das Quadrat von $H(y_1 \ldots y_m)$ theilbar.«

Beweis. Kommt y_1 in $H(y_1 \ldots y_m)$ wirklich vor, so betrachten wir G und H zunächst als ganze Functionen von y_1

und y_2 allein. g, h seien ihre Dimensionen in Bezug auf y_1 und y_2. Nach dem ersten Satze muss dann die hinsichtlich y_1 und y_2 identische Gleichung

$$G(y_1 y_2 \ldots y_m) = H(y_1 y_2 \ldots y_m)^2 L(y_1, y_2) + M \qquad (a)$$

bestehen, worin $L(y_1, y_2)$ eine ganze Function $(g-2h)^{\text{ter}}$ Dimension von y_1 und y_2, M einen davon nicht abhängigen Ausdruck bedeutet. Denkt man sich G und H nach steigenden Potenzen von y_1 und y_2 geordnet und setzt

$$L(y_1, y_2) = \Sigma l_{r,s} y_1^r y_2^s \quad (0 \leqq r+s \leqq g-2h),$$

so erhält man durch Gleichsetzung der Coëfficienten der nämlichen Potenzen von y_1 und y_2 auf beiden Seiten von *(a)* lineare Gleichungen zur Bestimmung der Coëfficienten $l_{r,s}$ und M. Zufolge des ersten Satzes müssen sie eben ein System von Lösungen zulassen, welche demnach rationale Functionen von $y_3 \ldots y_m$ sein werden. Also sind in *(a)* $L(y_1 y_2)$ und M zunächst als rationale Functionen von $y_3 \ldots y_m$ anzusehen.

Aus *(a)* folgt durch Differenzirung nach y_r

$$\frac{\partial G}{\partial y_r} = H \left\{ 2 \frac{\partial H}{\partial y_r} L + H \frac{\partial L}{\partial y_r} \right\} + \frac{\partial M}{\partial y_r} \quad (r = 3 \ldots m) \qquad (b)$$

Jedem beliebigen Systeme $y_2, y_3 \ldots y_m$ entspricht zufolge der Gleichung

$$H(y_1, y_2 \ldots y_m) = 0$$

ein oder mehrere bestimmte Werthe von y_1. Setzen wir einen derselben in *(b)* ein, so verschwinden dafür $\frac{\partial G}{\partial y_r}$ und H, und es ergibt sich, dass

$$\frac{\partial M}{\partial y_r} = 0 \quad (r = 3 \ldots m)$$

ist. M hängt somit von $y_3 \ldots y_m$ gar nicht ab, ist also eine Constante c.

Lässt man $L(y_1, y_2)$ nicht von vorneherein eine ganze Function auch von $y_3 \ldots y_m$ sein, so sei die ganze Function von $y_3 \ldots y_m : J(y_3 \ldots y_m)$ der kleinste gemeinschaftliche Nenner

der Coëfficienten der nach Potenzen von y_1 und y_2 geordneten Function $L(y_1, y_2)$, und es sei

$$L(y_1, y_2) = K(y_1 \ldots y_m) : J(y_3 \ldots y_m),$$

worin der Zähler ganz in $y_1 \ldots y_m$ ist. Wir haben mithin nach *(a)*, da $M = c$ ist,

$$G(y_1 \ldots y_m) - c = \frac{H(y_1 \ldots y_m)^2 K(y_1 \ldots y_m)}{J(y_3 \ldots y_m)}.$$

Links steht eine ganze Function von $y_1 \ldots y_m$, somit auch rechts. Da H irreducibel ist, so muss $J(y_3 \ldots y_m)$ eine Constante sein, die wir gleich 1 setzen dürfen. Jetzt ergibt sich auch, dass $c = G(0 \ldots 0)$ ist.

6. Zusatz zu dem Lagrange'schen Verfahren, die Frage zu entscheiden, ob für eine ganze Function von $x_1 x_2 x_3$ $G(x_1, x_2, x_3)$ der Werth $G(0, 0, 0) = 0$ ein Extrem ist oder nicht.[1] Dabei kommt es im Wesentlichen darauf an, die Gleichungen

$$\frac{\partial G}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial G}{\partial x_3} = 0$$

bei constantem x_1, dessen Betrag jedoch unter einer gegebenen Zahl liegen darf, nach x_2 und x_3 aufzulösen und die dafür gefundenen Reihen in $G(x_1, x_2, x_3)$ einzusetzen. Wie schon in Nr. 4 bemerkt ist, haben wir noch zu untersuchen, was ein gemeinsamer Theiler von $\frac{\partial G}{\partial x_2}$ und $\frac{\partial G}{\partial x_3}$: $H(x_1, x_2, x_3)$ hier in dem Falle zu bedeuten hat, dass er ausser für $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ für andere Systeme von reellen Werthen $x_1 x_2 x_3$, deren Beträge beliebig klein sind, verschwindet.

Sehen wir nun G und H zunächst als ganze Functionen von x_2 und x_3 allein an, so finden wir durch Anwendung des ersten Satzes von Nr. 5, dass eine in Bezug auf $x_2 x_3$ identische Gleichung von der Form

$$G(x_1 x_2 x_3) = H(x_1 x_2 x_3)^2 K(x_2, x_3) + M \qquad (c)$$

besteht, worin $K(x_2, x_3)$ eine ganze Function von x_2 und x_3 ist. Hieraus können wir durch eine Überlegung, welche wir schon

---

[1] Vergl. Bd. 100, S. 1179.

beim Beweise des dritten Satzes in Nr. 5 anstellen müssten, schliessen, dass $K(x_2 x_3)$ und M rationale Functionen von x_1 sind. Wir gelangen somit zum Satze: »Setzen wir in $G(x_1, x_2, x_3)$ für x_2 und x_3 ein System von Werthen, das bei willkürlichem x_1 die Gleichung $H(x_1, x_2, x_3) = 0$ befriedigt, so geht $G(x_1, x_2, x_3)$ in eine rationale Function M von x_1 allein über.« Diese Function von M von x_1 ist den a. a. O. aufgezählten Functionen von x_1 anzureihen, wenn man die obere und untere Grenze von $G(x_1, x_2, x_3)$ bei constantem x_1 ermitteln will.

7. Zusatz zu dem Scheeffer'schen Verfahren, die am Eingange von Nr. 6 angeführte Frage zu entscheiden.[1]

Nach demselben sind die Gleichungen

$$x_2 \frac{\partial G}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial G}{\partial x_2} = 0 \quad x_3 \frac{\partial G}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial G}{\partial x_3} = 0 \quad x_1 \frac{\partial G}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial G}{\partial x_1} = 0 \qquad (1)$$

(wovon eine eine Folge der beiden andern ist) und

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2 \quad (r > 0) \qquad (2)$$

nach $x_1 x_2 x_3$ in jeder möglichen Weise durch Reihen nach steigenden ganzen oder gebrochenen Potenzen von r ohne constantes Glied aufzulösen und hierauf diese Reihen anstatt $x_1 x_2 x_3$ in $G(x_1, x_2, x_3)$ einzusetzen. Wie a. a. O. dargelegt ist, lassen sich alle die genannten Systeme von Reihen stets ermitteln, wenn die linken Seiten der Gleichungen (1) nicht durch eine und dieselbe ganze Function $H(x_1, x_2, x_3)$ theilbar sind, welche nicht bloss für das System $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, sondern auch für andere Systeme reeller Werthe $x_1 x_2 x_3$ von beliebig kleinem absoluten Betrage verschwindet und dabei nicht etwa eine ganze Function von r^2 ist. Wie früher, so möge auch jetzt $H(x_1, x_2, x_3)$ irreducibel sein, jedoch bei Zulassung bloss der reellen Zahlen.[2]

Da $H(x_1, x_2, x_3)$ keine ganze Function von r^2 ist, so können die Ausdrücke

---

[1] Vergl. Bd. 99, S. 506. Daselbst sind die unabhängigen Veränderlichen mit $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ bezeichnet.

[2] Es gilt jedoch das Folgende auch, wenn die Unzerlegbarkeit von $H(x_1, x_2, x_3)$ auf die complexen Zahlen bezogen ist.

$$x_2\frac{\partial H}{\partial x_3}-x_3\frac{\partial H}{\partial x_2}\quad x_3\frac{\partial H}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial H}{\partial x_3}\quad x_1\frac{\partial H}{\partial x_2}-x_2\frac{\partial H}{\partial x_1}$$

nicht alle identisch Null sein. Nehmen wir also z. B. an, der erste sei nicht Null. Durch die Gleichungen

$$H(x_1, x_2, x_3)=0 \quad x_1^2+x_2^2+x_3^2=r^2 \tag{3}$$

werden $x_2 x_3$ als algebraische Functionen von x_1 und r definirt. Die zu einem Werthsysteme $x_1 x_2 x_3$, wofür $x\frac{\partial H}{\partial x_3}-x_3\frac{\partial H}{\partial x_2}$ nicht verschwindet, gehörigen partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_3}{\partial x_1}$ ergeben sich aus den Gleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial x_1}+\frac{\partial H}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_1}+\frac{\partial H}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_1}=0 \tag{4}$$

$$x_1+x_2\frac{\partial x_2}{\partial x_1}+x_3\frac{\partial x_3}{\partial x_1}=0. \tag{5}$$

Führen wir nun in $G(x_1 x_2 x_3)$ für $x_2 x_3$ zwei zusammengehörige eindeutige Zweige der soeben definirten Functionen von x_1 und r ein, so geht G in eine Function von x_1 und r: $\varphi(x_1, r)$ über. Wir haben alsdann

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}=\frac{\partial G}{\partial x_1}+\frac{\partial G}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_1}+\frac{\partial G}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_1}. \tag{6}$$

Eliminirt man aus den Gleichungen (4)—(6) $\frac{\partial x_2}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial x_3}{\partial x_1}$, so erhält man

$$\left(x_2\frac{\partial H}{\partial x_3}-x_3\frac{\partial H}{\partial x_2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{\partial H}{\partial x_1} & \frac{\partial H}{\partial x_2} & \frac{\partial H}{\partial x_3} \\ \frac{\partial G}{\partial x_1} & \frac{\partial G}{\partial x_2} & \frac{\partial G}{\partial x_3}\end{vmatrix}$$

und hieraus vermöge der Gleichungen (1)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}=0.$$

$\varphi(x_1, r)$ hängt somit von x_1 gar nicht ab, ist also Function von r allein.

Es dürfte aber nicht immer jedem Paare zusammengehöriger Zweige der Functionen $x_2 x_3$ von x_1 und r die nämliche Function von r entsprechen, da die Resultante der drei Gleichungen $G(x_1 x_2 x_3) = W$ und (3) nach x_2 und x_3, welche nur r^2 und W enthält, reducibel sein kann.

Auf die nämliche Weise lassen sich die ähnlichen Fragen, welche bei Ermittelung der Extreme von ganzen Functionen von mehr als drei Veränderlichen nach dem Scheeffer'schen Verfahren auftauchen können, erledigen.



Über die Alphonsinischen Tafeln und die im Besitze der k. k. Hofbibliothek in Wien befindlichen Handschriften derselben

von

Dr. **Norbert Herz** in Wien.

In den Jahren 1863 bis 1867 erschienen im Drucke die »Libros del Saber de Astronomia del Rey. D. Alfonso X de Castilla; Copilados, annotados, y commentados por Don Manuel Rico y Sinobas«, in welchen 75 verschiedene Handschriften angeführt sind, deren Gegenstand zum grossen Theile die Alphonsinischen Tafeln bilden. Unter diesen 75 Codices sind namentlich die folgenden anzuführen, welche theils vollständig, theils fragmentarisch die erwähnten Planetentafeln enthalten:

Codex 23 (Morella); 25 (Cardinal Celada); 27 (Nr. 6967 der Pariser Bibliothek); 30 (Nr. 7284 derselben Bibliothek, genannt »Tabulas Alfonsies de Oxford«); 31 (von Juan de Linneriis, lateinisch, Bibliothek von Colbert); 32 (Tabulas Alfonsies Cremonenses); 36 (Robert de la Rue); 38 (Juan de Monte Fortii, redactados por el Duque Juan de Lancaster); 40 (Tabulas Astronomicas del Rey D. Pedro de Aragon); 44 (Tabulas Alfonsies de Rodolf Erhardi); 45 (Tabulas Alfonsies Cremonenses del Museo Brittanico); 46, 47, 48 (Nr. 2288 und 2352 der Bibliothek in Berlin); 50 (Bibliothek Cosanotense, Rom); 51 (Bibliothek des Palazzi Corsini); 52 (Bibliothek des Collegio Romano); 57, 58 (Vaticanische Bibliothek).

Ferner als Tabulae Toletanae bezeichnet: Codex 62, 63 (Nr. 7336 und 7431 der Pariser Bibliothek).

Dass die Zahl der Handschriften dieser Tafeln noch so bedeutend ist, dürfte wesentlich in dem Umstande seine Erklärung finden, dass sie die ersten grossen astronomischen Tafeln waren, welche im Abendlande ausgedehntere Verwendung fanden, dass sie aber die letzten vor der Erfindung der Buchdruckerkunst, daher die letzten durch wiederholte Abschriften verbreiteten waren. Die k. k. Hofbibliothek in Wien besitzt sechs Codices von den Alphonsinischen Tafeln, und zwar Nr. 2288, 2352, 3872, 5245, 5299 und 5478 der Handschriftensammlung, deren jedoch in den Libros del Saber de Astronomia nicht Erwähnung geschieht, wenn man nicht bei Codex 46, 47, 48 einen Druckfehler annehmen will, indem die dort als Berliner Handschriften angeführten Codices gemäss ihren Nummern mit den in Wien befindlichen übereinstimmen.

Ehe ich auf die betreffenden Handschriften näher eingehe, möchte ich zunächst Einiges über die Libros del Saber selbst und über die Alphonsinischen Tafeln im Allgemeinen bemerken.

I. Die Libros del Saber de Astronomia scheinen im Gegensatze zu den eigentlichen Alphonsinischen Tafeln, welche einem vorzugsweise astronomischen Gebrauche bestimmt waren, mehr astrologischen Zwecken gedient zu haben. Es geht dies unzweideutig daraus hervor, dass die in denselben angeführten Zahlenwerthe in einer, selbst für jene Zeiten nur als rohe Näherungen zu bezeichnenden Genauigkeit angegeben sind. So wird die Schiefe der Ekliptik zu $23^1/_2{}^\circ$ angegeben (III. Band, S. 47); die mittlere tägliche Bewegung der Sonne zu 1° (III, S. 131).[1] Auf S. 262 des III. Bandes finden sich Angaben über »moradas primera« und »moradas secunda« für die fünf damals bekannten Planeten, aber nur auf ganze Grade, ohne Minuten und Secunden. Die Bedeutung dieser Zahlen ist nicht leicht ersichtlich; es dürften wohl mittlere Längen und Anomalien für eine gewisse, jedoch nicht angegebene Epoche sein. Desgleichen sind die im IV. Bande gegebenen Tabulas Alfonsies, welche für die Ära

[1] Hier wird nämlich angegeben, dass die Zeit, in welcher sich die Sonne m' weiterbewegt, gleich $(2m \times 24):120 = 0{\cdot}4m$ Stunden ist, was eben auf die tägliche Bewegung 1° führt.

Alfonsi gerechnet sind, durchaus keine astronomischen Tafeln. Sie enthalten direct die scheinbaren Örter der Planeten für einen Cyclus von mehreren Jahren, abgekürzt auf ganze Grade, und zwar für Mercur, Venus und Mars von fünf zu fünf Tagen, für Jupiter und Saturn von zehn zu zehn Tagen, für den Mercur für einen Cyclus von 46 Jahren, für die Venus für einen Cyclus von 8 Jahren, für den Mars für 79 Jahre, für Jupiter für 83 Jahre und für Saturn für 59 Jahre entsprechend den bereits Hipparch bekannten Planetencyclen. Für die Sonne werden die wahren Örter für einen Cyclus von vier julianischen Jahren auf Grade, Minuten und Secunden gegeben.

Die Handschrift, nach welcher die Libros del Saber de Astronomia gedruckt wurden, scheint selbst eine Ineinanderschiebung mehrerer Codices zu sein; es scheint dieses unzweifelhaft daraus hervorzugehen, dass sich Bearbeitungen desselben Themas wiederholt finden. So ist Band II, S. 213 ein Capitel »De Saber el retornamiento de la planeta ò su enderezamiento«, ein Capitel, in welchem allerdings nicht die Berechnung der Stationen und Retrogrodationen aus den Planetenelementen, sondern nur die Art und Weise angegeben ist, wie man aus den Beobachtungen schliessen kann, ob der Planet in directer oder retrograder Bewegung begriffen ist, oder sich in seinen Stationen befindet. Trotzdem gerade diese Discussion doch äusserst einfach ist, und gerade keiner besonderen Anleitung bedürfte, findet sich genau dasselbe, nur in etwas anderen Worten im III. Bande, S. 219 wieder. Im selben Bande, S. 113, findet sich die Bestimmung der Längendifferenz zweier Orte aus Mondesfinsternissen angegeben; dasselbe wird nochmals S. 193 wiederholt. Derartige, mitunter mehrfache Wiederholungen finden sich fast über jedes Thema. Besonders charakteristisch jedoch sind die Bücher, welche von den Planetenbewegungen handeln, die »Libros de las laminas de los VII Planetas« (Band III, S. 239 ff.), wo die Zahlenwerthe in den verschiedenen Abtheilungen nicht übereinstimmen, wie aus dem Folgenden hervorgeht.

Die Richtungen der Apsiden (Alaux) finden sich angegeben:

für Saturn	Jupiter	Mars	Sonne	Venus	Mercur	
247°	167°	130°	85°	85°	203°	[1]
246 40	166 40	129 10	—	83 27	203 40	[2]
247 50	157 $^1/_4$	129	—	85 50	—	[3]
240 6	160	121 40	—	78 30	200	[4]

Für die Excentricitäten sind die Werthe angegeben:

für Saturn	Jupiter	Mars	Venus	Mercur	
$3^1/_2$p.	$5^1/_2$p.	6p.	$2^1/_2$p.	7p.	[5]
3 19′	2 47′	5 7′	—	—	[6]
6 32	5 33	10 14	—	—	[7]

Die Halbmesser der Epicykel sind:

für Saturn	Jupiter	Mars	Venus	Mercur	
$11^1/_2$p.	$6^1/_2$p.	$39^1/_2$p.	43p.	22p.	[8]
11 30′	—	33 10′	28 30′	18 30′	[9]

Bei dem ersten Codex, welchem die Zahlen auf S. 245 bis 253 entnommen sind, findet sich für alle Planeten derselbe Fehler: der Mittelpunkt der gleichmässigen Bewegung (des yguador) halbirt hier die Excentricität des levador (des Deferenten), während gemäss allen Planetentheorien die Excentricität des levador die Hälfte derjenigen des yguador sein sollte, wie dies bei den Zahlen S. 275 stattfindet. Der Fehler scheint durch Übertragung der Ptolemäischen Mercurstheorie entstanden zu sein. Auch für die Mercurstheorie finden sich zwei Darstellungen, von denen die eine mit unveränderter Wiedergabe der Ptolemäischen Zahlen hinter der Darstellung des

[1] Bd. III, S. 245—253.

[2] Bd. III, S. 262.

[3] Bd. III, S. 273: Vom Frühlingspunkt. Hier muss es natürlich bei Jupiter $167^1/_4$° lauten.

[4] Bd. III, S. 273. Vom Kopf des Widders.

[5] Bd. III, S. 245—253.

[6] Bd. III, S. 275: Excentricität des levador; für die Sonne gleich 3p. 44′.

[7] Bd. III, S. 275: Excentricität des yguador.

[8] Bd. III, S. 255.

[9] Bd. III, S. 282.

Almagest an Klarheit und Präcision weit zurücksteht, während die zweite, etwas bessere Darlegung geänderte Zahlenwerthe gibt. Ich möchte noch erwähnen, dass sich S. 282 des III. Bandes eine Zeichnung für die Mercursbahn findet, welche hier elliptisch dargestellt ist, bei welcher aber die Sonne sich im Mittelpunkt befindet. Eine Erklärung findet sich zu dieser Tafel nicht, und dürfte dieselbe wohl eher als eine spätere Einschiebung der missverstandenen Kepler'schen Theorie anzusehen sein, denn als ein Beweis für die Kenntniss oder die Hypothese einer elliptischen Mercursbahn zu Alphons X. Zeiten.

Über das Alter der verschiedenen Codices lässt sich nichts Bestimmtes angeben,[1] doch mag darauf hingewiesen werden, dass sich im III. Bande, S. 11, eine Globularprojection vorfindet, die man bisher als Projection von Nicolosi (1660) bezeichnet hat,[2] die sich aber allerdings auch schon in der Ausgabe der Tabulae Rudolphinae von 1627 findet, und dass im selben Bande, S. 143, eine Projection mit geradlinigen, aquidistanten Parallelkreisen und kreisförmigen, im Äquator äquidistanten Meridianen vorkömmt, die man bisher Apian zuschrieb.[3]

II. Die eigentlichen »Alphonsinischen Tafeln« enthalten keine theoretischen Darlegungen; solche scheinen überhaupt keiner Handschrift beigefügt zu sein; doch sind die Tafeln, wie aus den Darlegungen Peurbach's folgt, dessen »Theoricae novae planetarum« ganz wohl als der Text zu denselben betrachtet werden kann, von denjenigen im Almagest der An-

---

[1] Vieles was Alphons X. zugeschrieben wird, dürfte wohl in eine spätere Zeit, vielleicht in die Zeit Alphons XI. fallen. So wurde ja auch ein nachweislich nach Alphons XI. verfasstes Werk: »Libro de la monteria« in die Zeit Alphons X. gesetzt. Siehe hierüber D. José Guttiriez de la Vega, Libro de la monteria del Rey Alfonsi XI. Madrid, 1877.

[2] Siehe mein »Lehrbuch der Landkartenprojectionen«, S. 148. Es kann nun daraus allerdings kein Schluss auf das Alter des diesbezüglichen Manuscriptes gezogen werden, da die jedenfalls sehr einfache Globularprojection ganz wohl dem Zeitalter Alphons X. zugeschrieben werden kann.

[3] Ibid. S. 166. Apian's Cosmographie, in welcher diese Projection (eigentlich eine davon etwas weniges verschiedene, bei welcher die Grade im Äquator um $^1/_3$ kleiner sind) auftritt, erschien 1524 im Drucke. Allein auch diese Projectionsmethode ist so elementar, dass sie ganz wohl schon früher benützt worden sein konnte.

lage nach nicht wesentlich verschieden. Die aus dem Almagest ersichtlichen, jedenfalls auch von den spanischen Astronomen eingeschlagenen, ziemlich mühsamen Methoden zur Bestimmung der Elemente der Planetenbahnen, die Beobachtungen, welche zur Verbesserung dieser Elemente verwendet wurden, sind nirgends ersichtlich; was mitgetheilt wird, sind nur die resultirenden Tafeln, die, wenn auch von den Ptolemäischen nicht sehr verschieden, doch gewiss die vollständige Wiederholung aller aus dem Almagest bekannter Methoden erforderten, und zwar in umso grösserer Ausdehnung, als Beobachtungen vorlagen, denen die Tafeln, wenigstens bis zu einem gewissen Grade genügen sollten.

Endlich ist noch zu erwähnen, dass auch die zu Grunde gelegten Elemente, mit Ausnahme der mittleren Bewegungen nicht unmittelbar ersichtlich sind.

Bezüglich der Anordnung der Tafeln ist Folgendes zu bemerken: die mittleren Bewegungen werden für einen Tag ausgedrückt in Sexagenae (60°), Graden, Minuten, Secunden u. s. w. nach dem Sexagesimalsystem fortschreitend. Um die Bewegungen für ein beliebiges Intervall zu erhalten, wird dasselbe in 60^4, 60^3, 60^2, 60 Tagen, ferner in nach dem Sexagesimalsystem fortschreitenden Tagesbruchtheilen verwandelt. Es hat dieses den Vortheil, dass dieselbe Tafel für alle Complexe oder Bruchtheile der Tage gelten kann, wenn nur die Benennung entsprechend geändert wird. So werden für Sexagenae dierum die Grade, Minuten, Secunden.., Sexagenae, Grade, Minuten.. bedeuten; sie werden für $^1/_{60}$ Tage als Minuten, Secunden, Tertien... verwendet, u. s. w. Diese Anordnung, welche als consequente Durchführung des Sexagesimalsystemes anzusehen ist, erforderte eine Hilfstafel zur Verwandlung der Jahre, Monate, Tage, Stunden, Minuten... in das zu Grunde gelegte System;[1] diese Anordnung wurde auch in späteren Tafeln noch längere Zeit als Alphonsinisches System (secundum Alphonsinum) beibehalten, bis sich nach Kepler das decadische System allmälig Eingang verschaffte. Für die Ungleichheiten

[1] Die Hilfstafeln sind bereits derart angelegt, dass für jedes vorgelegte Datum aus einer beliebigen Ära die seit der Tafelepoche verflossene Zeit im zu Grunde gelegten Systeme unmittelbar entnommen werden kann.

finden sich zwei verschiedene Anordnungen, von denen die eine für den Mond, die andere für die fünf Planeten verwendet wird, und welche den von Ptolemäus für seine Tafeln gewählten vollständig conform sind. Eine siderische Bewegung der Apsidenrichtungen ist noch nicht gefunden; die Apsiden der Deferenten werden als siderisch fest angenommen; die in den Tafeln enthaltene Veränderlichkeit derselben rührt nur von der Präcession her.

Die hauptsächlichste Änderung der Tafeln gegenüber den früheren betrifft die Bewegung der Äquinoctien, bei welcher die durch die Araber eingeführte Theorie der Trepidation selbstverständlich eine wichtige Rolle spielt. Während aber die Araber die Trepidation an Stelle der Präcession setzten, haben die Alphonsinischen Tafeln die Trepidation mit der Präcession vereinigt. Allein directe Beobachtungsresultate sind die Perioden beider Bewegungen gewiss nicht. Für die Periode der Präcession werden 49.000 Jahre, für diejenige der Trepidation 7000 Jahre angegeben, so dass die jährliche mittlere Bewegung der Äquinoctien 26"449, die jährliche Bewegung des Argumentes der Trepidation 185"143 wäre. Da die grösste, aus der Trepidation entstehende Verschiebung der wahren Äquinoctialpunkte gegen die mittleren gleich 9° angenommen erscheint, so würde der Ausdruck für die Gleichung der Äquinoctien

$$x = 26''449\,t + 9^\circ \sin(T_0 + 0^\circ 0514\,t)$$

sein, wenn T_0 das Argument zur Zeit der Epoche $t = 0$ wäre. Nachdem der periodische Theil dieser Veränderung aus

$$\sin x_1 = \frac{\sin \rho}{\sin \varepsilon} \sin(T_0 + 0^\circ 0514\,t)$$

folgt, wenn ρ der Halbmesser des die Trepidation erzeugenden kleinen Kreises und ε die Schiefe der Ekliptik ist, so wird in der den Tafeln zu Grunde gelegten Näherung

$$\rho = 9^\circ \sin \varepsilon = 3^\circ 35'7.$$

Für die jährliche Änderung der Längen würde daraus folgen

$$\frac{dx}{dt} = 26''449 + 29''059 \cos(T_0 + 0^\circ 0514\,t),$$

daher für Christi Geb. ($T_0 = 359° 12'6, t = 0$) nahe 55", für die Ära der Tafeln 40"; um 3000 nach Christi Geb. würde die jährliche Änderung nahe Null, sie würde dann negativ bis zu dem Maximalbetrage —2"6, u. s. w.

Die Tafeln enthalten die »Radices« (Constanten der Argumente) für die Epochen: diluvii, nabucodonozor, alexandri magni, caesaris, incarnationis, alhegirae, yezdegirt, alfonsi, bezogen auf den Meridian von Toledo.[1] Differentia incarnationis et regis Alphonsi $= 2^3.6^2.57^1.59^d = 457.079$ Tage, woraus Ära Alphonsi = 1. Juni 1252.

Die Differenz der zu den verschiedenen Epochen gehörigen Werthe der Apogeen für die einzelnen Planeten ist gleich der Präcession in der Zwischenzeit, z. B. für die Ära incarnationis und Alphonsi gleich 9° 11'38"37‴, gleich der Präcession für 457.079 Tage (natürlich der in der Tafel angenommenen Präcession), was auch der Bezeichnung der Präcession als motus medius augium et stellarum fixarum entspricht. Es gelten demnach die angegebenen Apogeen für den jeweiligen mittleren Frühlingspunkt der Epoche (sine motu octavae sphaerae). Die Werthe der übrigen Argumente für die verschiedenen Epochen sind jedoch durch unmittelbare Übertragung mit den in den Tafeln ersichtlichen mittleren Bewegungen erhalten. Der Werth irgend eines Argumentes G zu einer beliebigen Epoche (t Tage nach der Epoche der Tafel) wird, wenn γ die mittlere tägliche Bewegung ist

$$G = G_0 + \gamma t.$$

Wäre G eine mittlere Länge, γ die zugehörige mittlere siderische Bewegung, so würde der erhaltene Werth von G die mittlere Länge, gezählt von dem festen Frühlingspunkt der Tafelepoche sein; die mittlere Anomalie im Deferenten wird von dem als fest anzusehenden Apogeum aus gerechnet, ist daher von der Präcession unabhängig; desgleichen wird die mittlere Anomalie im Epicykel von derselben nicht beeinflusst. Bei den oberen Planeten Saturn, Jupiter und Mars wird sie in

[1] Doch finden sich in einzelnen Handschriften überdies andere Meridiane gewählt, worüber Näheres weiter unten erwähnt wird.

der Tafel allerdings aus den mittleren Bewegungen abgeleitet: da sie aber gleich der mittleren Länge des Planeten, vermindert um die mittlere Länge der Sonne ist, die Präcession (und eventuell Trepidation) aber beide Werthe gleich beeinflusst, so kann dieselbe hiefür ebenfalls übergangen werden.

Bezüglich der mittleren Länge selbst sind nun aber zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Ist γ wie oben angenommen die mittlere tägliche siderische Bewegung, so wären die G_0 der verschiedenen Epochen auf einen bestimmten Frühlingspunkt einer gewissen Hauptepoche bezogen.[1] Ist die Zwischenzeit zwischen dieser und einer anderen Tafelepoche t_0, so würde die Constante des Argumentes für diese zweite Tafelepoche, bezogen auf den Frühlingspunkt der Hauptepoche

$$G_0 = G_{00} + \gamma t_0$$

und bezogen auf den Frühlingspunkt der zweiten Tafelepoche

$$G'_0 = G_0 + \pi t_0,$$

wenn π die tägliche Präcession bedeutet. t Tage nach der zweiten Tafelepoche wäre der Werth des Argumentes

$$G = G'_0 + \gamma t$$

bezogen auf den mittleren Frühlingspunkt der zweiten Tafelepoche, oder

$$G' = G'_0 + \gamma t + \pi t$$

bezogen auf den instantanen, mittleren Frühlingspunkt.

2. Ist γ die mittlere tropische Bewegung, so ist das Argument $G_0 + \gamma t$ bezogen auf den instantanen Frühlingspunkt, und die Werthe der in der Tafel enthaltenen G_0 für die verschiedenen Epochen beziehen sich auf den jeweiligen Frühlingspunkt der Epoche.

[1] Würde also z. B. die aera incarnationis als solche gelten, so wäre G_0 die Constante des Argumentes (z. B. die mittlere Länge) für die Tafelepoche (z. B. für die aera alphonsi) bezogen auf den mittleren Frühlingspunkt der Hauptepoche (der aera incarnationis).

Ist nun Π_0 die Länge des Apogeums für eine gewisse Tafelepoche, so wäre die Anomalie im Deferenten $G - \Pi_0$ für den ersten Fall (γ siderisch), aber $G - (\Pi_0 + \pi t)$ für den zweiten Fall (γ tropisch). Es ist nirgends ersichtlich, ob die angegebenen mittleren Bewegungen siderische oder tropische Bewegungen sind; es ist aber auch nirgends ersichtlich, welche der angeführten Ären als Hauptära anzusehen ist. Gerade dieser letztere Punkt drängt jedoch zu der Annahme, dass die angegebenen Bewegungen als tropische anzusehen sind. Dass bei den Apogeen ausdrücklich bemerkt ist: »sine motu octavae sphaerae« ist nicht wesentlich, da damit nur gesagt sein soll, dass die Längen derselben vom mittleren Frühlingspunkte (ohne Rücksicht auf Trepidation) gezählt sind. Hingegen findet sich in den Erläuterungen vieler Handschriften[1] die Bemerkung: »Utrum locum augis cujuslibet planetae per tabulas invenire quere primo motum augium et stellarum fixarum non accepto radice aliquo sed modum dictum in mediis motibus«, so dass wohl für die Berechnung nicht der Werth Π_0, sondern $\Pi_0 + \pi t$ zu verwenden wäre.

In der Anleitung, welche in der Pariser Ausgabe des Paschasius Hamellius (1545) gegeben wird, wird jedoch die mittlere Anomalie im Deferenten einfach $G'_0 + \gamma t - \Pi'_0$ angegeben, wofür Π'_0 eine Constante, allerdings nicht die in der Ausgabe gegebene Radix incarnationis, zu nehmen ist. Es ist $\Pi'_0 = \Pi_0 + K$, wo die Constante K als Aux communis $= 0^s\ 19^\circ\ 32'\ 45''\ 24'''$ angenommen ist. Diese Zahl findet sich weder in den Handschriften, noch in der Ausgabe von 1483; sie ist jedoch gleich der Präcession + Trepidation von Christi Geb. bis 1476 nach Christi Geb.,[2] woraus folgt, dass auch hier γ als die mittlere tropische Bewegung angesehen ist, während K den Werth πt + Trepidation darstellt, wobei als Ausgangsepoche Christi Geb. angenommen ist, wo aber an Stelle des variabeln Werthes von t ein constanter, vielleicht mittlerer Werth genommen ist, welcher ungefähr der Zeit entsprechen müsste, in welcher die

[1] Z. B. zur Handschrift Nr. 2352 der k. k. Hofbibliothek in Wien.

[2] In der Pariser Ausgabe erscheint die Epoche 1476 Sept. 21, $6^h\ 1^m\ 36^s$ p. m. ohne nähere Begründung als Tafelepoche gewählt, während als Constanten die Radices incarnationis gewählt sind.

Handschrift verwendet worden sein mag. Da diese Zeit 1476 ist, so ist der Schluss naheliegend, dass das 1545 im Druck erschienene Werk nach einem Manuscripte gedruckt wurde, das um das Jahr 1476 entstanden sein mag, und bei dessen Verwendung der Unterschied $\pi(t$—1476 Sept. 21) für die nächstliegenden Jahre vernachlässigt wurde.

III. Nach diesen allgemeinen Auseinandersetzungen werde ich mich bezüglich der einzelnen oben angeführten Codices der k. k. Hofbibliothek in Wien etwas kürzer fassen können und im Folgenden nur auf die Unterschiede hinweisen, welche gegenüber der obigen allgemeinen Form auffallen.

1. Der Codex Nr. 2288 enthält selbst zwei Handschriften, von denen die zweite, ältere nur ein Fragment ist. Die erste ist im Handschriftencataloge als Abschrift eines Heilbronner Manuscriptes bezeichnet. Doch scheint es wahrscheinlicher, dass dieselbe die Abschrift eines Pariser Codex ist, welche aus den oberitalischen Provinzen nach Wien gekommen sein mag. Hiefür sprechen die folgenden beiden Gründe.

Um Planetentafeln für einen anderen Ort als für denjenigen zu benützen, für dessen Meridian die Tafeln angelegt sind, muss jede Zeit, für welche ein Planetenort gebraucht wird, durch Anbringen der Längendifferenz auf die Zeit des Normalmeridians (der Tafel) gebracht werden. Um diese Rechnung zu ersparen, kann man ein für allemal die Radices einfach auf den Meridian desjenigen Ortes übertragen, für welchen man die Tafel zu verwenden hat. In den verschiedenen Handschriften sind diese für andere Meridiane als für denjenigen von Toledo giltigen Radices in Fussnoten aufgenommen. Die Handschrift Nr. 2288 enthält nun die Radices incarnationis[1] ausser für den Meridian von Toledo noch für die Meridiane von Paris, Cremona und Verona, woraus eben der Schluss gezogen werden kann, dass eine für den Meridian von Paris (für Beobachtungen in Paris) genommene Abschrift vorlag, nach welcher die hier betrachtete Handschrift copirt wurde, und zwar für den Gebrauch in Cremona und Verona. Herr Custos v. Göldlin, dem ich meine Wahrnehmungen mittheilte, hatte die Güte, den Codex

[1] Die übrigen Radices nur für den Hauptmeridian von Toledo.

auch in anderer Richtung einer genaueren Prüfung zu unterwerfen, welche meine Wahrnehmungen bestätigte. Es liegt ein Palimpsest vor, bei welchem noch einzelne Stellen der ersten Schrift deutlich kenntlich sind. Aus denselben geht hervor, dass das Pergament ursprünglich als ein Rechnungsbuch verwendet wurde, als dessen Eigenthümer »Dom. Bonaventura de Cast. Massa superiore« ersichtlich ist. Massa super. (in der Provinz Rovigo, am Po gelegen) deutet zweifellos auf den italienischen Ursprung der Handschrift.

2. Der Codex Nr. 2352 stammt aus dem Jahre 1392 aus der berühmten Bibliothek des deutschen Kaisers Wenzel. Die Jahreszahl ist in dem den ersten Buchstaben der Handschrift verzierenden Bilde, welches einen auf einer Tafel schreibenden Mann darstellt, notirt. Die Handschrift trägt ganz den Charakter der auf Befehl dieses Kaisers ausgeführten Handschriften. Sie ist, so wie die berühmte Wenzelsbibel ebenfalls als ein Kunstwerk jener Zeiten merkwürdig. Die Anfangsbuchstaben jedes Capitels bilden kleine, polychrom ausgeführte, mit Gold reich ausgestattete Handzeichnungen, die im Charakter nicht gar verschieden sind von dem viel späteren Albrecht Dürer. Die Seiten sind mit reichen, ebenfalls polychrom ausgeführten, theils ornamentalen, theils figuralen Ranken eingefasst, so dass das ganze Werk als ein Denkmal der Kunst des XIV. Jahrhunderts betrachtet werden muss. Hingegen darf nicht unerwähnt bleiben, dass auf den astronomischen Theil der Handschrift nicht die gleiche Sorgfalt verwendet erscheint, indem sich in die Tafel selbst zahlreiche Abschreibefehler eingeschlichen haben.

Erwähnt mag noch werden, dass die Radices incarnationis »ad Meridianum Magdebg., Worma, Wratissl, Erford, Pragae und Wyenn« angeführt sind, so dass der Gebrauch dieser Tafeln für mehrere Orte erleichtert erscheint.

3. Zu den Codices Nr. 3872, 5245 und 5299 ist nicht viel zu erwähnen; der erstere enthält nebst den Radices incarnationis für den Meridian von Toledo dieselben auch noch bezogen auf die Meridiane »Erfordiae« und »Wiennam«; der zweite enthält die Alphonsinischen Tafeln, bezogen auf den Meridian von Krakau als Anhang zu anderen Tafeln, welche Mich. de Carnine

für denselben Meridian berechnete. Die Handschrift Nr. 5299 enthält dieselben als Anhang zu den von Blanchinus in grösserer Ausführlichkeit und mit dem Bestreben zur Erreichung einer weitergehenden Genauigkeit berechneten Planetentafeln.

Die Codices müssen sämmtlich als mehr oder weniger fragmentarisch bezeichnet werden, indem einzelne kleinere Theile der Tafeln nicht aufgenommen erscheinen. So fehlt in den meisten der Sternkatalog, welcher bereits in der ersten im Drucke erschienenen Ausgabe »Venetiis 1483« enthalten ist. In den Handschriften Nr. 3872, 5245 und 5299 fehlen die Finsternisstafeln, in der Handschrift Nr. 5245 ist statt des vollständigen Sternkataloges nur ein Verzeichniss von 24 der hellsten Sterne enthalten.

4. Das meiste Interesse bietet die Handschrift Nr. 5478. Dieselbe ist im Handschriftenkataloge als wahrscheinlich Alphonsinische Tafel angeführt, muss aber von dem Kenner sofort als nicht Alphonsinisch erklärt werden, und ist dieselbe wahrscheinlich nur desshalb als solche bezeichnet worden, weil derselben der Meridian von Toledo zu Grunde gelegt ist.

Die Handschrift ist nur als Fragment erhalten und enthält erstens die mittleren Bewegungen der Sonne und die Mittelpunktsgleichung derselben; zweitens die mittlere Bewegung des Mondes in Länge und in Anomalie, nebst den Mondgleichungen; drittens die mittlere Bewegung des Mondknotens; viertens die mittlere Bewegung des Saturn, und auf dem letzten Blatte, von welchem die eine Hälfte weggeschnitten ist, die Gleichungen des Saturn. Erläuterungen zu den Tafeln sind keine erhalten.

Die mittleren Bewegungen sind nicht »secundum Alphonsinum«, d. i. in der Sexagesimaltheilung tabulirt, sondern unter Zugrundelegung der arabischen Mondjahre zu 354 und 355 Tagen, wie aus dem folgenden Auszuge aus der Tafel der mittleren Bewegungen der Sonne folgt.

Medius cursus Solis.

Radix	3ˢ	23°	41'	11"
30	5	1	41	32
60	6	9	41	53
90	7	17	42	14
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
810	1	29	50	59
840	3	27	51	0

In mensibus

1	0ˢ	29°	34'	5"
2	1	28	9	3
3	2	27	43	9
4	3	26	18	6
5	4	25	52	12
6	5	24	27	9
7	6	24	1	15
8	7	22	36	13
9	8	22	10	18
10	9	20	45	16
11	10	20	19	22
12	11	18	54	19

Aux Solis	2	17	50

In annis expansis

1	11ˢ	18°	54'	19"
2	11	8	47	47
3	10	27	42	7
4	10	16	36	26
5	10	6	29	54
6	9	25	24	14
7	9	15	17	41
8	9	4	12	1
9	8	23	6	21
10	8	12	59	49
11	8	1	54	8
12	7	20	48	28
13	7	10	41	56
14	6	29	36	16
15	6	18	30	35
16	6	8	24	3
17	5	27	18	23
19*	5	17	11	51
20	5	6	6	10
21	4	25	0	29
22	4	18	53	58*
23	4	3	48	17
24	3	22	42	37
25	3	12	36	6
26	3	1	30	26
27	2	21	23	54
28	2	10	18	13
29	1	29	12	33
30	1	19	6	1
	1	8	0	21

Die Radices — für den Meridian von Toledo giltig — sind einfach hingeschrieben, ohne Angabe der Epoche. Eine Vergleichung mit den Radices der Alphonsinischen Tafeln zeigt, dass dieselben für die arabische Ära gelten, wie aus der folgenden Zusammenstellung hervorgeht.

* Schreibfehler.

	Handschrift Nr. 5478				Alphonsinische Tafeln (Hegira)				
Radix motus Solis	3ˢ	23°	41'	11"	114°	52'	2"	0‴	50ⁱᵛ
» Augis Solis	2	17	50		75	59	21		
» Cursus Lunae	4	0	58	18	122	1	16	23	53
» Argumenti Lunae	3	18	28	39	107	21	27	42	28
» Capitis Draconis	7	24	9	55	233	53	20	35	51
» Cursus Saturni	3	25	51	15	118	21	0	3	
» Augis Saturni	8	0	5		237	57	40	58	

Für die mittleren täglichen Bewegungen ergeben sich aus den Tafeln die folgenden Werthe, denen ich zur Vergleichung auch die Ptolemäischen, Alphonsinischen und Copernicanischen Werthe beigefügt habe.

	Handschrift Nr. 5478						Ptolemäus					
Sonne	0°	59'	8"	11‴	28ⁱᵛ	26ᵛ	0°	59'	8"	17‴	13ⁱᵛ	12ᵛ
Mond	13	10	34	52	48	35	13	10	34	58	33	30
Anomalie des Mondes	13	3	53	56	17	52	13	3	53	56	17	52
Knoten » »	0	3	10	46	42	31	0	3	10	41	15	26
Saturn	0	2	0	26	35	18	0	2	0	33	31	29

	Alphonsinische Tafeln						Copernicus					
Sonne	0°	59'	8"	19‴	37ⁱᵛ	19ᵛ	0°	59'	8"	11‴	22ⁱᵛ	[1]
							0	59	8	19	37	[2]
Mond	13	10	35	1	15	11	13	10	34	57	8	27
Anomalie des Mondes	13	3	53	57	30	21	13	3	53	56	34	4
Knoten » »	0	3	10	38	7	15	0	3	10	42	21	31
Saturn	0	2	0	35	17	40	0	2	0	27	17	54

Aus dieser Vergleichung kann zunächst wieder geschlossen werden, dass die Alphonsinischen Tafeln tropische Bewegungen, die Handschrift Nr. 5478 hingegen siderische Bewegungen tabulirt.

Endlich unterscheiden sich die Tafeln von den Alphonsinischen durch die Mittelpunktsgleichung der Sonne und die Aequatio argumenti des Mondes, während die anderen Tafeln der Gleichungen mit den Alphonsinischen übereinstimmen (mit Ausnahme weniger irrelevanter Zahlenwerthe, die ebensowohl durch Abschreibefehler, als durch geringfügige Unterschiede in den verwendeten Constanten erklärt werden könnten).

Da die Alphonsinischen Tafeln bereits durch den Druck verbreitet sind, so gebe ich hier nur die beiden erwähnten, von denselben verschiedenen Tafeln.

---

[1] Siderisch.

[2] Tropisch.

Äquatio Solis.

	0ˢ	1ˢ	2ˢ	3ˢ	4ˢ	5ˢ	
0°	0° 0' 0'	0°57'45"	1°41'18"	1°59'20"	1°44'53"	1° 1'22"	30°
1	0 2 2	0 59 35	1 42 18	1 59 10	1 43 53	0 59 29	29
2	0 4 2	1 1 19	1 43 20	1 59 10	1 42 50	0 57 34	28
3	0 6 2	1 3 3	1 44 23	1 59 8	1 41 46	0 55 38	27
4	0 8 2	1 4 46	1 45 23	1 59 4	1 40 41	0 53 41	26
5	0 10 1	1 6 28	1 46 21	1 58 57	1 39 35	0 51 44	25
6	0 12 1	1 8 8	1 47 17	1 58 50	1 38 23	0 49 46	24
7	0 14 1	1 9 57	1 48 10	1 58 40	1 37 9	0 47 48	23
8	0 16 0	1 11 25	1 49 0	1 58 28	1 35 53	0 45 50	22
9	0 18 0	1 13 0	1 49 48	1 58 13	1 34 35	0 43 51	21
10	0 19 59	1 14 35	1 50 35	1 57 56	1 33 16	0 41 52	20
11	0 17 58 *	1 16 9	1 51 20	1 57 38	1 31 59	0 39 53	19
12	0 23 57	1 17 41	1 52 4	1 57 20	1 30 33	0 37 53	18
13	0 25 55	1 19 12	1 52 45	1 56 59	1 29 8	0 35 52	17
14	0 27 52	1 20 43	1 53 23	1 56 33	1 27 41	0 33 50	16
15	0 29 49	1 22 12	1 53 59	1 56 3	1 26 13	0 31 48	15
16	0 31 47	1 23 40	1 54 34	1 55 31	1 24 44	0 29 46	14
17	0 33 42	1 25 6	1 55 7	1 54 58	1 23 14	0 27 43	13
18	0 35 38	1 26 30	1 55 39	1 54 28	1 21 42	0 25 38	12
19	0 37 33	1 27 53	1 56 9	1 53 48	1 20 9	0 23 31	11
20	0 39 26	1 29 15	1 56 36	1 53 10	1 18 34	0 21 24	10
21	0 43 20	1 30 37	1 56 59	1 52 30	1 16 28	0 19 17	9
22	0 43 13 *	1 31 55	1 57 21	1 51 47	1 15 21	0 17 9	8
23	0 45 6	1 33 13	1 57 42	1 51 2	1 13 42	0 15 1	7
24	0 46 58	1 34 28	1 58 1	1 50 16	1 12 1	0 12 53	6
25	0 48 49	1 35 41	1 58 17	1 49 28	1 10 17	0 10 45	5
26	0 50 38	1 30 51 *	1 58 30	1 48 39	1 8 32	0 8 36	4
27	0 52 26	1 37 59	1 58 41	1 47 46	1 6 46	0 6 27	3
28	0 54 14	1 39 5	1 58 50	1 46 50	1 5 0	0 4 18	2
29	0 56 2	1 40 10	1 58 57	1 45 52	1 3 12	0 2 9	1
30	0 57 45	1 41 18	1 59 20 *	1 44 53	1 1 22	0 0 0	0
	11ˢ	10ˢ	9ˢ	8ˢ	7ˢ	6ˢ	

* Schreibfehler.

Äquatio Argumenti Lunae.

	0ˢ	1ˢ	2ˢ	3ˢ	4ˢ	5ˢ	
0°	0° 0' 0"	2°19'44"	4° 9' 6"	5° 0' 2"	4°31' 7"	2°42'36"	30°
1	0 4 50	2 24 1	4 11 53	5 0 26	4 29 26	2 37 49	29
2	0 9 40	2 28 16	4 14 37	5 0 44	4 26 37	2 32 57	28
3	0 14 39	2 32 30	4 17 18	5 0 55	4 24 23	2 28 1	27
4	0 19 18	2 36 42	4 19 54	5 0 59	4 21 44	2 23 2	26
5	0 24 7	2 40 52	4 22 25	5 10 0 *	4 18 58	2 18 0	25
6	0 28 56	2 44 58	4 24 51	5 0 57	4 16 5	2 12 55	24
7	0 33 44	2 49 2	4 27 12	5 0 49	4 13 6	2 7 48	23
8	0 38 32	2 53 5	4 29 28	5 0 37	4 10 3	2 2 36	22
9	0 43 19	2 57 6	4 31 41	5 0 21	4 6 57	1 57 22	21
10	0 48 5	3 1 3	4 33 51	5 0 1	4 3 47	1 52 4	20
11	0 53 51	3 4 57	4 35 57	4 59 22	4 0 32	1 46 44	19
12	0 57 36	3 8 48	4 37 57	4 58 55	3 57 11	1 41 21	18
13	1 2 20	3 12 37	4 39 52	4 58 12	3 53 44	1 35 56	17
14	1 7 4	3 16 23	4 41 43	4 57 24	3 50 9	1 30 29	16
15	1 11 47	3 20 6	4 43 29	4 56 33	3 46 27	1 25 0	15
16	1 16 28	3 23 46	4 45 10	4 55 38	3 42 38	1 19 29	14
17	1 21 8	3 27 22	4 46 46	4 54 33	3 38 45	1 13 57	13
18	1 25 47	3 30 55	4 48 17	4 53 20	3 34 50	1 8 23	12
19	1 30 25	3 34 25	4 49 43	4 52 0	3 30 52	1 2 48	11
20	1 36 3	3 37 52	4 51 5	4 50 33	3 26 52	0 57 11	10
21	1 39 39	3 41 16	4 52 23	4 49 2	3 22 49	0 51 32	9
22	1 44 18	3 44 37	4 53 36	4 47 26	3 18 41	0 45 51	8
23	1 48 45	3 47 58	4 54 43	4 45 47	3 14 26	0 40 9	7
24	1 53 17	3 51 7	4 55 43	4 44 6	3 10 5	0 34 26	6
25	1 57 48	3 54 17	4 56 39	4 42 23	3 5 41	0 28 42	5
26	2 2 17	3 57 23	4 57 30	4 40 31	3 1 13	0 22 58	4
27	2 6 43	4 0 24	4 58 16	4 38 31	2 56 39	0 17 14	3
28	2 11 5	4 3 23	4 58 56	4 36 23	2 52 1	0 11 30	2
29	2 15 25	4 6 16	4 59 31	4 34 9	2 47 20	0 5 45	1
30	2 19 44	4 9 6	5 0 2	4 31 7	2 42 36	0 0 0	0
	11ˢ	10ˢ	9ˢ	8ˢ	7ˢ	6ˢ	

* Schreibfehler.

Die Anlage der Tafel deutet auf arabischen Ursprung hin; dass dieselbe auf den Meridian von Toledo bezogen ist, kann nicht massgebend sein, da die Werthe der Argumente für die Epoche zur leichteren Verwendung in Toledo auf den Meridian des Beobachtungsortes übertragen worden sein können. Dass die Tafeln aber thatsächlich älter sind als die Alphonsinischen und zweifellos arabischen Ursprunges, lässt sich durch Vergleichung der denselben zu Grunde gelegten Constanten zeigen. Diese Constanten sind nämlich diejenigen, welche Albategnius für die Elemente der Planeten annimmt.

Aus der grössten Mittelpunktsgleichung der Sonne 1°59′ 10″ folgt $e = 0{\cdot}03467 = 2^p 4' 48''$; Albategnius hat $2^p 4' 45''$ (in seinem Werke »De numeris et motibus stellarum«, Cap. 28). Ptolemäus $2^p 22' 3$, Alfragan $2^p 30'$; die Alphonsinischen Tafeln: grösste Gleichung 2° 9′ 57″, daraus $e = 2^p 16' 5''$; Copernicus: grösste Gleichung 1° 51′, $e = 1^p 56' 15''$. Die grösste Äquatio argumenti lunae gleich 5° 1′ findet sich ebenfalls bei Albategnius (Cap. 30), doch schreibt er sie Ptolemäus zu; Alfragan $5^p 0'$ 3. Die Alphonsinischen Tafeln $4^p 54' 9$.

Über die mittleren Bewegungen gibt Albategnius in seiner Planetentheorie keinen Aufschluss, nur für die Sonne findet sich die Angabe der Jahreslänge, aus welcher die mittlere tägliche Bewegung $0° 59' 8'' 20''' 46^{IV} 56^{V}$ folgt (Cap. 27) demnach um $9''' 18^{IV} 30^{V}$ grösser, als der in den Tafeln verwendete Werth. Der Unterschied ist aber gleich der Präcession in einem Tage, wenn dieselbe gleich 1° in 63·5 Jahren angenommen würde. Nun fand Albategnius aus den Fixsternen die Präcession gleich 1° in 66 Jahren (Cap 50) aus dem Sonnenapogeum 1° in 61 Jahren. Wenn aus beiden Werthen das Mittel genommen würde, so würde der obige Unterschied sich demgemäss dadurch erklären, dass der aus der Jahreslänge gefolgerte Werth in seiner Planetentheorie als mittlere tropische Bewegung (das Jahr als tropisches Jahr), die in den Tafeln verwendete als mittlere tägliche siderische Bewegung aufzufassen ist.

Die Tafeln wären demnach zweifellos als »Planetentafeln des Albategnius« zu bezeichnen. Tafeln der Planeten, berechnet für den Meridian von Toledo, welche demgemäss auch

mitunter als Tabulae Toletanae bezeichnet werden, sollen um 1080[1] von Arzachel angefertigt worden sein. Manuscripte dieser Tafeln finden sich in den Biblotheken des Escurial, der Universität Cambridge (England) und Leyden. Ob die erwähnte Handschrift der k. k. Hofbibliothek in Wien mit diesen identisch ist, würde nur durch eine directe Vergleichung zu constatiren sein, zu welcher ich bisher keine Gelegenheit hatte. Weidler schreibt über Albategnius: Novas tabulas adornavit, et Meridiano Aractensi accomodavit, quae aliquamdiu apud Arabes tamquam accuratiores in pretio fuerunt,[2] und über Arzachel: Auctor putatur Tabularum Toledanarum. Cum enim hactenus tabulae Albategnii sine ulla erroris suspicione usurpatae essent Arzachel vero illas coelo non amplius congruere deprehendisset novas composuit, quarum tamen fides, propter Albategnii auctoritatem ambigua a posteris habita est.. Ceterum Arzachel cum inter se et Albategnium magnam discrepantiam deprehendisset et simul eccentricitatis decrementum observavisset, fertur effinxisse circellum, in cujus ambitu centrum eccentrici ita versaretur, ut id modo a terra propius modo longius abesset et simul ipsum apogeum repedare posset. Hiernach würde er aber die später von Copernicus eingeführte Theorie des Hemicykels bereits zur Erklärung der Veränderlichkeit der Excentricität der Erdbahn (Sonnenbahn) eingeführt haben. Da aber die Handschrift Nr. 5478 die Constante des Albategnius verwendet, so würde diess gegen die Annahme, dass man es mit den Tafeln des Arzachel zu thun hat, sprechen. Copernicus hingegen schreibt, dass Arzachel arc sin $e = 1° 59'$ annimmt; ob der Unterschied von 10', welcher allerdings dem Sinne nach stimmt (der Arzachel'sche Werth ist thatsächlich der kleinere), auf die Verschiedenheit der Tafeln zu schliessen berechtigt, bleibt immerhin etwas zweifelhaft; doch kann als Resultat der vorstehenden Untersuchungen gesagt werden, dass die Handschrift Nr. 5478 der k. k. Hofbibliothek in Wien gewiss arabischen Ursprunges ist, und dass als deren Autor Albategnius oder Arzachel, mit grosser Wahrscheinlichkeit aber der erstere bezeichnet werden muss.

[1] Albategnius lebte um 900 nach Chr. Geb.

[2] Immerhin bleibt es noch unentschieden, ob die Tafeln als Tafeln des Albategnius oder Tafeln des Arzachel zu bezeichnen wären.



Einige Resultate der anemometrischen Aufzeichnungen in Wien 1873—1892

von

J. Hann,

w. M. k. Akad.

Die Registrirungen eines Anemometers von Munro (Kew-Modell) auf dem Thurme des meteorologischen Institutes in Wien beginnen mit April 1873. Meine erste Bearbeitung derselben beschränkte sich auf eine Untersuchung der täglichen Periode, welcher ich die fünf Jahrgänge 1873—1878 zu Grunde legen konnte.[1] Es schien mir nun an der Zeit, auch die jährliche Periode der Windgeschwindigkeit und der Windrichtung einer Bearbeitung zu unterziehen. Nebenbei habe ich auch die tägliche Periode der Windgeschwindigkeit mit Hilfe der nun vorliegenden langjährigen Registrirungen schärfer bestimmt, als dies in meiner ersten Arbeit möglich war. Auf die tägliche Periode der Windrichtung desgleichen zurückzukommen, darauf musste ich verzichten, da der Aufwand von Zeit und Arbeit zu gross gewesen wäre im Verhältniss zu den voraussichtlich sehr geringen neuen Ergebnissen.

Die Aufstellung des Anemometers auf der NW-Ecke der Plattform des Thurmes des meteorologischen Institutes ist sehr günstig. Diese Plattform erhebt sich circa 24·6 *m* über den Erdboden (Seehöhe des letzteren rund 200 *m*) und das Schalenkreuz überragt noch die Plattform um 2·7 *m*. Die wenigen, in mehr minder grosser Entfernung befindlichen Gebäude liegen

---

[1] Hann: Die tägliche Periode der Geschwindigkeit und der Richtung des Windes. Diese Sitzungsber., LXXIX. Bd., II. Abth., Jänner-Heft 1879.



Einige Resultate der anemometrischen Aufzeichnungen in Wien 1873—1892

von

J. Hann,

w. M. k. Akad.

Die Registrirungen eines Anemometers von Munro (Kew-Modell) auf dem Thurme des meteorologischen Institutes in Wien beginnen mit April 1873. Meine erste Bearbeitung derselben beschränkte sich auf eine Untersuchung der täglichen Periode, welcher ich die fünf Jahrgänge 1873—1878 zu Grunde legen konnte.[1] Es schien mir nun an der Zeit, auch die jährliche Periode der Windgeschwindigkeit und der Windrichtung einer Bearbeitung zu unterziehen. Nebenbei habe ich auch die tägliche Periode der Windgeschwindigkeit mit Hilfe der nun vorliegenden langjährigen Registrirungen schärfer bestimmt, als dies in meiner ersten Arbeit möglich war. Auf die tägliche Periode der Windrichtung dessgleichen zurückzukommen, darauf musste ich verzichten, da der Aufwand von Zeit und Arbeit zu gross gewesen wäre im Verhältniss zu den voraussichtlich sehr geringen neuen Ergebnissen.

Die Aufstellung des Anemometers auf der NW-Ecke der Plattform des Thurmes des meteorologischen Institutes ist sehr günstig. Diese Plattform erhebt sich circa 24·6 *m* über den Erdboden (Seehöhe des letzteren rund 200 *m*) und das Schalenkreuz überragt noch die Plattform um 2·7 *m*. Die wenigen, in mehr minder grosser Entfernung befindlichen Gebäude liegen

[1] Hann: Die tägliche Periode der Geschwindigkeit und der Richtung des Windes. Diese Sitzungsber., LXXIX. Bd., II. Abth., Jänner-Heft 1879.

mit ihren Dächern weit unter der Plattform des Thurmes, und die nächsten Höhenzüge des Wienerwaldes in N bis W haben höchstens eine Winkelerhebung von $3^1/_2{}^\circ$ über dem Horizont. Die Windgeschwindigkeit wurde aus den registrirten Umdrehungen des Schalenkreuzes[1] einfach mittelst des bekannten Robinson'schen Factors abgeleitet. Nach den neuesten Ermittlungen dürfte derselbe für unser Anemometer höchstens im Verhältniss von 3 zu 2·2 zu gross sein, der Reductionsfactor also zwischen 0·7 und 0·8 liegen. Da aber die absolute Windgeschwindigkeit ohnehin in viel grösserem Verhältnisse noch von der zufälligen Örtlichkeit der Aufstellung des Anemometers abhängt, so genügt dieser Hinweis, und erscheint es unnöthig, eine entsprechende Reduction an den gemessenen, respective registrirten Windgeschwindigkeiten vorzunehmen.

Meine Abhandlung zerfällt in drei Hauptabschnitte. Der erste behandelt nochmals die tägliche Periode der sogenannten absoluten Windgeschwindigkeit (Luftbewegung ohne Rücksicht auf die Richtung), der zweite zum erstenmale die jährliche Periode der Windgeschwindigkeit, und der dritte die jährliche Periode der Windrichtung. In den beiden ersten Abschnitten habe ich zum Vergleiche auch die analogen Ergebnisse anderer Stationen herbeigezogen, die zum Theil auch erst von mir zu diesem Zwecke berechnet worden sind.

I. Die tägliche Periode der Windrichtung.

Die folgende Tabelle enthält den täglichen Gang der Windgeschwindigkeit zu Wien [Hohe Warte] (Centimeter pro Secunde) in Form von Abweichungen von dem Mittel des betreffenden Monates und vom Jahresmittel nach 15jährigen Registrirungen 1876—1890. Die Stundenmittel der absoluten Windgeschwindigkeit finden sich mitgetheilt im Anhange auf S. 160.

Der Hauptsache nach ist die tägliche Periode der Windgeschwindigkeit eine einfache tägliche Periode mit einem Minimum um 6^h Morgens (also zur Zeit des Sonnenaufganges) und einem Maximum um 1^h Nachmittags, also noch vor dem Eintritt des täglichen Wärmemaximums. Ein zweites secundäres Minimum

[1] Abstände der Mittelpunkte der Kugelschalen vom Drehungspunkte 0·622 *m*, Durchmesser der Kugelschalen 0·234 *m*.

Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit (Centimeter pro Secunde) in Abweichungen vom Monats- und Jahresmittel 1876—1890.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Septbr.	Octbr.	Novbr.	Decbr.	Jahr
12—1h	— 2	— 29	— 37	— 39	— 35	— 48	20	— 32	— 31	— 26	— 9	— 29	—249
1—2	— 20	— 33	— 45*	— 61	— 61	— 54	— 10	— 52	— 45	— 44*	— 25	— 43*	—412
2—3	— 14	— 27	— 53	— 77	— 73	— 60*	— 26	— 52	— 45	— 34	— 21	— 41	—437
3—4	— 8	— 37	— 43	— 83	— 81	— 52	— 28	— 68	— 53	— 34	— 11	— 31	—442
4—5	— 10	— 45	— 43	— 87	— 83	— 52	— 30	— 86	— 51	— 34	— 17	— 17	—464
5—6	— 18	— 45*	— 41	— 99	— 97*	— 52	— 40	— 86	— 65	— 32	— 27	— 1	—504
6—7	— 26*	— 45	— 35	—101*	— 73	— 44	— 60*	— 88*	— 69*	— 34	— 37*	5	—507*
7—8	— 22	— 41	— 29	— 75	— 33	— 10	— 50	— 54	— 59	— 36*	— 33	3	—367
8—9	— 17	— 39	— 29	— 37	— 7	8	— 22	— 20	— 29	— 16	— 32	— 11	—211
9—10	— 2	3	11	13	37	42	— 2	12	7	20	— 5	— 3	109
10—11	18	55	63	51	63	52	0	48	45	60	25	21	416
11—Mittag	48	87	103	79	87	56	22	74	79	96	53	51	694
12—1	48	109*	125*	95	91	60	46	100	101	102*	55*	67	831
1—2	50*	97	123	101	97*	66	46	100*	109*	90	49	73*	833*
2—3	32	85	121	103*	93	68*	58	92	87	70	29	43	733
3—4	8	51	89	101	89	60	62*	86	79	44	11	19	581
4—5	0	37	57	103*	103*	62	62	74	51	18	— 7	17	479
5—6	— 16	— 11	— 7	63	67	16	16	18	11	— 18	— 7	3	111
6—7	— 20	— 33	— 49	15	9	— 22	— 28	— 18	— 15	— 38	— 3	— 7	—176
7—8	— 16	— 27	— 55	— 13	— 23	— 22	— 48	— 18	— 11	— 36	— 9	— 11	—242
8—9	0	— 23	— 61	1	— 27	— 24	— 22	— 10	— 3	— 32	1	— 7	—174
9—10	— 4	— 31	— 55	— 5	— 35	— 12	12	4	— 25	— 30	9	— 27	—167
10—11	0	— 29	— 55	— 5	— 41	— 14	12	2	— 33	— 20	9	— 25	—167
11—Mitternacht	2	— 31	— 49	— 33	— 57	— 30	8	— 24	— 35	— 28	— 3	— 45	—272
Mittel	17	44	57	60	61	41	30	51	47	41	20	25	399

ist angezeigt um $7^1/_2{}^h$ Abends, dem ein zweites secundäres Maximum um 10^h Abends folgt. Die Ursache dieser secundären Extreme liegt, wie wir noch sehen werden, in dem täglichen Gange der stürmischen Winde, welche diese secundären Extreme in sehr ausgesprochener Weise zeigen, während sie an ruhigen Tagen fehlen.

In den Frühlingsmonaten März und April und im Spätsommer, August, September, ist die tägliche Windperiode in Wien am stärksten ausgeprägt, am schwächsten tritt dieselbe auf im November, December und Jänner und im Juni und Juli. Die Extreme in den einzelnen Monaten und die Eintrittszeiten derselben sind folgende:

Tägliche Extreme der Windgeschwindigkeit.

	Dec.	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni
	Abweichungen vom Mittel						
Min.	—·42	—·26	—·45	—·53	—1·00	—·97	—·60
Max.	·73	·49	1·09	1·25	1·03	1·03	·68
Diff.	1·15	·75	1·54	1·78	**2·03**	2·00	1·28

	Juli	August	September	October	November	Jahr
	Abweichungen vom Mittel					
Min.	—·60	—·88	—·69	—·36	—·37	—·51
Max.	62	1·00	1·09	1·02	·55	·83
Diff.	1·22	**1·88**	1·78	1·38	·92	1·34

Eintrittszeiten der Extreme Vor- und Nachmittags

	December	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni
Min.	2^h	$6^1/_2{}^h$	$5^1/_2{}^h$	$2^1/_2{}^h$	6^h	$5^1/_2{}^h$	$2^1/_2{}^h$ a. m.
Max.	$1^1/_2$	1	$12^1/_2$	1	$2^1/_2$	4	$2^1/_2$ p. m.

	Juli	August	Sept.	October	Nov.	Dec.
Min.	$6^1/_2{}^h$	6^h	6^h	7^h	7^h	6^h a. m.
Max.	4	1	1	$12^1/_2$	12	1 p. m.

Die Eintrittszeiten der Hauptextreme sind noch recht unregelmässig, und es ist in manchen Monaten schwierig, dieselben zu fixiren, namentlich gilt dies von den Eintrittszeiten der Minima.

In den Sommermonaten, namentlich im Juli, ist die nächtliche Wiederzunahme der Windgeschwindigkeit, nach dem ersten Minimum um 7ʰ Abends, sehr ausgeprägt. Im November, December und Jänner zeigt sich eine Verstärkung des Windes in den ersten Morgenstunden, die dann wieder von einer Abnahme der Windstärke gefolgt wird. Die Eintrittszeiten dieser untergeordneten Extreme fallen aber in jedem dieser Monate auf andere Stunden. Diese selben Monate zeigen auch eine abendliche Periode der Abnahme und dann wieder folgenden Zunahme der Windstärke.

Der mittlere tägliche Gang in den Monaten November, December und Jänner, also zur Zeit des niedrigsten Sonnenstandes, ist folgender (statt Mitt.—1ʰ steht 1ʰ, statt 1—2ʰ steht 2ʰ u. s. w.):

	1ʰ	2ʰ	3ʰ	4ʰ	5ʰ	6ʰ
	Abweichungen vom Mittel (Centimeter)					
Vormittag	—13	—29	—25	—17	—15	—15
Nachmittag	57	57	35	13	3	— 7

	7ʰ	8ʰ	9ʰ	10ʰ	11ʰ	12ʰ
	Abweichungen vom Mittel (Centimeter)					
Vormittag	—19	—17	—20	— 3	21	51
Nachmittag	—10	—12	— 2	— 7	— 5	—15

Die secundären Extreme in den Morgen- und Abendstunden treten auch in diesen Mittelwerthen noch deutlich hervor. Bemerkenswerth ist ferner, dass die Windgeschwindigkeit bloss 7 Stunden über dem Mittel ist, dagegen 17 Stunden unter demselben. Die Windgeschwindigkeit überschreitet erst kurz nach 10ʰ Vormittags das Tagesmittel und sinkt gleich nach 5ʰ Abends schon wieder unter dasselbe hinab. Der Anstieg der Windstärke erfolgt sehr rasch, die Abnahme langsamer.

In den drei Sommermonaten Juni, Juli, August, die gleichfalls einen eigenthümlichen und ausgeprägten täglichen Gang der Windstärke haben, ist derselbe im Mittel folgender:

	1ʰ	2ʰ	3ʰ	4ʰ	5ʰ	6ʰ
	Abweichungen vom Mittel (Centimeter)					
Vormittag	—20	—39	—46	—49	—56	—59
Nachmittag	67	71	73	69	66	17

	7h	8h	9h	10h	11h	12h
	Abweichungen vom Mittel (Centimeter)					
Vormittag	—64	—38	—11	17	33	51
Nachmittag	—23	—29	—19	1	0	—15

In den Vormittagsstunden ist im Sommer der tägliche Gang ganz regelmässig, es zeigt sich kein secundäres Maximum wie im Winter. Zwischen 9 und 10^h Vormittags erst überschreitet die Windstärke den Mittelwerth und erreicht das Maximum um $2^1/_2{}^h$ p. m. eine Stunde später als im Winter. Bald nach 6^h Abends sinkt die Windgeschwindigkeit schon wieder unter das Tagesmittel, erreicht vor 8^h, also bald nach Sonnenuntergang ein secundäres Minimum, um von 10^h bis 11^h Nachts wieder den Mittelwerth zu überschreiten. Dieses secundäre Abendmaximum ist scharf ausgeprägt. Es scheint mit der Verstärkung der Stürme am Abend zusammenzuhängen, denn an ruhigen Tagen fehlt es. Das Hauptminimum der Windstärke tritt nach 6^h Morgens ein.

Die Windgeschwindigkeit hält sich im Sommer mit Rücksicht auf das secundäre Abendmaximum ebensolange über als unter dem Tagesmittel.

In den Äquinoctialmonaten März, April, dann September und October ist der tägliche Gang der Windstärke folgender:

	1h	2h	3h	4h	5h	6h
	Abweichungen vom Mittel (Centimeter)					
Vormittag	— 33	— 49	—52	—53	—54	—59
Nachmittag	106	106	95	78	57	12

	7h	8h	9h	10h	11h	12h
	Abweichungen vom Mittel (Centimeter)					
Vormittag	— 60	— 50	—28	13	55	89
Nachmittag	— 22	— 28	—24	—29	—28	—36

Zur Zeit der Äquinoctien, wo der tägliche Gang der Windstärke im Allgemeinen am stärksten ausgeprägt ist, was namentlich von dem Nachmittagsmaximum gilt, das um diese Zeit am meisten sich über das Tagesmittel erhebt, ist der tägliche Gang

ein einfacher und sehr regelmässiger von einem Minimum um 6^h Morgens zu einem Maximum um 1^h Nachmittags. Ein zweites Abendmaximum ist kaum angedeutet. Die Windstärke hält sich etwa 10 Stunden über dem Mittel und bleibt 14 Stunden unterhalb desselben.

Um auch in anderer und kürzerer Weise den jährlichen Gang in der täglichen Periode der Windstärke zum Ausdrucke zu bringen, und namentlich um denselben mit den entsprechenden Perioden anderer meteorologischer Elemente in strenger und einfacher Weise vergleichen und auf gegenseitige Beziehungen untersuchen zu können, habe ich den täglichen Gang der Windgeschwindigkeit in den einzelnen Monaten und im Jahresmittel durch die bekannten Sinusreihen ausgedrückt. Die folgende kleine Tabelle enthält die Constanten der harmonischen Reihen

$$p_1 \cos x + q_1 \sin x + p_2 \cos 2x + q_2 \sin 2x$$

oder

$$a_1 \sin (A_1 + x) + a_2 \sin (A_2 + 2x).$$

Da der jährliche Gang der p und q einfacher Natur und deutlich ausgeprägt ist, aber doch manche Unregelmässigkeiten erkennen lässt, die voraussichtlich in einer längeren Beobachtungsreihe verschwinden würden, so habe ich die wahrscheinlichsten Werthe für diese Grössen berechnet und erst mittelst derselben die Phasenzeiten A und die Coëfficienten a berechnet. Die hiezu abgeleiteten Formeln finden sich in einer Anmerkung unter dem Text.[1]

Die Coëfficienten p_1, q_1 und p_2, q_2 zeigen eine sehr deutliche jährliche Periode mit zwei Maximis im Frühlinge und Herbste und zwei Minimis im December und im Juni und Juli. Das Decemberminimum ist das Hauptminimum. Dieselbe Periode zeigen die Amplituden der einfachen und der doppelten täglichen Periode der Windgeschwindigkeit. Die Maxima und Minima derselben sind:

---

[1] $p_1 = 0{\cdot}441 + 0{\cdot}125 \sin (342^\circ 7 + x) + 0{\cdot}157 \sin (298^\circ 5 + 2x)$
$q_1 = 0{\cdot}352 + 0{\cdot}189 \sin (313{\cdot}9 + x) + 0{\cdot}127 \sin (290{\cdot}7 + 2x)$
$p_2 = 0{\cdot}210 + 0{\cdot}025 \sin (251{\cdot}6 + x) + 0{\cdot}076 \sin (335{\cdot}6 + 2x)$
$q_2 = 0{\cdot}180 + 0{\cdot}029 \sin (344{\cdot}1 + x) + 0{\cdot}093 \sin (345{\cdot}1 + 2x)$

Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit in Wien (Meter pro Secunde).
$x = 0$ für $11^h 30^m$ pm.

	Beobachtet				Berechnet				A_1	A_2	a_1	a_2
	p_1	q_1	p_2	q_2	p_1	q_1	p_2	q_2				
Jänner	—·167	—·103	·182	·109	—·266	—·097	·155	·148	249°58'	46°19'	·283	·214
Februar	—·498	—·305	·269	·277	—·464	—·279	·230	·253	238 59	42 17	·541	·342
März	—·733	— 310	·227	·312	—·660	—·495	**·267**	**·290**	233 9	42 38	·825	**·394**
April	—·527	—·764	·242	·198	—**·698**	—**·602**	·233	·232	229 13	45 7	**·922**	·261
Mai	—·668	—·609	·174	·165	—·567	—·552	·170	·142	225 46	50 8	·791	·221
Juni	—·500	—·331	·156	·057	—·399	—·437	·151*	·111*	222 24	53 9	·592	·188*
Juli	—·152	—·300	·188	·250	—·340*	—·369*	·203	·164	222 39	51 4	·502*	·261
August	—·488	—·495	·318	·193	—·410	—·383	·280	·239	226 57	49 31	·561	·368
September	—·506	—·474	·239	·224	—**·490**	—**·405**	**·305**	**·250**	230 25	50 39	**·686**	**·394**
October	—·519	—·204	·286	·208	—·460	—·340	·249	·176	233 32	54 45	·572	·305
November	—·158	—·181	·203	·089	—·323	—·192	·160	·086	239 16	61 45	·376	·182
December	—·379	—·148	·038	·075	—·215*	—·071*	·117*	·069*	251 44	59 28	·226*	·136*
Jahr	—·441	—·352	·210	·180	—·441	—·352	·210	·180	231 24	49 24	·564	·277

	Maxima		Minima	
a_1	0·92 April	0·64 September	0·50 Juli	0·23 December
a_2	0·39 März	0·39 September	0·19 Juni	0·14 December

Die grössere einmalige tägliche Variation der Windstärke hat auch in Bezug auf die Phasenzeiten eine ausgesprochene jährliche Periode, und zwar ist es eine einfache Periode mit einem Maximum der Winkelgrösse A_1 im December und einem Minimum im Juni. Mit anderen Worten: Der Eintritt des Maximums in der einmaligen täglichen Variation der Windstärke erfolgt am frühesten im December und am spätesten im Juni, der Phasenunterschied ist 29°3, also nahezu zwei Stunden. Im December tritt das Maximum bald nach Mittag, um $12^h 43^m$ ein, im Juni dagegen erst um $2^h 40^m$ Nachmittags. Im Jahresmittel treten die Maxima und Minima von a_1 ein um $2^h 4^m$ Nachmittags und $2^h 4^m$ Morgens.

Die kleinere doppelte tägliche Periode der Windstärke hat keine deutlich ausgesprochene jährliche Periode der Phasenzeiten. Die grössten Unterschiede betragen wenig über eine halbe Stunde (Minimum von A_2 Februar 42°3, Maximum November 61°7).

Im Jahresmittel wird der tägliche Gang der Windgeschwindigkeit zu Wien ausgedrückt durch die Gleichung

$$v_x = 520+57 \sin(238^\circ 21'+x)+28 \sin(63^\circ 18'+2x)+ \\ +5 \sin(201^\circ 38'+3x)$$

Zeit von Mitternacht an gezählt; Centimeter, Secunde.[1]

Ich will hier zum Vergleiche den täglichen Gang der Windgeschwindigkeit, in gleicher Weise ausgedrückt, für einige andere Orte zusammenstellen. Die Zeit ist überall von Mitternacht an gezählt.

---

[1] In meiner früher citirten Abhandlung hatten mir achtjährige Beobachtungen 1854—56 und 1873—78 die Gleichung geliefert:

$$v_x = 546+69 \sin(241°5+x)+33 \sin(63°0+2x)+8 \sin(185°0+3x).$$

Die Phasenzeiten stimmen fast vollkommen überein mit dem Mittel aus 12 Jahren, die Amplituden sind hier etwas grösser, aber alle im gleichen Verhältniss.

Die Constanten des täglichen Ganges der Windgeschwindigkeit.[1]

Centimeter, Secunde. $x = 0$ für Mitternacht.

Ort	Jahre	A_1	A_2	A_3	a_0	a_1	a_2	a_3
Keitum	5	249·2	48·2	—	544	53	12	—
Tarnopol	5	249·9	60·3	—	145	64	20	—
Wien	15	238·4	63·3	201·6	520	57	28	5
Kremsmünster	10	201·0	88·0	231·0	348	20	10	3
Kalocsa	4	253·9	63·6	88·9	168	42	15	2
Triest	9	276·0	89·0	147·5	387	41	13	7
Pola	18	264·0	73·9	338·3	463	106	43	3
Lesina	20	235·7	54·7	49·5	544	54	11	5
Padua	20	119°8	321°3	—	273	36	9	—

Bevor ich auf die Discussion dieser Gleichungen eingehe, will ich noch für einige dieser Orte auch den Unterschied im täglichen Gange der Windstärke zwischen Winter und Sommer aufsuchen, um zu sehen, inwieweit man die Jahresmittel der Einfachheit halber als Repräsentanten des täglichen Ganges überhaupt betrachten darf.

---

[1] Keitum. Dr. Hugo Meyer: Die Winde zu Keitum auf Sylt. Annalen der Hydrographie, XVIII, Berlin 1890, S. 74, Constanten von mir berechnet.

Tarnopol. Satke: Über den täglichen Gang der Windgeschwindigkeit und der Windrichtung in Tarnopol. Diese Sitzungsber., Bd. XCV, II. Abth., März-Heft 1887, detto.

Kremsmünster. Gefällige schriftliche Mittheilung des Directors der Sternwarte Prof. Koloman Wagner.

Kalocsa. Meteorolog. Zeitschr., XXV. (1890), S. 86 und 88.

Triest. Mazelle, Untersuchungen über den täglichen und jährlichen Gang der Windgeschwindigkeit zu Triest. Diese Sitzungsber., Bd. C, Abth. II. a, December-Heft 1891.

Pola. Meteorolog. Zeitschr., Bd. XXVI (1891), S. 414, von mir berechnet.

Lesina. Aus 20 Jahrgängen hier neu berechnet. Vergl. Hann: Der tägliche und jährliche Gang der Windgeschwindigkeit und Windrichtung auf der Insel Lesina. Annalen der Hydrographie, XVI. Bd., Berlin 1888, S. 32.

Padua. Ciscato: Der tägliche und jährliche Gang der Windgeschwindigkeit und Windrichtung in Padua (la velocità e la direzione del vento a Padova nel ventennio 1870—1889. Annali dell'Ufficio Centrale Met. e Geod. Italiano. Tomo X, Parte I. Roma 1892. Die Gleichungen von mir berechnet.

Wir wollen desshalb die Gleichungen für den täglichen Gang im Winter und Sommer zusammenstellen.

Täglicher Gang der Windstärke in den extremen Jahreszeiten.

		A_1	A_2	a_0	a_1	a_2
Keitum	Winter	280·7	70·6	590	21	12
	Sommer	249·5	10·9	488	81	15
Wien	Winter	249·5	61·6	498	39	22
	Sommer	232·9	67·9	526	53	28
Triest	Winter	248·8	146·8	528	13	10
	Sommer	274·7	65·6	283	66	20
Lesina	Winter	229°8	77°0	565	23	7
	Sommer	231·6	26·6	439	95	23

Die Amplituden der täglichen Variation der Windstärke sind im Winter überall viel kleiner als im Sommer, und die doppelte tägliche Schwankung ist im Winter relativ erheblich grösser. Der einfache tägliche Gang ist desshalb im Sommer viel schärfer ausgeprägt als im Winter, wo vielfach secundäre Maxima und Minima auftreten. Als Beispiel dafür möge der tägliche Gang der Windstärke zu Lesina im Mittel von 20 Jahren im Winter und Sommer hier Platz finden. Die Stundenmittel der einzelnen Monate findet man im Anhange zu diesem Abschnitte sowohl in Form absoluter Mittel der Windgeschwindigkeit für die Periode 1871—1890, als auch in Form von Abweichungen der Stundenmittel von dem betreffenden Monatsmittel (Seite 44 und 45.)

Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit zu Lesina.

Abweichungen. Centimeter pro Stunde.

	1h	2h	3h	4h	5h	6h
Winter						
Vormittag	—13	—18	—19	—27*	—26	—19
Nachmittag	29	**29**	**33**	23	13	1*

	7h	8h	9h	10h	11h	12h
Winter						
Vormittag	— 9	— 4	—14*	— 6	10	24
Nachmittag	3	7	3	— 4	— 7	—12

	1ʰ	2ʰ	3ʰ	4ʰ	5ʰ	6ʰ
			Sommer			
Vormittag	−61	−65	−72	−74	−75	−91*
Nachmittag	80	104	**124**	**121**	109	78

	7ʰ	8ʰ	9ʰ	10ʰ	11ʰ	12ʰ
			Sommer			
Vormittag	−89	−32	3	22	34	55
Nachmittag	25	−21	−30	−38	−44	−60

Der Gang ist im Winter unregelmässig mit secundären Extremen selbst im 20jährigen Mittel: dasselbe ist in Triest der Fall. Im Sommer ist der Gang einfach und viel stärker ausgeprägt. Das Nachmittagsmaximum tritt im Sommer in der Regel später ein als im Winter.

Wenn man die Gleichungen des täglichen Ganges der Windgeschwindigkeit auf S. 128 und 129 näher betrachtet, so bemerkt man sogleich, dass sie mit den Gleichungen, welche den täglichen Wärmegang in analoger Form darstellen, ziemlich übereinstimmen, und zwar sowohl in Bezug auf die Phasenzeiten, als auch in Bezug auf die Amplituden, d. h. in Bezug auf das Verhältniss der Grössen a_2 zu a_1. Die Amplitude der doppelten täglichen Variation ist relativ klein gegenüber der Amplitude der einfachen täglichen Variation.

Nur eine Station macht eine Ausnahme, d. i. Padua. Der tägliche Gang der Windstärke zu Padua (und jener zu Modena) sind in Bezug auf ihre Phasenzeiten gänzlich abweichend von allen Orten in der Niederung, deren täglichen Gang der Windstärke ich kenne; er stimmt am besten überein mit dem Gange der Windstärke auf Berggipfeln. Das Maximum fällt zu Padua auf 9ʰ Abends, das Minimum auf 9ʰ Morgens. Wenn man aber den Gang in den einzelnen Monaten näher betrachtet, so erkennt man, dass es die Wintermonate sind, die diesen eigenartigen täglichen Gang haben, und dass in den Sommermonaten auch in Padua der tägliche Gang der Windstärke ziemlich übereinstimmt mit jenem, wie er an Orten in der Niederung allgemein zu finden ist.

Padua, täglicher Gang der Windstärke,

$x = 0$ für Mitternacht, Centimeter, Secunde.

	A_1	A_2	a_0	a_1	a_2
September—Februar	80°8	225°7	262	47	11
März—August	159·5	352·8	284	47	22

Im Winterhalbjahre ist der tägliche Gang der Windgeschwindigkeit zu Padua völlig übereinstimmend mit jenem, wie man ihn sonst nur auf Berggipfeln antrifft;[1] aber auch noch im Sommerhalbjahr verspätet sich das Maximum der Windstärke sehr bedeutend gegenüber dem täglichen Wärmemaximum, während sonst fast überall in der Niederung das Gegentheil der Fall ist.[2] Der nächste Grund dieser merkwürdigen Anomalie ist darin zu finden, dass im Winterhalbjahr zu Padua die NW-, N- und NE-Winde die häufigsten und stärksten Winde sind, und dass diese Winde es sind, die ein nächtliches Maximum ihrer Stärke haben. Es ist aber hier nicht der Ort, diesen Gegenstand näher zu verfolgen.

Mit Ausnahme von Padua (und Modena) stimmt der tägliche Gang der Windstärke fast an allen Orten der Niederung mit dem täglichen Wärmegange nahezu überein.

Um diese Übereinstimmung und anderseits auch den Sinn, sowie den Betrag der Unterschiede zwischen täglichen Wärmegang und Gang der Windstärke besser überblicken zu können, haben wir die nachfolgende Zusammenstellung gemacht. Der tägliche Wärmegang ist nach den stündlichen Registrirungen der Temperatur während derselben Jahrgänge berechnet worden, aus denen der Gang der Windstärke abgeleitet ist.

---

[1] Z. B. ist die Jahresgleichung für den Obirgipfel folgende:

$$45 \sin(87 \cdot 0 + x) + 17 \sin(225 \cdot 9 + 2x).$$

[2] Padua, täglicher Gang der Windgeschwindigkeit (Meter pro Secunde):

	1ʰ a.m.	3ʰ	5ʰ	7ʰ	9ʰ	11ʰ	1ʰ p.m.	3ʰ	5ʰ	7ʰ	9ʰ	11ʰ
Winterhalbj. ..	3·0	2·9	2·8	2·8	2·3	2·1*	2·1*	2·2	2·4	2·8	3·0	**3·1**
Sommerhalbj. .	2·9	2·9	2·7	2·1*	2·2	2·5	2·9	3·2	**3·4**	3·2	3·2	2·9

der Lufttemperatur und jenen des Ganges der Windgeschwindigkeit besteht. Im Winter ist das Verhältniss von $\Delta v/\Delta t$ für a_1, z. B. 3·2 im Sommer 1·4, im Jahresmittel 2·2; für a_2 aber sind diese Verhältnisszahlen 58, 78 und 57. Ein unmittelbarer causaler Zusammenhang zwischen der täglichen Variation der Luftwärme und jener der Windgeschwindigkeit besteht daher nicht.

Wenn die von Espy und später unabhängig von Köppen aufgestellte Erklärung des täglichen Ganges der Windstärke richtig ist, so muss man auch vielmehr einen causalen Zusammenhang derselben mit dem täglichen Gang der Erwärmung des Erdbodens als mit jenem der Luftwärme vermuthen. Bekanntlich tritt ja auch das Maximum der Bodentemperatur (an der Oberfläche) früher ein, als das Maximum der Lufttemperatur. Dasselbe ist, wie wir gesehen haben, beim täglichen Gange der Windstärke der Fall.

Leider liegen keine stündlichen Messungen der äusseren Bodentemperatur für Wien vor. Dies ist nun zwar für Pawlowsk der Fall, dagegen konnte ich aber wieder keine correspondirenden Daten über den täglichen Gang der Windstärke zu Pawlowsk finden. Für Katherinenburg und Jrkutsk enthalten aber Wild's Annalen sowohl stündliche Messungen der äusseren Bodentemperatur, als auch solche für die Windstärke. Ich habe desshalb den Versuch gemacht, die Gleichungen für den täglichen Gang der äusseren Bodentemperatur und für jenen der Windstärke für Katherinenburg aufzustellen und selbe dann auf ihre Übereinstimmung zu prüfen. Jrkutsk ist wegen seiner Lage weniger zu einem derartigen Versuch geeignet, wie überhaupt Thal- und Gebirgsstationen.

Ich habe nach dem Jahrgang 1888 der Annalen des Russischen Central-Observatoriums die stündlichen Mittelwerthe der äusseren Bodentemperatur für die Monate Mai—August abgeleitet, desgleichen jene für die Windstärke.

Katherinenburg (Mai—August 1888). Täglicher Gang.

A. **der äusseren Bodentemperatur.**

	1^h	2^h	3^h	4^h	5^h	6^h
Vormittag	—6·6	—7·2	—7·7	—7·8	—7·5	—6·4
Nachmittag	9·0	8·7	8·1	6·8	4·4	2·5

	7ʰ	8ʰ	9ʰ	10ʰ	11ʰ	12ʰ
Vormittag	—3·3	1·2	4·3	6·3	7·9	8·6
Nachmittag	0·1	—2·1	—3·5	—4·5	—5·3	—6·0

B. **der Windstärke** (Meter pro Sec.)

	1ʰ	2ʰ	3ʰ	4ʰ	5ʰ	6ʰ
Vormittag	—1·2	—1·1	—1·1	—0·9	—1·1	—1·2
Nachmittag	1·5	1·5	1·6	1·5	1·4	0·9
	7ʰ	8ʰ	9ʰ	10ʰ	11ʰ	12ʰ
Vormittag	—0·8	—0·2	0·6	1·1	1·2	1·6
Nachmittag	0·2	—0·6	—0·8	—0·9	—1·0	—1·2

Noch näher liegt es eigentlich nach der Espy-Köppen'-schen Erklärung der täglichen Periode der Windstärke, diese letztere mit dem Temperatur-Unterschied zwischen der äusseren Erdoberfläche und der Luft in causalen Connex zu bringen. Ich habe desshalb auch diesen abgeleitet.

Katherinenburg. Temperaturdifferenz Boden—Luft. (Mai—August 1888).

	1ʰ	2ʰ	3ʰ	4ʰ	5ʰ	6ʰ
Vormittag	—0·3	—0·3	—0·3	—0·3	—0·5	—0·4
Nachmittag	8·7	8·1	7·4	6·2	4·3	3·0
	7ʰ	8ʰ	9ʰ	10ʰ	11ʰ	12ʰ
Vormittag	2·0	4·8	6·5	7·5	8·4	8·7
Nachmittag	1·5	—0·5	—0·4	0·4	0·3	—0·3

Der tägliche Gang der Temperaturdifferenz zwischen Boden und Luft zeigt schon insoferne eine sehr nahe Übereinstimmung mit dem täglichen Gange der Windgeschwindigkeit, als beiden gemeinsam ist, dass von 8^h Abends an bis 6^h und 7^h Morgens fast keine Änderungen stattfinden und die ganze Periode auf die Tagesstunden beschränkt bleibt.

Auch in anderen Punkten stimmt der tägliche Gang der Temperaturdifferenz Boden—Luft mit dem Gange der Windstärke überein, welche allerdings auch dem täglichen Gange der Bodentemperatur überhaupt eigen sind.

Um die mehr oder minder grosse Übereinstimmung im täglichen Gange dieser Erscheinungen genauer prüfen zu können, wollen wir die Gleichungen für den täglichen Gang derselben aufstellen.

Täglicher Gang, $x = 0$ für Mitternacht.

Windstärke . . . . $1\cdot51 \sin(241\cdot9+x)+0\cdot24 \sin(35\cdot0+2x)$
Bodentemperatur . . . . $8\cdot35 \sin(245\cdot8+x)+1\cdot56 \sin(92\cdot6+2x)$
Lufttemperatur . . . . $5\cdot69 \sin(258\cdot9+x)+1\cdot50 \sin(67\cdot2+2x)$
Temperaturdifferenz[1] . . . . $4\cdot82 \sin(269\cdot0+x)+1\cdot37 \sin(78\cdot6+2x)$

Soweit aus diesen Gleichungen ein Schluss gezogen werden kann, besteht die grösste Übereinstimmung zwischen dem täglichen Gange der Windstärke und jenem der Bodentemperatur. Der Gang der Temperaturdifferenz Boden—Luft weicht stärker ab, so wenig man das auch erwarten möchte. Die beiden ersten Gleichungen stimmen sogar auch insoweit überein, als das Verhältniss der Coëfficienten des ersten und des zweiten Gliedes fast genau dasselbe ist. Es ist $a_1 : a_1 = 0\cdot17$ und $a_2 : a_2 = 0\cdot16$. Bei der Kleinheit des zweiten Gliedes im täglichen Gange der Windstärke wäre es voreilig, darauf besonderes Gewicht zu legen. Immerhin wäre es aber einer Untersuchung werth, inwieweit dieses constante Verhältniss auch für andere Jahrgänge, Jahreszeiten und für verschiedene Orte zutrifft. Ich habe schon darauf hingewiesen, dass Windstärke und Temperaturdifferenz Boden—Luft das Gemeinsame haben, dass sie bei Nacht fast völlig constant bleiben. Dies sieht man am besten aus folgender Zusammenstellung.

Täglicher Gang der Windstärke und der Temperaturdifferenz Boden—Luft.

	7h	8h	9h	10h	11h	Mittern.
Windstärke	0·2	—0·6	—0·8	—0·9	—1·0	—1·2
Temperaturdifferenz . . .	1·5	—0·5	—0·4	—0·4	—0·3	—0·3
	1h	2h	3h	4h	5h	6h
Windstärke	—1·2	—1·1	—1·1	—0·9	—1·1	—1·2
Temperaturdifferenz . . .	—0·3	—0·3	—0·3	—0·3	—0·5	—0·4
	7h	8h	9h	10h	11h	Mittag
Windstärke	—0·8	—0·2	0·6	1·1	1·2	1·6
Temperaturdifferenz . . .	2·0	4·8	6·5	7·5	8·4	8·7
	1h	2h	3h	4h	5h	6h
Windstärke	1·5	1·5	1·6	1·5	1·4	0·9
Temperaturdifferenz . . .	8·7	8·1	7·4	6·2	4·3	3·0

[1] Äussere Bodenoberfläche—Luft.

Von 8^h Abends bis 6 und 7^h Morgens zeigen Windstärke und Temperaturdifferenz Boden—Luft fast keine Änderung; die ganze Periode spielt sich bei Tage ab. Es hat mich dies verleitet, noch einen anderen Versuch zu machen, d. i. die Variation bei Nacht gleich Null zu setzen, die tägliche Periode 5^h Morgens beginnen und um 8^h Abends schliessen zu lassen, derselben also eine Dauer von 16 Stunden zu geben. Versucht man dies, so erhält man folgende Formeln für den Gang beider Erscheinungen um 5^h Morgens bis 8^h Abends:

Windstärke .... $1 \cdot 36 \sin (246 \cdot 6 + x) + 0 \cdot 45 \sin (242 \cdot 4 + 2x)$
Temperaturdifferenz .... $4 \cdot 63 \sin (279 \cdot 9 + x) + 0 \cdot 82 \sin (265 \cdot 8 + 2x)$

Es scheint mir nicht, dass mit diesen Gleichungen ein besserer Einblick in den causalen Zusammenhang beider Erscheinungen gewonnen wird. Im Gange der Windstärke tritt das Maximum zwei Stunden circa später auf als im Gange der Bodentemperatur. Das ist nicht ungereimt. Die Coëfficienten des ersten und zweiten Gliedes in beiden Gleichungen zeigen aber kein einfaches Verhältniss, wie es bei einem directen causalen Zusammenhang beider Erscheinungen wohl erwartet werden dürfte.

Ich habe dieselben Rechnungen auch noch durchgeführt auf Grundlage der so überaus werthvollen zweistündlichen Beobachtungen der äusseren Bodentemperatur zu Nukuss im Jahre 1875, in Verbindung mit stündlichen Beobachtungen der Lufttemperatur und der Windstärke. Die Mittelwerthe für den täglichen Gang sind für Mai—August (inclusive):

Nukuss Mai—August 1875.

1^h a.	3^h	5^h	7^h	9^h	11^h	1^h	3^h	5^h	7^h	9^h	11^h p.	Mittel
Lufttemperatur												
17·1	16·0	15·5	20·7	25·4	28·1	29·5	29·7	28·6	25·0	20·9	18·7	22·9
Äussere Bodentemperatur												
17·3	15·8	15·0	23·0	38·1	48·9	52·4	48·4	39·3	27·3	21·8	19·1	30·5
Boden—Luft												
0·2	−0·2	−0·5	2·3	12·7	20·8	22·9	18·7	10·7	2·3	0·9	0·4	7·6
Mittlere Windgeschwindigkeit. Abweichungen vom Mittel. Meter pro Secunde												
−4·2	−4·4	−4·3	−2·4	−1·4	3·5	4·8	5·3	4·0	1·1	−1·8	−3·2	14·3

Die hieraus folgenden Gleichungen für den täglichen Gang sind:

Bodentemperatur.... $18 \cdot 35 \sin (263^\circ 4+x)+4 \cdot 92 \sin (106^\circ 0+2x)$
Boden—Luft .... $11 \cdot 37 \sin (271 \cdot 4+x)+4 \cdot 50 \sin (101 \cdot 3+2x)$
Windstärke .... $5 \cdot 08 \sin (251 \cdot 9+x)+0 \cdot 49 \sin (78 \cdot 1+2x)$

Das Maximum der Windstärke folgt dem Maximum des Temperaturunterschiedes Boden—Luft circa um eine Stunde nach. Zwischen den Coëfficienten bestehen auch hier keine einfachen Beziehungen.

Es ist hier nicht der Ort, diesen Gegenstand weiter zu verfolgen und die Rechnungen auf andere Örtlichkeiten und Jahreszeiten auszudehnen. Es genügt mir im Anschlusse an die Ergebnisse der Registrirungen der Windgeschwindigkeit zu Wien eine Anregung gegeben zu haben, dass die hier offen gelassenen Fragen durch eingehendere ähnliche Berechnungen einer befriedigenden Beantwortung anderwärts entgegengeführt werden.[1]

---

[1] Die ausserordentlich umsichtig und sorgfältig durchgeführte grosse Arbeit des Herrn Ernst Leyst: Über die Bodentemperatur zu Pawlowsk (Rep. für Met., Bd. XIII, 1890) hat mich zuerst veranlasst, überhaupt auf diesen Gegenstand einzugehen. In Ermangelung von Daten über den stündlichen Gang der Windgeschwindigkeit zu Pawlowsk versuchte ich zuerst bloss einen Vergleich zwischen dem täglichen Gange der Lufttemperatur und jenem der äusseren Bodentemperatur aufzustellen, um zu sehen, ob die Abweichungen zwischen beiden derselben Art seien wie jene zwischen dem täglichen Gange der Windstärke und der Lufttemperatur an anderen Orten. Die Tabellen auf S. 208 und S. 215 des citirten grossen Werkes gewährten das Beobachtungsmateriale hiefür. Ich bildete die Mittel Mai—August (1888) und erhielt:

Pawlowsk Mai—August (1888)

Täglicher Gang der äusseren Bodentemperatur

	1h	2h	3h	4h	5h	6h
Vormittag	—8·1	—8·4	—8·6	—8·4	—7·4	—5·0
Nachmittag ...	10·8	10·4	9·2	7·5	5·1	2·4

Täglicher Gang der äusseren Bodentemperatur

	7h	8h	9h	10h	11h	12h
Vormittag	—1·7	1·6	4·4	6·8	8·6	10·0
Nachmittag ...	—0·7	—3·1	—4·9	—6·1	—6·9	—7·5

Die tägliche Periode der Windstärke an ruhigen und stürmischen Tagen.

Es schien mir nahe zu liegen, einen Versuch zu unternehmen, die tägliche Periode der Windstärke für die stürmischen und die ruhigen Monate gesondert abzuleiten, um zu sehen, ob und welche Unterschiede sich dabei ergeben mögen.

Ich wählte desshalb aus den 108 Monaten des Winterhalbjahres und gleicherweise aus den 108 Monaten des Sommerhalbjahres der Periode 1873—1890 je zehn Monate mit den grössten und kleinsten Windstärken für jedes Halbjahr aus und bildete aus dem täglichen Gange dieser zehn Monate das Mittel. Es wurde dabei darauf gesehen, dass im Winter- wie im Sommerhalbjahr zur Mittelbildung für die stürmischen Monate die gleichnamigen Monate verwendet wurden, wie für die Monate der kleinsten mittleren Windstärke, um einen Einfluss des jährlichen Ganges auszuschliessen und streng vergleichbare Mittel für die stürmischen, wie für die ruhigen Monate zu erhalten. So wurden z. B. zur Mittelbildung für die stürmischen Monate Jänner 1880 und 1884 verwendet, dafür auch für das Mittel der ruhigen Monate gleicherweise zwei Jännermonate, und zwar Jänner 1882 und 1885, und gleicher-

---

Täglicher Gang der Lufttemperatur

	1h	2h	3h	4h	5h	6h
Vormittag	−3·9	−4·3	−4·5	−4·4	−3·6	−2·3
Nachmittag	3·7	3·9	3·8	3·7	3·2	2·6

Täglicher Gang der Lufttemperatur

	7h	8h	9h	10h	11h	12h
Vormittag	−0·7	0·5	1·6	2·3	2·9	3·0
Nachmittag	1·7	0·2	−1·2	−2·3	−2·9	−3·4

Die Gleichungen für diesen täglichen Gang sind:

Bodentemperatur .... $9^\circ81 \sin(250^\circ2+x)+1\cdot33 \sin(78\cdot3+2x)$

Lufttemperatur ...... $4\cdot55 \sin(240\cdot5+x)+0\cdot30 \sin(197\cdot2+2x)$

Der Unterschied im täglichen Gange der Lufttemperatur von jenem der Bodentemperatur hat, wie man sieht, in der That Ähnlichkeit mit jenem, der zwischen dem Gange der Windstärke und der Lufttemperatur besteht.

weise ist für die übrigen Monate verfahren worden. Das Winterhalbjahr umfasst die Monate October—März, das Sommerhalbjahr April bis September.

Die folgende Tabelle (Seite 142—143) enthält die auf diese Weise erhaltenen stündlichen Mittel der Windgeschwindigkeit für die stürmischen, wie für die ruhigen Monate. Die mittlere Windgeschwindigkeit der 20 stürmischen Monate ist 7·4, jene der ruhigen 20 Monate 3·6, der Unterschied also sicherlich gross genug, namentlich im Winterhalbjahr (7·8 gegen 3·2).

Der tägliche Gang der Windgeschwindigkeit während stürmischer Monate ist ganz auffallend verschieden von jenem während ruhiger Monate, und zwar zeigt sich dieser Unterschied in ganz gleicher Weise im Winterhalbjahre wie im Sommerhalbjahr.

Der tägliche Gang der Windstärke während stürmischer Monate zeigt eine doppelte tägliche Periode mit einem Maximum vor 1^h Nachmittags und einem zweiten secundären Maximum vor Mitternacht. Das eine Minimum fällt auf die Stunden 3^h bis 5^h Morgens, das zweite Minimum auf 7^h Abends. Sehr bemerkenswerther Weise ist dieses Minimum das Hauptminimum des Tages. In stürmischen Monaten sind demnach die Abendstunden von 6^h bis 8^h im Winter- wie im Sommerhalbjahr die ruhigsten Stunden, die frühen Morgenstunden, auf welche sonst die geringste Windgeschwindigkeit fällt, haben bei stürmischem Wetter eine stärkere Luftbewegung als die Abendstunden. Sommer- wie Winterhalbjahr stimmen in jeder Hinsicht im täglichen Gange der Windstärke überein, so dass das Mittel des ganzen Jahres als vollkommen entsprechender Repräsentant für den Verlauf der ganzen Erscheinung hingestellt werden darf.

In den ruhigen Monaten ist der tägliche Gang der Windstärke ein einfacher, mit einem Minimum um 6^h Morgens und einem Maximum um 1^h Nachmittags. Die Morgenstunden sind in ganz normaler Weise viel ruhiger als die Abendstunden. Die Amplitude des täglichen Ganges ist in den ruhigen Monaten grösser als in den stürmischen, sowohl absolut als natürlich noch mehr relativ zur mittleren Windstärke.

Winter- und Sommerhalbjahr zeigen auch in den ruhigen Monaten keinen Unterschied im Verlaufe des täglichen Ganges

und es kann desshalb auch für die ruhigen Monate das Jahresmittel als Repräsentant des Verlaufes der ganzen Erscheinung betrachtet werden.

Die Gleichungen für den täglichen Gang der Windstärke während stürmischer und während ruhiger Monate sind:

Täglicher Gang der Windstärke (Meter pro Secunde, $x = 0$ für $12^1/_2{}^h$ a. m.)

A. Stürmische Monate.

Winterhalbjahr .... $7 \cdot 763 + 0 \cdot 473 \sin(288^\circ 6 + x) + 0 \cdot 282 \sin(81 \cdot 9 + 2x)$
Sommerhalbjahr ...... $7 \cdot 010 + 0 \cdot 538 \sin(247 \cdot 8 + x) + 0 \cdot 335 \sin(85 \cdot 6 + 2x)$

B. Ruhige Monate.

Winterhalbjahr .... $3 \cdot 176 + 0 \cdot 554 \sin(236 \cdot 6 + x) + 0 \cdot 289 \sin(69 \cdot 1 + 2x)$
Sommerhalbjahr ...... $3 \cdot 986 + 1 \cdot 051 \sin(241 \cdot 2 + x) + 0 \cdot 283 \sin(70 \cdot 0 + 2x)$

In stürmischen Monaten ist die Phasenzeit des ersten grösseren Gliedes etwas verschieden im Sommer gegenüber dem Winter. Das Maximum tritt im Sommer 2·7 Stunden später ein, als im Winter. Die zweiten Glieder sind aber so gut wie völlig übereinstimmend. Sehr bemerkenswerth ist, dass die Amplituden der einfachen, wie jene der doppelten täglichen Variation in stürmischen Monaten Winter wie Sommer nahezu gleich gross sind; der Einfluss der Jahreszeit auf die Grösse der täglichen Variation der Windstärke verschwindet demnach fast ganz bei stürmischem Wetter.

In den ruhigen Monaten ist der Unterschied im täglichen Gange der Windstärke zwischen Sommerhalbjahr und Winterhalbjahr fast Null in Bezug auf die Phasenzeiten. Die doppelte tägliche Schwankung der Windstärke zeigt sowohl in Bezug auf Phasenzeit, wie in Bezug auf die Amplitude gar keinen Unterschied zwischen Winter und Sommer. Der einzige Unterschied besteht in der Grösse der Amplitude des ersten Gliedes, welche im Sommer fast doppelt so gross ist als im Winter. Der tägliche Gang der Windstärke während ruhiger Monate ist Winter wie Sommer der gleiche, nur die Amplitude ist in letzterer Jahreszeit erheblich grösser.

Es ist nicht ohne Interesse, die zweiten Glieder der vier Gleichungen zu betrachten. Die Amplituden, wie die Phasenzeiten sind merkwürdigerweise fast dieselben, so dass diese

Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit in stürmischen und in ruhigen Monaten.

	Stürmische Monate			Ruhige Monate			Jahresmittel. Berechnet Abweichungen vom Mittel	
	Winter Halbjahr	Sommer Halbjahr	Mittel	Winter Halbjahr	Sommer Halbjahr	Mittel	stürmisch	ruhig
Mitternacht 1	7·53	6·90	7·21	2·77	3·20	2·98	·166	·424
1 2	7·50	6·68	7·09	2·81	3·01	2·91	·181	·401
2 3	7·43*	6·57	7·00	2·78	3·16	2·97	– ·240	·581
3 4	7·57	6·54	7·05	2·79	3·13	2·96	·319	·076
4 5	7·63	6·38*	7·00*	2·82	3·16	2·99	·383	·744
5 6	7·77	6·45	7·11	2·79	3·11*	2·91	– ·307*	·752*
6 7	7·70	6·40	7·13	2·68*	3·12	2·90*	·333	·673
7 8	7·90	6·72	7·31	2·79	3·46	3·08	– ·186	– ·404
8 9	7·75	6·93	7·34	2·79	3·84	3·27	·031	·277
9 10	7·87	7·27	7·57	3·03	4·21	3·62	·282	·103
10 11	8·24	7·37	7·80	3·44	4·54	3·99	·521	·444

11 — Mittag	8·53	7·60	8·06	3·84	4·94	4·39	·699	·740
0— 1	**8·65**	**7·86**	**8·25**	4·05	5·08	4·56	**·780**	·960
1— 2	8·59	7·78	8·18	**4·06**	5·22	**4·64**	·747	**1·055**
2— 3	8·29	7·79	8·04	3·91	**5·28**	4·60	·606	1·023
3— 4	7·91	7·59	7·75	3·86	5·18	4·52	·387	·876
4— 5	7·79	7·50	7·64	3·55	5·14	4·34	·135	·650
5— 6	7·42	7·05	7·23	3·23	4·51	3·87	— ·101	·388
6— 7	7·14*	6·73	6·94	3·14	3·90	3·52	— ·281	·137
7— 8	7·23	6·59*	6·91*	3·09	3·74	3·42	— ·380	— ·071
8— 9	7·37	6·73	7·05	3·19	3·77	3·48	— ·397*	— ·165
9—10	7·37	6·81	7·09	3·10	3·83	3·46	— ·350	— ·303
10—11	7·52	**6·98**	7·25	3·02	3 73	3·38	— ·273	— ·350
11— Mitternacht	**7·55**	6·93	**7·24**	2·97	3·42	3·19	— ·201	— ·382
Mittel	7·76	7·01	7·38	3·18	3·99	3·58	·349	·532

Glieder gleichsam eine Constante des täglichen Ganges der Windstärke darzustellen scheinen, auf welche die Stärke der Luftbewegung, wie die Jahreszeit keinen Einfluss hat. Ob dies einen tieferen Grund hat, muss vorläufig dahin gestellt bleiben.

Betrachten wir nun die Jahresmittel des täglichen Ganges. Die Gleichungen für denselben, nach denen die zwei letzten Columnen unserer Tabelle berechnet worden sind, mögen nachstehend Platz finden.

Mittlerer täglicher Gang der Windstärke im Jahresmittel ($x = 0$ für $12^{1}/_{2}{}^{h}$ a. m.)

Stürmisch............ $7 \cdot 387 + 0 \cdot 474 \sin(266^\circ 9 + x) + 0 \cdot 309 \sin(83 \cdot 7 + 2x)$
Ruhig............... $3 \cdot 581 + 0 \cdot 802 \sin(239 \cdot 7 + x) + 0 \cdot 286 \sin(69 \cdot 5 + 2x)$

Die Phasenzeiten im täglichen Gange der Windstärke treten bei ruhigem Wetter später ein, als bei stürmischem Wetter. Der Unterschied beträgt bei dem ersten, grössten Gliede 1·8 Stunden, bei dem zweiten circa eine halbe Stunde. Die Amplitude des ersten Gliedes ist bei ruhigem Wetter fast doppelt so gross, als bei stürmischem Wetter, die Amplitude der doppelten täglichen Variation bleibt aber dieselbe bei grossen, wie bei kleinen Windstärken.

Bildet man die Verhältnisszahlen der Amplituden und Windstärken, so tritt die Verstärkung des täglichen Ganges bei ruhiger Witterung noch mehr hervor, denn wir haben:

Stürmisch ....Amplitude a_1/Mittel $= 0 \cdot 474/7 \cdot 39 = 0 \cdot 064$.
Ruhig...............Amplitude a_1/Mittel $= 0 \cdot 802/3 \cdot 58 = 0 \cdot 224$.

Die Amplitude ist in ruhigen Monaten demnach relativ mehr als dreimal grösser gegenüber jener während stürmischer Monate.

Fassen wir alles zusammen, so können wir sagen: In stürmischen Monaten treten die Phasenzeiten der täglichen Variation der Windstärke früher ein (nahezu um zwei Stunden) und die Amplituden sind verringert (fast um die Hälfte) gegenüber dem Verlaufe der Erscheinung während ruhiger Monate.

Die tägliche Periode der Windstärke verläuft zudem bei stürmischem Wetter ziemlich unregelmässig, indem sich neben

der Hauptperiode, die ein Maximum nach Mittag hat, noch eine secundäre Periode geltend macht mit einem Maximum der Windstärke in den Nachtstunden. Dieser secundären Periode liegt offenbar eine andere Ursache zu Grunde, als jene, die den normalen täglichen Gang bedingt. Die Verstärkung der Windstärke während der Nachtzeit bei stürmischen Winden hat zur Folge, dass das absolute Minimum der Windgeschwindigkeit in den Abendstunden 6—8^h eintritt.

Bei stürmischem Wetter kann sich demnach die tägliche Periode der Windgeschwindigkeit nicht in normaler Weise entwickeln, sie wird gehemmt und theilweise unterdrückt. Dies stimmt ganz gut überein mit der Erklärung, welche Espy und Köppen für die tägliche Periode der Windstärke gegeben haben, und ist eine Stütze für dieselbe.

Wenn man desshalb die tägliche Periode der Windgeschwindigkeit in Bezug auf die ihr zu Grunde liegenden Erscheinungen (z. B. ihre Beziehung zu dem täglichen Gange der äusseren Bodentemperatur, oder jenem der Temperaturdifferenz zwischen Boden und Luft) genauer untersuchen will, so sollte man nicht die allgemeinen Mittel dazu verwenden, sondern nur jene, die aus einer Periode ruhigen, heiteren Wetters abgeleitet worden sind.

Um beurtheilen zu können, inwieweit diese aus den Wiener Beobachtungen abgeleiteten Resultate allgemeinere Geltung beanspruchen können, habe ich die 20jährigen Registrirungen der Windgeschwindigkeit zu Lesina in ganz analoger Weise berechnet. Wegen der dort stärker entwickelten jährlichen Periode habe ich aber die Monate in anderer Weise zu Mitteln gruppirt, und die Sommermonate ganz weggelassen, da dieselben keine genügend grossen Unterschiede der Windstärke (in den Monatsmitteln) aufweisen. Die Gruppen sind: December bis Februar, der eigentliche Winter mit dem häufigsten Auftreten der Bora; März, October und November, Frühling und Herbst mit gemischtem Typus; April und Mai mit schon stark entwickelter täglicher Periode und grösster Häufigkeit des Scirocco. Die auf diese Weise erhaltenen stündlichen Mittel der Windstärke finden sich in nachfolgender Tabelle zusammengestellt.

Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit zu Lesina (Meter pro Secunde).

	I. Stürmische Monate			Mittel	II. Ruhige Monate			Mittel
	Dec.—Febr. 10	März, Oct., Nov. 10	April, Mai 5		Dec.—Febr. 10	März, Oct., Nov. 10	April, Mai 5	
1a.	7·4	7·4*	7·8	7·48	4·0	4·3	3·9	4·10
2	7·3	7·5	7·6	7·44	4·0*	4·3	4·1	4·14
3	7·3	7·4	7·7	7·42*	4·1	4·3	3·9*	4·14
4	7·2*	7·7	7·6	7·48	4·1	4·2*	4·0	4·12*
5	7·3	7·8	7·6*	7·56	4·2	4·2	3·9	4·14
6	7·2	7·9	7·6	7·56	4·3	4·3	3·9	4·22
7	7·4	7·8	7·8	7·64	4·4	4·4	4·1	4·34
8	7·4	7·9	8·2	7·76	4·3	4·3	4·9	4·42
9	7·6	8·3	8·4	8·04	4·1	4·2	5·0	4·32
10	7·5	8·5	8·6	8·12	4·2	4·4	5·4	4·52
11	7·7	8·5	8·9	8·26	4·5	4·8	5·4	4·80
Mittag	7·7	**8·6**	8·8	8·28	4·6	4·7	5·6	4·84
1	**7·9**	8·4	9·0	**8·32**	**4·8**	4·8	5·5	4·94
2	7·8	8·4	8·9	8·26	4·7	4·8	5·7	4·94
3	7·8	8·2	**9·0**	8·20	4·8	**4·9**	**5·6**	**5·00**
4	7·6	8·2	9·0	8·12	4·6	4·9	5·7	4·94
5	7·7	8·1	9·0	8·12	4·6	4·6	5·4	4·76
6	7·5	8·0	8·6	7·92	4·6	4·4	5·3	4·66
7	7·6	7·8	8·3	7·82	4·6	4·4	4·8	4·56
8	7·4	7·6	7·8	7·56	4·6	4·4	4·6	4·52
9	7·5	7·6	7·7	7·58	4·5	4·4	4·3	4·42
10	7·4	7·7	7·8	7·60	4·4	4·4	4·4	4·40
11	7·5	7·6	7·9	7·62	4·2	4·3	4·3	4·26
Mittern.	7·3	7·4	7·8	7·44	4·1	4·4	4·0	4·20
Mittel	7·5	7·9	8·2	7·82	4·4	4·5	4·7	4·49

Man sieht, dass die Unterschiede im täglichen Gange der Windstärke in diesen drei Jahreszeiten nicht erheblich sind, sowohl in stürmischen wie in ruhigen Monaten. Man kann daher einen mittleren täglichen Gang für die Jahresperiode October bis Mai aufstellen für die Monate mit der grössten Windstärke und die mit der geringsten Windstärke, wie dies in unserer Tabelle geschehen ist. Diese Mittel sind mit Rücksicht auf die Zahl der in den drei Gruppen vertretenen Monate gebildet worden.

Wenn wir nun den täglichen Gang der Windgeschwindigkeit auf Lesina während stürmischer Monate betrachten mit Beziehung auf jenen, den wir auf ganz gleichem Wege für Wien gefunden haben, so fällt uns sogleich ein grosser Unterschied auf. Eine doppelte tägliche Periode der Windstärke während stürmischer Monate fehlt auf Lesina, während sie zu Wien in charakteristischer Weise ausgeprägt ist. Selbst während der drei eigentlichen Wintermonate ist kein nächtliches Maximum der Windstärke zu erkennen. Der tägliche Gang der Windstärke während stürmischer Monate ist auf Lesina kaum verschieden von jenem während ruhiger Monate. Nur Ein Unterschied bleibt, den wir auch für Wien oben nachgewiesen haben, d. i. die Verspätung des Eintrittes des Nachmittagsmaximums der Windstärke während ruhiger Monate. Auch auf Lesina tritt bei stürmischem Wetter das Maximum der Windstärke früher ein als bei ruhiger Witterung.

Die Gleichungen für den täglichen Gang der Windstärke bei extremen mittleren Windstärken sind:

Täglicher Gang der Windstärke auf Lesina
($x = 0$ für Mitternacht; October—Mai incl.)

Stürmische Monate ... $782 + 43 \sin (256 \cdot 2 + x) + 8 \sin (87^\circ 6 + x)$

Ruhige Monate ...... $449 + 41 \sin (237 \cdot 6 + x) + 6 \sin (49 \cdot 0 + x)$

Das Maximum tritt beim ersten wie beim zweiten Gliede um etwas mehr als eine Stunde früher ein während stürmischer Monate gegenüber den ruhigen Monaten.

Die Amplituden der täglichen Periode zeigen auf Lesina keinen Unterschied bei starken und schwachen Winden, sie

sind (absolut genommen) bei letzteren eher etwas kleiner. Auch das ist dem Verhalten in Wien entgegengesetzt. Im Verhältniss zur mittleren Windstärke sind die täglichen Amplituden allerdings auch hier grösser bei geringen Windstärken.

Die doppelte tägliche Periode der Windstärke in stürmischen Monaten (d. i. ein zweites nächtliches Maximum der Windgeschwindigkeit), wie wir selbe für Wien gefunden haben, kann also nicht als eine allgemeine Erscheinung der mittleren Breiten hingestellt werden, dass dieselbe aber doch eine weite Verbreitung hat, wird sich noch aus dem Nachfolgenden ergeben.

Nachdem sich für Wien aus den Mitteln des täglichen Ganges der Windstärke während stürmischer Monate ein zweites nächtliches Maximum mit Entschiedenheit herausgestellt hatte, wollte ich nicht unterlassen, diese Erscheinung etwas genauer zu untersuchen. Die Monatsmittel umfassen doch immer verschiedene Witterungstypen, auch die Monate mit der grössten mittleren Windgeschwindigkeit haben einige ruhige Tage. Um schärfer definirte Resultate zu erlangen, bleibt nichts Anderes übrig, als auf die »stürmischen Tage« selbst zurückzugehen und für diese den täglichen Gang der Windstärke abzuleiten.

Ich verfuhr dabei auf folgende Weise: Zuerst schrieb ich mir aus den in unseren »Jahrbüchern« publicirten Registrirungen der Windstärke während der fünf Jahrgänge 1876—1880 für das Winterhalbjahr (October—März) die stündlichen Windwege an jenen Tagen heraus, deren m i t t l e r e Windstärke mindestens 40 Kilometer pro Stunde (d. i. 11 *m* pro Secunde) erreicht hatte. Ich erhielt 100 solche Tage. Der tägliche Gang wurde aber, wie die folgende Tabelle (S. 150) zeigt (Columne *A* und *B*), für jede Gruppe von 50 Tagen separat abgeleitet. Man hat derart ein Urtheil über die Genauigkeit, mit der das Gesammtmittel aus sämmtlichen 100 Tagen den täglichen Gang der Windstärke an stürmischen Tagen darstellen mag. Stimmen beide Reihen im täglichen Gang überein, so kann man deren Mittel als Repräsentant des normalen Ganges ansehen. Die Übereinstimmung zwischen den beiden Reihen ist nun, wie man aus der Tabelle sieht, eine überraschend grosse. Das zweite nächtliche Maximum tritt schon im Mittel aus je 50 Tagen scharf hervor,

desselben auch das Hauptminimum der Windstärke in den Abendstunden (6—7^h), das wir vorhin schon als für den täglichen Gang während stürmischer Monate charakteristisch kennen gelernt haben.

Ich nahm dann noch 100 stürmische Tage aus den Jahren 1881—1891,[1] bei deren Auswahl und Berechnung aber etwas anders vorgegangen wurde. Es wurden nur jene Tage genommen, an welchen ein Maximum der Windstärke von 70 *km* pro Stunde (19$^1/_2$ *m* pro Secunde) erreicht worden ist. Dabei nahm ich stets volle Sturmtage, d. h. die stündlichen Windwege wurden nicht immer von 1^h a. m., sondern vom Beginn starker Luftbewegung an ausgeschrieben, aber stets volle 24 Stunden oder ein Vielfaches derselben genommen. Der Beginn der Sturmtage fiel dabei der Reihe nach ziemlich gleich häufig auf alle Tagesstunden, und das hatte den Vortheil, dass zwischen Anfang und Ende der Periode, wie man aus der Tabelle ersieht, selbst für die Mittel aus bloss 50 Tagen kein Sprung in der mittleren Windgeschwindigkeit eintritt.

Die Tabelle enthält nun auch den täglichen Gang der Windgeschwindigkeit für diese Sturmtage im strengeren Sinne, und zwar auch wieder für je 50 Tage separat gerechnet (Columne *C* und *D*), sowie auch für die vollen 100 Tage. Die Übereinstimmung zwischen den beiden Reihen ist in diesem Falle nicht ebenso überraschend gross wie im vorigen Falle, doch zeigen sich auch hier die nächtlichen Maxima in ganz analoger Weise und ebenso die Hauptminima der Windstärke in den Abendstunden. Das Mittel für die vollen 100 Sturmtage stimmt aber so gut mit dem entsprechenden Mittel für die 100 Sturmtage aus den Jahren 1876—1880 überein, dass man vollkommen berechtigt ist, ein Gesammtmittel für 200 Sturmtage abzuleiten, wie dies in unserer Tabelle geschehen ist.

Wir wollen aber nicht unterlassen auf den interessanten Umstand aufmerksam zu machen, dass, während der tägliche Gang der Windstärke aus drei Gruppen von je 50 Tagen abgeleitet, man kann sagen vollkommen übereinstimmend gefunden

[1] Um gerade 100 Tage zu erhalten, wurde aber auch noch beim Jahre 1892 eine kleine Anleihe von Sturmtagen gemacht.

Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit zu Wien an stürmischen und Sturmtagen. Winterhalbjahr (October bis März).

	A	B	Mittel	C	D	Mittel	Gesammt-Mittel	Täglicher Gang in Abweichungen vom Mittel	
	je 50 Tage		100 Tage	je 50 Tage		100 Tage	200 Tage	beobachtet	berechnet
Mittern.— 1	15·4	13·4	14·44	**16·4**	14·8	**15·59**	15·02	·14	·24
1— 2	15·2	13·5	14·38	15·9	14·3*	15·10	14·74	— ·14	·22
2— 3	14·2	13·7	13·95	15·8	15·1	15·50	14·72	— ·16	·06
3— 4	14·5	13·3	13·93	15·8	15·6	15·72	14·82	— ·06	— ·20
4— 5	14·4	13·1	13·75	15·3	15·5	15·41	14·58	— ·30	— ·45
5— 6	14·5	13·1*	13·81	15·6	**15·8**	**15·72**	14·76	— ·12	— ·69
6— 7	14·0*	13·1	13·56*	15·0	15·3	15·17	14·36	— ·52	— ·60
7— 8	14·2	13·1	13·64	14·6*	15·1*	14·85*	14·24*	— ·64	— ·41
8— 9	14·1	13·2	13·64	15·2	15·5	15·35	14·50	— ·38	— ·07
9—10	15·2	13·7	14·49	15·4	15·9	15·62	15·05	·17	·37
10—11	15·1	14·0	14·54	16·9	16·6	16·70	15·62	·74	·79

11 Mittag	15·7	14·7	15·10	**17·4**	**17·2**	**17·31**	16·25	1·37	1·09
Mittag— 1	**15·9**	**14·9**	**15·48**	17·3	17·2	17·30	**16·87**	1·49	1·20
1— 2	15·7	14·6	15·11	17·0	16·6	16·81	15·96	1·08	1·09
2— 3	15·4	14·2	14·78	16·4	16·4	16·40	15·59	·71	·76
3— 4	14·9	13·7	14·33	15·7	16·2	15·96	15·14	·26	·31
4— 5	14·0	13·4	13·71	15·2	16·2	15·71	14·71	— ·17	— ·18
5— 6	13·2	13·3	13·24	14·6	15·3	14·93	14 08	— ·80	— ·51
6— 7	13·3*	12·9*	13·06*	14·3	15·2	14·76*	13·91•	— ·97	— ·84
7— 8	13·6	13·0	13·32	14·3*	15·6	14·92	14·12	— ·76	— ·89
8— 9	14·4	13·0	13·69	14·6	15·1*	14·87	14·28	— ·60	— ·75
9—10	14·6	13·3	13·95	14·7	15·2	14·98	14·46	— ·42	— ·48
10—11	14·7	**14·0**	14·34	15·3	**15·5**	15·35	14·85	— ·03	— ·16
11—Mittern.	**15·7**	13·6	**14·65**	15·8	15·3	15·51	**15·08**	·20	·10
Mittel	14·7	13·6	14·12	15·6	15·7	15·65	14·88	·509	·519

wird, die letzte vierte Gruppe von 50 Tagen nicht unerhebliche Abweichungen zeigt (Maximum vor 5—6^h Morgens, Hauptminimum 1—2^h a. m.).

Den täglichen Gang der Windstärke während stürmischer Tage (Mittel von 200 Tagen 1876—1891) habe ich auch durch Sinusreihen dargestellt und mittelst derselben die Abweichungen der Windstärke zu den einzelnen Stunden vom Tagesmittel berechnet (letzte Columne der Tabelle). Die Gleichung für den täglichen Gang der Windgeschwindigkeit ist:

Täglicher Gang der Windstärke an stürmischen Tagen. Meter pro Secunde. $x = 0$ für $12^1/_2$ a. m.

$$14 \cdot 88 + 0 \cdot 49 \sin(284^\circ 0 + x) + 0 \cdot 72 \sin(85^\circ 5 + 2x).$$

Die doppelte tägliche Periode hat, wie man sieht, eine grössere Amplitude als die einmalige, die Störung der täglichen Periode der Windgeschwindigkeit durch die stürmische Luftbewegung tritt demnach hier noch viel schärfer hervor als in dem Mittel für stürmische Monate. Das Hauptmaximum der Windstärke ist noch mehr verfrüht, es tritt schon eine halbe Stunde nach Mittag, das zweite secundäre Maximum eine halbe Stunde nach Mitternacht ein. Das Abendminimum der Windstärke um 7^h ist viel stärker ausgeprägt als das Morgenminimum.

Die stürmischen Tage im engeren Sinne zeigen also genau den gleichen täglichen Gang der Windstärke wie die stürmischen Monate, nur noch stärker ausgeprägt wie dies zu erwarten war.

Ich möchte hier noch das Ergebniss einer ähnlichen Berechnung des Herrn Satke in Tarnopol einschalten. In seiner Arbeit über den täglichen Gang der Windgeschwindigkeit und der Windrichtung in Tarnopol (Diese Sitzungsber., Bd. XCV, II. Abth., März-Heft 1887) hat dieser Autor für die Wintermonate auch den täglichen Gang der Windgeschwindigkeit für schwache und starke Winde separat abgeleitet. Er unterschied Tage mit einer mittleren Windgeschwindigkeit bei Nacht von 0—10 *km* pro Stunde und Tage mit einer solchen von 10—23 *km*. Da die mittlere tägliche Windgeschwindigkeit zu Tarnopol sich nur zu 1·45 *m* ergibt, so entspricht eine

mittlere Windgeschwindigkeit bei Nacht von mindestens 2·8 *m* sec. schon stürmischen Winden. Ich habe aus den von Herrn Satke für Intervalle von zwei Stunden berechneten mittleren Windgeschwindigkeiten die folgenden Gleichungen abgeleitet:

Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit in Tarnopol.
Meter pro Secunde; $x = 0$ für Mitternacht.

Jahr (Allgemein) ... $1{\cdot}45 + 0{\cdot}64 \sin(249{\cdot}9 + x) + 0{\cdot}20 \sin(60{\cdot}3 + 2x)$

Winter:

Schwache Winde ... $1{\cdot}03 + 0{\cdot}23 \sin(240{\cdot}1 + x) + 0{\cdot}16 \sin(66{\cdot}1 + 2x)$

Heftige Winde ..... $4{\cdot}00 + 0{\cdot}39 \sin(270{\cdot}8 + x) + 0{\cdot}27 \sin(54{\cdot}8 + 2x)$

Auch hier tritt das tägliche Maximum der Windstärke bei stürmischen Winden viel früher ein (circa um zwei Stunden) als an ruhigen Tagen.

Tägliche Periode der Häufigkeit grösster und grösserer Windstärken. Auf den Blättern, auf welchen ich mir die stündlichen Windwege von 200 stürmischen Tagen ausgeschrieben hatte, markirte ich das Maximum der Windgeschwindigkeit an jedem der 200 Tage und zählte dann, wie oft diese Tagesmaxima zu jeder der 24 Stunden eingetreten sind. Die stündlichen Häufigkeitszahlen der Maxima der Windgeschwindigkeit zeigen schon eine sehr deutliche tägliche Periode in jeder der zwei Gruppen von 100 Tagen, die zunächst am besten gesondert bleiben, weil sie Sturmtage von verschiedener Qualität enthalten. Nimmt man dann je zwei Stunden zusammen, so kommt die tägliche Periode der Häufigkeit der Maxima überraschend scharf zu Tage. Ich vereinige die Häufigkeiten für $11-12^h$ und $12-1^h$ in eine Summe und so weiter und schreibe statt $11-1^h$ kurz 12^h, was der Mitte des zweistündigen Intervalls entspricht.

Täglicher Gang der Häufigkeit der Tagesmaxima der Windstärke.

	Mitt.	2^h	4^h	6^h	8^h	10^h	Mitt.	2^h	4^h	6^h	8^h	10^h
I 1876—1880 ...	15	7	7	3	7	9	19	9	7	3	3	11
II 1881—1891 ...	9	7	12	4	8	8	11	14	10	3	7	7
Summe	**24**	14	19	7*	15	17	**30**	23	17	6*	10	18

Diese Häufigkeitszahlen haben demnach genau denselben täglichen Gang wie die mittleren Windstärken, nur ist derselbe noch viel schärfer ausgeprägt. Es zeigt sich hier wieder, wie man durch ein einfaches Abzählen der Häufigkeit des Auftretens einer gewissen Erscheinung viel rascher und namentlich auch viel bequemer, ja fast mühelos zur Kenntniss einer etwaigen Periodicität derselben gelangt, als auf dem Wege der Berechnung der stündlichen oder täglichen etc. Messungen derselben. Dafür kommt man aber auch auf dem ersteren müheloseren Wege nur zu einer ersten qualitativen Beurtheilung der Existenz gewisser Perioden; man erfährt nichts über die Grösse der Amplituden und überhaupt nichts über den genaueren Verlauf der ganzen Periode. Unsere Kenntnisse über die tägliche Periodicität der Gewitter z. B. bleiben auf dieser ersten unvollkommenen Stufe stehen, weil wir bloss die Häufigkeit des Auftretens der Gewitter während gewisser Zeitintervalle notiren und dann abzählen können. Würden wir im Stande sein die Gewitterenergie messend zu verfolgen, dann erst würden wir die Periodicität der Gewittererscheinung auf strengere Weise auch quantitativ feststellen können, wie dies das eigentliche Ziel der Naturforschung bleiben muss. Desshalb darf man sich mit der Constatirung der Häufigkeitszahlen bei den meteorologischen Erscheinungen nicht begnügen, wenn sie auch ungleich leichter und müheloser zu erhalten sind als jene Zahlen, welche das Maass der quantitativen Verhältnisse sind.

Ich habe mich nicht begnügt mit der Constatirung der Häufigkeit der Tagesmaxima der Windgeschwindigkeit an den einzelnen Tagesstunden, sondern bin weiter gegangen zur Auszählung der Häufigkeit eines Windweges von 50 *km* pro Stunde (14 *m* pro Secunde) zu jeder der einzelnen Tagesstunden, und zwar Monat für Monat der ganzen Periode 1876—1890. Die auf diese Weise erhaltenen stündlichen Summen der Häufigkeit für jeden Monat sind in einer Tabelle zusammengestellt worden, die man am Schlusse dieses Abschnittes (Seite 164) findet. Da der tägliche Gang dieser Häufigkeitszahlen in den einzelnen Monaten noch keine genügende Regelmässigkeit zeigt, sind Summen für das Winterhalbjahr, das Sommerhalbjahr und das ganze Jahr gebildet und daraus auch Mittelwerthe abgeleitet worden. Es

ergibt sich derart, dass im Mittel von 15 Jahren das Winterhalbjahr 275 Stunden zählt mit einer mittleren Windgeschwindigkeit von **wenigstens** 14 *m* pro Secunde, das Sommerhalbjahr 147, das ganze Jahr demnach 422. Die Vertheilung dieser Summe auf die einzelnen Tagesstunden zeigt die Tabelle auf Seite 156.

Der tägliche Gang der Häufigkeit einer Windgeschwindigkeit von mindestens 50 *km* pro Stunde ist im Allgemeinen, wie auch zu erwarten war, ganz derselbe wie jener der mittleren Windgeschwindigkeit an stürmischen Tagen. Das Hauptmaximum der Frequenz tritt bald nach Mittag ein, das Hauptminimum Abends um 6^h circa, das secundäre Maximum fällt auf die Stunden vor Mitternacht, ein zweites Minimum auf die ersten Morgenstunden. Die Abweichungen der Stundenmittel vom Tagesmittel, die in der Tabelle sowohl direct nach den Beobachtungen, sowie als Ergebniss einer Berechnung mittelst drei periodischer Glieder erhalten worden sind, zeigen diesen täglichen Gang am deutlichsten.

Die Gleichungen für den täglichen Gang der Häufigkeit eines Windweges von 50 *km* pro Stunde und darüber sind (Zeit von $12^1/_2{}^h$ a. m. an gezählt):

Winterhalbjahr .... $1·42 \sin(290°4+x)+0·93 \sin(113°6+2x)$

Sommerhalbjahr ... $0·52 \sin(153·3+x)+0·47 \sin(126·3+2x)$

Jahr[1] .... $1·11 \sin(270·7+x)+1·46 \sin(118·0+2x)$
$+0·75 \sin(248·9+3x)$
$+0·41 \sin(166·8+4x)$

Die einmalige tägliche Periode ist ziemlich verschieden im Winter- und Sommerhalbjahr, die doppelte tägliche Periode aber bleibt sich fast ganz gleich, diese beiden Glieder addiren sich daher, während die einmalige tägliche Periode für das Jahr kleiner ist als für das Winterhalbjahr.

Ich wollte anfänglich auch den naheliegenden Gedanken verfolgen, die Häufigkeitszahlen grosser Windstärken für die einzelnen Hauptwindrichtungen aufzusuchen, ähnlich wie ich dies für Lesina durchgeführt habe.[2] Es stellte sich aber bald

[1] Summe von Winterhalbjahr und Sommerhalbjahr.

[2] Der tägliche und jährliche Gang der Windgeschwindigkeit auf Lesina. Annalen der Hydrographie, XVI, 1888, S. 30 und 287 und speciell S. 297.

Stündliche Häufigkeit eines Windweges von 50 *km* und darüber. Mittel von 15 Jahren.

	Winter- Halbjahr	Sommer- Halbjahr	Ganzes Jahr	Abweichungen vom Mittel beobachtet	Abweichungen vom Mittel berechnet
12— 1	11·0	6·9	17·9	0·3	— ·51
1— 2	10·1	6·3	16·3	—1·3	— ·98
2— 3	10·1	5·9	16·0	—1·6	—1·17*
3— 4	10·8	5·5	16·3	—1·3	—1·16*
4— 5	10·7	5·7	16·4	—1·2	—1·09
5— 6	12 4	5·7	18·1	0·5	—1·05
6— 7	10·3	5·3	15·7	—1·9	—1·01
7— 8	11·4	5·1	16·5	—1·1	—0·77
8— 9	11·8	5·9	17·7	0·1	—0·17
9—10	13·0	5·7	18·7	1·1	·80
10—11	12·8	5·5	18·3	0·7	1·94
11—Mittag	14·9	6·5	21·5	3·9	2·83
12— 1	14·3	7·0	21·2	3·6	3·09*
1— 2	13·7	6·3	20·1	2·5	2·52
2— 3	11·9	5·8	17·7	0·1	1·27
3— 4	11·4	5·1	16·5	—1·1	—0·22
4— 5	10·9	7·3	18·1	0·5	—1·39
5— 6	10·0	5·8	15·8	—1·8	—1·87*
6— 7	9·7	6·1	15·7	—1·9	—1·57
7— 8	10·1	5·8	15·9	—1·7	—0·77
8— 9	10·9	6·9	17·7	0·1	·07
9—10	11·3	7·6	18·9	1·3	·58*
10—11	10·6	7·1	17·7	0·1	·54*
11—Mittern.	11·0	6·6	17·6	0·0	·09
Tag	275·1	147·4	422·3	1·24	1·14

heraus, dass für Wien keine Veranlassung besteht, diese Specialisirung vorzunehmen, indem alle stärkeren Winde W-Winde sind. So führte z. B. eine Zählung der stündlichen Häufigkeit der einzelnen heftigen Winde (⋝ 50 *km* pro Stunde) für die einzelnen Monate der zwei Jahre 1876 und 1877 zu folgendem Ergebniss.

Mittlere Häufigkeit einer Windstärke ⋝ 50 *km*.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Winter	3	0	0	0	0	0	130	17
Frühling	12	0	0	0	1	0	94	15
Sommer	2	0	0	0	0	0	67	9
Herbst	0	0	0	0	0	0	58	23
Jahr	17	0	0	0	1	0	349	64

Bei einer derartigen Beschränkung der starken Winde auf fast ein und dieselbe Richtung das ganze Jahr hindurch erscheint es als überflüssig, ja gar nicht ausführbar, deren stündliche Häufigkeit nach den einzelnen Richtungen zu trennen.

Erst nach Abschluss der vorstehenden Rechnungen wurde ich zufällig (bei Durchsicht der Fortschritte der Physik im Jahre 1886) darauf aufmerksam, dass ja bereits Herr Dr. Hellmann und nach ihm Herr Dr. Sprung die stündliche Häufigkeit starker Winde für einige Orte in Norddeutschland aufgesucht haben. Da ich gar nicht die Absicht hatte, an die Bearbeitung der Wiener Windregistrirungen allgemeinere Untersuchungen anzuknüpfen, so hatte ich auch die bezügliche Literatur nicht speciell nachgesehen. Nachdem ich nun aber auf die Arbeit von Hellmann und Sprung[1] hingewiesen worden war, wollte ich doch deren Resultate mit den von mir für Wien erhaltenen etwas vergleichen.

Hellmann hat als stürmische Winde jene genommen, deren Geschwindigkeit 12 *m* pro Secunde erreicht oder überschritten hat, und Sprung hat sich diesem Vorgange ange-

[1] Hellmann: Über die tägliche Periode der Gewitter in Mitteleuropa. Meteorolog. Zeitschr., II, 1885, S. 439. Häufigkeitstabelle stürmischer Winde für Hamburg und Keitum; und Sprung: Die tägliche Periode der stürmischen Winde. Meteorolog. Zeitschr., III (XXI), 1886, S. 224. Häufigkeitstabelle für Swinemünde.

schlossen. Es trifft sich nun gut, dass ich in Wirklichkeit wohl nahe denselben Maassstab verwendet habe. Unser Anemometer gibt ziemlich in demselben Verhältniss grössere Windgeschwindigkeiten (auch mit Rücksicht auf den verwendeten Reductionsfactor), als meine untere Grenze der stürmischen Winde höher gewählt worden war als jene von Hellmann und Sprung. Die Zahlenwerthe der Häufigkeit dürften daher auch absolut ziemlich vergleichbar sein.

Eine absolute Vergleichbarkeit ist überhaupt nicht erreichbar wegen der localen Verhältnisse der Aufstellung der Anemometer.

Herr Dr. Hellmann hat seiner Zählung der stündlichen Häufigkeit stürmischer Winde zu Hamburg und Keitum fünfjährige Registrirungen 1878—1882 zu Grunde gelegt und selbe auf alle 12 Monate erstreckt. Herr Dr. Sprung hat für Swinemünde diese Häufigkeit aus achtjährigen Registrirungen 1878—1885 abgeleitet, aber nur das Winterhalbjahr (October bis März) genommen.

Hellmann findet für Hamburg durchschnittlich 445 Stunden mit stürmischen Winden im Jahre, für Keitum 354.[1] Da ich für Wien 422 gefunden, so sind auch die absoluten Zahlen der stündlichen Häufigkeit und die Amplituden der täglichen Periode direct vergleichbar.

Ich habe den stündlichen Gang der Häufigkeit stürmischer Winde zu Hamburg, Keitum und Swinemünde in folgender Tabelle zusammengestellt. Die Stundensummen für das Winterhalbjahr sind aus 18jährigen Registrirungen abgeleitet, jene für das Sommerhalbjahr nur aus 10jährigen (Hamburg und Keitum allein).

Um den täglichen Gang klarer zum Ausdrucke zu bringen, habe ich wieder periodische Formeln aufgestellt und hiernach die Abweichungen der Stundenmittel vom Tagesmittel berechnet. wie sie in der Tabelle enthalten sind. Der besseren Vergleichbarkeit wegen sind die Summen des Winterhalbjahres mittelst Division durch 18 und jene des Sommerhalbjahres mittelst

[1] Die Aufstellung des Anemometers in Keitum auf einem Hausdache lässt die registrirten Windgeschwindigkeiten kleiner ausfallen.

Häufigkeit einer Windgeschwindigkeit von 12 *m* pro Secunde und darüber.

A. Winterhalbjahr: Hamburg, Keitum, Swinemünde; in Summa 18 Jahre.
B. Sommerhalbjahr: Hamburg, Keitum; in Summa 10 Jahre.

	Winter- Halbjahr Summe 18 Jahre	Sommer- Halbjahr Summe 10 Jahre	Berechnet (Hamburg, Keitum, Swinemünde) Abweichungen vom Mittel aus 18 Winter- Halbjahren	Berechnet (Hamburg, Keitum, Swinemünde) Abweichungen vom Mittel aus 10 Sommer- Halbjahren	Wien berechnet Abweichungen vom Mittel aus 15 Jahren Jahr
1ʰ a.m.	194	23	**·04**	— 2·39	— ·51
2	**200**	24	— ·02	— 2·36	— ·98
3	193	24	— ·33	— 2·32	— 1·17
4	191	32	— ·74	— 2·19	— 1·16*
5	176*	26	— 1·14	— 1·84	— 1·09
6	186	35	— 1·33*	— 1·21	— 1·05
7	188	46	— 1·18	— ·27	— 1·01
8	191	51	— ·71	·90	— ·77
9	202	76	·10	2·17	— ·17
10	209	78	1·02	3·39	·80
11	221	86	1·90	4·23	1·94
Mittag	251	95	2·52	**4·67**	2·83
1	257	**98**	**2·72**	4·57	**3·09**
2	**264**	89	2·48	3·94	2·52
3	242	75	1·81	2·88	1·27
4	205	57	·88	1·57	— ·22
5	186	51	— ·14	·22	— 1·39
6	176	37	— 1·01	— ·99	— 1·87*
7	178	29	— 1·58	— 1·91	— 1·57
8	175*	26	— 1·75*	— 2·48	— ·77
9	178	19	— 1·58	— 2·73	·07
10	186	22	— 1·16	— 2·77*	**·58**
11	187	22	— ·62	— 2·61	·54
Mitternacht	201	18*	— ·18	— 2·47	·09
Summe	4837	1139	26·94	57·08	27·46
Mittel	201	47	1·12	2·38	1·14

Division durch 10 in Jahresmittel verwandelt werden, wie ich dies auch für Wien gethan hatte. So sind die Amplituden in den drei Reihen direct vergleichbar.

Täglicher Gang der Häufigkeit stürmischer Winde
$x = 0$ für $12^{1}/_{2}{}^{h}$ a. m.

Winterhalbjahr ..... $11 \cdot 19 + 1 \cdot 36 \sin(278 \cdot 3 + x) + 1 \cdot 38 \sin(87^\circ 5 + 2x)$
Sommerhalbjahr .... $4 \cdot 25 + 3 \cdot 58 \sin(283 \cdot 2 + x) + 1 \cdot 13 \sin(105^\circ 8 + 2x)$

Der tägliche Gang der Häufigkeit stürmischer Winde an den deutschen Nordsee- und Ostseeküsten ist im Allgemeinen derselbe wie in Wien, namentlich im Winterhalbjahr. Das Hauptmaximum tritt bald nach Mittag ein, das Hauptminimum Abends nach 7^h, das secundäre Maximum tritt nach Mitternacht ein, das secundäre Minimum vor 6^h a. m. Im Sommerhalbjahr scheint an der deutschen Nordseeküste das nächtliche Maximum der Häufigkeit stürmischer Winde zu verschwinden; es erinnert nur noch das Hauptmaximum am Abend an die normale tägliche Periode der Häufigkeit stürmischer Winde.

Zum Schlusse wollen wir noch die in Betreff der täglichen Periode stürmischer Winde erlangten Resultate übersichtlich zusammenstellen.

Den täglichen Gang der Windstärke und der Häufigkeit stürmischer Winde findet seinen Ausdruck in folgenden Gleichungen.

Winterhalbjahr. $x = 0$ für $12^{1}/_{2}$ a. m.

Wien. Windgeschwindigkeit m.-s. $0 \cdot 49 \sin(284^\circ 0 + x) + 0 \cdot 72 \sin(85^\circ 5 + 2x)$
» Häufigkeit stürmischer Winde .... $1 \cdot 42 \sin(290 \cdot 4 + x) + 0 \cdot 93 \sin(113 \cdot 6 + 2x)$
Norddeutschland. Häufigkeit stürmischer Winde .... $1 \cdot 36 \sin(278 \cdot 3 + x) + 1 \cdot 38 \sin(87 \cdot 5 + 2x)$

Man sieht, dass sowohl die mittlere Windstärke wie die Häufigkeit stürmischer Winde den gleichen Gang befolgt und letzterer für Wien derselbe ist wie für Norddeutschland. Der tägliche Gang der stürmischen Winde in Norddeutschland stimmt fast genau überein mit dem täglichen Gang der Windgeschwindigkeit an Sturmtagen in Wien.

Mittlere Windgeschwindigkeit zu Wien, in Meter pro Secunde (1876—1890).

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr
Mittn.—1h a.	5·00	4·82	5·78	4·72	4·84	4·84	5·84	4·50	4·36	4·50	4·78	4·52	4·875
1—2	4·82	4·78	5·70	4·50	4·58	4·78	5·54	4·30	4·22	4·32	4·62	4·38	4·712
2—3	4·88	4·84	5·62	4·34	4·46	4·72	5·38	4·30	4·22	4·42	4·66	4·40	4·687
3—4	4·94	4·74	5·72	4·28	4·38	4·80	5·36	4·14	4·14	4·42	4·76	4·50	4·682
4—5	4·92	4·66	5·72	4·24	4·36	4·80	5·34	3·96	4·16	4·42	4·70	4·64	4·660
5—6	4·84	4·66	5·74	4·12	4·22	4·80	5·24	3·96	4·02	4·44	4·60	4·80	4·620
6—7	4·76	4·66	5·80	4·10	4·46	4·88	5·04	3·94	3·98	4·42	4·50	4·86	4·617
7—8	4·80	4·70	5·86	4·36	4·86	5·22	5·14	4·28	4·08	4·40	4·54	4·84	4·757
8—9	4·85	4·72	5·86	4·74	5·12	5·40	5·42	4·62	4·38	4·60	4·55	4·70	4·913
9—10	5·00	5·14	6·26	5·24	5·56	5·74	5·62	4·94	4·74	4·96	4·82	4·78	5·233
10—11	5·20	5·66	6·78	5·62	5·82	5·84	5·64	5·30	5·12	5·36	5·12	5·02	5·540
11—Mittag	5·50	5·98	7·18	5·90	6·06	5·88	5·86	5·56	5·46	5·72	5·40	5·32	5·818
12—1h p.	5·50	6·20	7·40	6·06	6·10	5·92	6·10	5·82	5·68	5·78	5·42	5·48	5·955
1—2	5·52	6·08	7·38	6·12	6·16	5·98	6·10	5·82	5·76	5·66	5·36	5·54	5·957
2—3	5·34	5·96	7·36	6·14	6·12	6·00	6·22	5·74	5·54	5·46	5·16	5·24	5·857
3—4	5·10	5·62	7·04	6·12	6·08	5·92	6·26	5·68	5·46	5·20	4·98	5·00	5·705
4—5	5·02	5·48	6·72	6·14	6·22	5·94	6·26	5·56	5·18	4·94	4·80	4·98	5·603
5—6	4·86	5·00	6·08	5·74	5·86	5·48	5·80	5·00	4·78	4·58	4·80	4·84	5·235
6—7	4·82	4·78	5·66	5·26	5·28	5·10	5·36	4·64	4·52	4·38	4·84	4·74	4·948
7—8	4·86	4·84	5·60	4·98	4·96	5·10	5·16	4·64	4·56	4·40	4·78	4·70	4·882
8—9	5·02	4·88	5·54	5·12	4·92	5·08	5·42	4·72	4·64	4·44	4·88	4·74	4·950
9—10	4·98	4·80	5·60	5·06	4·84	5·20	5·76	4·86	4·42	4·46	4·96	4·54	5·957
10—11	5·02	4·82	5·60	5·06	4·78	5·18	5·76	4·84	4·34	4·56	4·96	4·56	4·957
11—Mittn.	5·04	4·80	5·66	4·78	4·62	5·02	5·72	4·58	4·32	4·48	4·84	4·36	4·852
Mittel	5·02	5·11	6·15	5·11	5·19	5·32	5·64	4·82	4·67	4·76	4·87	4·81	5·124

Mittlere Windgeschwindigkeit zu Lesina, in Meter pro Secunde (1871—1890).

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr
Mittn.—1h a.	5·75	5·11	6·06	5·83	5·28	3·92	3·81	3·61	4·22	5·58	5·89	5·69	5·06
1—2	5·72	5·05	6·03	5·86	5·17	3·97	3·72	3·53	4·17	5·58	5·86	5·64	5·03
2—3	5·67	5·08	5·94	5·78	5·08	3·92	3·64	3·47	4·03	5·56	5·97	5·61	4·98
3—4	5·61	5·05	6·00	5·69	5·08	3·89	3·67	3·39	4·08	5·56	6·08	5·47	4·96
4—5	5·61	5·08	6·00	5·67	4·97	3·89	3·61	3·42	4·11	5·56	6·17	5·47	4·96
5—6	5·64	5·11	6·11	5·69	4·97	3·75	3·42	3·28	4·17	5·67	6·19	5·61	4·97
6—7	5·69	5·22	6·11	5·81	5·17	3·86	3·50	3·14	4·06	5·83	6·33	5·75	5·04
7—8	5·75	5·25	5·94	6·19	5·69	4·47	4·06	3·69	4·11	5·72	6·25	5·81	5·24
8—9	5·61	5·17	6·19	6·56	6·08	4·75	4·36	4·17	4·61	5·92	6·17	5·75	5·44
9—10	5·58	5·42	6·56	6·78	6·31	4·89	4·58	4·36	4·94	6·19	6·36	5·75	5·64
10—11	5·78	5·56	6·58	6·94	6·39	4·97	4·80	4·44	4·97	6·31	6·47	5·89	5·76
11—Mittag	5·86	5·72	6·61	6·83	6·61	5·19	5·00	4·64	5·00	6·28	6·36	6·08	5·85
12—1h p.	5·94	5·81	6·61	6·75	6·72	5·33	5·33	4·92	5·08	6·33	6·36	6·06	5·94
1—2	6·06	5·78	6·69	6·89	6·81	5·56	5·64	5·11	5·39	6·28	6·31	5·97	6·04
2—3	6·14	5·81	6·72	6·92	6·89	5·67	5·89	5·33	5·50	6·31	6·19	5·97	6·11
3—4	6·11	5·67	6·78	6·78	6·78	5·61	5·92	5·28	5·56	6·28	6·14	5·86	6·06
4—5	5·97	5·53	6·67	6·81	6·58	5·53	5·81	5·11	5·11	6·06	6·19	5·83	5·93
5—6	5·92	5·19	6·44	6·69	6·36	5·25	5·47	4·80	5·05	5·83	6·25	5·86	5·76
6—7	5·97	5·19	6·19	6·33	5·92	4·78	4·83	4·31	4·64	5·83	6·31	5·86	5·51
7—8	5·97	5·17	6·28	6·22	5·50	4·28	4·31	3·97	4·56	5·89	6·06	6·00	5·35
8—9	5·89	5·22	6·17	6·14	5·39	4·14	4·11	4·03	4·50	6·03	6·06	5·92	5·30
9—10	5·89	5·19	6·17	6·14	5·42	4·03	4·08	3·94	4·56	5·92	6·00	5·75	5·26
10—11	5·89	5·14	6·11	6·03	5·42	3·89	4·11	3·86	4·56	5·83	5·94	5·69	5·21
11—Mittn.	5·83	5·08	6·11	5·94	5·31	3·72	3·94	3·72	4·36	5·72	5·94	5·67	5·11
Mittel	5·83	5·32	6·29	6·30	5·83	4·55	4·48	4·15	4·64	5·92	6·16	5·79	5·44

Abweichungen der mittleren Windgeschwindigkeit zu Lesina von den Monatsmitteln und den Jahresmitteln (1871—1890, 20 Jahre).

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr
Mittn.—1h a.	— 8	— 21	— 23	— 47	— 55	— 63	— 67	— 54	— 42	— 34	— 27	— 10	— ·38
1—2	— 11	— 27	— 26	— 44	— 66	— 58	— 76	— 62	47	— 34	— 30	15	41
2—3	— 16	— 24	— 35	— 52	— 75	— 63	— 84	— 68	— 61	— 36	— 19	— 18	— 46
3—4	— 22	— 27	— 29	— 61	— 75	— 66	— 81	— 76	— 56	— 36	— 8	— 32	— 48
4—5	22	— 24	— 29	— 63	— 86	— 66	— 87	— 73	— 53	— 36	1	— 32	— 48
5—6	— 19	— 21	— 18	— 61	— 86	— 80	— 1·06	— 87	— 47	— 25	3	— 18	— 47
6—7	— 14	— 10	— 18	— 49	— 66	— 69	— 98	— 1·01	— 58	— 9	17	— 4	— 40
7—8	— 8	— 7	— 35	— 11	— 14	— 8	— 42	— 46	— 53	— 20	9	2	— 20
8—9	— 22	— 15	— 10	26	25	20	— 12	2	— 3	0	1	— 4	00
9—10	— 25	10	27	48	48	34	10	21	30	27	20	— 4	20
10—11	— 5	24	29	64	56	42	32	29	33	39	31	10	32
11—Mittag	3	40	32	53	78	64	52	49	36	36	20	29	41
12—1h p.	11	49	32	45	89	78	85	77	44	41	20	27	50
1—2	23	46	40	59	98	1·01	1·16	96	75	36	15	18	60
2—3	31	49	43	62	1·06	1·12	1·41	1·18	86	39	3	18	67
3—4	28	35	49	48	95	1·06	1·44	1·13	92	36	— 2	7	62
4—5	14	21	38	51	75	98	1·33	96	47	14	3	4	49
5—6	9	— 13	15	39	53	70	99	65	41	— 9	9	7	32
6—7	14	— 13	— 10	3	9	23	35	16	0	— 9	15	7	07
7—8	14	— 15	— 1	— 8	— 33	— 27	— 17	— 18	— 8	— 3	— 10	21	— 09
8—9	6	— 10	— 12	— 16	— 44	— 41	— 37	— 12	— 14	11	— 10	13	— 14
9—10	6	— 13	— 12	— 16	— 41	— 52	— 40	— 21	— 8	0	— 16	— 4	— 18
10—11	6	— 18	— 18	— 27	— 41	— 66	— 37	— 29	— 8	— 9	— 22	— 10	— 23
11—Mittn.	0	— 24	— 18	— 36	— 52	— 83	— 54	— 43	— 28	— 20	— 22	— 12	— 33
Mittel	·14	·23	·25	·41	·61	·62	·70	·57	·40	·23	·14	·14	·352

Stündliche Häufigkeit einer Windgeschwindigkeit von 50 *km* und darüber innerhalb 15 Jahren (1876—1890) zu Wien.

	Decbr.	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Jahres-Summe
Mittn.—1h a.	26	38	28	32	17	16	16	27	9	18	14	27	268
1—2	23	31	34	27	14	22	15	19	8	16	10	26	245
2—3	27	28	32	26	12	16	20	18	9	13	12	27	240
3—4	25	32	31	37	14	11	18	16	9	14	13	24	244
4—5	30	34	26	33	16	9	19	18	6	17	11	27	246
5—6	39	37	29	38	18	10	21	20	6	11	17	26	272
6—7	37	31	20	35	11	11	22	14	8	14	10	22	235
7—8	35	32	25	42	12	11	20	12	8	13	12	25	247
8—9	40	32	25	37	11	14	20	19	12	12	18	25	265
9—10	32	41	34	39	14	14	20	17	9	12	16	33	281
10—11	30	34	35	43	12	17	17	14	10	13	18	32	275
11—Mittag	39	40	45	52	18	20	17	12	16	15	17	31	322
12—1	38	34	45	53	22	21	18	20	10	13	14	30	318
1—2	47	36	34	46	18	17	20	16	10	14	12	31	301
2—3	39	29	31	44	17	11	23	19	8	9	10	26	266
3—4	34	35	26	36	15	14	17	18	3	9	11	29	247
4—5	34	35	27	31	23	20	18	23	12	13	11	25	272
5—6	33	33	24	25	13	19	17	19	9	10	7	28	237
6—7	27	31	22	23	16	16	17	17	10	15	9	33	236
7—8	35	35	21	26	15	17	19	12	11	13	7	29	239
8—9	28	40	29	24	18	21	16	21	11	16	10	32	266
9—10	31	39	22	31	20	17	27	23	15	12	11	36	284
10—11	21	41	24	24	21	16	23	24	10	12	15	34	265
11—Mittn.	25	37	30	33	17	14	21	24	9	14	13	27	264
Summe	775	834	699	837	384	374	461	442	228	318	298	685	6335

Im Mittel ist die Winkelgrösse $A_1 = 284°2$ (d. i. 276·7 für $x=0$ um Mitternacht), das Maximum der Windstärke an stürmischen Tagen und das Maximum der Häufigkeit stürmischer Winde tritt demnach in der einmaligen täglichen Variation schon bald nach $11\frac{1}{2}^h$ Vormittags ein, also viel früher als das Maximum der Windstärke im normalen täglichen Gange an ruhigen Tagen. Die Winkelgrösse A_2 ist im Mittel $= 95·5$, d. i. 80·5 für $x = 0$ um Mitternacht. In der doppelten täglichen Periode fallen demnach die Maxima nahezu auf Mitternacht und Mittag und die Minima nahe auf 6^h Morgens und 6^h Abends (10 Minuten später genau genommen). Es gibt also, wie es scheint, für ganz Mitteleuropa eine doppelte Periode der Windstärke an stürmischen Tagen.

II. Der jährliche Gang der Windstärke.

Die folgende Tabelle (Seite 166) enthält die mittlere Windgeschwindigkeit der Monate und des Jahres zu Wien für die Periode 1866 bis 1892. Die Messungen der Windgeschwindigkeit mittelst eines Robinson'schen Anemometers von Jänner 1866 bis inclusive April 1872 beziehen sich auf die frühere Localität des meteorologischen Institutes in Wien, Favoritenstrasse Nr. 30. Das Anemometer Robinson (kleines Modell) befand sich auf der Plattform eines das Dach überragenden Zubaues und erhob sich derart ziemlich bedeutend über die Dächer der umliegenden Häuser.[1] Die Reduction der Angaben desselben auf die gegenwärtige Aufstellung eines Anemometers Kew-Modell erfolgte in der Art, dass das Mittel der Jahre 1866—1871 gleichgestellt wurde dem Mittel der neuen Reihe. Da diese ältere Reihe nur verwendet wurde, um die jährliche Periode noch etwas genauer zu erhalten, so genügt diese Reductionsmethode vollkommen. Der Reductionsfactor (Favoritenstrasse 30 auf Hohe Warte 38) ergab sich derart zu 2·3.

Die Registrirung der Windgeschwindigkeit auf dem Thurme des neuen meteorologischen Institutes beginnt mit Mai 1872. Dieser Monat ist nicht ganz complet, wesshalb dessen mittlere Windgeschwindigkeit in Klammern gesetzt wurde. Die Regi-

[1] Siehe Zeitschrift der österr. Gesellschaft für Meteorologie, II. Bd., 1867, S. 67 etc.

Monatsmittel und Jahresmittel der Windgeschwindigkeit in Wien. (Meter pro Secunde.)

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr
1866	3·0	4·2	3·3*	4·0	4·2	4·7	6·0	5·1	5·0	3·1*	6·9	4·9	4·53
1867	5·0	7·3	4·9	**7·8**	4·6	4·9	6·1	3·5*	3·4	4·5	**8·9**	6·8	5·64
1868	3·4	**8·8**	6·0	6·3	3·0*	4·3	3·8	3·6	2·4*	4·9	6·7	4·5	4·81
1869	3·8	5·8	5·6	4·4	5·1	5·6	3·6	4·2	6·5	5·0	8·6	6·0	5·35
1870	4·0	4·2	5·4	5·1	5·0	6·3	4·9	**7·1**	6·7	5·8	5·4	5·9	5·48
1871	4·6	6·0	4·7	6·3	5·6	**7·0**	6·1	4·8	3·6	3·9	4·7	4·6	5·16
1872	3·6	4·9	5·1	5·2	(5·0)	5·8	5·0	5·7	4·7	3·8	2·8*	2·3*	4·49
1873	4·1	6·1	5·6	6·3	**8·3**	6·3	5·5	4·8	5·1	4·6	6·4	6·5	5·80
1874	5·7	7·5	8·7	5·9	7·7	5·4	3·2*	6·4	4·1	4·0	5·0	6·9	**5·88**
1875	5·4	6·7	6·1	5·5	4·8	5·6	5·5	4·4	5·7	5·0	6·2	**7·7**	5·72
1876	4·8	5·3	7·0	5·5	5·6	5·7	6·0	4·6	5·6	3·3	5·4	2·7	5·13
1877	3·1	8·3	6·1	6·0	6·1	4·3	5·8	4·5	4·3	4·3	3·4	4·2	5·03
1878	7·2	6·3	**8·8**	4·1	4·0	4·1*	**7·1**	5·0	4·6	3·8	4·8	5·6	5·45
1879	3·7	4·9	6·7	6·5	5·2	5·4	6·5	4·2	3·5	5·7	7·6	4·8	5·38
1880	**8·1**	3·7	4·0	4·1	5·8	5·0	4·9	5·1	5·1	4·9	4·8	7·2	5·23

1881	4·8	4·7	7·4	5·0	5·8	5·0	5·0	4·9	3·8	4·8	3·5	4·2	4·91
1882	3·7	6·2	5·9	4·8	5·5	5·8	6·8	6·5	5·5	4·1	5·9	5·1	5·48
1883	5·1	6·2	6·4	5·7	5·5	5·5	6·3	5·1	4·5	4·6	4·1	**7·7**	5·56
1884	7·5	4·0	3·6	4·2	4·8	**7·0**	4·9	3·9	3·6	**6·7**	5·5	4·6	5·03
1885	2·1*	3·2	5·3	3·8*	5·8	4·5	5·2	4·0	5·0	3·9	3·8	4·6	4·27*
1886	3·5	2·6*	5·7	4·0	5·7	5·9	4·6	4·2	3·7	4·4	5·1	5·7	4·59
1887	3·5	4·5	6·2	6·0	5·6	6·5	4·2	5·6	5·1	5·5	4·4	5·3	5·20
1888	7·1	4·1	6·7	5·2	5·1	4·5	6·2	5·3	3·5	5·0	6·1	3·7	5·21
1889	5·4	8·3	7·1	6·6	3·3	4·2	5·8	5·1	5·3	4·6	4·3	3·6	5·30
1890	5·6	4·2	5·5	5·2	4·3	6·1	5·3	4·4	**6·9**	5·9	4·6	3·3	5·11
1891	5·1	5·4	6·3	4·9	4·6	4·7	5·4	4·9	4·4	3·6	3·7	5·6	4·88
1892	6·3	6·6	5·1	5·6	5·1	5·0	5·0	4·3	4·2	3·6	2·8*	5·6	4·93
1866—1870	3·84*	**6·06**	5·04	5·52	4·38*	5·16	4·88	4·70	4·80	4·66*	**7·30**	5·62	5·16
1871—1875	4·68	**6·24**	6·04	5·84	**6·28**	6·02	5·06	5·22	4·64	4·26*	5·02	**5·60**	5·41
1876—1880	5·38	5·70	**6·52**	5·24	5·34	4·90	6·06	4·68	4·62	4·40*	**5·20**	4·90	5·24
1881—1885	4·64	4·86	**5·72**	4·70	5·48	5·56	5·64	4·88	4·48*	4·82	4·56	**5·24**	5·05
1886—1890	5·02	4·74	**6·24**	5·40	4·80	5·44	5·22	4·92	4·90	**5·08**	4·90	4·32*	5·08

strirung erfolgte anfangs (bis April 1873) noch mit demselben Anemometer (Robinson, kleinere Type), welches früher benützt worden war. Eine Reduction auf das Kew-Anemometer fand nicht statt. Ich theile die Mittel für die ganze Reihe 1866—1892 und jene für die neuere Reihe 1873—1892, an demselben Orte mit dem gleichem Anemometer, separat mit.

Jährlicher Gang der mittleren Windgeschwindigkeit in Wien. Meter pro Secunde.

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	
1873—1892	5·09*	5·44	**6·21**	5·24	5·43	5·33	
1866—1892	4·78*	5·56	**5·90**	5·33	5·23	5·37	
	Juli	August	Sept.	October	Nov.	December	Jahr
1873—1892	5·46	4·86	4·67	4·61*	4·87	**5·23**	5·20
1866—1892	5·36	4·86	4·66	4·57*	**5·24**	5·17	5·17

Das absolute Maximum der Windgeschwindigkeit fällt auf den März, das Minimum auf den October. Ein zweites Maximum scheint der November zu haben, ein secundäres Minimum der Jänner. Vom Frühling zum Sommer findet wieder eine geringe Zunahme der Windgeschwindigkeit statt.

Die jährliche Periode der Windgeschwindigkeit ist in Wien ziemlich variabel, wie die Lustrenmittel am Fusse unserer Tabelle zeigen. Februar und März sind immer die am meisten bewegten Monate, October, September sind die ruhigsten Monate. Die mittlere und absolute Veränderlichkeit der Monats- und Jahresmittel der Windgeschwindigkeit beträgt:

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	
	Mittlere Abweichungen vom 27jährigen Mittel						
Mittel	1·19	**1·88**	0·95	0·79	0·76	0·69	
	Juli	August	Sept.	October	Nov.	Dec.	Jahr
	Mittlere Abweichungen vom 27jährigen Mittel						
Mittel	0·74	0·64*	0·86	0·67	**1·24**	1·13	0·32
	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	
	Absolute Extreme						
Maximum	8·1	8·8	8·8	7·8	8·3	7·0	
Minimum	2·1	2·6	3·3	3·8	3·0	4·1	
	Juli	August	Sept.	October	Nov.	Dec.	Jahr
	Absolute Extreme						
Maximum	7·1	7·1	6·9	6·7	8·9	7·7	5·88
Minimum	3·2	3·5	2·4	3·1	2·8	2·3	4·27

Februar und November haben die veränderlichste mittlere Windgeschwindigkeit, Juni, August, October die constanteste. Die Wintermonate haben die Eigenthümlichkeit, die grössten Extreme der mittleren Luftbewegung aufzuweisen. Die windstillsten Monate wechseln mit sehr stürmischen. Die folgende Tabelle dient zur Vergleichung des jährlichen Ganges der Windgeschwindigkeit zu Wien mit jenem an einigen anderen Orten, für welche ich denselben zu diesem Zwecke aufgesucht habe.

Jährlicher Gang der mittleren Windgeschwindigkeit.
Meter pro Secunde.

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni
Keitum [1]	5·7	5·7	**5·9**	5·4	5·3	5·0
Kremsmünster [2]	3·3*	3·6	**4·0**	3·8	3·6	3·5
Wien	4·8*	5·6	**5·9**	5·3	5·2	5·4
Triest [3]	**5·4**	5·1	4·4	3·2	2·8	2·6*
Padua [4]	**2·7**	2·5	3·1	**3·3**	3·0	2·7
Pola [5]	4·8	4·8	**5·4**	5·0	4·8	3·8*
Lesina [6]	5·9	5·4	6·3	**6·4**	5·9	4·7

	Juli	August	Sept.	October	Nov.	Dec.	Jahr
Keitum	4·8*	4·9	4·8	**5·7**	5·6	5·5*	5·36
Kremsmünster	3·4	3·2	3·0*	3·3	**3·4**	3·4	3·46
Wien	5·4	4·9	4·7*	4·6	**5·2**	5·2	5·17
Triest	2·8	3·1	3·5	4·1	4·2	4·9	3·83
Padua	2·5*	2·5	2·6	**2·7**	2·6	2·7	2·70
Pola	3·9	4·0	4·4	**5·1**	4·8	4·9	4·63
Lesina	4·6	4·3*	4·7	6·0	**6·8**	5·8	5·51

Mit Ausnahme von Triest, welches eine scharf ausgeprägte einfache jährliche Periode der Windstärke hat, finden wir an allen anderen angeführten Orten eine doppelte jährliche Periode der Windgeschwindigkeit mit zwei Maximis im Frühlinge und im Herbste.

Das Frühlingsmaximum fällt zumeist auf den Monat März, in Padua und auf Lesina auf den April, das Herbstmaximum

[1] Auf Sylt. 14 Jahre 1879—1892.

[2] Dieselben 14 Jahre 1879—1892.

[3] Juli 1882 bis inclusive December 1892, $10^1/_2$ Jahre.

[4] 20 Jahre 1870—1889.

[5] 18 Jahre 1873—1890.

[6] 20 Jahre 1871—1890.

schwankt zwischen October und November, das Minimum der Windgeschwindigkeit tritt im Sommer oder im September auf.

Das interessanteste Ergebniss dieser kleinen Zusammenstellung besteht in der Constatirung einer doppelten jährlichen Periode der Windstärke mit einem Hauptmaximum im Frühlinge und einem zweiten Maximum im October oder November. Die populäre Annahme stürmischer Äquinoctien ist demnach doch nicht so ganz ohne Grundlage. Im Herbste tritt allerdings das Maximum ziemlich spät nach den Äquinoctien ein. Um die jährliche Periode der Windstärke in Mitteleuropa zwischen Keitum und Lesina etwas übersichtlicher zur Darstellung zu bringen, habe ich Mittelwerthe abgeleitet, mit Hinweglassung von Triest und Padua, und auf diese dann eine periodische Formel angewendet. Derart erhält man folgenden jährlichen Gang der Windstärke.

Jährlicher Gang der Windgeschwindigkeit in Abweichungen vom Mittel. Meter pro Secunde.

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni
Beobachtet	·08*	·18	**·67**	·35	·12	—·36
Berechnet[1]	04*	35	**55**	37	06	— 20
	Juli	**August**	**Sept.**	**October**	**Nov.**	**Dec.**
Beobachtet	—·43	—·58*	—·53	·11	**·25**	11
Berechnet	— 50	— 68*	— 41	10	**26**	06

Das Hauptmaximum der Windstärke fällt auf den März (im Mittel der fünf Stationen Keitum, Kremsmünster, Wien, Pola. Lesina) ein secundäres Maximum auf den November, das Hauptminimum hat der August, ein secundäres Minimum der Jänner. In den Wintermonaten ist, wie schon bemerkt, die mittlere Windgeschwindigkeit je nach den Jahrgängen sehr veränderlich, die Sommermonate dagegen haben die geringste Schwankung der mittleren Windgeschwindigkeit. Die folgende kleine Tabelle gibt einen Nachweis dafür. Sie enthält die mittlere Abweichung der einzelnen Monatsmittel vom Gesammtmittel der betreffenden Periode.

---

[1] Gleichung des jährlichen Ganges der Windstärke:

$0 \cdot 43 \sin (59°7+x)+0 \cdot 24 \sin (256°7+2x)+0 \cdot 15 \sin (304°7+3x)$.

Mittlere Veränderlichkeit der Monats- und Jahresmittel der Windgeschwindigkeit. (Meter pro Secunde.)

	Keitum 14	Kremsmünster 14	Wien 17	Triest $10^1/_2$	Pola 18	Lesina 21	Padua 20
Jänner	**1·08**	·76	1·19	**1·85**	**·89**	·75	·42
Februar	·88	**·82**	**1·33**	1·62	·88	**1·09**	·39
März	·74	·56	·95	1·07	·86	·99	·36
April	·43	·29	·79	·68	·82	·85	·28
Mai	·44	·18*	·76	·63	·62	·87	·20
Juni	·42	·28	·69	·33	·43*	·52	·16*
Juli	·41*	·34	·74	·26*	·49	·57	·19
August	·65	·24*	·64*	·57	·48	·45*	·14*
September	·41*	·43	·86	·41	·64	·63	·21
October	·47	·38	·67	·80	·57	·98	·24
November	**1·05**	**·79**	**1·24**	·94	·74	**1·05**	**·45**
December	·78	·50	1·13	1·63	·82	·81	·40
Jahr	·22	·17	·32	·35	·41	·26	·11

Die Monate November bis Februar haben die grösste Veränderlichkeit der mittleren Windrichtung, die Frühlings- und Spätsommermonate die kleinste. Im Juli macht sich an mehreren Stationen eine Zunahme der Veränderlichkeit bemerkbar.

Ganz auffallend ist die Veränderlichkeit der mittleren Windgeschwindigkeit im Winter in Triest. Die Minima wie die Maxima der Monatsmittel der Windgeschwindigkeit treten im December und Jänner ein. Zum Beispiel December 1888 mittlere Windgeschwindigkeit 2·1 (*m*, s.), Jänner 1890, 1·8 *m*, es sind dies die absoluten Minima der mittleren Windgeschwindigkeit innerhalb $10^1/_2$ Jahren. Dagegen December 1890 10·1 *m* und Jänner 1885 9·2 *m*, dies sind die absoluten Maxima der mittleren Windgeschwindigkeit dieser Periode.

Zur Vervollständigung der Darstellung der jährlichen Periode der Windgeschwindigkeit zu Wien mögen noch einige andere bezügliche Mittelwerthe und Daten hier Platz finden.

Die erste Columne der folgenden kleinen Tabelle enthält die mittlere Zahl der Tage (aus 20 Jahren), an denen das Maximum der Windstärke mindestens 70*km* pro Stunde (20*m*, s.) erreicht hat. Wir wollen dieselben kurz Sturmtage nennen. Eine zweite Columne enthält die mittleren Monatsmaxima der Windgeschwindigkeit und die dritte Columne die absoluten Maxima. Allen mittleren und absoluten Windgeschwindigkeiten liegt hier der Robinson'sche Factor 3 zu Grunde, sie sind demnach zu hoch (mit 0·8 oder vielleicht gar mit 0·7 zu multipliciren).

Wien. Jährliche Periode der Sturmtage und der Maxima der Windgeschwindigkeit. 1873—1892.

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	
Sturmtage	2·9	2·6	2·4	0·7*	1·4	1·1	
Mittleres Maximum	**24·9**	23·0	**25·4**	20·1*	21·4	20·7	
Absolutes Maximum	35·6	31·1	37·8	25·8	28·6	30·3	
	Juli	**August**	**Sept.**	**October**	**Nov.**	**Dec.**	**Jahr**
Sturmtage	**1·5**	0·7*	0·9	1·1	2·2	**3·6**	20·9
Mittleres Maximum	**21·9**	20·6	20·3*	21·8	23·3	24·3	29·8
Absolutes Maximum	27·8	27·8	25·0	28·1	30·8	36·1	37·8

Die jährliche Periode der Sturmtage folgt nicht der jährlichen Periode der mittleren Windgeschwindigkeit. Die grösste Frequenz der Sturmtage hat der December und hierauf der Jänner, die kleinste Zahl der Sturmtage haben April und August, der Juli zeigt eine Zunahme der Sturmfrequenz. Die mittleren Monatsmaxima der Windgeschwindigkeit erreichen ihren grössten Betrag im December, Jänner und März. Die Monatsmaxima der Windgeschwindigkeit zu Wien kommen fast ausschliesslich dem Westwind zu, ein geringer Procentsatz bloss dem WNW, ein Monatsmaximum trat bei N-Wind ein (October 1876) und eines bei Südwind (Juli 1890). Die Tabelle der einzelnen Monatsmaxima findet man auf Seite 176 und 177.

Die absoluten Maxima der Windgeschwindigkeit waren bisher: das vom 10. März 1881 mit 37·8 *m* (mit Factor 2·5 = 31 *m*) bei Weststurm, Tagesmittel 30·3 *m* und jenes vom 10. December 1884 gleichfalls Weststurm, aber von kurzer Dauer, Maximum 36·1 (von 6—7^{h} Morgens, auf der Wien-Aspang-Bahn werden die Waggons eines Eisenbahnzuges umgeworfen).

Zum Vergleiche mögen die mittleren und absoluten Maxima der Windgeschwindigkeit auf Lesina hier noch Platz finden nach den Registrirungen der Jahre 1871—1891, also von 21 Jahren. Auf Seite 178 und 179 findet man die Tabelle der einzelnen Monats- und Jahresextreme von Lesina.

Lesina. Jährliche Periode der mittleren und absoluten Maxima der Windgeschwindigkeit. Meter pro Secunde. (21 Jahre 1871—1891.)

Jänn.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
19·9	19·4	**22·7**	21·8	21·3	18·6	17·2	16·3*	17·7	20·9	20·9	21·2	25·5
24·2	28·9	28·9	26·4	29·7	24·7	21·4	21·7	22·7	27·2	31·7	26·7	31·7

Das mittlere Monatsmaximum der Windgeschwindigkeit fällt hier auf den März, das Minimum auf den August. Bemerkenswerth sind die geringen mittleren und absoluten Maxima der Windgeschwindigkeit um die Wintermitte im Jänner, selbst der Juni hat schon eine höhere maximale Windgeschwindigkeit gehabt als der Jänner. Bezüglich der Richtungen, welche die stärksten Winde haben, herrscht auf Lesina eine viel grössere Abwechslung wie in Wien, wo fast alle Maxima auf den Westwind entfallen. Auf Lesina haben zwei entgegengesetzte Windrichtungen, ENE und NE (Bora) und ESE und SE (Scirocco) die grössten Windgeschwindigkeiten aufzuweisen, jene mehr im Winter, diese namentlich im Frühling. Die folgende kleine Tabelle zeigt, wie oft das Monatsmaximum der Windstärke bei einer bestimmten Windrichtung eingetreten ist. Die Summe ist stets 21.

Frequenz des stärksten Windes in jedem Monate.

Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni
ESE_7	ESE_8	ESE_{12}	ESE_{17}	ESE_{18}	ESE_{16}
SSE_3	SSE_1	SSE_1	SE_4	SE_2	SE_2
SSW_1	SE_5	SE_4		NE_1	W_1
W_1	NE_4	NE_2			ENE_1
NE_5	ENE_3	ENE_2			N_1
ENE_4					

Juli	August	September	October	November	December	Jahr
ESE_{13}	ESE_{15}	ESE_{12}	ESE_{10}	ESE_6	ESE_4	ESE_9
SE_1	SE_3	SE_3	SE_4	SE_6	SE_8	SE_6
NE_1	NE_3	E_3	SSE_1	SSE_2	SSE_1	SSE_2
ENE_1		NE_3	NE_3	S_2	S_2	ENE_3
N_4			ENE_3	SSW_1	NE_1	NE_1
NW_1				NE_2	ENE_4	
				ENE_2	NW_1	

Rechnen wir ESE, SE und SSE auf Scirocco und ENE und NE auf Bora, so erhalten wir folgende Frequenzzahlen der Monats- und Jahresmaxima der Windstärke.

	Jän.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
Scirocco	10	14	17	21	20	18	16	18	15	15	14	13	19
Bora....	9	7	4	0	1	1	2	3	3	6	4	5	4

Der jährliche Gang ist in diesen Zahlen sehr ausgesprochen, April und Mai haben fast ausschliesslich die Maxima der Windgeschwindigkeit bei Scirocco und diese Maxima gehören zu den grössten des Jahres; im Winter und Herbst treten die Monatsmaxima auch bei Bora auf. Von den Jahresmaximis der Windstärke entfallen fast fünfmal so viel auf den Scirocco als auf die Bora. (Es sind hier 23 Fälle, weil in zwei Jahren zwei Maxima von gleicher Grösse aufgetreten sind, die beide compariren.)

Von den 252 Monatsmaximis der Windstärke zu Lesina während der Jahre 1871—1891 kommen: auf Scirocco 191, auf die Bora 45, auf andere Richtungen 16,[1] oder in Procenten Scirocco 76, Bora 18, auf andere Richtungen der Rest von 6%.

Die grössten Windstärken auf Lesina überhaupt sind durchgängig bei ESE aufgetreten.

III. Die jährliche Periode der Windrichtung und die mittlere Windrichtung der einzelnen Jahre in dem Zeitraume 1872—1892.

In drei Tabellen habe ich für die 12 Monate und das Jahr zusammengestellt: 1. die mittleren Windwege (Kilometer pro Stunde) für jede der 16 Windrichtungen, 2. die mittlere Häufigkeit jeder der 16 Windrichtungen und der Windstillen (in Stunden pro Monat und Jahr) und 3. die mittlere Geschwindigkeit jeder der 16 Richtungen in jedem Monate. Diese Tabelle ergibt sich aus 1. und 2. durch Division der Windwege durch die Häufigkeit. Die Geschwindigkeit wird aber in Meter pro Secunde gegeben. Alle diese Mittel beziehen sich auf die 12jährige Periode 1879—1890.

[1] Und zwar S 4, N und E je 3, NW, W und SSW je 2.

Mittlere Windgeschwindigkeit zu Lesina. (Meter pro Secunde.)

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr
1871	6·5	4·4	5·1	5·2	4·4	6·0	4·5	4·8	4·8	4·5	7·5	4·5	5·3
1872	6·8	4·5	6 8	8·5	7·6	4·5	4·6	4·7	4·7	7·4	5·9	7 1	6·1
1873	5·7	7·4	5·4	6·9	6·9	4·9	4·1	3·6	4·2	6·4	7·2	4·6	5·6
1874	4·8	6·4	5·1	7·0	6·9	5·5	4·0	4·2	3·5	5·3	5·0	8·9	5·6
1875	4 5	6 2	5·5	6·3	4·8	3·8	4·5	4·1	4·2	6·5	6·7	4·6	5·1
1876	5·8	5·3	7·3	9·4	6·9	4 7	4·5	4·1	4·9	4·1	6·9	6·7	5·9
1877	6·4	5·7	8·7	6·1	6·8	5·0	5·8	3·1	4·6	4·8	5·9	5·9	5·7
1878	5·6	3·6	7·5	4·9	5·8	5·1	4·1	4·7	5·4	6·5	9·0	6·6	5·7
1879	7·1	8·5	6·4	8·4	6·9	5·0	5·2	3·1	4·2	5·1	5·6	5·4	5·9
1880	4·8	4·0	4·5	5·3	6·1	4 4	3·8	4·6	4·1	7·5	6·2	5·6	5·1
1881	7·0	4·1	7·2	5 7	5·1	3·8	3·9	4·1	5·8	6·7	4·5	5·4	5·3
1882	4·8	4 9	7·0	6·3	5·4	5·7	5·4	4·6	6·0	5·9	5·6	6·9	5 7
1883	6·4	4 6	6·8	5·3	5·6	3·8	4·5	4·1	5·2	4·8	5·6	5·2	5·1
1884	5·5	4·5	4·8	6·1	4·7	5·0	3·8	4·3	4·6	5·1	4·6	5·9	4·9
1885	6·6	6·3	6·6	6·5	5·7	4·2	3·8	5·1	5·8	6 9	6·8	5 5	5·8
1886	7·2	4·6	6·6	5·0	4·9	4·0	5·9	4·1	4·1	5·4	7·6	5·7	5·4
1887	5·8	5·6	4·9	5·6	7·3	4·1	3·6	4·3	4·3	7·9	8·9	7·1	5·8
1888	4·8	7·3	7·9	6·2	4·8	4·1	6·0	5·1	4·1	6·9	5·3	5·4	5·6
1889	7·4	6·3	6·9	6·8	4·3	4 4	4·7	3·6	6 2	7·0	4·1	4·3	5·5
1890	5·6	4·2	6·6	6·1	6·3	4·9	4·4	4·2	3·9	5·0	6·5	5·9	5·3
1891	5·6	4·3	4·8	5·7	6 2	5·0	4·8	5·3	3·9	6 8	6·9	5·1	5·4
Mittel 1871—1880	5·80	5·60	6·23	6·80	6·31	4·89	4·51	4·10	4·46	5·81	6·59	5 99	5·60
» 1881—1890	6·11	5·24	6·53	5·96	5·41	4·40	4·60	4·35	5·00	6·16	5·95	5·73	5·44
» 1871—1891	5·94	5·37	6·30	6·35	5·88	4·68	4·57	4·28	4·69	6·02	6·30	5·82	5·51

Monats- und Jahres-Maxima der Wind-

	Jänner		Februar		März		April		Mai		Juni	
1873	—		—		—		18·6	W	22·5	W	22·2	W
1874	31·0	W	26·9	W	30·6	W	18·6	W	**28·6**	W	21·1	W
1875	27·8	W	20·6	W WNW	28·3	WNW	19·2	WNW	19·4	W	21·1	W
1876	27·5	W	24·4	WNW	23·6	W	19·4	W	19·2	W	24·7	W
1877	21·9	WNW	**31·1**	W	23·6	W	**25·8**	W	19·4	W	**30·3**	W
1878	**35·6**	W	20·0	W	25·6	W	17·8	W	21·4	WSW	22·2	WNW
1879	26·7	W	31·1	W	26·7	W	25·6	W	25·6	W	20·8	W
1880	27·5	W	23·6	W	24·2	W	20·8	WNW	18·9	W	21·4	W
1881	28·3	W	21·9	W	**37·8**	W	17·2	WNW	21·7	W	18·1	W
1882	20·0	W	28·1	W	20·6	W	21·1	W	21·7	W	20·8	W
1883	20·3	W	20·8	W	28·6	W	20·3	W	23·6	W	22·2	W
1884	24·7	W	23·6	W	23·3	W	18·6	W	26·9	W	23·6	W
1885	11·7	WNW	20·6	WNW	23·1	WNW	19·4	W	22·8	{W WNW}	17·2	WNW
1886	20·6	W	12·5	NW	19·4	W	16·7	W	25·8	W	22·8	W
1887	22·5	W	17·8	W	21·1	W	22·5	W	24·2	W	18·6	W
1888	27·2	W	29·4	W	25·0	W	20·0	W	14·2	W	17·8	W
1889	24·2	W	30·3	W	24·4	W	23·6	W	13·1	W	14·2	W
1890	27·8	W	•11·7	NW	23·6	W	20·0	W	18·9	W	17·5	W
1891	19·2	W	22·2	W	26·9	W	16·7	W	19·7	W	21·4	W
1892	29·4	W	20·6	W	26·7	W	19·4	NW	19·7	W	16·4	W
Mittel	24·9		23·0		25·4		20·1		21·4		20·7	

geschwindigkeit in Wien. (Meter pro Secunde.)

Juli		August		September		October		November		December		Jahr	
[illegible]·9	W	21·1	W	22·2	W	20·8	W	25·6	W	29·4	W	29·4	W
24·2	WNW	24·7	W	17·2	W	20 8	W	18·6	W	28·6	W	31·0	W
[illegible]·8	W	16·9	WNW	19·7	W	21·9	W	**30·8**	W	24·4	W	30·8	W
[illegible]·9	W	22·5	W	17·8	W	24·4	N	25·6	W	19·7	W	27·5	W
22·8	W	**27·8**	NW	18·9	W	20·0	WNW	21·9	WNW	22·5	W	31·1	W
[illegible]·7	W	19·2	W	18·9	W	20·3	W	21·9	W	22·2	W	35·6	W
[illegible]·8	W	20·0	W	23·9	W	25·0	W	27·8	W	28·3	W	31·1	W
[illegible]·1	W	18·9	W	18·9	W	**28·1**	W	20·0	W	27·2	W / WNW	28·1	W
[illegible]·7	W	22·8	WNW	20·0	WNW	25·0	W	20·8	W	23·9	W	37·8	W
27·8	W	15·8	WNW	21·4	W	16·1	W	26·7	W	27·5	WNW	28·1	W
22·8	W	18·3	WNW	**25·0**	W	20·3	W	16·4	W	29 4	W	29·4	W
22·2	WNW	18·9	WNW	21·4	W	27·8	WNW	**30·8**	W	**36·1**	W	36·1	W
[illegible]·4	WNW	18·1	W	23·9	W	19·4	W	21·9	W	20·6	W	23·9	W
[illegible]·6	W	16·1	W	21·4	W	26·1	W	22·5	W	25 3	W	26·1	W
[illegible]·1	W	20·3	W	14·4	W / NW	17·5	W	19·2	W	20·0	WSW	24·2	W
[illegible]·8	W	22·5	W	18·9	W	18·9	W	26·9	WNW	18·6	WNW	29·4	W
[illegible]·2	WSW	24·4	W	20·3	W	24·2	W	18·1	W	21·4	W	30·3	W
[illegible]·9	S	22·2	W	20·6	W	24·4	W	29·7	WNW	13·1	WNW	29·7	WNW
[illegible]·8	W	20·3	WNW	23·6	W	17·5	W	25·8	W	25·6	W	26·9	W
[illegible]·8	W	21·7	W	17·2	W	18·3	W	15·3	WNW	21·7	W	29·4	W
21·9		20·6		20·3		21·8		23·3		24·3		29·8	

Monats- und Jahres-Maxima der Wind-

	Jänner		Februar		März		April		Mai		Juni	
1871	ESE	74	ENE	53	ENE	80	ESE	70	ESE	84	ESE	80
1872	NE	65	SE	70	SE	89	ESE	94	ESE	82	ESE	69
1873	SSW	77	SSE	80	SSE	75	SE	84	ESE	78	SE	70
1874	ESE	57	ENE	81	SE	62	SE	90	ESE	107	ESE	89
1875	ENE	75	ESE	81	ESE	72	ESE	69	ESE	70	ESE	58
1876	ESE	71	SE	66	ESE	76	ESE	95	ESE	86	ESE	66
1877	ESE	73	ESE	59	ESE	104	ESE	82	ESE	88	ESE	81
1878	NE	87	NE	50	ESE	86	ESE	71	SE	94	ESE	83
1879	ESE	70	SE	104	ESE	69	ESE	87	SE	70	ESE	73
1880	ENE	60	ESE	65	SE	67	ESE	68	ESE	73	N	46
1881	NE	73	NE	64	ESE	83	SE	85	ESE	70	ESE	61
1882	NE	81	ESE	72	ESE	90	ESE	79	NE	69	ESE	75
1883	ESE	76	SE	64	ENE	77	ESE	67	ESE	63	SE	66
1884	ENE	83	ESE	57	SE	65	SE	76	ESE	59	ESE	69
1885	ESE	71	ESE	69	ESE	81	ESE	81	ESE	71	ESE	62
1886	SSE	68	ESE	60	NE	73	ESE	80	ESE	79	W	51
1887	SSE	62	ESE	81	ESE	51	ESE	65	ESE	90	ENE	55
1888	W	73	SE	74	ESE	94	ESE	76	ESE	53	ESE	66
1889	ENE	78	NE	77	NE	72	ESE	70	ESE	77	ESE	56
1890	NE	73	ENE	54	ESE	90	ESE	69	ESE	74	ESE	61
1891	SSE	61	NE	86	ESE	65	ESE	86	ESE	73	ESE	70
Mittel		71·8		69·9		82·0		78·3		76·7		67·

geschwindigkeit in Lesina. (Kilometer pro Stunde.)

Juli	August	September	October	November	December	Jahr
N 63	NE 57	ESE 68	NE 72	ENE 84	ENE 71	ESE / ENE 84
ESE 61	ESE 55	ESE 75	ESE 71	SE 92	SE 96	SE 96
N 39	NE 54	ENE 65	SE 98	SE 82	ENE 76	SE 98
ESE 69	ESE 56	E 67	SE 57	ESE 65	NW 84	ESE 107
ESE 68	ESE 63	ENE 44	SSE 85	ESE 83	SE 67	SSE 85
NE 58	SE 72	E 82	ESE 62	NE 75	S 74	ESE 95
ESE 76	ESE 53	SE 56	ENE 66	S 72	SE 79	ESE 104
SE 52	ESE 69	ESE 74	SE 76	SSE 114	S 80	SSE 114
ESE 63	NE 38	SE 59	SE 81	NE 74	SSE 69	SE 104
ESE 62	ESE 68	SE 56	NE 73	SE 74	ESE 58	SE 74
ESE 59	ESE 61	ESE 66	ESE 68	ENE 68	ESE 78	SE 85
ESE 70	ESE 60	ESE 61	ESE 87	S 72	SE 91	ESE 90
ESE 64	ESE 52	ESE 55	ESE 60	SSE 71	ENE 74	ENE 77
NW 48	ESE 63	ESE 79	ESE 86	ESE 57	SE 96	SE 96
ESE 47	ESE 78	ESE 74	ESE 87	SE 90	SE 59	SE 90
ESE 76	ESE 59	ESE 63	ESE 82	SE 65	SE 87	SE 87
ENE 54	SE 49	ESE 60	ENE 85	SE 82	ENE 79	ESE 90
ESE 77	ESE 50	E 54	ESE 78	ESE 66	ESE 67	ESE 94
ESE 57	ESE 43	ESE 58	ESE 77	SSW 61	ESE 73	ENE 78
ESE 68	SE 58	ESE 49	ENE 57	ESE 68	SE 82	ESE 90
ESE 70	ESE 77	ENE 73	NE 77	ESE 66	NE 67	ESE / NE 86
62·0	58·8	63·7	75·5	75·3	76·5	91·6

Von Mai 1873 bis December 1878 wurden den anemometrischen Aufzeichnungen nur acht Windrichtungen entnommen. Die Mittelwerthe für 16 Richtungen konnten daher nur aus 12 Jahren abgeleitet werden.[1] Um aber die älteren Reductionen doch einigermaassen zu verwerthen, wurden in einer vierten Tabelle die mittlere Häufigkeit und die mittleren Windwege für acht Richtungen, abgeleitet aus der 17jährigen Periode 1874—1890, zusammengestellt.

Da diese letztere Tabelle (Seite 184) die grösste Übersichtlichkeit besitzt, so will ich zunächst diese etwas erörtern.

Der Nordwind erreicht das Maximum seiner Häufigkeit im April und Mai, das Minimum im October und November. In Bezug auf die Windwege gilt dasselbe mit dem Unterschied, dass hier schon der März ein Maximum hat.

Der Nordostwind hat sein Maximum im April und ist von Juli bis Februar ziemlich gleich selten.

Auch der Ostwind hat sein Maximum im April und ein secundäres Maximum im September.

Der Südostwind ist am häufigsten von October bis Februar, am seltensten im Juli und August. Auffallend ist das grosse Februarmaximum, das besonders in der Periode 1879 bis 1890 in abnormer Weise zur Geltung gelangte. In Bezug auf die Windwege hat auch der April ein Maximum bei SE.

Der Südwind ist in den Monaten October bis Februar am häufigsten, im Sommer am seltensten. In Bezug auf den von ihm zurückgelegten Weg haben November und April ein Maximum.

Der seltene Südwestwind tritt fast das ganze Jahr hindurch ziemlich gleich selten auf, am häufigsten noch im December und Jänner. In Bezug auf Windweg hat auch hier der April ein Maximum.

Der Westwind, der häufigste Wind, erreicht das Maximum seiner Frequenz im Sommer, Juni bis August, am seltensten ist er im April und Mai. Auffallend ist die Stärke der Westwinde im März (Maximum des Windweges).

[1] Die bezüglichen Auszüge und Rechnungen wurden schon 1891 begonnen und es schien mir unnöthig, nach Abschluss des Jahres 1891 die Rechnungen neuerdings aufzunehmen.

Mittlere Windwege. (Kilometer pro Stunde). Mittel aus den 12 Jahrgängen 1879—1890.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr
N	782	735	1432	1325	**1439**	857	674	688	722	521	597	577*	10349
NNE	185	239	441	**597**	525	357	174	294	194	215	145	139*	3505
NE	120	151	235	**386**	269	246	142	185	118	182	205	99*	2338
ENE	49*	49	79	**146**	128	82	52	74	75	81	76	54	945
E	85	121	149	**265**	138	137	142	162	121	141	89	73*	1623
ESE	115	181	214	**278**	268	145	198	174	**289**	217	83*	111	2268
SE	665	**1182**	654	**798**	791	462	376*	377	**747**	728	657	645	8027
SSE	1034	**1189**	796	979	924	372	337*	370	860	947	**1041**	994	9843
S	264	274	313	510	556	238*	399	290	418	466	**502**	338	4568
SSW	69	73	79	**174**	129	46*	110	79	**117**	116	89	95	1176
SW	152	90*	98	157	**188**	121	167	156	116	155	145	118	1658
WSW	234	85*	189	**367**	168	209	280	362	149	230	251	226	2750
W	5781	3634	**6140**	3238*	3791	5707	**6201**	5091	4269	5383	4988	5248	59471
WNW	2034	1601	1694	1292*	1842	**2532**	2284	2345	1453*	2096	1888	**2312**	23373
NW	1134*	1253	1959	1415	1673	**1788**	1748	1622	1486	1253	1409	1451	18186
NNW	569*	697	1182	**1218**	1013	799	863	730	745	635	625	747	9823

Mittlere Häufigkeit. (Stunden.) Mittel aus den 12 Jahrgängen 1879—1890.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr
N	56·9	48·3	80·0	75·0	82·3	61·0	53·4	60·1	66·3	36·6	42·6	41·9	704·4
NNE	18·7	17·4	32·3	43·9	35·0	30·8	16·6	28·0	19·5	22·6	15·8	13·3	293·9
NE	17·8	18·2	30·9	36·9	28·7	29·5	17·3	25·5	17·6	21·5	26·6	14·8	285·3
ENE	8·2	7·3	12·8	19·2	19·3	11·8	8·8	11·0	13·8	12·8	13·2	11·0	149·5
E	17·1	21·1	21·9	34·8	20·8	21·9	21·5	22·3	20·4	21·3	17·5	15·7	256·3
ESE	15·1	21·7	21·8	22·7	23·8	15·0	18·3	19·4	32·1	21·7	12·2	15·9	239·7
SE	65·3	105·7	50·6	61·9	61·5	40·3	34·4	32·8	61·2	59·7	64·3	69·8	707·5
SSE	73·0	82·6	52·7	56·3	50·2	25·1	22·4	27·1	47·1	62·2	76·3	75·0	650·0
S	29·6	34·3	29·2	39·8	37·4	18·5	29·4	25·5	33·9	37·8	41·5	38·1	395·0
SSW	9·5	9·9	7·7	15·3	13·2	5·2	9·8	10·9	12·9	7·8	9·6	15·5	127·3
SW	24·9	14·3	13·9	19·0	20·0	15·2	20·8	19·4	15·9	21·1	18·8	22·8	226·1
WSW	19·1	12·0	17·7	17·2	16·9	20·2	21·2	25·1	16·8	21·4	24·3	23·0	234·9
W	161·8	97·3	159·3	96·8	126·7	185·2	200·2	191·3	150·0	196·3	149·5	152·2	1866·6
WNW	67·4	54·0	64·5	52·1	70·3	94·0	92·3	100·8	63·3	80·8	61·7	70·0	871·2
NW	52·2	54·8	83·2	64·2	77·5	90·5	94·5	89·8	77·0	68·8	68·8	63·0	884·3
NNW	33·0	34·2	50·6	52·8	49·3	44·8	47·3	41·5	41·0	32·5	31·8	41·0	499·8
Calmen	90·0	54·1	17·6	14·7	13·6	11·4	16·8	16·1	15·9	23·3	55·2	73·2	401·9

Mittlere Geschwindigkeit, (Meter per Secunde) aus 12 Jahren 1870—1890.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr
N	3·8	4·3	**5·0**	4·9	4·9	3·9	3·5	3·2*	3·0	4·0	3·9	3·9	4·1
NNE	2·7	3·8	3·8	3·8	**4·2**	3·2	2·9	2·9	2·8	2·6*	2·6	2·9	3·3
NE	1·9	2·3	2·1	**2·9**	2·6	2·3	2·3	2·0	1·8	2·4	2·1	1·8*	2·3
ENE	1·6	1·9	1·7	**2·1**	1·8	1·9	1·6	1·9	1·5	1·8	1·6	1·4*	1·8
E	1·4	1·6	1·9	**2·1**	1·8	1·8	1·8	2·0	1·6	1·8	1·4	1·3*	1·8
ESE	2·1	2·3	2·7	**3·4**	3·1	2·7	3·0	2·5	2·5	2·8	1·9	1·9*	2·6
SE	2·8	3·0	3·6	**3·6**	3·6	3·2	3·0	3·2	3·4	3·4	2·8	2·6*	3·1
SSE	4·0	4·0	4·2	4·9	**5·8**	4·1	4·2	3·8	**5·1**	4·3	3·8	3·7*	4·2
S	2·5	2·2*	3·0	3·6	**4·1**	3·6	3·8	3·3	3·4	3·4	3·4	2·4	3·2
SSW	2·0	2·1	2·9	**3·2**	2·7	2·5	3·1	2·0	2·5	**4·2**	2·6	1·7*	2·6
SW	1·7	1·8	2·0	2·3	**2·5**	2·2	2·2	2·2	2·0	2·0	2·1	1·4*	2·0
WSW	3·4	2·0*	2·9	**5·9**	2·7	2·9	3·7	4·0	2·5	3·0	2·9	2·8	3·3
W	9·9	10·4	**10·8**	9·3	8·3	8·6	8·6	7·4*	7·9	7·6	9·5	9·6	8·9
WNW	8·4	8·3	7·3	6·9	7·3	7·5	6·9	6·5	6·4*	7·2	8·5	**9·2**	7·5
NW	6·1	6 4	**6·6**	6·1	6·0	5·5	5·2	5·1*	5·4	5·1	5·7	6·4	5·8
NNW	4·8*	5·7	**6·5**	6·4	5·7	5·0	5·1	4·9	5·1	5·4	5·5	5·1	5·5

Mittlere Häufigkeit und Weglänge der 8 Hauptwindrichtungen 1874—1890.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr
						A. **Häufigkeit in Stunden.**							
N	75	73	118	124	126	104	83	97	89	68	66	70	1093
NE	36	34	49	72	39	56	39	44	38	49	42	36	534
E	33	33	34	53	41	38	35	39	44	43	33	27	453
SE	107	133	79	96	91	65	55	59	97	107	110	106	1105
S	76	70	60	71	67	45	42	48	65	78	96	83	801
SW	44	28	34	38	34	33	36	38	37	41	38	48	449
W	208	171	217	137	177	225	268	250	204	228	188	218	2491
NW	113	104	142	120	139	146	160	158	123	110	114	111	1540
						B. **Windwege in Kilometer.**							
N	1108	1223	2304	2274	2298	1531	1786	1248	1119	971	912	934	17708
NE	232	274	442	787	644	508	333	355	265	392	307	233	4772
E	168	258	250	445	312	289	254	291	295	294	181	133	3170
SE	1155	1495	1047	1376	1216	785	643	665	1206	1325	1225	1034	13172
S	778	718	827	1062	967	610	554	574	851	952	1108	740	9741
SW	398	237	349	410	308	295	388	358	309	356	329	298	4035
W	7111	6141	7959	4187	5274	6327	7771	6371	5452	6038	5901	7362	75894
NW	2753	2630	3615	2811	3181	3134	3360	3209	2585	2305	2633	2761	34977

Der Nordwestwind ist gleicherweise im Sommer am häufigsten, am seltensten dagegen von October bis Februar. Das Maximum seiner Stärke fällt auf den März.

Nach der Häufigkeit ordnen sich die acht Hauptwinde in folgender Weise an: West 2491 Stunden im Jahr, NW 1540; SE 1105, Nord 1093, Süd 801, NE 534, E 453 und SW 449 Stunden.

Nach den Windwegen ist die Reihenfolge eine etwas andere, und zwar W 76 Tausend Kilometer im Jahre, NW 35; N 18; SE 13, S 10, NE 5, SW 4 und E 3 Tausend Kilometer.

Die Tabelle der 16 Windrichtungen zeigt, dass unter den Ostwinden nicht gerade dem SE, sondern dem SSE das Maximum des Windweges (im Mittel der 12 Jahre 1879—1890) zukommt, an Häufigkeit übertrifft ihn aber doch der SE.

Der Westwind ist in allen Monaten der häufigste Wind, ausgenommen im Februar (der Periode 1879—1890), wo der SE noch häufiger ist. Im 17jährigen Mittel bleibt allerdings wieder dem Westwind das Maximum, aber der SE-Wind behält auch in diesem eine ganz auffallende Frequenz, die jene aller übrigen Monate weit hinter sich lässt. Ich finde in der Karte der Isobaren des Februar keine rechte Erklärung für diese eigenthümliche Thatsache. Es müssen gerade im Februar persistente Luftdruckmaxima über dem Südosten von Europa während des Zeitraumes von 1879—1890 mit besonderer Frequenz sich eingestellt haben, im Mittel von 1851—1880 war dies nicht der Fall.

Die mittlere Stärke der einzelnen Windrichtungen unterliegt auch einer jährlichen Periode, und es kommt im Allgemeinen jeder Windrichtung die grösste Stärke in jener Jahreszeit zu, in welcher sie am häufigsten ist, doch gibt es davon auch manche Ausnahmen. Die folgende Zusammenstellung gestattet die mittlere Stärke der einzelnen Windrichtungen und deren Variation im Laufe eines Jahres zu überblicken:

Richtung	N	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE
Mittlere Stärke m. s.	4·1	3·3	2·3	1·8	1·8	2·6	3·1	4·2
Maximum	5·0	4·2	2·9	2·1	2·1	3·4	3·6	5·3 (5·1)
Monat	März	Mai	April	April	April	April	April	Mai (Sept.)
Minimum	3·2	2·6	1·8	1·4	1·3	1·9	2·6	3·7
Monat	Aug.	Oct.	Dec.	Dec.	Dec.	Dec.	Dec.	Dec.

Richtung	S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW
Mittlere Stärke m. s.	3·2	2·6	2·0	3·3	8·9	7·5	5·8	5·5
Maximum	4·1	4·2 (3·2)	2·5	5·9	10·8	9·2	6·6	6·5
Monat	Mai	Oct. (April)	Mai	April	März	Dec.	März	März
Minimum	2·2	1·7	1·4	2·0	7·4	6·4	5·1	4·8
Monat	Febr.	Dec.	Dec.	Febr.	Aug.	Sept.	Aug.	Jänn.

Es ist auffallend, mit welcher Beständigkeit die Ostwinde das Maximum ihrer Intensität im Frühlinge und das Minimum derselben im December erlangen.

Die Maxima der mittleren Windgeschwindigkeit werden erreicht im

März bei N, W, NW und NNW;
April bei NE, ENE, E, ESE, SE, WSW;
Mai bei NNE, SSE, S, SW;
October bei SSW;
December bei WNW.

Die Minima der mittleren Windgeschwindigkeit werden erreicht im

August bei N, NW und W;
September bei WNW;
October bei NNE;
December bei NE, ENE, E, ESE, SE, SSE, SSW und SW;
Jänner bei NNW;
Februar bei S und WSW.

Ihrer mittleren Geschwindigkeit nach reihen sich die 16 Windrichtungen in folgender Weise aneinander:

W (8·9), WNW (7·5), NW (5·8), NNW (5·5), SSE (4·2), N (4·1), NNE und WSW (3·3), S (3·2), SE (3·1), ESE und SSW (2·6), NE (2·3), SW (2·0) und E und ESE (1·8).

Die beste Übersicht über den jährlichen Gang der vorherrschenden Windrichtung gewährt die Berechnung der vier Windcomponenten und der daraus sich ergebenden mittleren Windrichtung.

In der folgenden Tabelle finden sich die 16 Richtungen (Windwege) in der bekannten Weise nach der Lambert'schen Formel auf die vier Componenten reducirt, sowie die daraus berechnete mittlere Windrichtung und deren Resultirende.

Windcomponenten und Resultirende im Mittel der 12 Jahre 1879—1890. Kilometer.

	Componenten				N—S	W—E	Resultirende	
	N	E	S	W			Richtung	Stärke
Jänn.	3163	1258	1994	9029	1169	7771	W 8°6 N	7858
Febr.	3225	1786	2404	6437*	821	4651	10·0	4723
März	**5161**	1522	1806	9817	3355	8295	22·0	8948
April	4824	**2089**	**2492**	6416	2332	4327	28·3	4915
Mai	4987	1808	2384	7395	2603	5587	25·0	6163
Juni	4360	1127	1173*	9911	3187	8784	19·9	9344
Juli	3863	935*	1378	**10297**	2485	9362	14·9	9686
Aug.	3838	1044	1288	9158	2550	8114	17·5	8506
Sept	3309	1471	2098	7213	1211	5742	11·9	5869
Oct.	3155*	1504	2241	8813	914	7309	7·1	7366
Nov.	3201	1298	2241	8336	960	7038	7·8	7103
Dec.	3398	1185	2011	9024	1387	7839	10·0	7961
Jahr	46484	17027	23510	101846	22974	84819	W15°9′N	87874

Die mittlere Windrichtung von Wien ist demnach etwa W zu Nord; sie ist im April am nördlichsten und dann WNW zu Nord, im October dagegen am meisten rein westlich. Die ganze jährliche Änderung von W 28° N im April bis W 7° N im October beträgt 21°, d. i. nicht ganz zwei Compassstriche. Die grösste Intensität hat die mittlere Windrichtung im Juni und Juli, wie dies aus der Luftdruckvertheilung sich leicht erklärt; die kleinste im Februar, wo ja die SE-Winde eine bedeutende Intensität erreichen.

Die Nordcomponente hat ihr Maximum im März, ihr Minimum im October, die E-Componente hat ihr Maximum im April, ihr Minimum im Juli, die Südcomponente hat das Maximum gleichfalls im April, das Minimum im Juni, endlich die Westcomponente erreicht das Maximum im Juli, das Minimum im Februar.

Das grösste Übergewicht der nördlichen Winde gegenüber den südlichen fällt auf den März und Juni; am geringsten ist

dieses Übergewicht im Februar und im October und November. Die Westwinde erreichen ihr grösstes Übergewicht über die östlichen Winde im Sommer, und zwar namentlich im Juli, am kleinsten ist dieses Übergewicht im Februar und im September.

Um den jährlichen Gang der vier Windcomponenten noch übersichtlicher zur Darstellung zu bringen, habe ich denselben durch Sinusreihen ausgedrückt, bin aber dabei bei den zwei ersten periodischen Gliedern stehen geblieben, da dies für den vorliegenden Zweck genügt. Die Gleichungen des jährlichen Ganges sind:

Constanten des jährlichen Ganges der vier Componenten.

	a_0	a_1	a_2	A_1	A_2
Nordcomponente	·3874	898	317	337°9	259°2
Ostcomponente	·1419	269	318	29·1	280·6
Südcomponente	·1959	351	366	82·8	265·1
Westcomponente	·8487	537	881	234·5	109·6

Bei der Ost-, Süd- und Westcomponente überwiegt die doppelte jährliche Periode, bei der Nordcomponente dagegen die einmalige jährliche Periode, und zwar bedeutend. Bei der Ostcomponente ist der jährliche Gang jenem der Westcomponente gerade entgegengesetzt, geringer ist der Unterschied im jährlichen Gange der Nord- und Südcomponente. Schreibt man die Jahresgleichungen in anderer Form, so sieht man dies noch deutlicher als in den obigen Gleichungen und kann zugleich bequemer die Jahresgleichung für die Resultirenden N—S und W—E aufstellen. Man hat nämlich auch:

$$\text{N-Componente} = -338 \cos x + 832 \sin x - 312 \cos 2x - 60 \sin 2x$$
$$\text{S-Componente} = +348 \cos x + 44 \sin x - 365 \cos 2x - 31 \sin 2x$$
$$\text{W-Componente} = -437 \cos x - 312 \sin x + 830 \cos 2x - 295 \sin 2x$$
$$\text{E-Componente} = +131 \cos x + 235 \sin x - 313 \cos 2x + 58 \sin 2x$$

Daraus folgt dann weiter

$$\text{N—S} = -686 \cos x + 788 \sin x + 53 \cos 2x - 29 \sin 2x$$
$$\text{W—E} = -568 \cos x - 547 \sin x + 1143 \cos 2x - 353 \sin 2x$$

oder in anderer Form

$$\text{N—S} = 1044 \sin (319°0 + x) + 60 \sin (118°7 + 2x)$$
$$\text{W—E} = 788 \sin (226·1 + x) + 1196 \sin (107·2 + 2x)$$

Diese beiden Gleichungen geben folgenden jährlichen Gang der Nordcomponente und der Westcomponente.

Berechneter jährlicher Gang.

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni
N—S....	—633	—199	337	735	1024	**1040**
W—E ...	575	—505	—1635	—1690*	— 450	1095

	Juli	August	September	October	November	Dec.
N—S....	739	201	— 440	— 841	—1026*	— 937
W—E ...	**1711**	1025	— 119	— 596*	— 70	**659**

Die reine Nordcomponente hat ein Maximum im Juni und ein Minimum im November; die reine Westcomponente hat zwei Maxima im Juli und im December und zwei Minima im April und October.

Die folgende Tabelle enthält den berechneten jährlichen Gang der vier Componenten und der mittleren Windrichtung. Letztere ist direct gerechnet worden aus der Formel:

$$15^\circ 2+8^\circ 74 \sin (331^\circ 5+x)+2^\circ 81 \sin (265\cdot 9+2x)$$

und nicht aus den obigen berechneten Werthen der nördlichen und westlichen Resultirenden.

Berechneter jährlicher Gang der mittleren Windrichtung zu Wien. 1879—1891.

	Componenten Abweichungen vom Mittel				Mittlere Windrichtung	
	N	E	S	W	φ	Abweichung vom Mittel
Jänner	— 650	— 182	— 17	393	W 8°3 N	— 6·9
Februar	— 85	125	114	— 375	13·9	— 1·3
März	655	476	368	—1159	21·0	5·8
April	1144	548	409	—1142	25·7	10·5
Mai	1098	244	73	— 214	25·5	10·3
Juni	605	— 207	— 435	892	21·5	6·3
Juli	26	— 444	— 713	1267	16·6	1·4
August	— 331	— 337	— 532	695	13·4	— 1·8
September	— 447	— 62	— 56	— 181	11·9	— 3·3
October	— 520	78	321	— 518	10·3	— 4·9
November	— 682	— 32	345	— 110	8·1	— 7·1
December	— 813	— 207	123	448	6·6	— 8·6
Mittel	3874	1419	1959	8487	W 15·2 N	5·7

Der jährliche Gang der vier Windcomponenten erscheint hier natürlich einfacher und regelmässiger als in der früheren Tabelle und dürfte vielleicht auch einem vieljährigen Mittel näher kommen. Die berechneten Extreme sind:

Nordcomponente:	Maximum	April,	Minimum	December
Ostcomponente:	Maximum	I. April,	Minimum	I. Juli
		II. October,		II. December
Südcomponente:	Maximum	I. April,	Minimum	I. Juli
		II. November,		II. Jänner
Westcomponente:	Maximum	I. Juli,	Minimum	I. März, April
		II. December,		II. October

Die Nord-, Ost- und Südcomponente erreichen sämmtlich im April ihr Maximum, während im gleichen Monate die Westcomponente ihr Minimum aufweist. Es stimmt dies mit der im April und Mai herrschenden Luftdruckvertheilung, welche vornehmlich durch das Verschwinden des Barometerminimums im Nordwesten von Europa charakterisirt wird. Im Juni und Juli dagegen, wo der Luftdruck im SW von Europa hoch, dagegen im Osten und Südosten niedrig ist, erreicht die Westcomponente das Maximum ihrer Intensität. Während im Frühling die N- und E-Componente vorwiegen, ist dies im October mit der E- und S-Componente der Fall, was ja durch den um diese Zeit hohen Druck im Südosten von Europa sich leicht erklärt. Derart ist der berechnete jährliche Gang der vier Windcomponenten mit der bekannten Druckvertheilung über Europa in guter Übereinstimmung.

Im April und Mai ist die mittlere Windrichtung am meisten nördlich, geht aber immerhin kaum über WNW hinaus, im December und Jänner ist sie am meisten westlich und weicht dann nicht viel über einen halben Compassstrich von der reinen Westrichtung nach Nord hin ab.

Obgleich die mittlere Windrichtung nach der sogenannten Lambert'schen Formel nur ein sehr abstractes Bild der Windverhältnisse eines Ortes gibt, so ist die Berechnung derselben doch zur Ergänzung der Darstellung der letzteren sehr wünschenswerth, worauf neuerdings wieder mit Recht Herr Dr. Pernter

hingewesen hat.[1] Zu einer Zeit, sie liegt nun relativ ziemlich weit hinter uns, hat man vielfach ausschliesslich die mittlere Windrichtung berechnet und meinte damit alles Wünschenswerthe in Bezug auf die Reduction der Windbeobachtungen oder Registrirungen geleistet zu haben. Die Reaction dagegen war berechtigt, ist aber, wie dies ja in der Natur der Sache liegt und fast stets geschieht, über das Ziel hinausgegangen und hat die Berechnung der mittleren Windrichtung überhaupt perhorrescirt. Wie Herr Dr. Pernter mit Recht hervorhebt, bedürfen wir aber der Kenntniss der mittleren Windrichtung für die Monate und das Jahr von möglichst vielen Orten, um den Lufttransport durch die Winde und damit die Circulation der Atmosphäre qualitativ und quantitativ mit jener Präcision kennen zu lernen, die den wissenschaftlichen Anforderungen entspricht.

Es scheint mir nun ferner, dass es auch ebenso wünschenswerth ist, die mittlere Windrichtung eines Ortes nicht bloss im vieljährigen Mittel festzustellen, sondern auch für jeden einzelnen Jahrgang. Es wird dabei immer anzurathen sein, nicht bloss die mittlere Windrichtung und die Resultirende mitzutheilen, sondern auch die Grösse jeder der vier Componenten, wodurch die Einsicht in die etwaigen Änderungen derselben zu Grunde liegenden Bedingungen wesentlich erleichtert wird. Die Frage, ob die mittlere Windrichtung eines Ortes constant ist oder fortschreitenden oder periodischen Änderungen unterliegt, kann nur auf diesem Wege entschieden werden. Es wäre daher allen Observatorien, welche mit registrirenden Anemometern ausgerüstet sind, zu empfehlen, die mittlere Windrichtung des Jahres, sowie auch die der einzelnen Monate abzuleiten, neben der jetzt mit Recht vorherrschenden Mittheilung der Häufigkeitszahlen und Windwege jeder der 16 Windgruppen. An den russischen Centralobservatorien geschieht dies ja auch schon seit einiger Zeit.

Von solchen Überlegungen geleitet habe ich für unser Observatorium auf der Hohen Warte bei Wien nachträglich wenigstens die einzelnen Jahreswerthe der mittleren Windrichtung abgeleitet.

---

[1] Meteorologische Zeitschrift, Bd. XXVI, 1891, S. 193 etc.

Jahressummen der Wind-

	1879	1880	1881	1882	1883	1884
N	10274	8632	14994	8548	9817	8208
NNE	2419	3020	6677	3818	4750	5364
NE	1471	2676	1503	1320	3084	2778
ENE	756	1002	927	1002	1057	1449
E	2158	1805	986	1622	1564	1732
ESE	2273	2511	1461	2888	2877	3071
SE	7292	8941	13754	9620	8249	6263
SSE	5897	4211	10718	10573	12856	10582
S	4588	2708	2772	4555	4099	2884
SSW	1240	1245	1404	857	1379	697
SW	1935	2500	1448	1612	1480	1395
WSW	4337	2049	2402	3572	1857	1619
W	73661	72686	42908	73180	65660	56516
WNW	23304	21561	19676	21816	22912	30565
NW	19094	16702	19832	18345	16403	16373
NNW	8915	12331	12729	9742	9594	9754
						Compo-
N	44492	45146	55901	43712	46020	47958
E	14334	16030	20636	18458	19961	18395
S	20238	17582	26197	25527	25950	20511
W	117952	113271	83769	114795	105381	102817
N—S	24254	27564	29704	18185	20070	27447
W—E	103618	97241	63133	96337	85420	84422
Mittlere Windrichtung von Nord nach West:	76°50'	74°11	64°48	79°18	76°47	71°59
Resultante	106445	101100	69773	97950	87745	88775

wege in Kilometern.

1885	1886	1887	1888	1889	1890	1891	1892
9598	11411	11589	10256	9862	10989	11050	11623
3497	2232	3765	2058	1760	2719	3147	3837
4547	2402	2945	2068	1854	1403	2224	2410
830	654	795	1199	933	746	632	623
1434	1282	1527	1903	1312	2111	1703	2002
2179	1738	1714	2523	2091	1890	1681	2198
5513	7980	7516	8449	6263	6464	6151	7807
11010	13417	10791	9251	8190	10639	7797	8786
6709	6285	4200	5512	5756	4748	6805	5414
673	1519	668	1511	1665	1249	947	962
1486	1838	1723	1501	1124	1868	1437	945
1430	2132	3013	3366	4462	2775	1304	2919
35245	50036	64079	60488	59010	60179	61829	61755
22894	15704	18218	29790	29851	24203	22429	18020
16730	15907	21607	17346	20398	19489	15755	14450
9277	9308	8779	8449	10121	8883	9127	12770

nenten.

1885	1886	1887	1888	1889	1890	1891	1892
45522	41280	47817	45553	48344	46025	43927	46073
16781	16819	16809	17105	13654	15219	13949	16705
23832	28500	28125	24744	22591	23406	21387	22568
74394	83208	103816	108260	110435	104088	99764	97246
21690	12780	24692	20809	25753	22619	22540	23505
57613	66389	87007	91155	96781	88869	85815	80541
69°22'	79°6'	74°9'	77°8'	75°6'	75°43'	75°17'	73°44'
61561	67610	90444	93501	100150	91706	88726	8390

Die vorstehende Tabelle enthält für die Jahre 1879—1892 inclusive die von jeder der 16 Windrichtungen im Laufe des ganzen Jahres zurückgelegten Wege in Kilometern, dann die vier Hauptcomponenten der Windrichtung, die nördliche und westliche Resultirende und endlich die daraus berechnete mittlere Windrichtung und Grösse der Resultirenden.

Man ersieht aus dieser Tabelle, dass die Grösse der vier Windcomponenten in den einzelnen Jahren nicht unbeträchtlichen Schwankungen unterliegt. Die Nordcomponente z. B. hat im Jahre 1881 ihr Maximum mit nahe 56 Tausend Kilometern erreicht und ist dagegen im Jahre 1886 auf den Betrag von wenig über 41 Tausend Kilometer herabgesunken (Verhältniss 1·35), die Ostcomponente hatte ihr Maximum im selben Jahre 1881 mit 20·6 Tausend Kilometer; ihr Minimum im Jahre 1889 mit 13·6 Tausend Kilometer (Verhältniss 1·51), die Südcomponente hatte ihr Maximum im Jahre 1886 mit 28·5 Tausend Kilometer, ihr Minimum im Jahre 1880 mit 17·6 Tausend Kilometer (Verhältniss 1·62), die Westcomponente endlich erreichte im Jahre 1880 den Betrag von 113·3 Tausend Kilometern, im Jahre 1885 sank sie auf 74·4 Tausend Kilometer herab (Verhältniss 1·52).

Den grössten Änderungen im Laufe der einzelnen Jahrgänge unterliegt demnach die Südcomponente, den kleinsten die Nordcomponente (soweit aus 14 Jahrgängen dieser Schluss schon berechtigt erscheint). Der Ost- und Westcomponente kommt das gleiche Verhältniss der extremen Werthe zu.

Das grösste Übergewicht der nördlichen Winde gegenüber den südlichen hatte das Jahr 1881 mit 29·7 Tausend Kilometern, das kleinste das Jahr 1886 mit 12·8 Tausend. Die nördliche Resultirende unterliegt demnach sehr beträchtlichen Schwankungen, denn das Verhältniss des Maximums zum Minimum ist 2·3. Das grösste Übergewicht der westlichen gegenüber den östlichen Winden kommt dem Jahre 1879 zu mit 103·6 Tausend Kilometern, das kleinste dem Jahre 1885 mit 57·6 Tausend Kilometern; Verhältniss 1·80, also erheblich kleiner.

Für die Jahre 1873—1878 inclusive habe ich die mittlere Windrichtung nur aus den registrirten Häufigkeitszahlen von

acht Windrichtungen berechnet. Diese Rechnung wurde aber auch auf die übrigen Jahre bis 1892 ausgedehnt, um ein Urtheil darüber zu gewinnen, inwieweit die aus den blossen Häufigkeitszahlen abgeleitete mittlere Windrichtung mit jener übereinstimmt, die sich aus der genauen Berechnung, d. i. aus den Windwegen ergibt.

Die folgende Tabelle Seite 196 enthält die Häufigkeit jeder der acht Windrichtungen in Stunden (die Windstillen wurden erst seit dem Jahre 1881 gezählt), ferner die daraus folgenden vier Windcomponenten und die Resultirende nach Richtung und Grösse.

Die Extreme in der Häufigkeit der vier Componenten in den 20 Jahrgängen sind:

Nordcomponente: Max. 2882 im Jahre 1875, Min. 2173 im Jahre 1878, Verhältniss 1·33

Ostcomponente: Max. 2002 im Jahre 1873, Min. 1408 im Jahre 1890, Verhältniss 1·42

Südcomponente: Max. 2279 im Jahre 1886, Min. 1657 im Jahre 1890, Verhältniss 1·37

Westcomponente: Max. 5140 im Jahre 1873, Min. 3148 im Jahre 1885, Verhältniss 1·63

Die Schwankungen in der Häufigkeit der Windrichtungen auf vier Componenten reducirt, sind im Allgemeinen kleiner als die Schwankungen in ihrer Intensität, namentlich wenn man berücksichtigt, dass die ersteren sich auf 20 Jahre beziehen.

Vergleicht man die aus den blossen Häufigkeitszahlen berechnete mittlere Windrichtung mit jener, die correcter Weise aus den Windwegen abgeleitet worden sind, so findet man, dass mit zwei Ausnahmen (1886 und 1888) die letzteren der Resultirenden durchgängig eine nördlichere Richtung geben, und zwar im Mittel von 14 Jahren um 2°1. Die Schwankungen um diesen Mittelwerth sind allerdings erheblich (äusserste Grenzen —10°6 und +8°7). Erlaubt man sich die angegebene mittlere Differenz an die aus den Häufigkeitszahlen abgeleitete mittlere Windrichtung der Jahrgänge 1873—1878 inclusive anzubringen, so erhält man folgende mittlere Windrichtungen für die 20jährige Periode 1873—1892.

Jahressummen der Häufigkeit der acht Hauptwind-
mittlere Wind-

Jahr	N	NE	E	SE	S	SW	W
1873	963	710	559	1331	605	507	3457
1874	997	632	463	1204	677	496	2637
1875	1131	818	447	1015	624	454	2612
1876	1214	719	453	1002	1089	604	2371
1877	1183	648	429	871	1024	584	2564
1878	857	546	554	868	795	636	3189
1879	1215	456	564	1060	815	471	2620
1880	1123	584	530	1086	695	582	2720
1881	1368	472	307	1415	699	427	1713
1882	1063	396	431	1192	711	356	2646
1883	953	584	452	1237	727	340	2442
1884	1055	601	513	1199	733	312	2345
1885	1081	715	417	1085	1008	385	1818
1886	1038	483	396	1340	1023	437	2195
1887	1102	555	402	1130	803	382	2603
1888	984	411	531	1196	839	420	2688
1889	976	437	469	1006	783	384	2656
1890	1220	372	445	990	686	384	2603
1891	1173	547	409	1000	902	297	2710
1892	1335	569	513	1056	769	313	2603

richtungen in Stunden und die daraus sich ergebende
richtung.

NW	Calmen	Componenten				Resultirende	
		N	E	S	W	φ	R
1874	—	2790	**2002**	1904	**5140**	74°14	3260
1654	—	2613	1761	1879	4157	72 58	2506
1659	—	**2882**	1743	1663	4106	61 22	2692
1332	—	2664	1769	2224	3740	77 25	2019
1457	—	2698	1503	2053	4007	75 33	2586
1315	—	2173*	1554	1859	4569	84 3	3031
1559	—	2639	1635	1897	4055	72 57	2531
1514	—	2606	1711	1874	4201	73 37	2595
1662	649	2877	1641	2001	3190	60 31	1779
1515	449	2414	1554	1806	3969	75 52	2491
1445	302	2388	1740	1842	3704	74 28	2038
1475	461	2523	1786	1802	3609	68 25	1956
1497	754	2645	1690	2047	3148*	67 42	1576
1376	499	2352	1684	**2279**	3477	87 40	1795
1656	167	2665	1593	1872	4044	72 40	2576
1522	193	2351	1668	1983	4062	81 16	2422
1737	272	2513	1489	1765	4155	74 20	2769
1778	282	2740	1408*	1657*	4131	68 19	2811
1561	161	2664	1503	1819	4024	71 28	2659
1455	171	2765	1661	1737	3853	64 52	2421

Mittlere Windrichtung; von West nach Nord gerechnet.

Jahr	1873	1874	1875	1876	1877	1878	1879	1880	1881	1882
Mittlere Richtung	13°7	14°9	26°5	10°5	12°3	3°9	13·2	15°8	25°2	10°7
Jahr	1883	1884	1885	1886	1887	1888	1889	1890	1891	1892
Mittlere Richtung	13°2	18°0	20°6	10°9	15°9	12°9	14°9	14°3	14°7	16°3

Die mittlere Windrichtung schwankte innerhalb 20 Jahren zwischen W 4° N im Jahre 1878 und W 26°5 N im Jahre 1875, also nur um zwei Compassstriche (22$^{1}/_{2}$°). Bildet man fünfjährige Mittel, so erhält man folgende Reihe: 1873—1877 W 15°6 N; 1878—1882 W 13°8 N, 1883—1887 W 15°7 N und 1888—1892 W 14°6 N. In den Lustern Mitteln stellt sich demnach die mittlere Windrichtung schon als sehr constant heraus.

Über symmetrische Functionen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung

von

Dr. **Gustav Kohn,**
Privatdocent an der k. k. Universität in Wien.

Die allbekannten Sätze über Grad und Gewicht einer symmetrischen Function sind nur die wichtigsten zwei aus einer bisher nicht aufgestellten Reihe von analogen Bemerkungen über symmetrische Functionen. Man kann, wenn eine ganze Function der Coëfficienten einer Gleichung n^{ten} Grades vorliegt, durch blosse Vergleichung der in den einzelnen Posten auftretenden Exponenten nicht nur den Grad der Function in einer Wurzel und in allen Wurzeln, sondern allgemein ihren Grad in r von den Wurzeln ($r = 1, 2, \ldots n$) genau angeben. Ist die Frage nach diesem Grad einmal aufgeworfen, so ist die Antwort, wie in Art. 1 gezeigt wird, auf eine nahezu selbstverständliche Art zu erlangen. Dass es nichtsdestoweniger nützlich ist, diese Antwort ein- für allemal zu registriren, wird durch einige Anwendungen illustrirt, welche die Darstellung des Wurzelaggregats $\Sigma \alpha_1^{\nu_1} \alpha_2^{\nu_2} \ldots \alpha_n^{\nu_n}$, der Discriminante und der nicht-unitären symmetrischen Functionen durch die Coëfficienten, sowie die Structur der Seminvarianten betreffen.

1. Es mögen die elementaren symmetrischen Functionen der Grössen

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$$

mit

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$$

bezeichnet werden, so dass

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \Sigma \alpha_1 \\ a_2 &= \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \\ &\cdots\cdots \\ a_n &= \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n . \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Es mögen ferner durch

$$b_1, b_2, b_3, \ldots b_r$$

die elementaren symmetrischen Functionen der r ersten unter den Grössen α, d. i. von

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_r$$

und durch

$$c_1, c_2, c_3, \ldots c_{n-r}$$

die elementaren symmetrischen Functionen der $n-r$ übrigen. d. i. von

$$\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots \alpha_n$$

bezeichnet werden.

Fasst man in den Gleichungen (1), durch welche $a_1, a_2, \ldots a_n$ definirt sind, auf den rechten Seiten diejenigen Glieder zusammen, welche in den Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ den höchsten oder, was auf dasselbe hinauskommt, in den Grössen $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots \alpha_n$ den niedrigsten Grad besitzen, und deutet die übrigen Glieder durch Punkte an, so erhält das Gleichungssystem (1) die Form:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= b_1 + \ldots \\ a_2 &= b_2 + \ldots \\ &\cdots\cdots \\ a_r &= b_r + \ldots \\ a_{r+1} &= b_r c_1 + \ldots \\ a_{r+2} &= b_r c_2 + \ldots \\ &\cdots\cdots \\ a_n &= b_r c_{n-r} + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

Infolge dessen wird, wenn $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ irgend welche positive ganze Zahlen bedeuten,

$$\begin{aligned} a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n} &= (b_1 + \ldots)^{\lambda_1} (b_2 + \ldots)^{\lambda_2} \ldots (b_r + \ldots)^{\lambda_r} . \\ &\quad . (b_r c_1 + \ldots)^{\lambda_{r+1}} (b_r c_2 + \ldots)^{\lambda_{r+2}} \ldots (b_r c_{n-r} + \ldots)^{\lambda_n} \\ &= b_1^{\lambda_1} b_2^{\lambda_2} \ldots b_{r-1}^{\lambda_{r-1}} b_r^{\lambda_r + \lambda_{r+1} + \ldots \lambda_n} . c_1^{\lambda_{r+1}} c_2^{\lambda_{r+2}} \ldots c_{n-r}^{\lambda_n} + \ldots \end{aligned}$$

wo die Punkte wieder Terme bedeuten, die in $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ von niedrigerem und in $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots \alpha_n$ von höherem Grade sind als der hingeschriebene Term, welcher in den Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ vom Grade

$$1 . \lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots (r-1)\lambda_{r-1} + r(\lambda_r + \lambda_{r+1} + \ldots \lambda_n)$$

und in den Grössen $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots \alpha_n$ vom Grade

$$(n-r) . \lambda_n + (n-r-1) . \lambda_{n-1} + \ldots 2 . \lambda_{r+2} + 1 . \lambda_{r+1}$$

ist. Allgemein hat man desshalb das Resultat:

Ist eine beliebige ganze Function der Coëfficienten $a_1, a_2, \ldots a_n$ vorgelegt

$$\Phi = \Sigma C_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n} a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n}, \tag{2}$$

wo die Summe über gewisse Combinationen von ganzzahligen Werthen von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ sich erstreckt, so werden durch das Polynom

$$\Psi = \Sigma C_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n} b_1^{\lambda_1} b_2^{\lambda_2} \ldots b_{r-1}^{\lambda_{r-1}} b_r^{\lambda_r + \lambda_{r+1} + \ldots \lambda_n} . c_1^{\lambda_{r+1}} c_2^{\lambda_{r+2}} \ldots c_{n-r}^{\lambda_n} \tag{3}$$

diejenigen Glieder im Ausdruck von Φ durch die Wurzeln dargestellt, welche in den r Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ den höchsten Grad besitzen, wenn die Summe in Ψ über jene unter den Werthecombinationen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ erstreckt wird, für welche

$$1 . \lambda_1 + 2 . \lambda_2 + \ldots (r-1) . \lambda_{r-1} + r . (\lambda_r + \lambda_{r+1} + \ldots \lambda_n)$$

den grössten Werth besitzt, und es werden durch den Ausdruck Ψ die Glieder von Φ dargestellt, welche in den $n-r$ Wurzeln $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots \alpha_n$ den niedrigsten Grad besitzen, wenn die Summe in Ψ über jene unter den Werthecombinationen von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ ausgedehnt wird, für welche

$$(n-r) . \lambda_n + (n-r-1) . \lambda_{n-1} + \ldots 2 . \lambda_{r+2} + 1 . \lambda_{r+1}$$

den kleinsten Werth hat.

Da für keine zwei Glieder des Polynoms Ψ all die Grössen $b_1, b_2, \ldots b_r, c_1, c_2, \ldots c_{n-r}$ dieselben Exponenten besitzen, und da jeder Coëfficient $C_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n}$ von Null verschieden vorausgesetzt ist, so kann dieses Polynom nicht gleich Null sein.

Denn man hätte sonst eine Relation zwischen den Grössen $b_1, b_2, \dots b_r$, $c_1, c_2, \dots c_{n-r}$, während diese Grössen ihrer Definition zufolge völlig von einander unabhängig sind.

Bezeichnen wir der Kürze halber den grössten, respective kleinsten Werth, den ein Ausdruck in den Exponenten $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ für irgend ein Glied der Function Φ annimmt, dadurch, dass wir vor dem Ausdruck das Wort max., respective min. vorausschreiben, so haben wir den folgenden

Lehrsatz: In dem Ausdruck einer beliebigen ganzen Function der Coëfficienten $\Phi = \Sigma C_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n} a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \dots a_n^{\lambda_n}$ durch die Wurzeln kommen nur solche Wurzelproducte als Posten vor, bei denen der Grad g_r in r von den Wurzeln $(r = 1, 2, \dots n)$ zwischen bestimmten Grenzen liegt. Man hat

$$\max\,[1\,.\,\lambda_1 + 2\,.\,\lambda_2 + \dots (r-1)\,.\,\lambda_{r-1} + r(\lambda_r + \lambda_{r+1} + \dots \lambda_n)] \geqq g_r \geqq$$
$$\geqq \min\,[r\,.\,\lambda_n + (r-1)\,.\,\lambda_{n-1} + \dots 1\,.\,\lambda_{n-r+1}]$$

und es sind stets einzelne Posten vorhanden, für welche der Grad g_r die angegebenen Grenzen thatsächlich erreicht.

Bemerkt sei, dass die Angabe der Grenzen für den Grad in r Wurzeln ganz unmittelbar vollzogen werden könnte, und nur der Umstand, dass die Posten, bei denen der Grad g_r durch die eine oder die andere der Grenzen gegeben wird, sich untereinander nicht zerstören können, nicht so ganz selbstverständlich ist.

In unserem Lehrsatz liegt für $r = 1$ der Satz über den Grad einer symmetrischen Function, wonach der Grad in den Coëfficienten mit dem Grad in einer Wurzel übereinstimmt, und für $r = n$ der Satz über das Gewicht, wonach die Constanz des Gewichtes $1\,.\,\lambda_1 + 2\,.\,\lambda_2 + \dots n\lambda_n$ für die Homogenität in den Wurzeln nothwendig und hinreichend ist.

Wir machen noch darauf aufmerksam, dass im Falle die Function Φ der Coëfficienten isobar, also in den Wurzeln homogen ist, diejenigen Terme, welche in r Wurzeln einen höheren Grad besitzen als alle anderen, gleichzeitig in $n-r$ Wurzeln (nämlich den übrigen $n-r$) einen niedrigeren Grad besitzen als alle anderen, so dass in diesem Falle die Angabe

der unteren Grenzen für die Gradzahlen g_r in Verbindung mit der Gleichung für das Gewicht den vollen Inhalt unseres Lehrsatzes wiedergibt.

2. Denken wir uns, um eine Anwendung von dem in Art. 1 bewiesenen Lehrsatz zu machen, die symmetrische Function der Wurzeln

$$\Sigma \alpha_1^{\tau_1} \alpha_2^{\tau_2} \dots \alpha_n^{\tau_n} \qquad (\tau_1 \geqq \tau_2 \geqq \tau_3 \dots \geqq \tau_n)$$

durch die Coëfficienten ausgedrückt. Ist

$$\Sigma \alpha_1^{\tau_1} \alpha_2^{\tau_2} \dots \alpha_n^{\tau_n} = \Sigma C_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n} a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \dots a_n^{\lambda_n}, \tag{4}$$

wo jedes $C_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$ einen gewissen von Null verschiedenen Zahlencoëfficienten bedeutet und die Summe rechts über gewisse ganzzahlige Werthecombinationen der λ sich erstreckt, so fragt es sich, was unser Lehrsatz über diese Werthecombinationen aussagt.

Der volle Inhalt dieses Lehrsatzes wird nach Art. 1 wiedergegeben durch die $n-1$ Ungleichungen

$$r.\lambda_n + (r-1).\lambda_{n-1} + \dots + 1.\lambda_{n-r+1} \geqq \tau_n + \tau_{n-1} + \dots \tau_{n-r+1}$$
$$(r = 1, 2, \dots (n-1)) \tag{5}$$

in Verbindung mit der Gleichung

$$n.\lambda_n + (n-1)\lambda_{n-1} + \dots 2.\lambda_2 + 1.\lambda_1 = \tau_n + \tau_{n-1} + \dots \tau_2 + \tau_1,$$

wobei noch zu bemerken wäre, dass es einzelne Glieder in (4) geben muss, für die in den Ungleichungen das Gleichheitszeichen gilt.

Dem System dieser Beschränkungen für die auftretenden Werthecombinationen der λ wollen wir noch eine andere Form geben. Zu diesem Zwecke denken wir uns aus dem Gleichungssystem

$$r.\lambda_n + (r-1).\lambda_{r-1} + \dots + 1.\lambda_{n-r+1} = \tau_n + \tau_{n-1} + \dots \tau_{n-r+1}$$
$$(r = 1, 2, \dots n),$$

welches entsteht, wenn man neben der Gewichtsgleichung auch in den Ungleichungen (5) das Gleichheitszeichen bestehen lässt, successive die Grössen $\lambda_n, \lambda_{n-1}, \dots \lambda_1$ ausgerechnet. Man

erhält offenbar wegen $\tau_n \leqq \tau_{n-1} \leqq \tau_{n-2} \ldots \leqq \tau_1$ für die genannten Grössen ganze positive Zahlenwerthe, welche wir respective mit

$$\varkappa_n, \varkappa_{n-1}, \ldots \varkappa_1$$

bezeichnen wollen. Das Coëfficientenproduct

$$a_1^{\varkappa_1} a_2^{\varkappa_2} \ldots a_n^{\varkappa_n},$$

dessen Exponenten so definirt sind, ist nun, wie man sich sofort überzeugt, nichts Anderes als das zum Wurzelaggregat $\Sigma \alpha_1^{\tau_1} \alpha_2^{\tau_2} \ldots \alpha_n^{\tau_n}$ conjugirte Coëfficientenproduct, das längst in die Theorie der symmetrischen Functionen eingeführt ist, und die aus unserem Lehrsatz gezogenen Folgerungen lassen sich desshalb folgendermassen aussprechen:

Drückt man das Wurzelaggregat $\Sigma \alpha_1^{\tau_1} \alpha_2^{\tau_2} \ldots \alpha_n^{\tau_n}$, dessen conjugirtes Coëfficientenproduct $a_1^{\varkappa_1} a_2^{\varkappa_2} \ldots a_n^{\varkappa_n}$ ist, durch die Coëfficienten aus, so kann dabei der Term

$$a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n}$$

nur dann auftreten, wenn nebst der Gewichtsgleichung noch die $n-1$ Ungleichungen

$$r.\lambda_n + (r-1).\lambda_{n-1} + \ldots 1.\lambda_{n-r+1} \geqq$$
$$\geqq r.\varkappa_n + (r-1).\varkappa_{n-1} + \ldots 1.\varkappa_{n-r+1} \qquad (r = 1, 2 \ldots (n-1))$$

erfüllt sind.

Aus diesem Satze lässt sich in einfachster Weise die Möglichkeit ableiten, den Tafeln für die einfachen symmetrischen Functionen eine solche Gestalt zu geben, dass jenseits einer der beiden Tafeldiagonalen immer lauter Nullen zu stehen kommen. Diese Möglichkeit, für welche meines Wissens bisher ein allgemeiner Beweis nicht publicirt wurde,[1] fliesst aus der folgenden Bemerkung:

Ordnet man die Glieder $a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n}$, für welche das Gewicht $1.\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots n\lambda_n = \tau_1 + \tau_2 + \ldots \tau_n$ ist, erst in Gruppen nach dem Grad in den Coëfficienten und lässt immer die Gruppe niedri-

[1] Vergl. Durfee, Amer. Journal of Math., V, p. 348. Durfee stützt sich bei seinen Auseinandersetzungen auf einen Satz, den Cayley in den Philos. Transactions vom Jahre 1857 aufgestellt, aber, wie er ausdrücklich erwähnt, nicht allgemein bewiesen hat (»...I have not investigated the general proof«).

geren Grades der vom höheren Grade vorangehen, ordnet man ferner innerhalb einer Gruppe die Glieder so, dass von zwei Gliedern desselben Grades dasjenige vorangeht, bei dem a_n den höheren Exponenten hat, und wenn a_n in beiden Gliedern denselben Exponenten hat, dasjenige, für welches a_{n-1} den höheren Exponenten besitzt u. s. f., so kommen in dem Ausdruck des Wurzelaggregats $\Sigma \alpha_1^{\varkappa_1} \alpha_2^{\varkappa_2} \ldots \alpha_n^{\varkappa_n}$ keine Glieder vor, welche auf das conjugirte Coëfficientenproduct folgen.

Die Richtigkeit dieser Bemerkung ergibt sich aus dem hier aufgestellten Satze sofort. Denn aus dem Satze über den Grad (der in unserer Ungleichung für $r = n - 1$ liegt) fliesst, dass in dem Ausdruck von $\Sigma \alpha_1^{\varkappa_1} \alpha_2^{\varkappa_2} \ldots \alpha_n^{\varkappa_n}$ kein Glied einer Gruppe vorkommen kann, welche auf die Gruppe folgt, der das conjugirte Coëfficientenproduct angehört. Innerhalb dieser Gruppe ist aber dieses Coëfficientenproduct das letzte Glied, denn für jedes folgende Glied $a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n}$ ist der Annahme nach für ein gewisses r

$$\lambda_{n-r} < \varkappa_{n-r},$$

während

$$\lambda_n = \varkappa_n, \ldots \lambda_{n-r+1} = \varkappa_{n-r+1},$$

was mit der Ungleichung

$$(r+1)\lambda_n + r.\lambda_{n-1} + \ldots 1.\lambda_{n-r} \geqq (r+1).\varkappa_n + r.\varkappa_{n-1} + \ldots 1.\lambda_{n-r}$$

unverträglich ist.

Die Tafel für die symmetrischen Functionen $\Sigma \alpha_1^{\varkappa_1} \alpha_2^{\varkappa_2} \ldots \alpha_n^{\varkappa_n}$ vom Grade p in den Wurzeln hat die Anordnung, dass jede Zeile der Tafel einer dieser Functionen, jede Colonne einem der Coëfficientenproducte $a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n}$ vom Gewichte p zugehört und an der Schnittstelle von Zeile und Colonne der Zahlenfactor eingetragen erscheint, den das der Colonne zugehörige Coëfficientenproduct im Ausdruck des der Zeile zugehörigen Wurzelaggregats besitzt.

Es mögen den Colonnen der Reihe nach von links nach rechts die Coëfficientenproducte $a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n}$ in der oben für sie festgesetzten Reihenfolge zugehören, und es mögen den ihnen beziehungsweise conjugirten Wurzelaggregaten der Reihe nach die Zeilen von unten nach oben zugewiesen sein. Dann wird

die Zeile eines Wurzelaggregats immer von der Colonne des conjugirten Coëfficientenproductes in der Diagonale getroffen, welche die linke untere mit der rechten oberen Ecke der Tafel verbindet, und hinter dieser Schnittstelle werden der eben bewiesenen Bemerkung zufolge nur Nullen zu stehen kommen.

3. Ein zweites Beispiel für die Anwendung des in Art. 1 bewiesenen Lehrsatzes soll uns die Discriminante liefern.

Es sei

$$(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1})^2 = \\ = \Sigma C_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n} a_0^{\lambda_0} a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2}\ldots a_n^{\lambda_n},$$

wo $a_0=1$ dazu verwendet worden ist, den Ausdruck zu einem homogenen zu machen.

Da das Product der sämmtlichen quadrirten Wurzeldifferenzen den homogenen Factor vom Grade $r(r-1)$ in den r Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2,\ldots\alpha_r$

$$(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2\ldots(\alpha_{r-1}-\alpha_r)^2 \qquad (r=2,3,\ldots n)$$

enthält, so kann in der Entwicklung dieses Productes kein Glied vorkommen, das in r Wurzeln $(r=2,3,\ldots n)$ einen Grad besitzt, der niedriger ist als $r(r-1)$. Es werden also nach unserem Lehrsatz in der Darstellung der Discriminante durch die Coëfficienten nur solche Posten $C_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n} a_0^{\lambda_0} a_1^{\lambda_1}\ldots a_n^{\lambda_n}$ vorkommen können, für welche die $n-1$ Ungleichungen

$$r\lambda_n+(r-1)\lambda_{n-1}+\ldots 1.\lambda_{n-r+1}\geqq r(r-1) \quad (r=2,3,\ldots n-1) \quad (6)$$

und neben ihnen die Gleichungen für Gewicht und Grad

$$0.\lambda_0+1.\lambda_1+\ldots n\lambda_n = n(n-1) \qquad (7)$$

$$\lambda_0+\lambda_1+\ldots\lambda_n = 2(n-1) \qquad (8)$$

erfüllt sind.

Subtrahirt man von der Ungleichung (6) die Gleichung (7) und addirt die mit $(n-r)$ multiplicirte Gleichung (8), so resultirt:

$$(n-r).\lambda_0+(n-r-1).\lambda_1+\ldots 1.\lambda_{n-r} \geqq (n-r)(n-r-1) \\ (r=2,3,\ldots n).$$

Wir finden:

In der als Function der Coëfficienten $a_0, a_1, \ldots a_n$ dargestellten Discriminante können nur solche Glieder $C_{\lambda_0 \ldots \lambda_n} a_0^{\lambda_0} a_1^{\lambda_1} \ldots a_n^{\lambda_n}$ vorkommen, bei denen die Exponenten $\lambda_0, \lambda_1 \ldots \lambda_n$ die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\left.\begin{array}{l} r.\lambda_r + (r-1).\lambda_{r-1} + \ldots 1.\lambda_{n-r+1} \geqq r(r-1) \\ r.\lambda_0 + (r-1).\lambda_1 + \ldots 1.\lambda_{r-1} \geqq r(r-1) \end{array}\right\} (r = 2, 3, \ldots, n-1).$$

Für $r = 2$ sagt dieser Satz, dass die Discriminante in jeder der beiden Formen

$$a_n \varphi_0 + a_{n-1}^2 \varphi_1 \quad \text{und} \quad a_0 \psi_0 + a_1^2 \psi_1$$

sich darstellt, wo $\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1$ ganze Functionen der Coëfficienten bedeuten. Dies ist aber ein sehr bekannter Satz, den Joachimsthal zuerst aufgestellt hat.

Eine Verallgemeinerung dieses Joachimsthal'schen Satzes hat Salmon ohne Beweis (Modern Algebra, sec. ed., p. 87, Fussnote) mitgetheilt, welche dahin geht, dass, wenn a_0 durch z^r, a_1 durch z^{r-1}, $\ldots a_{r-1}$ durch z theilbar ist, die Discriminante durch $z^{r(r-1)}$ theilbar wird. Dies ist aber offenbar nur eine andere Form des hier aufgestellten Satzes. Es wäre nur zu bemerken, dass Salmon, wie er erwähnt, sein Resultat durch geometrische Überlegungen erlangt hat, während es hier als Ausdruck einer sehr einfachen algebraischen Bemerkung erscheint.

Man kann übrigens den Satz von Joachimsthal noch in anderer Richtung verallgemeinern:

Jede ganze symmetrische Function der Wurzeldifferenzen, die verschwindet, wenn r von den Wurzeln einander gleich gesetzt werden, besitzt die Form:

$$a_n \varphi_0 + a_{n-1} \varphi_1 + \ldots a_{n-r+2} \varphi_{r-2} + a_{n-r+1}^2 \varphi_{r-1},$$

wo $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_{r-1}$ ganze Functionen der Coëfficienten bedeuten, deren letzte nur von den Coëfficienten $a_0, a_1, \ldots a_{n-r}$ abhängt.

Ein Beweis für diese Verallgemeinerung geht durch Specialisirung aus Art. 5 hervor.

4. Wir verwerthen jetzt die Entwicklungen des Art. 1 zum Beweis des folgenden Satzes, der als Hilfssatz bei manchen Untersuchungen gute Dienste leistet:

Hilfssatz: Ist r der kleinste Index, den der Schlusscoëfficient für ein Glied von $\Phi = \Sigma_\lambda C_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n} a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n}$ besitzt, so ist auch r die kleinste Anzahl verschiedener Wurzeln, die als Factoren in einem Wurzelproduct vorkommen, das bei der Darstellung von Φ durch die Wurzeln als Posten resultirt. Ist überdies k die niedrigste Potenz, in welcher a_r als Schlusscoëfficient auftritt, so ist k auch die niedrigste Potenz, in welcher eine der r Wurzeln in einem Wurzelproducte mit nur r verschiedenen Wurzeln vorkommt.

Der erste Theil dieses Hilfssatzes ist eine Consequenz des in Art. 1 aufgestellten Lehrsatzes. Dass a_r Schlusscoëfficient in einem Gliede von Φ sein soll, heisst so viel, als dass für dieses Glied

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} = \ldots = \lambda_{r+1} = 0 \text{ und } \lambda_r > 0,$$

und dass r der kleinste Index eines Schlusscoëfficienten ist, heisst soviel, als dass für kein Glied von Φ

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} = \ldots = \lambda_{r+1} = \lambda_r = 0.$$

Aus diesen Voraussetzungen folgt die Gleichung

$$\min\,[(n-r).\lambda_n + (n-r-1)\lambda_{n-1} + \ldots 1.\lambda_{r+1}] = 0$$

und die Ungleichung

$$\min\,[(n-r+1).\lambda_n + (n-r)\lambda_{n-1} + \ldots 1.\lambda_r] > 0.$$

Dem Lehrsatz des Art. 1 zufolge sagt aber die Gleichung, dass in $\Phi = \Sigma_\tau [K_{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_n} \Sigma \alpha_1^{\tau_1} \alpha_2^{\tau_2} \ldots \alpha_n^{\tau_n}]$ die Wurzelproducte $\alpha_1^{\tau_1} \alpha_2^{\tau_2} \ldots \alpha_n^{\tau_n}$ niedrigsten Grades in $n-r$ Wurzeln in diesen Wurzeln vom Grade Null sind und die Ungleichung, dass die Wurzelproducte vom niedrigsten Grade in $n-r+1$ Wurzeln in diesen Wurzeln einen von Null verschiedenen Grad besitzen. Das ist aber nur eine andere Ausdrucksform für die als Folge der Voraussetzungen im ersten Theil des Hilfssatzes behauptete Eigenschaft.

Um auch den zweiten Theil dieses Hilfssatzes zu beweisen, machen wir davon Gebrauch, dass nach Art. 1 die Summe der Glieder von $\Phi = \Sigma_\tau [K_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n} \Sigma \alpha_1^{\tau_1} \alpha_2^{\tau_2} \ldots \alpha_n^{\tau_n}]$, die in den $n-r$ Wurzeln $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2} \ldots \alpha_n$ den niedrigsten Grad, d. i. im vorliegenden Fall den Grad Null, besitzen, angegeben werden kann. Der Ausdruck Ψ' des Art. 1, der aufzustellen ist, schreibt sich im vorliegenden Specialfall

$$\Sigma_\lambda C_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_r 0\, 0 \ldots 0} b_1^{\lambda_1} b_2^{\lambda_2} \ldots b_r^{\lambda_r},$$

weil die Summe in Ψ' nach Art. 1 über alle in Φ vorhandenen Werthecombinationen von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ auszudehnen ist, für welche der Ausdruck $(n-r).\lambda_n + (n-r-1)\lambda_{n-1} + \ldots 1.\lambda_{r+1}$ seinen kleinsten Werth hat, d. h. im vorliegenden Fall über alle Werthecombinationen, für welche $\lambda_n = \lambda_{n-1} = \ldots \lambda_{r+1} = 0$.

Nun besteht die Voraussetzung im zweiten Theil des Hilfssatzes darin, dass in den Werthecombinationen der λ, für welche $\lambda_n = \lambda_{n-1} = \ldots \lambda_{r+1} = 0$, k der kleinste Werth von λ_r ist. Es wird also dem Lehrsatz des Art. 1 zufolge durch k auch der niedrigste Grad gegeben sein, in dem eine der Wurzeln $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots \alpha_n$, deren elementare symmetrische Functionen die b sind, in einem Posten der durch die Wurzeln ausgedrückten Function $\Sigma_\lambda C_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_r 0\, 0 \ldots 0} b_1^{\lambda_1} b_2^{\lambda_2} \ldots b_r^{\lambda_r}$ vorkommt. Somit ist auch der zweite Theil des Hilfssatzes bewiesen.

Es wird wohl kaum nöthig sein besonders hervorzuheben, dass der eben bewiesene Hilfssatz als Beispiel dafür aufzufassen ist, dass aus dem Ausdruck einer ganzen Function Φ der Coëfficienten, neben den im Lehrsatz des Art. 1 direct erwähnten noch andere complicirtere Gradzahlen durch Vergleichung der Exponenten λ in den einzelnen Posten von Φ zu erlangen sind. Der Ausdruck Ψ' des Art. 1 ist nämlich eine ganze Function sowohl in den elementaren symmetrischen Functionen $b_1, b_2, \ldots b_r$ der r Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$, als auch in den elementaren symmetrischen Functionen $c_1, c_2, \ldots c_{n-r}$ der $n-r$ übrigen Wurzeln, und auf diese ganze Function kann man neuerdings die Betrachtungen des Art. 1 unmittelbar anwenden, da die Exponenten in den Gliedern von Ψ' durch jene in den Gliedern von Φ mitgegeben sind. So findet man z. B.: Der Grad der Glieder von Φ, die in r Wurzeln vom

höchsten Grade sind, in r' von diesen r Wurzeln ist durch den grössten Werth gegeben, den der Ausdruck $1.\lambda_1+2.\lambda_2+ + \ldots (r'-1)\lambda_{r'}+r'(\lambda_{r'}+\lambda_{r'+1}+\ldots+\lambda_n)$ für jene unter den Werthecombinationen der λ annimmt, für welche der Ausdruck $1.\lambda_1+2\lambda_2+\ldots(r-1).\lambda_{r-1}+r.(\lambda_r+\lambda_{r+1}+\ldots\lambda_n)$ den grössten Werth besitzt.

5. Nennt man ein Wurzelproduct nicht-unitär, wenn jede als Factor auftretende Wurzel in höherer als der ersten Potenz auftritt, so folgt aus dem Hilfssatz des letzten Artikels für $k=2$:

Damit in dem Ausdruck einer ganzen Function der Coëfficienten durch die Wurzeln, diejenigen als Posten auftretenden Wurzelproducte nicht-unitär sind, welche am wenigsten verschiedene Wurzeln als Factoren enthalten, ist hinreichend und erforderlich, dass diejenigen Glieder der Function mit einer höheren als ersten Potenz des Schlusscoëfficienten endigen, bei denen der Schlusscoëfficient den kleinsten Index hat.

Eine symmetrische Function heisst nicht-unitär (non-unitary), wenn in ihrem Ausdruck durch die Wurzeln ausschliesslich nicht-unitäre Wurzelproducte vorkommen. In einer nicht-unitären symmetrischen Function wird also jedes Glied, dessen Schlusscoëfficient den kleinsten Index hat, mit einer höheren als ersten Potenz desselben endigen. Allein dieselbe Eigenschaft wird auch schon gewissen Gruppen von Gliedern einer nicht-unitären symmetrischen Function zukommen, wie weiter unten deutlich wird.

Die nicht-unitären symmetrischen Functionen besitzen ein besonderes Interesse durch den innigen Zusammenhang, in dem sie nach einem schönen Satze von Mac Mahon zu den Seminvarianten,[1] d.i. den homogenen symmetrischen Functionen der Wurzeldifferenzen, stehen. Mac Mahon hat gezeigt,[2] dass

[1] Wir brauchen den Ausdruck »Seminvariante« statt »Semiinvariante« nach dem Vorgang von Prof. F. Meyer.

[2] Amer. Journ. of Math., VI, p. 131.

man eine Seminvariante bekommt, wenn man in einer isobaren nicht-unitären symmetrischen Function jeden Coëfficienten durch sein Product in einen gewissen numerischen Factor ersetzt und dass auch umgekehrt jede Seminvariante auf diese Weise zu erlangen ist. Daraus schliessen wir, dass in einer Seminvariante genau dieselben Glieder mit von Null verschiedenen Zahlencoëfficienten vorkommen wie in einer isobaren, nicht-unitären, symmetrischen Function. Wir können desshalb den Satz aussprechen:

Jedes Glied einer Seminvariante mit dem Schlusscoëfficienten von kleinstem Index endet mit einer höheren als ersten Potenz dieses Coëfficienten.

Der im Eingange dieses Artikels gemachten Bemerkung zufolge sagt dieser Satz, dass im Ausdrucke einer Seminvariante durch die Wurzeln die Wurzelproducte nicht-unitär sind, die am wenigsten verschiedene Wurzeln als Factoren enthalten.

Was wir über den Ausdruck einer Seminvariante durch die Coëfficienten gesagt haben, ist nur die erste aus einer Reihe von analogen Bemerkungen. Wir haben z. B. den Satz:

Greift man unter den Gliedern der mit Hilfe von $a_0 = 1$ homogen gemachten Seminvariante

$$\Phi = \Sigma C_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n} a_0^{\lambda_0} a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n}$$

alle jene heraus, bei welchen $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1}$ bestimmte, aber solche Werthe haben, für welche der Ausdruck $r\lambda_0 + (r-1).\lambda_1 + \ldots 1.\lambda_{r-1}$ seinen kleinsten Werth annimmt, so hat man eine Gruppe von Gliedern, so beschaffen, dass jene unter den Gliedern der Gruppe, bei denen der Schlusscoëfficient den kleinsten Index hat, wenn dieser $> r$ ist, mit einer höheren als der ersten Potenz des Schlusscoëfficienten endigen.

Wir könnten diesen Satz durch Nachweis des gleichlautenden für nicht-unitäre symmetrische Functionen beweisen, allein wir unterlassen es, weil nach dem, was wir im nächsten Artikel über die Structur der Seminvarianten entwickeln, dieser Satz als Consequenz seines einfachsten Specialfalles $r = 0$ erscheint, welcher in diesem Artikel bewiesen wurde.

6. Eine Seminvariante kann definirt werden als ganze homogene symmetrische Function der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$, welche bei Anwendung des Processes

$$\delta = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial}{\partial\alpha_2} + \cdots \frac{\partial}{\partial\alpha_r}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial\alpha_{r+1}} + \frac{\partial}{\partial\alpha_{r+2}} + \cdots \frac{\partial}{\partial\alpha_n}\right) = \delta_b + \delta_c$$

das Resultat Null ergibt.

Schon in unserer Bezeichnung erscheint der Differentiationsprocess δ in zwei δ_b und δ_c zerlegt, wobei δ_b den ersten Klammerausdruck und δ_c den zweiten bedeuten soll. Der Process δ_b vermindert, sofern er ein von Null verschiedenes Resultat liefert, auf ein Wurzelproduct angewandt, dessen Grad in den Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ um eine Einheit und lässt den Grad in den Wurzeln $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots \alpha_n$ ungeändert, während der Process δ_c, wenn er nicht Null liefert, umgekehrt den Grad in den Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ ungeändert lässt und jenen in den Wurzeln $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots \alpha_n$ um eine Einheit verringert.

Ist jetzt Φ eine Summe von mit Zahlenfactoren versehenen Wurzelproducten und Ψ' die Summe von denjenigen unter ihnen, welche in den Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ den höchsten Grad besitzen, so wird durch $\delta_c\Psi'$ die Summe der Terme in dem Ausdruck

$$\delta\Phi = \delta_b\Phi + \delta_c\Phi$$

gegeben sein, die einen höheren Grad in den Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ besitzen als die übrigen Terme desselben Ausdruckes. Es wird desshalb, wenn $\delta\Phi = 0$ vorausgesetzt wird, die Richtigkeit der Gleichung $\delta_c\Psi' = 0$ zu schliessen sein.

Es sei jetzt eine Seminvariante als Function der Coëfficienten gegeben durch den Ausdruck

$$\Phi = \Sigma_\lambda C_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n} a_0^{\lambda_0} a_1^{\lambda_1} \ldots a_n^{\lambda_n},$$

der durch $a_0 = 1$ homogen gemacht ist, dann wird nach Art. 1

$$\Psi' = \Sigma C_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n} a_0^{\lambda_0} b_1^{\lambda_1} b_2^{\lambda_2} \ldots b_{r-1}^{\lambda_{r-1}} b_r^{\lambda_r+\lambda_{r+1}\ldots\lambda_n} . c_1^{\lambda_{r+1}} c_2^{\lambda_{r+2}} \ldots c_{n-r}^{\lambda_n},$$

wo die b die elementaren symmetrischen Functionen von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$, die c jene von $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots \alpha_n$ bedeuten und die Summe über diejenigen Werthecombinationen der λ zu erstrecken

ist, für welche $1.\lambda_1+2.\lambda_2+\ldots(r-1)\lambda_{r-1}+r(\lambda_r+\lambda_{r+1}+\ldots\lambda_n)$ seinen grössten Werth annimmt.

Ist g der Grad von Φ, so hat man für jedes Werthesystem der λ

$$\lambda_0+\lambda_1+\ldots\lambda_n=g$$

und es ist

$$1.\lambda_1+2.\lambda_2+\ldots(r-1).\lambda_{r-1}+r(\lambda_r+\lambda_{r+1}+\ldots\lambda_n)=$$
$$=rg-[r.\lambda_0+(r-1).\lambda_1+\ldots 1.\lambda_{r-1}],$$

so dass wir auch sagen können, dass die Summe in dem Ausdruck von Ψ' sich über jene Werthecombinationen der λ erstreckt, für welche

$$r.\lambda_0+(r-1).\lambda_1+\ldots 1.\lambda_{r-1}$$

seinen kleinsten Werth annimmt.

Nach Obigem ist nun

$$\delta_c\Psi'=\Sigma[C_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}a_0^{\lambda_0}b_1^{\lambda_1}\ldots b_{r-1}^{\lambda_{r-1}}b_1^{\lambda_r+\lambda_{r+1}+\ldots\lambda_n}.$$
$$.\delta_c(c_1^{\lambda_{r+1}}c_2^{\lambda_{r+2}}\ldots c_{n-r}^{\lambda_n})=0.$$

Das Verschwinden dieser ganzen homogenen Function der Grössen $a_0, b_1, b_2,\ldots b_r$ zieht aber weiterhin das Verschwinden ihrer Coëfficienten nach sich, da die Grössen $b_1, b_2,\ldots b_r$ ihrer Bedeutung zufolge von einander völlig unabhängig sind, d. h. es ist

$$\delta_c\Sigma C_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}c_1^{\lambda_{r+1}}c_2^{\lambda_{r+2}}\ldots c_{n-r}^{\lambda_n}=0,$$

wo die Summe sich über jene Werthecombinationen erstreckt, welche durch irgend eine bestimmte Wahl von $\lambda_1, \lambda_2,\ldots\lambda_r$ resultiren, bei der $r\lambda_0+(r-1)\lambda_1+\ldots 1.\lambda_{r-1}$ seinen kleinsten Werth hat.

Die ganze Function $\Sigma C_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}c_1^{\lambda_{r+1}}c_2^{\lambda_{r+2}}\ldots c_n^{\lambda_n}$ der elementaren symmetrischen Functionen $c_1, c_2,\ldots c_{n-r}$ der Wurzeln $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2},\ldots\alpha_n$, von der eben nachgewiesen wurde, dass sie bei Anwendung des Processes

$$\delta_c=\frac{\partial}{\partial\alpha_{r+1}}+\frac{\partial}{\partial\alpha_{r+2}}+\ldots\frac{\partial}{\partial\alpha_n}$$

verschwindet, ist eine Seminvariante der Form

$$x_1^{n-r}-c_1x_1^{n-r-1}x_2+c_2x_1^{n-r-2}x_2^2-\ldots(-1)^{n-r}c_{n-r}x_2^{n-r},$$

denn sie ist auch isobar, weil

$$1\,.\,\lambda_{r+1}+2\,.\,\lambda_{r+2}+\ldots(n-r)\,.\,\lambda_n=$$
$$=(1\,.\,\lambda_1+2\,.\,\lambda_2+\ldots n\lambda_n)-(1\,.\,\lambda_1+2\,.\,\lambda_2+\ldots(r-1)\lambda_{r-1})$$
$$+r(\lambda_0+\lambda_1+\ldots\lambda_{r-1})-rg$$

Das gefundene Resultat kann man in der Gestalt des folgenden Satzes festlegen:

Es sei eine Seminvariante

$$\Phi=\Sigma C_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}a_0^{\lambda_0}a_1^{\lambda_1}\ldots a_n^{\lambda_n}$$

der binären Form

$$a_0x_1^n-a_1x_1^{n-1}x_2+a_2x_1^{n-2}x_2^2-\ldots(-1)^n a_n x_2^n$$

vorgelegt. Wählt man irgend ein System von Werthen von $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_{r-1}$, für welches

$$r\,.\,\lambda_0+(r-1)\,.\,\lambda_1+\ldots 1\,.\,\lambda_{r-1} \qquad (r=1,2,\ldots n-1)$$

seinen kleinsten Werth annimmt, und hebt aus allen Gliedern von Φ, in denen $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_{r-1}$ die gewählten Werthe haben, den Factor

$$a_0^{\lambda_0}a_1^{\lambda_1}\ldots a_{r-1}^{\lambda_{r-1}}$$

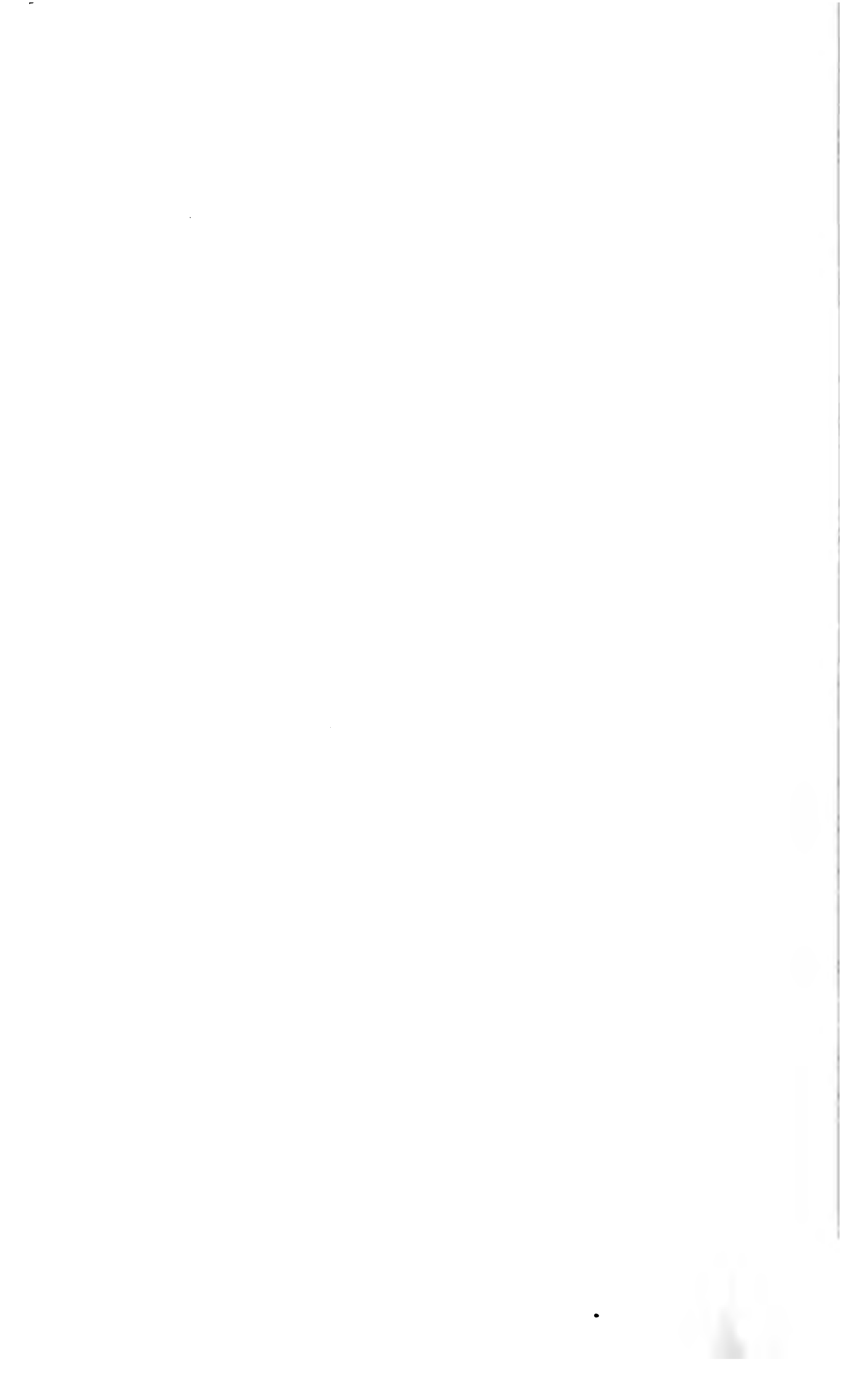
heraus, so bleibt eine Seminvariante der Form

$$a_r x_1^{n-r}-a_{r+1}x_1^{n-r-1}x_2+a_{r+2}x_1^{n-r-2}x_2^2-\ldots(-1)^{n-r}a_n x_2^{n-r}$$

in der Klammer.

Dieser Satz, welcher lehrt, wie aus einer hingeschriebenen Seminvariante einer binären Form unmittelbar Seminvarianten von Formen niedrigerer Ordnungen zu entnehmen sind, kann natürlich auf die so abgeleiteten Seminvarianten neuerdings angewandt werden.

Bisher ist nur der einfachste Fall dieses Satzes (nämlich $r=1$) aufgestellt worden.





SITZUNGSBERICHTE

DER

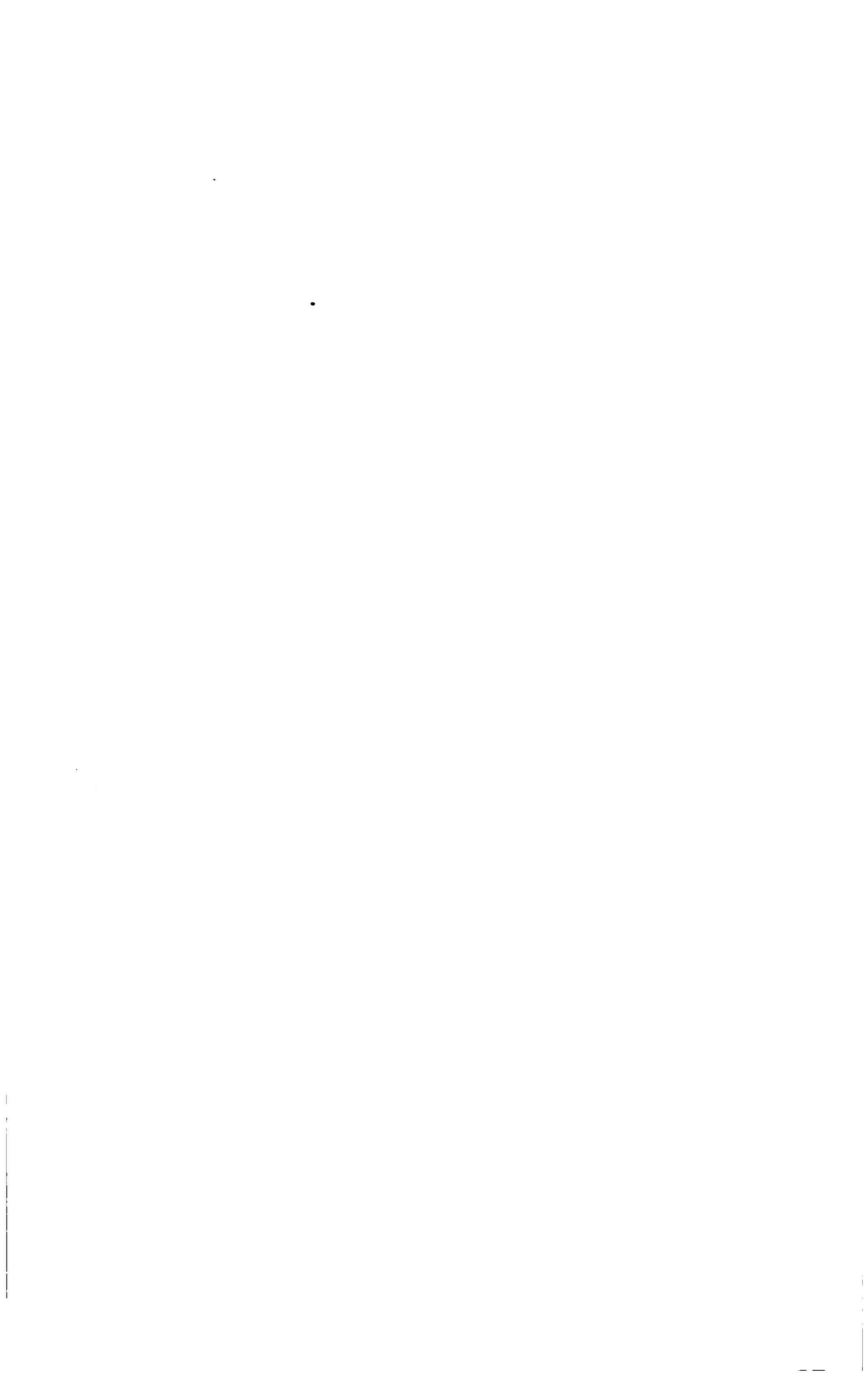
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CII. BAND. III. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



VII. SITZUNG VOM 2. MÄRZ 1893.

Herr Intendant Hofrath Ritter v. Hauer führt den Vorsitz.

Der Secretär legt das erschienene Heft VIII—X (October bis December 1892) des 101. Bandes der Abtheilung III der Sitzungsberichte und das Heft II (Februar 1893) des 14. Bandes der Monatshefte für Chemie vor.

Ferner legt der Secretär Dankschreiben vor, und zwar von Herrn Med. Dr. Eugen v. Halácsy in Wien für die ihm zur Durchforschung der Flora Thessaliens bewilligte Reisesubvention und von Herrn J. Dörfler in Wien für einen Subventionsbeitrag zu einer botanischen Forschungsreise nach Albanien.

Herr Prof. Dr. Guido Goldschmiedt übersendet folgende drei Arbeiten aus dem chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag:

1. »Über das dimoleculare Propionylcyanid und über die daraus dargestellte Äthyltartronsäure«, von dem Privatdocenten Dr. Karl Brunner, k. k. Realschulprofessor.
2. »Über einige neue Derivate des Isochinolins«, von stud. chem. Paul Fortner.
3. »Zur Kenntniss des Tetramethoxyldiphtalyls«, von stud. chem. Richard Löwy.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Lang überreicht eine Abhandlung des Prof. Dr. J. Puluj in Prag: »Über die Wirkung gleichgerichteter sinusartiger elektromotorischer Kräfte in einem Leiter mit Selbstinduction.« (II. Mittheilung.)

Ferner überreicht Herr Hofrath v. Lang eine Abhandlung von Dr. Gustav Jäger in Wien: »Über die Theorie der inneren Reibung der Flüssigkeiten«.

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht zwei in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeiten:

1. »Über eine neue Synthese des Isochinolins«, von Dr. C. Pomeranz.
2. »Eine Bestimmungsmethode für Harnsäure und Beobachtungen an Harnsäurelösungen«, von Ignaz Kreidl.

Herr Dr. W. Meyerhoffer überreicht eine Arbeit aus dem II. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien: »Über eine Regel bezüglich der Zahl der gesättigten Lösungen bei Doppelsalzsystemen«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Schnellinger J., Fünfstellige Tafeln für die Zehner-Logarithmen der natürlichen und trigonometrischen Zahlen. Wien, 1892; 8°.

See T. J. J., Die Entwicklung der Doppelstern-Systeme. Berlin, 1893; 4°.

Über die Wirkung gleichgerichteter sinusartiger elektromotorischer Kräfte in einem Leiter mit Selbstinduction

(II. Mittheilung)

von

Prof. **J. Puluj.**

(Mit 6 Textfiguren.)

In der ersten Abhandlung[1] wurde als Ergebniss einer theoretischen sowohl als experimentellen Untersuchung mitgetheilt, dass die mittlere Stromstärke von der Selbstinduction des Stromkreises unabhängig ist, wenn die elektromotorische Kraft dem reinen Sinusgesetze folgt und in der neutralen Ebene des magnetischen Feldes momentan commutirt wird. Bei der theoretischen Untersuchung liess ich mich von dem Gedanken leiten, für die sinusartige elektromotorische Kraft einen einheitlichen, für jeden Werth der Zeit t geltenden, analytischen Ausdruck zu finden.

Die Anwendung der Fourier'schen Reihe ergab für die besagte elektromotorische Kraft den Ausdruck:

$$E = \frac{2}{\pi} E_0 \left[1 - \frac{2}{1\cdot 3} \cos\frac{4\pi}{T} t - \frac{2}{3\cdot 5} \cos\frac{8\pi}{T} t - \ldots\right],$$

welcher in Verbindung mit der Differentialgleichung

$$Ri + L\frac{di}{dt} = E$$

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. 100, S. 767, Mai 1891. — Elektrotechnische Zeitschrift, S. 498.

für die momentane Stromstärke und für die stationäre Strömung eine stark convergente unendliche Reihe liefert

$$i = \frac{2}{\pi}\left[\frac{E_0}{R} - \frac{2}{1\cdot 3}\,\frac{E_0 \cos\left(\frac{4\pi}{T}t - \psi_1\right)}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{4\pi L}{T}\right)^2}} - \frac{2}{3\cdot 5}\,\frac{E_0 \cos\left(\frac{8\pi}{T}t - \psi_2\right)}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{8\pi L}{T}\right)^2}} - \ldots\right].$$

Die Phasenverschiebungen $\psi_1 \psi_2 \ldots$ sind durch die Gleichung

$$\tan \psi_k = \frac{4k\pi L}{RT}$$

bestimmt, in welcher L den Selbstinductionscoëfficienten in Erdquadranten, R den Ohm'schen Widerstand und $\frac{1}{2}T$ die halbe Periode bedeutet, in welcher die elektromotorische Kraft nacheinander den Werth Null erreicht. Die mittlere Stromstärke ist von der Selbstinduction unabhängig und gleich

$$M(i) = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} i\,dt = \frac{2}{\pi}\,\frac{E_0}{R}.$$

Herr Lohnstein[1] gelangt zu demselben theoretischen Resultate, jedoch auf einem anderen Wege; er »beschreibt« mit Hilfe der mathematischen Symbole den physikalischen Vorgang für jede Halbperiode und setzt

$$Ri + L\frac{di}{dt} = +E_0 \sin\frac{2\pi}{T}t \qquad 1)$$

$$Ri + L\frac{di}{dt} = -E_0 \sin\frac{2\pi}{T}t \qquad 2)$$

Es wird zuerst die Gleichung 1) mit der Anfangsbedingung $t = 0$, $i = 0$ integrirt. Es ergibt sich i als Function von i, welche

[1] Elektrotechnische Zeitschrift, 1892, Heft 12.

für Werthe $t = 0$ bis $t = \frac{T}{2}$ Geltung hat und für $t = \frac{T}{2}$ den Strom $i\left(\frac{T}{2}\right)$ liefert. Alsdann wird die Gleichung 2) angewendet mit der Bedingung, dass für $t = \frac{T}{2}$ die Stromstärke den bereits bestimmten Werth $i\left(\frac{T}{2}\right)$ erreichen muss. Dieser Ausdruck liefert wieder für $t = T$ den Stromwerth $i(T)$. Sodann wird wieder die Gleichung 1) mit der Anfangsbedingung $i = i(T)$ integrirt u. s. w. Durch wiederholte Anwendung der Gleichungen 1) und 2) wird auf die angegebene Weise für die $2n+1^{te}$ Halbperiode ein Ausdruck abgeleitet, welcher nach Einsetzung von $t = nT + \tau$ für $n = \infty$ und für endliche Werthe von L einen endlichen Ausdruck für die momentane Stromstärke liefert

$$i = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{2\pi L}{T}\right)^2}} \left[\sin\left(\frac{2\pi\tau}{T} - \psi\right) + 2\sin\psi \cdot \frac{e^{-\frac{RT}{L}}}{1 - e^{-\frac{RT}{2L}}}\right],$$

in welchem Ausdrucke ψ die Phasenverschiebung bedeutet und bestimmt ist durch die Formel

$$\tan\psi = \frac{2\pi L}{RT}.$$

Der Ausdruck für i gibt den Stromverlauf innerhalb jeder Halbperiode unter der Voraussetzung des reinen Sinusgesetzes und der stationären Strömung, die Zeit τ nimmt also nur Werthe von 0 bis $\frac{T}{2}$ an.

Mit Zugrundelegung des vorletzten Ausdruckes ergab die Rechnung für die mittlere Stromstärke übereinstimmend den Werth

$$M(i) = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} i\,dt = \frac{2}{\pi}\,\frac{E_0}{R}.$$

Herr Lohnstein suchte dieses durch seine Rechnung bestätigte Resultat noch auf experimentellem Wege zu prüfen und verwendete zu diesem Zwecke eine kleine, mit zweitheiligem Commutator versehene Magnetinductionsmaschine,

welche bei circa 30 Umdrehungen pro Secunde eine mittlere elektromotorische Kraft von 0·04 Volt lieferte. Die Selbstinduction des Stromkreises wurde mit Hilfe eines kleinen Schlitteninductionsapparates variirt, dessen Rollen hinter einander geschaltet waren. Herr Lohnstein beobachtete jedoch in allen Fällen eine Abhängigkeit der mittleren Stromstärke von dem Selbstinductionscoëfficienten in dem Sinne, dass eine Verminderung desselben eine Vergrösserung von $M(i)$ herbeiführte. Wurde der Widerstand des Kreises durch inductionsfreie Widerstände vermehrt, so war die durch Variirung der Selbstinduction herbeigeführte relative Änderung der mittleren Stromstärke geringer. Nach Ansicht des Herrn Lohnstein soll der Grund des beobachteten Einflusses darin liegen, dass die

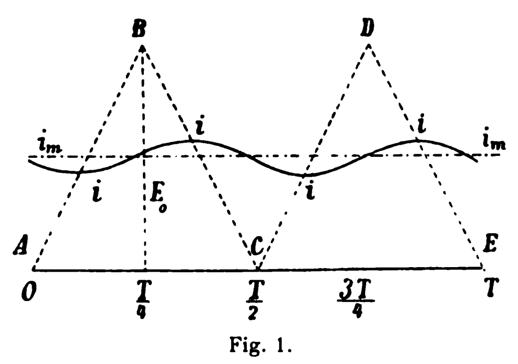


Fig. 1.

in der Maschine erzeugte elektromotorische Kraft der Induction von dem reinen Sinusgesetze ziemlich abwich.[1]

Im Nachfolgenden soll an einem speciellen Beispiele gezeigt werden, dass die Ansicht des Herrn Lohnstein nicht richtig sein kann, im Gegentheil, dass die mittlere Stromstärke von der Selbstinduction auch dann unabhängig ist, wenn die gleichgerichtete elektromotorische Kraft nicht nach dem reinen Sinus-

[1] Herr Lohnstein hat diese Ansicht im 23. Hefte der Elektrotechnischen Zeitschrift, 1892, berichtigt und sucht die beobachteten Abweichungen von dem theoretisch erwiesenen Gesetz durch die Einwirkung des Ankerstromes auf das magnetische Feld zu erklären. Nichtsdestoweniger dürften die folgenden theoretischen Betrachtungen, die schon vor der Berichtigung des Herrn Lohnstein im Mai 1892 niedergeschrieben waren, deren genaue Durchsicht aber wegen Zeitmangel bis jetzt verschoben werden musste, von einigem Interesse sein.

gesetze variirt,[1] sondern von Viertelperiode zu Viertelperiode linear zwischen Null und einem Maximalwerthe E_0 abwechselnd wächst und fällt, wie in Fig. 1 durch die Zickzacklinie *ABCDE* dargestellt ist.

Es ist nicht schwer eine solche elektromotorische Kraft mit Hilfe der Fourier'schen Reihe zu bestimmen, und man findet für dieselbe

$$E = \frac{E_0}{2}\left[1 - \frac{8}{\pi^2}\left(\cos\frac{4\pi}{T}t + \frac{1}{3^2}\cos 3\frac{4\pi}{T}t + \frac{1}{5^2}\cos 5\frac{4\pi}{T}t + \ldots\right)\right] \qquad 3)$$

Diese unendliche Reihe in Verbindung mit der Differentialgleichung

$$Ri + L\frac{di}{dt} = E$$

liefert in derselben Weise, wie in der ersten Abhandlung dargelegt wurde, für die momentane Stromstärke und bei stationärer Elektricitätsströmung den Ausdruck

$$i = \frac{1}{2}\frac{E_0}{R} - \frac{4}{\pi^2}\frac{E_0\cos\left(\frac{4\pi}{T}t - \psi_1\right)}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{4\pi L}{T}\right)^2}} - \frac{1}{3^2}\frac{4}{\pi^2}\frac{E_0\cos\left(3\frac{4\pi}{T}t - \psi_3\right)}{\sqrt{R^2 + \left(3\frac{4\pi L}{T}\right)^2}} - \ldots, \qquad 4)$$

in welcher Reihe die Phasenverschiebungen $\psi_1 \psi_3 \psi_5 \ldots$ durch die Beziehung

$$\tan\psi_{2k+1} = (2k+1)\frac{4\pi L}{RT}$$

bestimmt sind.

Für die mittlere Stromstärke ergibt sich, da allgemein

$$\int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left[(2k+1)\frac{4\pi}{T}t - \psi_{2k+1}\right]dt = 0$$

---

[1] In einer früheren Abhandlung wurde von mir die Unabhängigkeit der mittleren elektromotorischen Kraft von der Selbstinduction auch für den Fall nachgewiesen, dass $E = E_0 \sin^2\frac{2\pi}{T}L$ ist. Elektrotechnische Zeitschrift, 1891, Heft 32.

ist, der einfache Ausdruck

$$M(i) = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} i\,dt = \frac{1}{2}\,\frac{E_0}{R}. \tag{5}$$

Die mittlere Stromstärke ist also von der Selbstinduction unabhängig, wiewohl die untersuchte elektromotorische Kraft dem reinen Sinusgesetze nicht folgt, sondern in der in Fig. 1 dargestellten Weise sich ändert.

Im Nachfolgenden ist noch die Berechnung der mittleren Stromstärke mitgetheilt, wie sich dieselbe im angenommenen Falle unter Anwendung des Lohnstein'schen Verfahrens ergeben würde.

Die elektromotorische Kraft ist für die Zeit

von $t = nT$ bis $nT + \frac{T}{4}$ $\quad E = -4E_0\left(n - \frac{t}{T}\right)$

» $t = nT + \frac{T}{4}$ bis $nT + \frac{T}{2}$ $\quad E = +4E_0\left(\frac{2n+1}{2} - \frac{t}{T}\right)$

» $t = nT + \frac{T}{2}$ bis $nT + \frac{3}{4}T$ $\quad E = -4E_0\left(\frac{2n+1}{2} - \frac{t}{T}\right)$

» $t = nT + \frac{3}{4}T$ bis $nT + T$ $\quad E = +4E_0\left(n + 1 - \frac{t}{T}\right)$.

Die elektromotorische Kraft nimmt somit für die erste, zweite, dritte, vierte Viertelperiode die Werthe an

$$E = 4E_0\frac{t}{T},\; 4E_0\left(\frac{1}{2} - \frac{t}{T}\right),\; -4E_0\left(\frac{1}{2} - \frac{t}{T}\right),\; +4E_0\left(1 - \frac{t}{T}\right).$$

Das allgemeine Integral der Gleichung

$$Ri + L\frac{di}{dt} = E$$

ist bekanntlich

$$i = \frac{e^{-\frac{R}{L}t}}{L}\left[\int E e^{\frac{R}{L}t}\,dt + C\right]. \tag{6}$$

Durch Einsetzung von $E = \frac{4 E_0}{T} t$ ergibt sich zunächst unter der Bedingung, dass für $t = 0$, $i = 0$ ist,

$$i = \frac{4 E_0}{R T} t - \frac{4 E_0 L}{R^2 T}\left(1 - e^{-\frac{R}{L} t}\right)$$

und zwar mit den Giltigkeitsgrenzen von $t = 0$ bis $t = \frac{T}{4}$. Für die letzte Grenze ist

$$i\left(\frac{T}{4}\right) = \frac{E_0}{R} - \frac{4 E_0 L}{R^2 T}\left(1 - e^{-\frac{R T}{4 L}}\right). \qquad 7)$$

Für die zweite Viertelperiode ergibt sich nach Einsetzung des Werthes

$$E = 4 E_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{T}\right)$$

in das allgemeine Integral 6) und unter Berücksichtigung der Bedingung 7)

$$i = \frac{2 E_0}{R} - \frac{4 E_0}{R T} t + \frac{4 E_0 L}{R^2 T}\left[1 + e^{-\frac{R}{L} t} - 2 e^{\frac{R}{L}\left(\frac{T}{4} - t\right)}\right]$$

mit den Giltigkeitsgrenzen $t = \frac{T}{4}$ und $t = \frac{T}{2}$ und der weiteren Grenzbedingung

$$i\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{4 E_0 L}{R^2 T}\left(1 + e^{-\frac{R T}{2 L}} - 2 e^{-\frac{R T}{4 L}}\right). \qquad 8)$$

Ähnlich findet man von $t = \frac{T}{2}$ bis $t = \frac{3}{4} T$

$$i = -\frac{2 E_0}{R} + \frac{4 E_0}{R T} t - \frac{4 E_0 L}{R^2 T}\left[1 - e^{-\frac{R}{L} t} + 2 e^{\frac{R}{L}\left(\frac{T}{4} - t\right)} - 2 e^{\frac{R}{L}\left(\frac{2T}{4} - t\right)}\right]$$

und

$$i\left(\frac{3 T}{4}\right) = \frac{E_0}{R} - \frac{4 E_0 L}{R^2 T}\left[1 - e^{-\frac{3 R T}{4 L}} + 2 e^{-\frac{2 R T}{4 L}} - 2 e^{-\frac{R T}{4 L}}\right],$$

allgemein von $t = nT$ bis $t = nT + \frac{T}{4}$

$$i_1 = -\frac{4E_0}{R}\left(n - \frac{t}{T}\right) - \frac{4E_0L}{R^2T}\left[1 - e^{-\frac{Rt}{L}} + 2e^{\frac{R}{L}\left(\frac{T}{4}-t\right)} - \dots - 2e^{\frac{R}{L}\left(\frac{4nT}{4}-t\right)}\right], \qquad 9)$$

und von $t = nT + \frac{T}{4}$ bis $t = nT + \frac{T}{2}$,

$$i_2 = \frac{4E_0}{R}\left(\frac{2n+1}{2} - \frac{t}{T}\right) + \frac{4E_0L}{R^2T}\left[1 + e^{-\frac{Rt}{L}} - 2e^{\frac{R}{L}\left(\frac{T}{4}-t\right)} + \dots - 2e^{\frac{R}{L}\left(\frac{4n+1}{4}T-t\right)}\right]. \qquad 10)$$

Wird mit τ die während einer Viertelperiode veränderliche Zeit bezeichnet, so ergibt sich nach Einsetzung von $t = nT + \tau$ in die Gleichung 9 zunächst

$$i_1 = \frac{4E_0\tau}{RT} - \frac{4E_0L}{R^2T}\left[1 - 2e^{-\frac{R\tau}{L}}\left(1 - e^{-\frac{RT}{4L}} + e^{-\frac{2RT}{4L}} - \dots + \frac{1}{2}e^{-\frac{4nRT}{4L}}\right)\right]$$

und für $n = \infty$, also für die stationäre Elektricitätsströmung

$$i_1 = \frac{4E_0\tau}{RT} - \frac{4E_0L}{R^2T}\left[1 - \frac{2e^{-\frac{R\tau}{L}}}{1 + e^{-\frac{RT}{4L}}}\right]. \qquad 11)$$

Nach Einsetzung von $t = nT + \tau$ in die Gleichung 10) erhält man in derselben Weise

$$i_2 = \frac{4E_0}{RT}\left(\frac{T}{2} - \tau\right) + \frac{4E_0L}{R^2T}\left[1 - \frac{2e^{-\frac{R}{L}\left(\tau - \frac{T}{4}\right)}}{1 + e^{-\frac{RT}{4L}}}\right]. \qquad 12)$$

Für $L = \infty$ ist $i_1 = i_2 = \frac{1}{2}\frac{E_0}{R}$ und ferner für $t = \frac{T}{4}$

$$i_1\left(\frac{T}{4}\right)=i_2\left(\frac{T}{4}\right)=\frac{E_0}{R}-\frac{4E_0L}{R^2T}\left[1-\frac{2e^{-\frac{RT}{4L}}}{1+e^{-\frac{RT}{4L}}}\right].$$

Zum Schluss ergibt sich mit Berücksichtigung der Gleichungen 11 und 12 als mittlere Stromstärke bei stationärer Strömung

$$M(i)=\frac{2}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{4}} i_1 d\tau+\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} i_2 d\tau\right]=\frac{1}{2}\frac{E_0}{R}$$

ein Werth, den auch die Methode der unendlichen Reihe geliefert hat.

Herr Lohnstein sagt von seinem Verfahren, dasselbe sei zwar anscheinend complicirter, liefere aber schliesslich einen einfachen endlichen Ausdruck für i, während aus der von mir angegebenen Cosinusreihe weder auf graphischem, noch auf rechnerischem Wege der Stromverlauf leicht ersichtlich sei.[1]

Dem gegenüber sei es bemerkt, dass die Reihen für die momentane elektromotorische Kraft und Stromstärke schon bei mässiger Selbstinduction stark convergiren und wenige Anfangsglieder der Reihe genügen, um für jede Zeit t die entsprechenden Grössen zu berechnen und dieselben graphisch darzustellen, wie das im Nachfolgenden des Vergleiches halber unter der Annahme geschehen ist, dass $E_0 = 30$ V., der Ohm'sche Widerstand $R = 1\Omega$ und der scheinbare Widerstand $R_1 = 5\Omega$ ist. In diesem Falle genügen schon drei Cosinusglieder. Es ist

$$\frac{4\pi L}{T}=4\cdot 899, \quad \tan\psi_{2k+1}=4\cdot 899(2k+1)$$

und

$$i=\frac{E_0}{2}\left[1-0\cdot 162114\cos\left(\frac{4\pi t}{T}-78^\circ 27' 47''\right)\right.$$
$$-0\cdot 006114\cos\left(3\frac{4\pi t}{T}-86^\circ\ 6' 27''\right)$$
$$\left.-0\cdot 001323\cos\left(5\frac{4\pi t}{T}-87^\circ 39' 44''\right)\right].$$

[1] Elektrotechnische Zeitschrift, 1892, Heft 12, Seite 151.

Nach Herrn Lohnstein wäre die Stromstärke dagegen zu berechnen nach der Formel:

$$i_1 = -46 \cdot 663 + 120 \frac{t}{T} + 61 \cdot 167 e^{-2 \cdot 57164 \frac{t}{T}}$$

von $t = 0$ bis $t = \frac{T}{4}$ u. s. f. und nach

$$i_2 = 106 \cdot 663 - 120 \frac{t}{T} - 116 \cdot 339 e^{-2 \cdot 57164 \frac{t}{T}}$$

von $t = \frac{T}{4}$ bis $t = \frac{T}{2}$ u. s. w.

In der nachfolgenden Tabelle sind die berechneten Werthe der Stromstärke für verschiedene Zeiten zusammengestellt.

t	Nach Lohnstein	Nach Puluj	
		a	b
0	$i_1 = 14 \cdot 51$ A.	14·51 A.	14·72 A.
$\frac{1}{12} T$	$i_1 = 12 \cdot 71$	12·71	12·72
$\frac{2}{12} T$	$i_1 = 13 \cdot 18$	13·19	13·17
$\frac{3}{12} T$	$i_1 = 15 \cdot 50$	15·49	15·49
	$i_2 = 15 \cdot 50$	—	—
$\frac{4}{12} T$	$i_2 = 17 \cdot 30$	17·29	17·30
$\frac{5}{12} T$	$i_2 = 16 \cdot 82$	16·82	16·83
$\frac{6}{12} T$	$i_2 = 14 \cdot 51$	14·51	14·72

In der Spalte *a* sind die Werthe mit Hilfe von drei Cosinusgliedern, in *b* mit Vernachlässigung des letzten Cosinusgliedes der Reihe, berechnet. Aus dieser Zusammenstellung ist zu ersehen, dass die endliche Reihe selbst mit nur zwei Cosinus-

gliedern Werthe für die Stromstärke liefert, welche mit den nach Herrn Lohnstein berechneten Werthen sehr gut übereinstimmen.

In Fig. 2 ist die Stromcurve NN auf Grund der in Spalte *a* stehenden Werthe graphisch dargestellt, wobei $T = 60\,mm$ und $E_0 = 30\,mm$ angenommen wurde. Die Gerade NN repräsentirt die mittlere Stromstärke. Zum Vergleich wurde unter gleichen Verhältnissen die momentane Stromstärke für den Fall berechnet, dass die elektromotorische Kraft dem Sinusgesetze folgt. In diesem Falle genügen zur Berechnung drei Anfangsglieder der unendlichen Reihe

$$i = \frac{2}{\pi} E_0 \left[1 - 0{\cdot}133333 \cos\left(\frac{4\pi t}{T} - 78^\circ 27' 47''\right) - 0{\cdot}01358 \cos\left(2\frac{4\pi t}{T} - 84^\circ 10' 21''\right)\right].$$

Fig. 2.

In Fig. 2 ist auch die sinusartige elektromotorische Kraft durch die Curve $ABCDEF$, die momentane Stromstärke durch die wellenförmige Curve MM und die mittlere Stromstärke durch die gerade Linie MM dargestellt.

Es entsteht nun die Frage, worin die Ursache der Nichtübereinstimmung der beobachteten und berechneten mittleren Stromstärke zu suchen ist, welche die Versuche des Herrn Lohnstein im Gegensatz zu meinem Versuchsresultate ergeben haben.

Sowohl den theoretischen Betrachtungen des Herrn Lohnstein, als denen, welche in meiner Abhandlung dargelegt wurden, liegt die Voraussetzung zu Grunde, dass der Strom in

der neutralen Ebene des magnetischen Feldes momentan commutirt wird. Eine Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung wird daher nur dann zu erwarten sein, wenn die zur Commutation des Stromes erforderliche Zeit unendlich klein, praktisch genommen, gleich Null ist. Eine solche Commutation ist wenigstens für schwache Ströme dann möglich, wenn die Contactflächen der schleifenden Bürsten ebenso breit sind wie die Isolation zwischen den Collectorsegmenten. Das war der Fall bei dem von mir verwendeten Erdinductor, dessen Commutator in Fig. 3 in einem Drittel natürlicher Grösse dargestellt ist. Derselbe besteht aus zwei kreisförmigen Segmenten aus

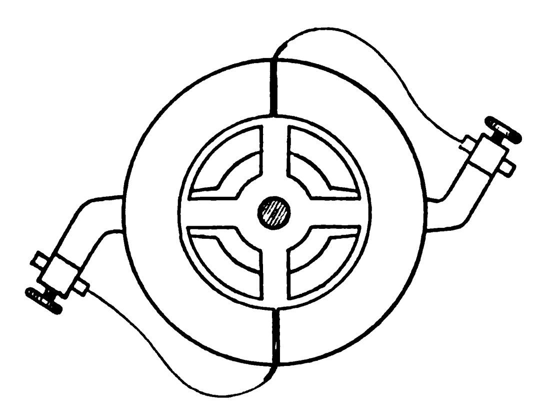


Fig. 3.

Silberblech von 119·6 *mm* Durchmesser, welche genau diametral durch zwei 0·6 *mm* dicke Elfenbeinplättchen von einander isolirt sind. Die schleifenden Bürsten sind an ihren aus Platinblech bestehenden Enden ebenfalls 0·6 *mm* dick.

Bei den Versuchen des Herrn Lohnstein wird diese Bedingung der momentanen Commutation nicht erfüllt gewesen sein, und die Contactflächen der Bürsten werden wahrscheinlich breiter gewesen sein als die Dicke der Isolation zwischen den Commutatorsegmenten. Es ist nun klar, dass in einem solchen Falle die Armaturspule in der neutralen Ebene des magnetischen Feldes während des Durchganges eine Zeit lang kurz geschlossen sein wird, die von der Breite der Contactfläche der Bürsten abhängt.

Es ist nicht schwer zu ermitteln, wie die mittlere Stromstärke von der zur Commutation erforderlichen Zeit abhängt, wenn der Stromkreis keine Selbstinduction besitzt. Eine im magnetischen Felde rotirende Spule vom Widerstande w_0 liefere den Strom für einen Galvanometerstromkreis vom Widerstande w. Die Bürsten seien gegen den Durchmesser der Stromwendung symmetrisch aber so eingestellt, dass die Spule beim Verlassen der neutralen Ebene während der Zeit t_1 kurz geschlossen bleibt. Zur Zeit t_1 ist die Spule und der Galvanometerkreis hintereinander geschaltet. Zur Zeit $\frac{T}{2}-t_2$ werden beide wieder kurz geschlossen und bleiben in Parallelschaltung von $\frac{T}{2}-t_2$ bis $\frac{T}{2}+t_1$; zur Zeit $\frac{T}{2}+t_1$ werden dieselben wieder hintereinander, aber umgekehrt geschaltet u. s. f. Die Zeit der Commutation ist $t = t_1+t_2$.

Die mittlere Stromstärke in der rotirenden Spule ist offenbar

$$i_0 = \frac{E_0}{w_0+w} \cdot \frac{1}{\frac{T}{2}-(t_1+t_2)} \int_{t_1}^{\frac{T}{2}-t_2} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) . dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{E_0}{w_0+w} \cdot \frac{T}{T-2t} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{T}t\right) \cdot \cos\frac{\pi}{T}(t_2-t_1)$$

und die vom Galvanometer angezeigte mittlere Stromstärke

$$i = \frac{0 \times t + i_0\left(\frac{T}{2}-t\right)}{\frac{T}{2}}$$

oder

$$i = \frac{2}{\pi} \frac{E_0}{w_0+w} \cos\left(\frac{\pi}{T}t\right) \cos\frac{\pi}{T}(t_2-t_1). \qquad 13)$$

Die Zeiten t_1 und t_2 hängen von der Stellung der Bürsten gegen die neutrale Ebene des magnetischen Feldes ab und die mittlere Stromstärke erreicht, wie aus 13 zu ersehen ist, den maximalen Werth für $t_1 = t_2$, in welchem Falle die gleich

breiten Contactflächen der Bürsten von dem Durchmesser der Stromwendung halbirt werden.

Aus 13 ergibt sich

$$\text{für } t_1 = 0 \quad t_2 = t \quad i_1 = \frac{2}{\pi}\,\frac{E_0}{w_0+w}\cos^2\left(\frac{\pi}{T}\,t\right)$$

$$\text{»} \quad t_2 = 0 \quad t_1 = t \quad i_2 = \frac{2}{\pi}\,\frac{E_0}{w_0+w}\cos^2\frac{\pi}{T}\,t$$

$$\text{»} \quad t_1 = t_2 \qquad i_3 = \frac{2}{\pi}\,\frac{E_0}{w_0+w}\cos\frac{\pi}{T}\,t,$$

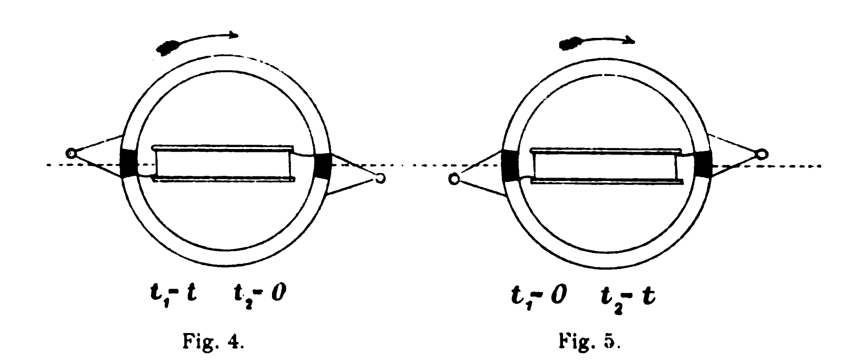


Fig. 4. Fig. 5.

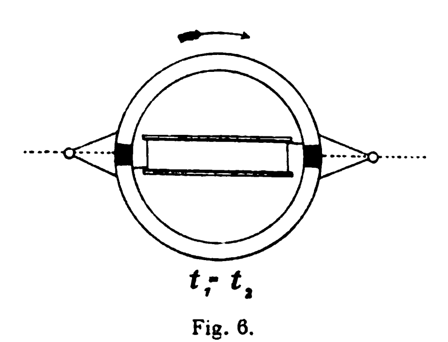


Fig. 6.

somit

$$i_1 : i_2 : i_3 = \cos\frac{\pi}{T}\,t : \cos\frac{\pi}{T}\,t : 1.$$

Diese drei Fälle der Bürstenstellung sind in den Figuren 4, 5 und 6 dargestellt.

Der allgemeinere Fall, dass der äussere Stromkreis noch eine Selbstinduction L besitzt, wurde vom Herrn Steinmetz[1] in einem Aufsatze theoretisch behandelt, auf den ich vom Herrn Verfasser nach der Veröffentlichung meiner ersten Mittheilung durch Übersendung des Separatabdruckes aufmerksam gemacht wurde. Unter der Voraussetzung, dass die Armaturspule und der äussere Stromkreis von der Zeit 0 bis T_1 kurz geschlossen sind, zur Zeit T_1 der Kurzschluss entfernt wird, von der Zeit T_2 bis $T+T_1$ beide Stromkreise wieder kurz geschlossen werden, zur Zeit T die elektromotorische Kraft der Armaturspule den Nullwerth erreicht, also T die halbe Periode bedeutet, dass ferner zur Zeit $T+T_1$ der Kurzschluss durch Rotation des Commutators wieder entfernt und beide Stromkreise in umgekehrter Richtung mit einander verbunden werden, zur Zeit $T+T_2$ die Armaturspule wieder kurz geschlossen wird u. s. f. ergab die Rechnung für die momentane Stromstärke im äusseren Stromkreise während der Zeit von T_1 bis T_2, von $T+T_1$ bis $T+T_2$ u. s. f. den endlichen[2] Werth:

$$i_1 = \frac{\rho A}{n} \sin\left(\frac{\pi t}{T} - \varphi\right) + \frac{\rho B}{n} e^{-\sigma t}.$$

Die Grössen A, φ, σ und B sind durch folgende Ausdrücke gegeben:

$$A = -\frac{nE_0}{\sqrt{\rho^2(w_0+w)^2 + \frac{n^4\pi^2 10^{-16}}{T^2}}},$$

[1] Steinmetz, Der Einfluss der Selbstinduction auf pulsirende Ströme. Elektrotechnische Zeitschrift, Heft 36, 1890.

[2] Herr Steinmetz bemerkt in der Elektrotechnischen Zeitschrift vom 3. Juni 1892, ich hätte an der Lösung der Differentialgleichung »evidenterweise verzweifelt«, da ich die letztere durch eine unendliche Reihe und nicht durch endliche Formeln wie er integrirte. Herr Steinmetz ahnte jedenfalls nicht, dass seine Bemerkung der Vermuthung Raum gibt, dass er beim Anblick einer unendlichen Reihe, wenn diese zur wirklichen Berechnung dienen soll, in eine verzweifelnde Stimmung geräth, ohne zu wissen, dass unendliche Reihen schon oft und auf verschiedenen Gebieten der experimentellen Forschung mit Nutzen angewendet wurden.

$$*B = Ae^{\sigma T_1} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi T_2}{T} - \varphi\right) e^{-\sigma'(T+T_1-T_2)} - \sin\left(\frac{\pi T_1}{T} - \varphi\right)}{1 - e^{-\sigma' T - (\sigma - \sigma')(T_2 - T_1)}},$$

$$\tan\varphi = \frac{n^2 \pi 10^{-8}}{\rho(w_0 + w)T} = \frac{\pi L}{T},$$

$$\sigma = \frac{\rho(w_0 + w)10^8}{n^2} = \frac{w_0 + w}{L}, \quad \sigma' = \frac{\rho w 10^8}{n^2} = \frac{w}{L}.$$

Um die mittlere Stromstärke im äusseren Stromkreise berechnen zu können, muss noch die momentane Stromstärke von T_2 bis $T + T_1$ u. s. w. bekannt sein. Diese ist

$$i_2 = \frac{\rho M_2}{n} e^{-\sigma'(t - T_2)}, **$$

$$M_2 = A \sin\left(\frac{\pi T_2}{T} - \varphi\right) + Be^{-\sigma T_2},$$

und die Zahl der Kraftlinien im äusseren aus einem Elektromagnet bestehenden Stromkreise

$$m = M_2 e^{-\sigma'(t - T_2)}. **$$

Mit Hilfe der Ausdrücke i_1 und i_2 lässt sich die mittlere Stromstärke $M(i)$ im äusseren Stromkreise leicht berechnen. Diese ist

$$M(i) = \frac{1}{T}\left[\int_{T_1}^{T_2} i_1 dt + \int_{T_2}^{T+T_1} i_2 dt\right].$$

Nach der Ausführung der Integration innerhalb der angegebenen Grenzen und nach einigen Reductionen erhält man:

---

* In der Abhandlung des Herrn Steinmetz steht irrthümlich:

$$B = Ae^{\sigma T_1} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi T_2}{T} - \varphi\right) - \sin\left(\frac{\pi T_1}{T} - \varphi\right)}{1 - e^{-\sigma' T + (\sigma' - \sigma)(T_2 - T_1)}}.$$

** In der Abhandlung des Herrn Steinmetz stehen die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} i &= \frac{\rho M_2}{n} \cdot e^{-\sigma'(T + T_1 - T_2)}, \\ m &= M_2 e^{-\sigma'(T + T_1 - T_2)}. \end{aligned}\right\}$$

$$M(i) = \frac{E_0}{\sqrt{(w+w_0)^2 + \left(\frac{\pi L}{T}\right)^2}} \left[\begin{array}{l} \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi(T_2 - T_1)}{2T} \sin \left[\frac{\pi(T_1 + T_2)}{2T} - \varphi \right] \\ + \frac{S_2}{T} \sin \left(\frac{\pi T_2}{T} - \varphi \right) - \frac{S_1}{T} \sin \left(\frac{\pi T_1}{T} - \varphi \right) \end{array} \right], \qquad 14)$$

worin die von der Selbstinduction und der Zeit der Commutation abhängigen Constanten S_2 und S_1 folgende Bedeutung haben:

$$S_2 = \frac{\sigma[1 - e^{-\sigma'(T+T_1-T_2)}] + \sigma'[1 - e^{-\sigma(T_2-T_1)}]\, e^{-\sigma'(T+T_1-T_2)}}{\sigma\sigma'[1 - e^{-\sigma'(T+T_1-T_2) - \sigma(T_2-T_1)}]},$$

$$S_1 = \frac{\sigma'[1 - e^{-\sigma(T_2-T_1)}] + \sigma[1 - e^{-\sigma'(T+T_1-T_2)}]\, e^{-\sigma(T_2-T_1)}}{\sigma\sigma'[1 - e^{-\sigma'(T+T_1-T_2) - \sigma(T_2-T_1)}]}.$$

Für $L = 0$ verschwinden die Grössen S_2 und S_1, und man erhält in diesem Falle für die mittlere Stromstärke den Grenzwerth

$$M(i) = \frac{2}{\pi} \frac{E_0}{w + w_0} \cdot \sin \frac{\pi(T_2 - T_1)}{2T} \sin \frac{\pi(T_1 + T_2)}{2T}, \qquad 15)$$

welcher nach Einsetzung von $\frac{T}{2}$ statt T, τ_1 statt T_1 und $\frac{T}{2} - \tau_2$ statt T_2 identisch wird mit 13.

Für sehr grosse Werthe von L wird dagegen das erste Glied innerhalb der Klammer verschwindend klein und erreicht für $L = \infty$ den Werth Null.[1] Die mittlere Stromstärke ist dann:

$$M(i) = \frac{2}{\pi} \frac{E_0}{w + w_0 \frac{T_2 - T_1}{T}} \cdot \sin \frac{\pi(T_2 - T_1)}{2T} \sin \frac{\pi(T_1 + T_2)}{2T}. \qquad 16)$$

Wie aus diesen Formeln zu ersehen ist, ist die mittlere Stromstärke des commutirten Stromes, wenn die Commutation nicht momentan erfolgt, abhängig: erstens von der Zeit der Commutation $t = T + T_1 - T_2$, also von der Breite der Contactflächen der Bürsten, zweitens von der Stellung der Bürsten gegen die neutrale Ebene des magnetischen Feldes und drittens von der Selbstinduction. Dass die letztere Abhängigkeit nicht

[1] Was die Controverse bezüglich des Falles $L = \infty$ betrifft, so glaube ich, dass die Einwände des Herrn Lohnstein bereits durch die treffende Darlegung des Herrn H. Teege im Novemberheft 48 der Elektrotechnischen Zeitschrift vom Jahre 1892 zur Genüge widerlegt sind.

unbedeutend sein kann, folgt schon aus den Grenzwerthen für $L = 0$ und $L = \infty$.

Die durch eine sehr grosse Selbstinduction herbeigeführte maximale Änderung der mittleren Stromstärke, ausgedrückt in Procenten, ist angenähert gegeben durch die Beziehung

$$\Delta = \frac{100\, w_0 t}{(w+w_0)T - w_0 t},$$

ist somit von der Zeit der Commutation abhängig.

Für den vom Herrn Steinmetz in seiner Abhandlung betrachteten Fall, $E_0 = 100$ V., $w = 5\,\Omega$, $w_0 = 10\,\Omega$, $T = 0\cdot005\,s$, $T_1 = 0\cdot0007\,s$, $T_2 = 0\cdot00415\,s$ und $L = 0\cdot04$ Erdquadranten, ergeben sich nach 14, 15 und 16 die mittleren Stromstärken:

für $L = 0\cdot04$ E. Q.	$M(i) = 4\cdot706$ Ampère,
» $L = 0$	$3\cdot747$ »
» $L = \infty$	$4\cdot723$ »

Bei ungeänderter Stellung der Bürsten gegen den Commutator kann also schon eine Selbstinduction von $0\cdot04$ Erdquadranten die mittlere Stromstärke des commutirten Stromes um $25\cdot6\%$ erhöhen. Bei weiterer Vergrösserung der Selbstinduction von $0\cdot04$ Erdquadranten bis ins Unendliche würde die mittlere Stromstärke nur unbedeutend steigen und für $L = \infty$ den bereits angegebenen Werth $4\cdot723$ Ampère erreichen, welcher nur noch um $0\cdot4\%$ grösser ist als die mittlere Stromstärke bei der Selbstinduction $L = 0\cdot04$ Q.

Aus dem Gesagten geht nun hervor, dass die vom Herrn Steinmetz »unter Verweisung auf zwei Diagramme«[1] ausgesprochene Ansicht, nach welcher die Selbstinduction auf die mittlere Stromstärke eines in endlicher Zeit commutirten, pulsirenden Stromes »fast gar keinen« Einfluss haben soll, nicht richtig ist, im Gegentheil, dass dieser Einfluss unter Umständen sogar ein bedeutender sein kann.

Damit erledigt sich von selbst die vom Herrn Steinmetz aufgeworfene Prioritätsfrage bezüglich der Unabhängigkeit der mittleren Stromstärke von der Selbstinduction. Eine solche

[1] Elektrotechnische Zeitschrift, 1890, Heft 36 und 1892, Heft 23, S. 298.

Unabhängigkeit der mittleren Stromstärke konnte bei endlicher Commutation sich weder aus den Diagrammen des Herrn Steinmetz, noch aus seinen Formeln ergeben, sie folgt aber aus dem oben gegebenen Ausdrucke für die mittlere Stromstärke für den Fall einer momentanen Commutation, welche aber Herr Steinmetz für eine »physikalische Unmöglichkeit« hielt und dieselbe weder theoretisch näher untersucht, noch experimentell geprüft hat, weil dieser Specialfall nach seiner Ansicht »praktisch von keinerlei Interesse sei«.

Setzt man in dem Ausdrucke 14 die Zeit der Commutation $T+T_1-T_2=0$, $T_1=0$, $T_2=T$, so erhält man für beliebige Selbstinduction die mittlere Stromstärke

$$M(i_0)=\frac{2}{\pi}\frac{E_0\cos\varphi}{\sqrt{(w_0+w)^2+\left(\frac{\pi L}{T}\right)^2}}+\frac{2E_0\sin\varphi}{\pi\sqrt{(w_0+w)^2+\left(\frac{\pi L}{T}\right)^2}}$$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{E_0}{w_0+w}(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=\frac{2}{\pi}\frac{E_0}{w_0+w}, \qquad 17)$$

welcher Werth von der Selbstinduction ganz unabhängig ist.

Es muss noch bemerkt werden, dass der unter 14) gegebene Ausdruck der mittleren Stromstärke nicht genügt, um die Versuche des Herrn Lohnstein vollständig zu erklären, denn es wurde von demselben beobachtet, dass bei einer bestimmten, aber unveränderten Bürstenstellung die Verminderung der Selbstinduction eine Vergrösserung der mittleren Stromstärke herbeiführte. Dagegen ist aus dem Ausdrucke für die mittlere Stromstärke 14 und den Grenzwerthen derselben 15 und 16 zu ersehen, dass bei unveränderter Bürstenstellung die Verminderung der Selbstinduction auch eine Verminderung der mittleren Stromstärke zur Folge haben müsste. Weitere Versuche zeigten noch, dass es eine Bürstenstellung gibt, in welcher die Änderungen der Selbstinduction ohne Einwirkung auf die mittlere Stromstärke sind. Wurden aber die Bürsten über diese »Nullstellung« hinaus verschoben, so hatte die Verminderung der Selbstinduction eine Verringerung der am Galvanometer beobachteten mittleren Stromstärke zur Folge.

Herr Steinmetz glaubt diese Versuche durch den einfachen Hinweis erklären zu können, dass nach seinen Formeln

die mittlere Stromstärke, je nach der Wahl von T_1 und T_2, durch die Selbstinduction vermindert oder vergrössert werden kann. Eine solche Erklärung ist aber nicht zutreffend, wie dies am besten aus den hier zusammengestellten Resultaten zu ersehen ist, die sich nach den Formeln 14, 15, 16 und 17 für zwei vom Herrn Steinmetz angenommene Fälle ergeben.

1. Fall.

$T = 0 \cdot 00500$ S. $\quad E_0 = 100$ V.
$T_1 = 0 \cdot 00070$ » $\quad w_0 = 5\ \Omega$
$T_2 = 0 \cdot 00415$ » $\quad w = 10\ \Omega$
$L = 0 \cdot 04 \times 10^9$ c.

$T + T_1 - T_2 = 0$, $\quad M(i_0) = 6 \cdot 366$ A.
$L = 0$, $\quad M(i) = 5 \cdot 150$ »
$L = 0 \cdot 04 \times 10^9$ c., $\quad 5 \cdot 990$ »
$L = \infty$, $\quad 6 \cdot 438$ »

2. Fall.

$T = 0 \cdot 005$ S. $\quad E_0 = 100$ V.
$T_1 = 0 \cdot 001$ $\quad w_0 = 5\ \Omega$
$T_2 = 0 \cdot 004$ $\quad w = 5\ \Omega$
$L = 0 \cdot 008 \times 10^9$ c.

$T + T_1 - T_2 = 0$, $\quad M(i_0) = 4 \cdot 244$ A.
$L = 0$, $\quad M(i) = 3 \cdot 747$
$L = 0 \cdot 008 \times 10^9$ c., $\quad 4 \cdot 705$
$L = \infty$, $\quad 4 \cdot 723$

Im ersten Fall ist die mittlere Stromstärke bei endlicher Commutation in einem Stromkreise bei der Selbstinduction $0 \cdot 04 \times 10^9$ c. kleiner als die mittlere Stromstärke bei momentaner Commutation, $5 \cdot 990$ A. gegen $6 \cdot 366$ A., im zweiten Falle ist dieselbe grösser, $4 \cdot 705$ A. gegen $4 \cdot 244$ A. Was aber die Abhängigkeit der mittleren Stromstärke von der Selbstinduction bei endlicher Commutation betrifft, so ist aus beiden Fällen zu ersehen, dass dieselbe bei unveränderter Bürstenstellung mit der Selbstinduction zunimmt, und zwar differiren die beiden Grenzwerthe für $L = 0$ und $L = \infty$ im ersten Falle um 25%, im zweiten um $25 \cdot 9\%$ von einander.

VIII. SITZUNG VOM 9. MÄRZ 1893.

Herr Intendant Hofrath Ritter v. Hauer führt den Vorsitz.

Der Secretär legt das erschienene Heft X (December 1892) des 101. Bandes der Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte vor.

Das w. M. Herr Director E. Weiss überreicht eine Abhandlung von Herrn Prof. Dr. J. v. Hepperger in Graz: »Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung«.

Das c. M. Herr Custos Dr. Emil v. Marenzeller überreicht eine Abhandlung mit dem Titel: »Zoologische Ergebnisse der Tiefsee-Expeditionen im östlichen Mittelmeere auf S. M. Schiff »Pola«. 1. Echinodermen, gesammelt 1890, 1891 und 1892«; ferner einen Auszug aus den Beschreibungen der neuen Arten, betitelt: »Neue Echinodermen aus dem Mittelmeere«. (Vorläufige Mittheilung.)

Herr Dr. Gottlieb Adler, Privatdocent an der k. k. Universität in Wien, überreicht folgende vorläufige Mittheilung: »Über die Formel für die Tragkraft der Elektromagnete«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Fritsche, H., Über die Bestimmung der geographischen Länge und Breite und der drei Elemente des Erdmagnetismus durch Beobachtungen zu Lande, sowie erdmagnetische und geographische Messungen an mehr als tausend verschiedenen Orten in Asien und Europa. (Ausgeführt in den Jahren 1867—1891.) St. Petersburg, 1893; 8°.

IX. SITZUNG VOM 16. MÄRZ 1893.

Herr Intendant Hofrath Ritter v. Hauer führt den Vorsitz.

Das Präsidium der Central-Commission für wissenschaftliche Landeskunde von Deutschland übermittelt den Bericht über deren Thätigkeit in den Geschäftsjahren 1889—1891 und begleitet denselben mit einem Aufrufe zum Beitritte in den Verein für deutsche Landeskunde, mit dessen Gründung der IX. deutsche Geographentag die genannte Commission betraut hat.

Das w. M. Herr Prof. L. Pfaundler übersendet eine Arbeit aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz von Prof. Dr. I. Klemenčič, betitelt: »Beiträge zur Kenntniss der Absorption und Verzweigung elektrischer Schwingungen in Drähten«.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. »Beiträge zur Kenntniss des Vicentiner Tertiärs. I. Die Land- und Süsswasserschnecken der Vicentiner Eocänbildungen. II. Die Fauna des M. Pulli bei Valdagno«, von Dr. Paul Oppenheim in Berlin.
2. »Beiträge zur Kenntniss der untersalpetrigen Säure.« (I. Mittheilung.) Arbeit aus dem chemischen Laboratorium der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag von Herrn Anton Thun.
3. »Zur Kenntniss der Niederschlagsperioden«, vorläufige Mittheilung von Herrn Johann Unterweger in Judenburg.

Herr Prof. Guido Goldschmiedt übersendet folgende drei Arbeiten aus dem chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag:

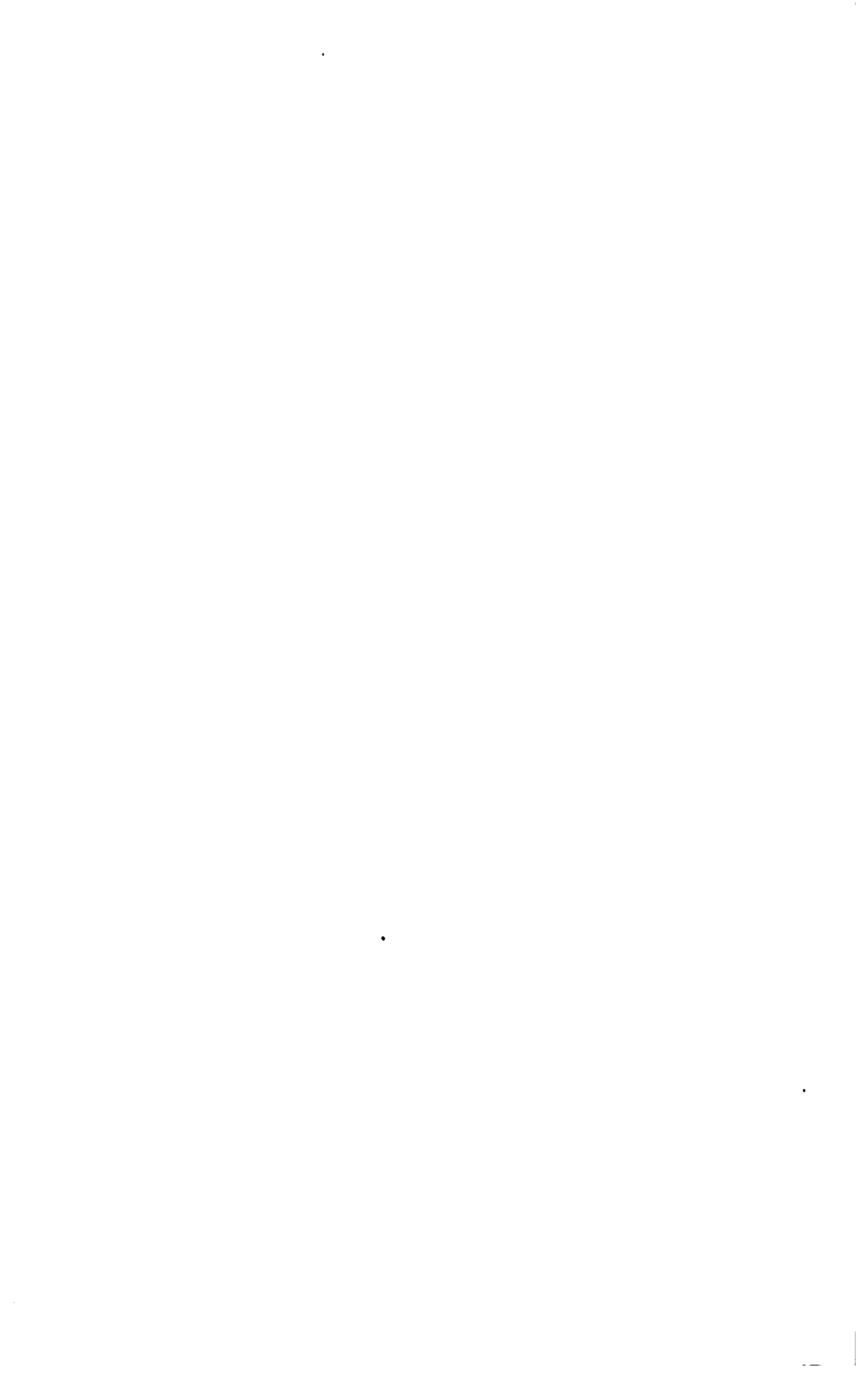
1. »Untersuchungen über Abietinsäure. I.,« von stud. chem. Heinrich Mach.
2. »Über das Urson«, von stud. chem. Wilhelm Gintl.
3. »Über das Scoparin«, I. Abhandlung, von Guido Goldschmiedt und Franz v. Hemmelmayr.

Das w. M. Herr Prof. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit des Herrn Dr. W. Meyerhoffer: »Über kryohydratische Quintupelpunkte«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. C. Claus überreicht folgende Mittheilung: »Über die Antennen der Cyclopiden und die Auflösung der Gattung *Cyclops* in Gattungen und Untergattungen«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Le Prince Albert Ier, Prince souverain de Monaco, Résultats des Campagnes Scientifiques accomplies sur Son Yacht »l'Hirondelle«. Fascicule IV. Opisthobranches, par Rudolph Bergh. (Avec quatre Planches.) Monaco, 1893; 4°.



SITZUNGSBERICHTE

DER

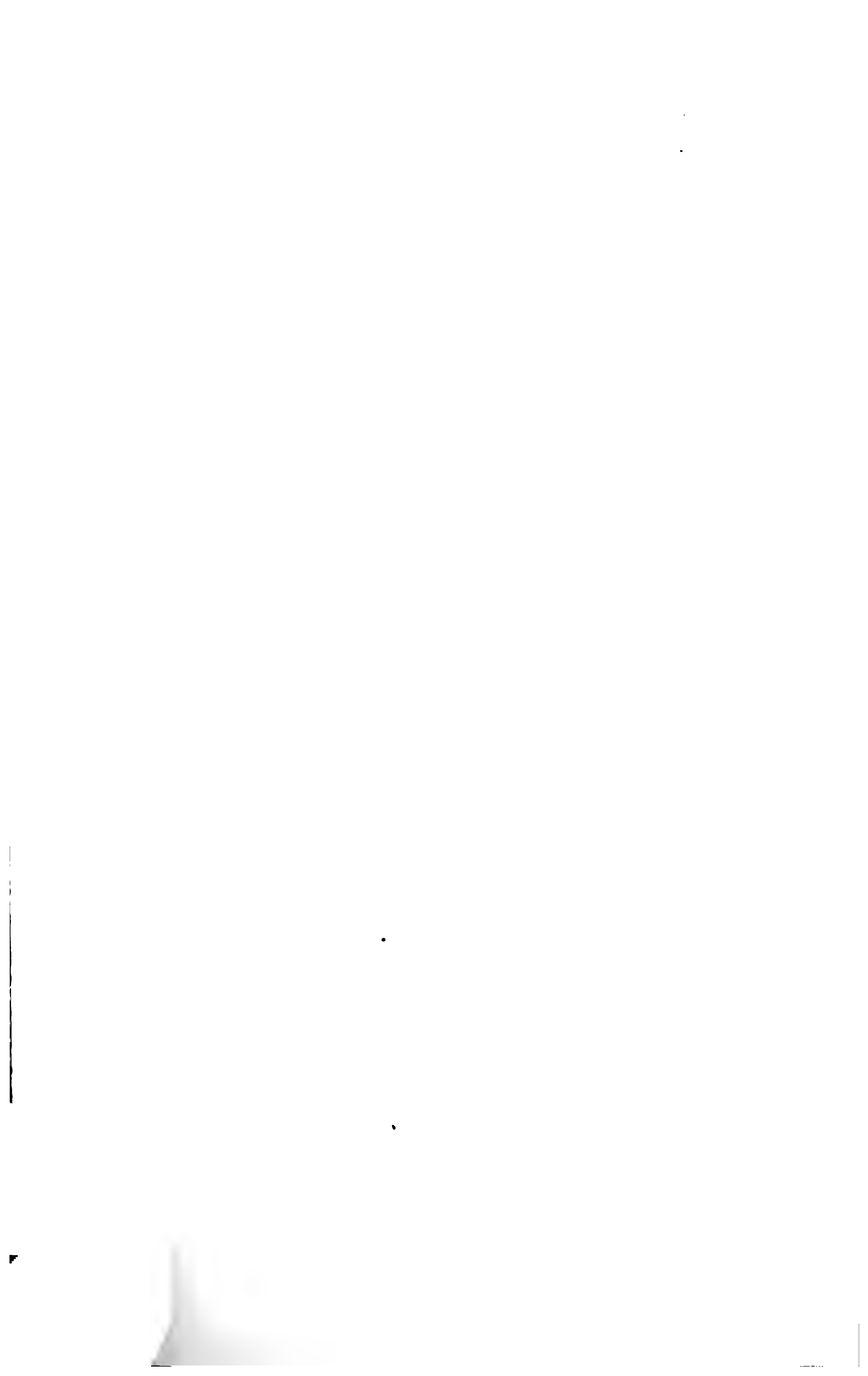
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CII. BAND. IV. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



X. SITZUNG VOM 13. APRIL 1893.

Herr Intendant Hofrath Ritter v. Hauer führt den Vorsitz.

Der Secretär legt das erschienene Heft IX—X (November und December 1892) des Bandes 101, Abtheilung I der Sitzungsberichte, womit nun der Druck dieses Bandes in allen drei Abtheilungen vollendet ist, ferner das erschienene Heft I—II (Jänner—Februar 1893) des Bandes 102, Abtheilung II. b. dieser Berichte vor.

Das Präsidium der böhmischen Kaiser Franz Joseph-Akademie der Wissenschaften, Literatur und Kunst in Prag dankt für die dieser Akademie im Wege des Schriftentausches von Seite der kaiserl. Akademie zukommenden periodischen Publicationen und selbständigen Werke.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. E. Mach in Prag übersendet eine von ihm in Gemeinschaft mit Herrn B. Doss aus Riga ausgeführte Arbeit unter dem Titel: »Bemerkungen zu den Theorien der Schallphänomene bei Meteoritenfällen«.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. C. Freiherr v. Ettingshausen in Graz übersendet eine Abhandlung: »Über fossile Pflanzenreste aus der Kreideformation Australiens«.

Herr P. C. Puschl, Stiftscapitular in Seitenstetten, übersendet eine Abhandlung: »Über die Natur der Kometen«.

Herr Dr. Frid. Krasser in Wien, Assistent am pflanzenphysiologischen Institute der k. k. Universität in Wien, übersendet eine nachträgliche Mittheilung zu seiner im 100. Bande

der Sitzungsberichte publicirten Abhandlung: »Über die fossile Flora der rhätischen Schichten Persiens«.

Der Secretär legt eine von Prof. Adalbert Breuer an der k. k. Staatsoberrealschule des III. Bezirkes in Wien eingesendete Abhandlung vor, betitelt: »Die Gauss'sche Darstellung complexer Zahlen in geometrischer Beleuchtung«.

Ferner legt der Secretär ein von Herrn Charles J. Reed in Orange (New Jersey, U. S.) eingesendetes versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität vor, welches mit der Aufschrift »Orange« bezeichnet ist und angeblich eine chemische Entdeckung enthält.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Lang überreicht eine Abhandlung von Director Dr. J. M. Eder und Herrn E. Valenta in Wien: »Über das ultraviolette Linienspectrum des elementaren Bor«.

Ferner überreicht Herr Hofrath v. Lang zwei Mittheilungen von Prof. Dr. J. Puluj in Prag:

1. »Eine Methode zur Messung der Phasendifferenz von harmonischen Wechselströmen und deren Anwendung zur Bestimmung der Selbstinduction«
2. »Über die Phasendifferenz zwischen der elektromotorischen Gesammtkraft und der Spannungsdifferenz an einer Verzweigungsstelle des Stromkreises bei Anwendung harmonischer Wechselströme«.

Schliesslich legt Herr Hofrath v. Lang eine im physikalischen Institute der k. k. Universität in Innsbruck ausgeführte Arbeit des Dr. G. Benischke vor, betitelt: »Experimentaluntersuchungen über Diëlektrica«.

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht drei in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeiten:

1. »Studien über Cyan«, von Theodor Zettel.
2. »Über die Einwirkung von Schwefelsäure auf das Pinakon des Methyl-Äthylketons«, von Paul Herschmann.

3. »Löslichkeitsbestimmungen von buttersaurem Barium und Calcium«, von Aurel Deszáthy.

Herr Egon v. Oppolzer in Wien überreicht eine Abhandlung: »Über die Ursache der Sonnenflecken«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Le Prince Albert Ier, Prince souverain de Monaco, Résultats des Campagnes Scientifiques accomplies sur Son Yacht »l'Hirondelle«. Fascicule III. Brachiopodes de l'Atlantiques Nord, par P. Fischer et D.-P. Oehlert. (Avec deux Planches.) Monaco, 1893; 4°.

Bemerkungen zu den Theorien der Schallphänomene bei Meteoritenfällen

von

E. Mach in Prag und **B. Doss** in Riga.
w. M. k. Akad. Docent am Polytechnikum.

(Mit 1 Textfigur.)

Vor Kurzem erhielt der erstere der Autoren von Herrn Cleveland Abbe in Washington (Weather Bureau) ein Schreiben, worin derselbe bezugnehmend auf E. Mach's »Ergänzungen zu den Mittheilungen über Projectile«[1] erklärt, schon 1877 die wahre Theorie der bei Meteoritenfällen wahrnehmbaren donner- und explosionsähnlichen Schallerscheinungen (»the true theory of thunder and meteoric explosions«) gegeben zu haben, und zwar in dem »Report of the committee to collect information relative to the meteor of December 24th, 1873 (Philosophical Society of Washington 1877, p. 139). Er knüpft daran die Bitte, die bezeichneten Stellen des Berichtes, der in Europa wenig bekannt zu sein scheine, in einer periodischen Zeitschrift zu veröffentlichen. Wir kommen derselben gerne nach, bemerken jedoch zuvor, dass auch wir von dem Erklärungsversuch Abbe's keine Kenntniss hatten.

In dem Bericht wird ausgesprochen — der Originaltext ist in der Anmerkung[2] wörtlich wiedergegeben — dass es nicht

[1] Diese Sitzungsber. Bd. 101, Abth. II a., S. 977. (1892.)

[2] Es heisst S. 143: »We are disposed to consider the so-called „explosion, and subsequent „rumbling" not as due to a definite explosion of the meteor, but as the result of the concentration at the observer's ear of the vast volume of sound emanating, almost simultaneously, from a large part of the meteor's path, being, in that respect, not dissimilar to ordinary thunder.

It is evident that the waves of sound starting from that portion of the meteor's path nearest to the observer would reach his ear first; thus the observer at *C*

nöthig sei, die sogenannte »Explosion« und das nachfolgende Getöse auf eine wirkliche Explosion des Meteors zurückzuführen; die richtige Erklärung des Phänomens ergebe sich vielmehr unzweifelhaft aus der Thatsache, dass neben dem Zischen der Luft und dem Sausen eines rotirenden Projectiles noch eine Reihe schwacher Geräusche explosionsartiger Natur existiren, welche, dem Knarren, Zischen und Knistern eines Holz- oder

---

would hear a violent sound due to the combined noises of the slight explosions, whirring, rushing and snapping, emanating within a portion of a second from the whole of the line xy. Subsequently he would hear the sounds from xx_1 and yy_1, then those from x_1x_2 and y_1y_2 etc. The absorption and refraction of sound by the atmosphere and the progression of the meteor materially affect this phenomenon«.

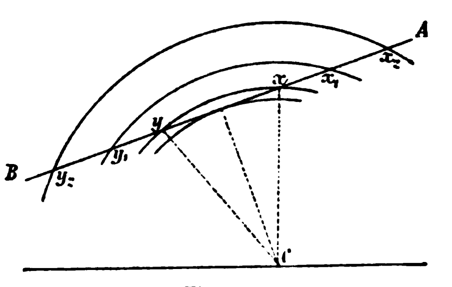


Fig. 1.

Und S. 157 heisst es: »One of the most interesting subjects in connection with such large meteors relates to the sound, as of an explosion, that is frequently observed, and which generally reaches the observer at a considerable interval of time after the body has disappeared from view.

It is not, however, necessary to assume that an actual explosion must have occurred at some portion of the meteor's path. The correct explanation of the phenomenon is undoubtedly found in the fact that, besides the rushing of air and the singing or whizzing of a revolving projectile, there is a series of small noises of the nature of explosions, and like the snapping, hissing and crackling of a wood-fire, or soft coal-fire, attending the burning of the outer surface of the meteor.

Owing to the rapid movement of the body, these noises are produced in a few seconds, and, as it were, almost simultaneously, from one end to the other of a line many miles in length.

Now, if the observer be so situated that the noises from a large portion of the path reach him almost simultaneously, he will hear one loud noise attended by a succession of rapidly diminishing sounds.

The problem, in fact, is precisely similar to that which has excited so much interest in optics, namely, as to the effect to the movement of the observer and the source of light upon the apparent color and intensity«.

S. 158: — »we may remark that it requires only comparatively feeble noises distributed along the entire path of the meteor to produce, by their concentration at the observer's station, a sound equal to that of loud thunder.

gelinden Kohlenfeuers ähnlich, das Abbrennen der Oberfläche des Meteoriten begleiten. Bei der schnellen Bewegung des Körpers entstehen diese Geräusche innerhalb weniger Secunden, also fast gleichzeitig von einem bis zum anderen Ende einer viele Meilen langen Bahn. Nimmt nun der Beobachter einen derartigen Standpunkt ein, dass die von einer grossen Bahnstrecke ausgehenden Geräusche ihn erreichen, dann wird er fast gleichzeitig ein lautes Geräusch hören, welches von einer Aufeinanderfolge sich schnell abschwächender Töne begleitet sein wird. So sei das Problem ganz ähnlich der interessanten optischen Erscheinung, dass die Bewegung eines Beobachters oder einer Lichtquelle auf die Farbe und Intensität der letzteren von Einfluss ist. Es seien nur verhältnissmässig schwache Geräusche längs der ganzen Bahnstrecke des Meteors nöthig, um bei ihrer Vereinigung an des Beobachters Standort einen lauten donnerähnlichen Schall hervorzurufen.

Wie man aus diesen Angaben ersieht, ist Herr Cleveland Abbe, wenngleich er die Existenz »explosionsartiger« Geräusche, die den Meteoriten auf seiner atmosphärischen Bahnstrecke begleiten sollen, voraussetzt — über die Ursache derselben wird nichts Näheres angegeben — doch kein Anhänger der Daubrée'schen (eigentlich Delaunay'schen)[1] Zersprengungstheorie. Dessgleichen steht er auch nicht auf dem Boden der früher allgemein angenommenen Haidinger'schen Theorie, die freilich weder widerlegt noch überhaupt erwähnt wird. Dieses negative Moment, welches sich zunächst aus seinen Darlegungen ergibt, erkennen wir nach unserem, an bekannter Stelle[2] genauer präcisirten Standpunkte als ganz richtig an. Das Gleiche vermögen wir allerdings nicht mit seinen positiven Erklärungen. Abbe's Ansicht, nach welcher die auf einer grossen Bahnstrecke rasch hinter einander erregten Geräusche fast gleichzeitig zum Ohr des Beobachters gelangen, vermag die bei Meteoritenfällen wahrnehmbaren Hauptschallphänomene, so die kanonenschuss-

[1] Notice sur la constitution de l'Univers. Annuaire du bureau des longitudes, 1870, p. 581.

[2] B. Doss, Über den Meteoriten von Misshof in Kurland und die Ursachen der Schallphänomene bei Meteoritenfällen im Allgemeinen. (Neues Jahrbuch für Mineralogie etc. 1892 I, S. 73—80 und 107—113.) — E. Mach, l. c.

ähnlichen Detonationen, das Knattern und donnerähnliche Rollen nicht zu erklären. Warum, das ist bereis in der citirten Arbeit über den Misshofer Meteoriten des Näheren erörtert worden, so dass hier kaum nöthig ist, noch einmal darauf zurückzukommen. Betonen möchten wir nur, dass selbst bei der durch Abbe in der obigen Figur skizzirten Situation und unter der Annahme der Richtigkeit seiner Theorie, der Beobachter keinen explosionsartigen Knall würde vernehmen können, da die an den verschiedenen Punkten der Bahnstrecke entstandenen Schallwellen bei ihrer nach des Beobachters Standpunkt convergirenden Fortpflanzung mannigfach interferiren müssten. Eine einfache Knallwelle würde da also keineswegs ankommen und die Ursache der Wahrnehmung einer schussartigen Detonation sein können. Eine solch' letztere ist aber gerade auch bei dem Meteor vom 24. December 1873 sehr vielfach gehört worden. Denn aus der von Abbe gegebenen Zusammenstellung der von 36 Beobachtern an den verschiedensten Orten wahrgenommenen Schalleffecte geht hervor, dass in den meisten Fällen (20) der Schall geradezu mit dem Knall eines Kanonenschusses, bei dem die Fenster klirrten, verglichen wird, während bei neun weiteren Angaben von Fensterklirren, Haus- und Bodenerschütterung oder von lautem Donnerknall, respective Explosion gesprochen wird, welche Fälle den obigen 20 hinzugerechnet werden können, da bei ihnen jedenfalls die gleiche Wahrnehmung nur weniger präcis beschrieben und berichtet worden ist. (Die restirenden sieben Beobachter sprechen nur von fernem Donnerrollen, sturmartigen, rasselnden, sausenden, raketenartigen Geräuschen. Sechs Beobachter geben an, dass solche Geräusche nach dem eigentlichen kanonenschussähnlichen Knall zu vernehmen waren.)

Die Abbe'sche Theorie erinnert an die Knallerklärungen von Journée, Sebert, de Labouret, in gewissem Sinne — was die Concentration der Geräusche betrifft — auch an die Bosscha'sche Hypothese. Nirgends aber spricht Abbe von einer Kopfwelle, welche der mit grosser Geschwindigkeit sich bewegende Meteorit mit sich führt, und die nach unseren Darlegungen in ihrer Natur als Knallwelle die primäre Ursache der Hauptdetonation bei einem Meteoritenfall darstellt. Seitdem

diese Ansicht ausgesprochen worden ist, sind noch weitere Beobachtungen gemacht worden,[1] welche die Richtigkeit der schon vielfach gestützten Theorie nur noch mehr erhärten können.

Somit ergibt sich denn einerseits, dass wir der Meinung Herrn Cleveland Abbe's, seine Erklärung stelle die wahre Theorie der Schallphänomene bei Meteoritenfällen dar, nicht beipflichten können, und anderseits, dass wir seinen Prioritätsanspruch für die richtige Erklärung des Meteoritenknalles nicht als begründet ansehen können.

---

[1] E. Mach, l. c.



Über die kinetische Theorie der inneren Reibung der Flüssigkeiten

von

Dr. **Gustav Jäger.**

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 2. März 1893.)

Wie ich schon in der Abhandlung »Zur Theorie der Flüssigkeiten«[1] zu erwähnen Gelegenheit hatte, ist es zur Erforschung des flüssigen Zustandes nicht so sehr am Platze. auf alle Einzelheiten direct einzugehen, als vielmehr vorerst das Bild in grossen Zügen zu fixiren, da wir für den ersteren Fall zu überaus verwickelten Darstellungen kämen, welche nur mit Mühe das in ihnen enthaltene Wesentliche erkennen lassen würden. Desshalb wollen wir auch bezüglich einer kinetischen Theorie der inneren Reibung der Flüssigkeiten uns die ganze Anlage möglichst einfach zu gestalten suchen.

Stellen wir uns vor, wir hätten zwei parallele, ebene horizontale Platten. Die untere befinde sich in Ruhe, die obere bewege sich in einer bestimmten Richtung mit der Geschwindigkeit u, ohne dass sie dabei ihre eigene Ebene verlässt, so dass der Abstand a der beiden Platten stets constant bleibt. Zwischen den beiden Platten befinde sich eine Kugel vom Radius r. Dieselbe habe eine Geschwindigkeit c, senkrecht zu den beiden Platten, und zwar soll c gegen u sehr gross sein. So oft die Kugel gegen eine Platte stösst, soll sie sofort reflectirt werden, als wäre sie vollkommen elastisch. Wird ausserdem der Elasticitätscoëfficient sehr gross angenommen, so wird die Zeit, während welcher die Kugel ihre Bewegungsrichtung

---

[1] Wien. Ber., CI, S. 920 ff.

umkehrt, verschwindend klein ausfallen. Immerhin soll diese Zeit genügen, der Kugel in der Richtung der Plattenebene jene Geschwindigkeit zu ertheilen, welche die Platte selbst hat. Das heisst, so oft die Kugel die untere Platte trifft, muss ihre Geschwindigkeit parallel zu den Platten gleich Null, beim Auftreffen auf die obere Platte gleich u werden. Das bedeutet nichts Anderes, als dass bei jedem Zusammenstosse mit der unteren Platte an dieselbe die Bewegungsgrösse mu abgegeben wird, wenn m die Masse der Kugel ist, und zwar sucht diese Bewegungsgrösse der Platte eine Geschwindigkeit in der Bewegungsrichtung der oberen Platte zu ertheilen. Das Entgegengesetzte findet bei der oberen Platte statt. Dieselbe erhält einen Zug, welcher ihrer Bewegungsrichtung entgegenwirkt.

Der Weg, welchen die Kugel beim Verlassen der unteren Platte bis zum Auftreffen auf die obere zurücklegt, ist $a-2r$, die Zeit, die dabei verstreicht, $\frac{a-2r}{c}$; die Zeit, welche zwischen zwei Stössen auf dieselbe Platte verstreicht, ist $2\frac{a-2r}{c}$, daher die Zahl der Stösse, welche eine Platte in der Zeiteinheit erfährt,

$$Z = \frac{c}{2(a-2r)}.$$

Die Kraft, welche also eine jede Platte in der Richtung ihrer eigenen Ebene erfährt, ist $\frac{muc}{2(a-2r)}$. Sind anstatt einer Kugel deren N vorhanden, so erhalten wir die Kraft

$$K = \frac{mNuc}{2(a-2r)} = \frac{mNc}{2\lambda}.u, \tag{1}$$

wenn wir $a-2r=\lambda$ setzen, wobei λ die Weglänge ist, welche eine Kugel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stössen zurücklegt.

Es ist also der Widerstand, den die beiden Platten bei einer Parallelverschiebung gegen einander erfahren, direct proportional der Verschiebungsgeschwindigkeit. Diesen Fall wollen wir nun auf die Flüssigkeiten übertragen und damit eine Erklärung für die innere Reibung derselben geben.

Die innere Reibung zeigt sich bekanntlich dann, wenn zwei neben einander befindliche Flüssigkeitsschichten mit verschiedener Geschwindigkeit fliessen. Es übt dann die schneller fliessende auf die langsamer fliessende eine Beschleunigung, diese auf jene eine Verzögerung aus. Wächst die Geschwindigkeit der Flüssigkeit von Schichte zu Schichte gleichförmig, so ist die Kraft, welche von einer Schichte auf eine zweite, im Abstande x befindliche ausgeübt wird,

$$R = \mu f \frac{u - u'}{x},$$

wobei f die Fläche der reibenden Schicht ist, u und u' die Geschwindigkeiten der zwei Schichten und μ eine Constante bedeutet, welche von der Natur der Flüssigkeit abhängt. Diese Constante nennt man den Reibungscoëfficienten. Wächst der Geschwindigkeitsunterschied nicht gleichförmig mit dem Abstande der Schichten, so wird die innere Reibung an verschiedenen Stellen der Flüssigkeit verschieden sein. Man hat dann zum Grenzwerthe von $\frac{u - u'}{x}$ überzugehen, und es wird

$$R = -\mu f \frac{du}{dx}.$$

Das negative Vorzeichen erklärt sich daraus, dass für die schneller bewegten Schichten die innere Reibung als Widerstand auftritt. Diese Formel für die innere Reibung hat schon Newton aufgestellt.

Denken wir uns demnach eine Flüssigkeitsschichte festgehalten, während wir eine zweite in der Entfernung Eins von der ersten mit der Geschwindigkeit Eins vorwärts bewegen, so müssen wir bei dieser Bewegung einen Widerstand überwinden, welcher für die Flächeneinheit der bewegten Schichte gleich μ, d. i. gleich dem Reibungscoëfficienten ist. Die Grösse desselben nach der kinetischen Theorie zu entwickeln, soll im Folgenden versucht werden.

Wir legen durch die Flüssigkeit horizontale Ebenen, welche von einander um den Abstand zweier Molekeln entfernt sind. Dieser Abstand wird sich nur um Weniges vom Durchmesser

einer Molekel unterscheiden. Wir wollen ihn daher gleich $2r$ setzen, wenn wir uns die Molekeln als Kugeln vom Radius r denken. Dieselben sollen sich wie die Kugeln bei unserem eingangs erwähnten Falle senkrecht zwischen den Ebenen mit der Geschwindigkeit c hin- und herbewegen. Die unterste Ebene sei in Ruhe, die oberste bewege sich mit einer bestimmten constanten Geschwindigkeit. Ist der Bewegungszustand in der Flüssigkeit stationär geworden, so muss sich jede Zwischenebene mit constanter Geschwindigkeit bewegen. Das ist aber nur möglich, wenn sie von der einen Seite ebenso viel Bewegungsgrösse empfängt, als sie nach der anderen abgibt, und für sämmtliche Ebenen ist dieser Fall wiederum nur möglich, wenn das Geschwindigkeitsgefälle in der Flüssigkeit ein constantes ist, das heisst, wenn der Geschwindigkeitsunterschied zwischen je zwei gleich weit entfernten Schichten dieselbe Grösse hat. Mithin erhalten wir das Geschwindigkeitsgefälle, wenn wir den Geschwindigkeitsunterschied zweier beliebiger benachbarter Ebenen durch ihren Abstand $2r$ dividiren. Also

$$\frac{du}{dx} = \frac{u_2 - u_1}{2r},$$

wenn die oberhalb liegende Ebene die Geschwindigkeit u_2, die darunter befindliche u_1 besitzt. Bilden wir nun den Ausdruck für die verzögernde Kraft, welche auf die Flächeneinheit der oberen Schichte entfällt, so ist derselbe

$$\mu \frac{du}{dx} = \mu \frac{u_2 - u_1}{2r}.$$

Diese Kraft muss gleich sein der Bewegungsgrösse, welche von den zwischen den zwei Ebenen hin- und herfliegenden Molekeln in der Zeiteinheit an die Flächeneinheit einer Ebene abgegeben wird. Natürlich ist nur jene Bewegungsgrösse zu verstehen, welche mit ihrer Richtung in die Ebene selbst fällt. Ist die Zahl der Molekeln in der Volumeinheit N, so ist jene Zahl, welche zwischen zwei Ebenen auf die Flächeneinheit entfällt, $2rN$ und die in der Zeiteinheit übergeführte Bewegungsgrösse nach Gleichung (1)

$$\frac{2rNmc}{2\lambda}(u_2 - u_1) = \frac{rNmc}{\lambda}(u_2 - u_1).$$

Wollen wir jetzt die Formel nicht mehr auf unseren fingirten Fall, sondern überhaupt auf die Flüssigkeitsreibung anwenden, so brauchen wir die Ebenen zwischen den Molekeln bloss wegzulassen und zu bedenken, dass die Molekeln nicht nach einer Richtung, sondern nach allen Richtungen des Raumes sich bewegen. Diese Bewegungen lassen sich aber durch drei auf einander senkrechte ersetzen. Wir wollen daher für die Zahl der Zusammenstösse nur den dritten Theil der obigen einführen. Dann wird die in der Zeiteinheit von einer Molekelschicht auf die nächste übertragene lebendige Kraft gleich

$$\frac{rNmc}{3\lambda}(u_2 - u_1)$$

sein, und diese Grösse ist wiederum gleich $\mu \frac{u_2 - u_1}{2r}$. Daraus folgt aber

$$\mu = \frac{2r^2Nmc}{3\lambda} = \frac{2r^2\rho c}{3\lambda}, \tag{2}$$

wenn wir $Nm = \rho$ setzen, wobei nun ρ nichts Anderes als die Dichte der Flüssigkeit bedeutet, da Nm die in der Volumeinheit enthaltene Masse ist.

Damit ist bereits eine Formel für den Reibungscoëfficienten einer Flüssigkeit gefunden, doch enthält dieselbe ausser der Dichte ρ nur Grössen, welche unmittelbar nicht gegeben sind. Vor Allem wollen wir einen Ausdruck für die mittlere Weglänge λ suchen. Wiederum handelt es sich uns nur darum, einen angenähert richtigen Werth dafür zu finden.

Vorausgesetzt, die Molekeln seien Kugeln, welche im flüssigen Zustande sehr nahe an einander liegen, so wird für die Berechnung der mittleren Weglänge nichts geändert, wenn wir annehmen, die in Betracht gezogene Molekel sei bloss ein materieller Punkt, während alle benachbarten Molekeln den doppelten Radius haben. Dies ist natürlich nur geometrisch denkbar, indem sich ja die einzelnen Kugeloberflächen der Nachbarmolekeln dann durchschneiden und nur einen kleinen Raum übrig lassen, innerhalb dessen sich der Punkt bewegen kann. Dieser Raum kann aber von der Kugelgestalt nicht sehr erheblich abweichen, wie man aus der Zeichnung ersieht, die

einen Querschnitt des Molekelsystems veranschaulicht. In derselben ist der schraffirte Theil jener Raum, in welchem sich der Punkt bewegen kann. Wir suchen desshalb die mittlere Weglänge eines Punktes in einer Kugel, welche dem zur Bewegung freien Raume eingeschrieben ist. Dieselbe ist gleich der Summe sämmtlicher Wege, welche der Punkt von einem bestimmten Punkte der Kugeloberfläche zu allen übrigen Punkten derselben zurücklegen kann, dividirt durch die Zahl dieser Wege. Nehmen wir nun an, eine unendlich grosse Zahl von Punkten sei auf der Kugeloberfläche gleichmässig vertheilt, und es kommen auf die Flächeneinheit N_1 Punkte, so ist die Zahl sämmtlicher in Betracht kommenden Punkte $4\pi a^2 N_1$. Die Entfernung zweier beliebiger Punkte ist gegeben durch

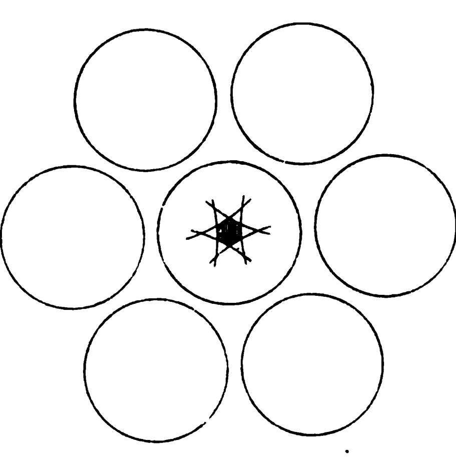


Fig. 1.

$$\sqrt{a^2+a^2-2aa\cos\varphi} = a\sqrt{2(1-\cos\varphi)},$$

wenn a der Radius der Kugel und φ der Winkel der Radien ist, welche zu den beiden Oberflächenpunkten gehören. Die Gesammtzahl der Wege, welche dieselbe Länge haben, ist dann

$$2\pi a^2 N_1 \sin\varphi\, d\varphi$$

und die Summe aller dieser Wege

$$2\pi a^3 N_1 \sqrt{2(1-\cos\varphi)} \sin\varphi\, d\varphi.$$

Integriren wir diesen Ausdruck von 0 bis π, so haben wir die Gesammtsumme aller möglichen Wege, und die mittlere Weglänge erhalten wir dann, wenn wir noch durch $4\pi a^2 N_1$ dividiren. Mithin ist

$$\lambda = \frac{a}{2}\int_0^{\pi} \sqrt{2(1-\cos\varphi)}\,\sin\varphi d\varphi = a\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}\,\sin\varphi d\varphi =$$

$$= 4a\int_0^{\pi} \sin^2\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\frac{\varphi}{2} = 4a\left[\frac{\sin^3\frac{\varphi}{2}}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{4a}{3}. \quad (3)$$

Nun müssen wir aber berücksichtigen, dass alle Molekeln in Bewegung sind. Dem können wir dadurch Rechnung tragen, dass wir für die mittlere Geschwindigkeit c einer Molekel die mittlere relative Geschwindigkeit einführen. Dieselbe wird in derselben Weise gefunden, wie es Clausius[1] für die Berechnung der mittleren relativen Geschwindigkeit einer Gasmolekel gethan hat, und es ergibt sich für dieselbe der Werth $\frac{4}{3}c$. Wenn die relative Geschwindigkeit aber grösser ist als die absolute, so muss im selben Masse die mittlere Weglänge kleiner werden; wir erhalten daher aus der Gleichung (3)

$$\lambda = a.$$

Nun ist aber, wie man unmittelbar aus der Zeichnung ersieht

$$a = d - 2r,$$

wenn d die Entfernung der Mittelpunkte zweier Molekeln und r der Radius derselben ist. Daher ist

$$\lambda = d - 2r = d\left(1-\frac{2r}{d}\right) = 2r\left(1-\frac{2r}{d}\right) = 2r\left(1-\sqrt[3]{\frac{b}{v}}\right).$$

Diese Formel rechtfertigt sich insofern, als man überall dort, wo d und $2r$ nicht als Differenz vorkommen, dieselben mit einander vertauschen kann, da ja d um sehr wenig grösser als $2r$ ist. Wenn ferner b das Volumen ist, welches die Molekeln thatsächlich mit Materie ausfüllen, v jenes, welches ihnen überhaupt zur Verfügung steht, so

$$\frac{(2r)^3}{d^3} = \frac{b}{v}$$

---

[1] Theorie der Gase, S. 61 ff

Setzen wir schliesslich den für λ gefundenen Werth in die Gleichung (2) ein, so ergibt dies

$$\mu = \frac{r\rho c}{3\left(1-\sqrt[3]{\frac{b}{v}}\right)}. \tag{4}$$

Was nun die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsmolekeln c anbelangt, so habe ich zu deren Berechnung bereits mehrere Methoden angegeben, welche in den Abhandlungen »Die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsmolekeln«,[1] »Über die Abhängigkeit der Capillaritätsconstanten von der Temperatur und deren Bedeutung für die Theorie der Flüssigkeiten«,[2] »Zur Theorie der Flüssigkeiten«[3] zu finden sind. In letzter Abhandlung habe ich auch eine Gleichung für die Wärmeausdehnung der Flüssigkeiten von der Form

$$v = b + \frac{R_1}{P_0} \cdot \frac{1+\alpha t}{1-\varepsilon t} \tag{5}$$

abgeleitet, wobei v und b dieselbe Bedeutung wie in Gleichung (4) haben. Kennt man die Volumina einer Grammmolekel Flüssigkeit bei zwei verschiedenen Temperaturen, so lässt sich daraus b und $\frac{R_1}{P_0}$ berechnen, da ε, der Temperaturcoëfficient der Capillaritätsconstanten ebenfalls eine experimentell bestimmbare Grösse ist. P_0 entspricht dem inneren Drucke der Flüssigkeiten bei 0°, ferner ist

$$R_1 = \frac{Nmc_0^2}{3},$$

wenn c_0 die mittlere Geschwindigkeit der Molekeln bei derselben Temperatur bedeutet und Nm die Masse einer Grammmolekel ist. Kennt man daher P_0, so ist auch c_0 bekannt. Dann enthält aber die Gleichung (4) nur noch die eine Unbekannte r den Radius einer Molekel. Man kann somit diese Gleichung zur

---

[1] Wien. Ber., XCIX, S. 860 ff.

[2] Ebenda, C, S. 268.

[3] Ebenda, CI, S. 920.

Berechnung der Grösse der Molekeln benützen und erhält für den Radius einer Molekel

$$r = \frac{3\left(1-\sqrt[3]{\frac{b}{v}}\right)\mu}{pc}.$$

Wählen wir für Wasser zur Berechnung des b die Temperaturen 20° und 60°, so sind die entsprechenden Volumina nach Rosetti[1] für 1 g Wasser 1·00174 und 1·01691 cm^3. Für den Temperaturcoëfficienten der Capillaritätsconstanten fand ich $\varepsilon = 0{\cdot}00232$.[2] Setzen wir noch $\alpha = 0{\cdot}00366$, so folgt $b = 0{\cdot}943$, $\frac{R_1}{P_0} = 0{\cdot}052$. Für den inneren Druck P_0 fand ich als Mittel nach verschiedenen Methoden 276.10^7 (C. G. S.).[3] Daraus folgt nach Obigem, da $Nm = 1$ ist,

$$c_0 = 20800\,cm.$$

Da wir 20° und 60° als Temperaturintervall zur Berechnung des b und $\frac{R_1}{P_0}$ genommen haben, so wollen wir r für die Mitteltemperatur 40° bestimmen. Für diese Temperatur ist nach Poiseuille $\mu = 0{\cdot}0066$,[4] ferner $v = 1{\cdot}0077$. Der Werth von r erleidet keine besondere Einbusse, wenn wir für p und c die Werthe, welche bei 0° gelten, einsetzen. Man erhält sodann $r = 20{\cdot}8.10^{-9}\,cm$. Mithin ist der Durchmesser der Wassermolekel

$$\delta = 42.10^{-9}\,cm.$$

Für den Äther wurde b und $\frac{R_1}{P_0}$ aus den Werthen des Volumens bei 0° und 30° berechnet. Setzen wir das Volumen bei 0° gleich Eins, so erhalten wir nach der Gleichung

$$v = (1+at+bt^2+ct^3)v_0$$

---

1 Wüllner, Experimentalphysik, III, S. 77.

2 Wiener Berichte, C, S. 258.

3 Ebenda, CI, S. 926.

4 Wüllner, Experimentalphysik, I, S. 386.

für 30° den Werth 1·04829, wenn wir nach Kopp $a = 0{\cdot}00148026$, $b = 0{\cdot}0000035$, $c = 0{\cdot}000000027$ [1] setzen. Der Temperaturcoëfficient der Capillaritätsconstanten ist $\varepsilon = 0{\cdot}00607$; daraus folgt $b = 0{\cdot}8647$, $\frac{R_1}{P_0} = 0{\cdot}1353$. Für den inneren Druck P_0 fand ich 45.10^7 (C. G. S.). Ferner ist $Nm = 0{\cdot}736$ zu setzen. Demnach erhalten wir

$$c_0 = 15800\,cm.$$

Für die Temperatur 10° wird nach Handl und Přibram[2] der Reibungscoëfficient $\mu = 0{\cdot}0026$, das Volumen $v = 1{\cdot}015$. Aus diesen Werthen erhalten wir dann $r = 34{\cdot}9.10^{-9}\,cm$. Es ist desshalb der Durchmesser der Äthermolekel

$$\delta = 70.10^{-9}\,cm.$$

Fügen wir noch hinzu, dass wir für den Mittelwerth des Durchmessers der Wassermolekel nach sechs verschiedenen Methoden $43.10^{-9}\,cm$, für jenen der Äthermolekel als Mittel aus fünf Berechnungsarten $76.10^{-9}\,cm$ [3] erhalten, so müssen wir gestehen, dass diese Werthe mit den unserigen ausgezeichnet übereinstimmen, was wohl als bedeutende Stütze für die Richtigkeit unserer Theorie der inneren Reibung der Flüssigkeiten gelten kann.

Nachdem wir den Werth für den Durchmesser einer Molekel kennen, ist es auch nicht mehr schwer, nach der Gleichung

$$\lambda = \delta\left(1 - \sqrt[3]{\frac{b}{v}}\right)$$

den absoluten Werth der mittleren Weglänge zu berechnen. Es ergibt sich für

Wasser............. $\lambda = 91.10^{-11}\,cm$
Äther .... $363.10^{-11}\,cm$

Wir haben also bei den Flüssigkeiten zwischen der mittleren Weglänge und der Grösse einer Molekel gerade das verkehrte

---

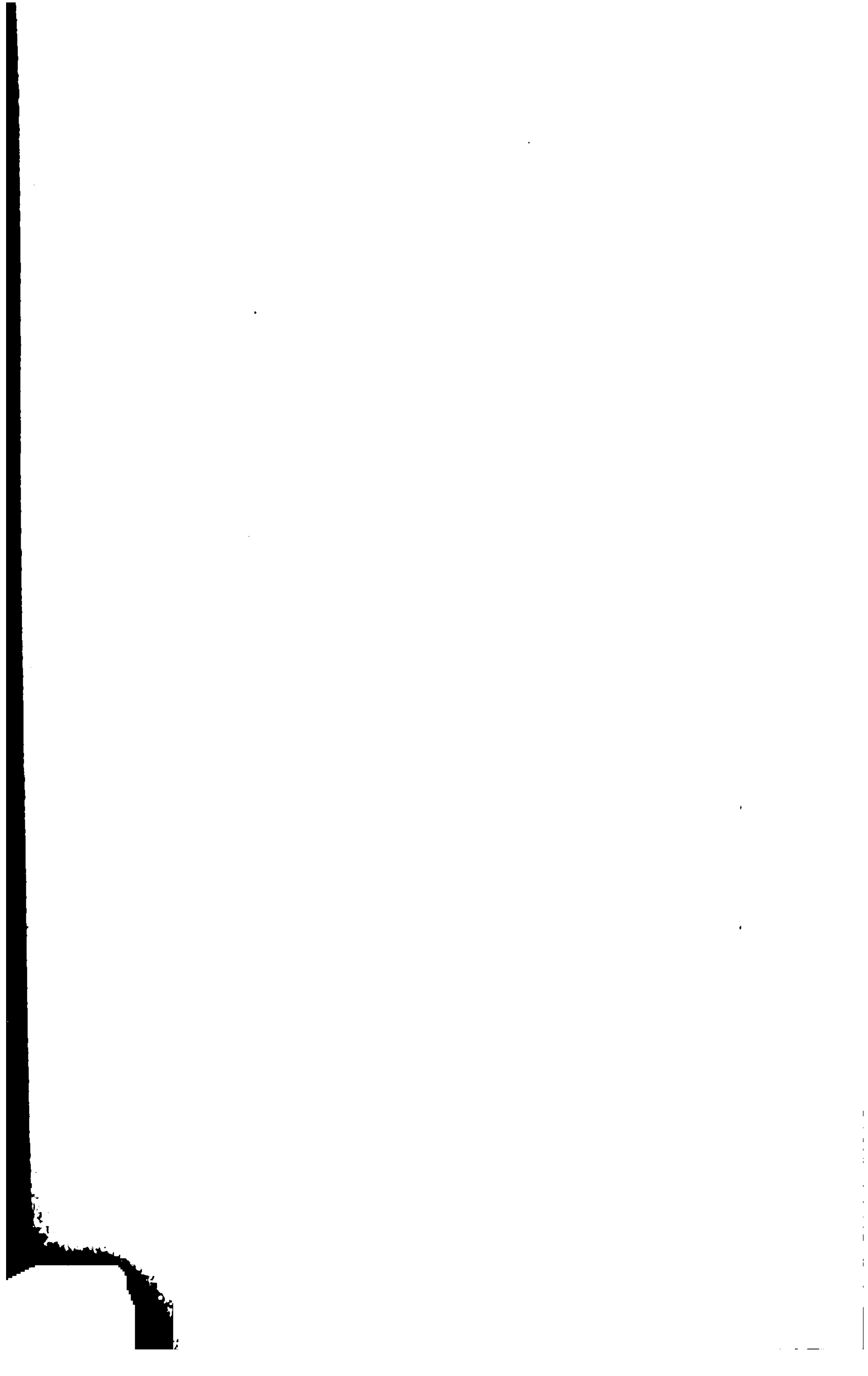
[1] Ebenda, III, S. 83.
[2] Wien. Ber., LXXX, S. 35.
[3] Monatshefte für Mathematik und Physik, III, S. 263.

Verhältniss wie bei den Gasen. Hier ist die mittlere Weglänge bedeutend grösser, dort bedeutend kleiner als der Durchmesser der Molekel.

Bekanntlich nimmt die innere Reibung mit wachsender Temperatur erheblich ab. Es entspricht diesem Verhalten unsere Gleichung

$$\mu = \frac{r\rho c}{3\left(1-\sqrt[3]{\frac{b}{v}}\right)}$$

thatsächlich insoweit, als mit wachsender Temperatur der Ausdruck $1-\sqrt[3]{\frac{b}{v}}$ ziemlich rasch zunimmt, was auf eine Verkleinerung des μ hinausläuft. Freilich müssen wir bedenken, dass auch c eine Function der Temperatur ist, und zwar von der Beschaffenheit, dass c mit der Temperatur wächst. Ich halte es aber nicht für erlaubt, aus der bekannten Abnahme des Reibungscoëfficienten die Änderung des c mit der Temperatur bestimmen zu wollen; denn wenn wir überlegen, dass ja nicht einmal bei der Theorie der Gasreibung, wo die Verhältnisse doch viel klarer zu Tage liegen als bei der Flüssigkeitsreibung, eine Übereinstimmung mit der Beobachtung vorhanden ist, insoweit sich die Theorie auf die Änderung der Reibung mit per Temperatur bezieht, so können wir unmöglich mit Sicherheit annehmen, dass unsere Formeln, die wir nur mit Hilfe mehrerer Vernachlässigungen und Hilfsannahmen erhalten haben, in jeder Beziehung mit den Thatsachen übereinstimmen.



Bahnbestimmung des Meteors vom 7. Juli 1892

von

Prof. **G. v. Niessl** in Brünn.

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. Februar 1893.)

Alle Meteorbahnen, welche ich bisher kennen gelernt habe, erwiesen sich, insoferne genauere Feststellungen möglich waren, als solche, in welchen die betreffenden Körper vor dem Eintritte in das Perigeum beobachtet wurden, d. h. als sogenannte absteigende Bahnen.

Die Frage, ob es aufsteigende Meteorbahnen gibt, oder richtiger, ob solche durch Beobachtungen nachgewiesen sind, ist schon vielfach berührt worden. Man muss dabei selbstverständlich jene Fälle ausscheiden, in welchen ganz abnorme, unregelmässig gekrümmte Bahnen, infolge der Wirkung des Luftwiderstandes auf besonders gestaltete, namentlich sehr kleine Körper entstehen, deren wirkliche Form jedoch aus Beobachtungen kaum zu ermitteln ist, obwohl derartige Erscheinungen unter den Sternschnuppen nicht allzu selten wahrgenommen werden.

Die bekannten Betrachtungen Bessels[1] über regulär aufsteigende Meteorbahnen, beziehen sich eigentlich nur auf solche deren Verlängerung nach rückwärts in den Erdkörper treffen würde. Man hat hin und wieder geglaubt, die Existenz solcher gleichsam aus der Erde aufsteigenden Meteore nachgewiesen zu haben, woraus Argumente gegen den kosmischen Charakter der Erscheinung abgeleitet wurden. Allein Bessel spricht mit Recht diesen Bahnbestimmungen jede Beweiskraft ab, da sie, abgesehen von den unvermeidlichen Mängeln der Beobachtung, auch rechnerisch auf unrichtigen Voraussetzungen beruhten

[1] Astronomische Nachrichten, Nr. 380.

und daher fehlerhaft waren. Dieses Urtheil wird von allen Jenen bestätigt, welche es je unternommen haben allgemeinere Methoden auf die Berechnung von Meteorbahnen anzuwenden.

Diejenigen Meteoriten, deren Perigeum nicht innerhalb die feste Erdrinde, sondern in die atmosphärische Hülle fällt, beschreiben vom Eintritte in die Atmosphäre, bis zu jenem Punkte, welcher der Erde am nächsten liegt, absteigende Bahnen, sie würden jedoch, sobald sie ihren Lauf noch weiter verfolgten, sich wieder aufsteigend bewegen. Man kann, insbesondere auch vom kosmischen Standpunkte, kaum anstehen, die allgemeine Möglichkeit solcher Bahnen zuzugeben. In den höchsten atmosphärischen Schichten kann der Widerstand wohl noch ein so geringer sein, dass, während des oft nur wenige Secunden dauernden Laufes durch dieselben, weder ein namhafter Verlust an Geschwindigkeit, noch ein allzugrosser Abgang an Masse und auch keine Hemmung erfolgt. Es wäre daher nicht gerade widersinnig anzunehmen, dass sich solche Körper auch noch über ihr Perigeum hinausbewegen und selbst nicht undenkbar, dass sie die Atmosphäre auch wieder verlassen könnten.

Mit der Annahme der Möglichkeit solcher aufsteigenden Meteorbahnen ist jedoch die Frage über die Wahrscheinlichkeit, sie an einem Punkte der Erdoberfläche auch wirklich zu beobachten, noch keineswegs erledigt. Da uns die meteorischen Massen nur durch die Lichtentwicklung sichtbar werden, welche aus dem Widerstande in der Atmosphäre entspringt, so kann nur die Erfahrung darüber entscheiden, ob die Grenzen, innerhalb welcher wir Meteore noch beobachten können, nicht so tief liegen, dass schon im absteigenden Theile der Bahn entweder eine allmälige Auflösung oder momentane Hemmung nothwendig stattfinden müsse.

Es war mir daher stets von besonderem Interesse, alle Meteorbahnen, deren Radiationspunkte in der Nähe des Horizontes lagen — und offenbar können nur solche in Frage kommen — mit aller Sorgfalt in dieser Hinsicht zu untersuchen, aber ich habe keinen einzigen Fall finden können, in welchem, auf Grund hinlänglich zahlreicher und auch verlässlicher Beobachtungen, eine aufsteigende Bahn, d. h. die Lage des Radianten

unter dem Horizonte des Endpunktes geometrisch wahrscheinlich gewesen wäre. Freilich darf man die Möglichkeit, welche einzelne Beobachtungen zulassen, nicht mit der Wahrscheinlichkeit verwechseln, die aus dem Complex sämmtlicher zu einer Erscheinung gehörigen Beobachtungen sich ergibt.

Meteorbahnen aus Radiationspunkten in der Nähe des Horizontes sind nicht wenige bekannt. Einen der wichtigsten Grenzfälle bildet die merkwürdige Feuerkugel, welche am 5. September 1868 vielfach beobachtet wurde, da sie in einer sehr langen Bahn, ungefähr von Ost nach West, aus der Gegend über Belgrad bis über Vendôme in Frankreich gezogen ist.

Tissot hat dieser Erscheinung eine besondere Untersuchung gewidmet,[1] welche ihn zu dem Resultate geführt hat, dass »die grösste Annäherung der Bahn an die Erde 111 *km* über Belgrad, das Ende 307 *km* über der Gegend bei Tours stattfand, so zwar, dass die ganze beobachtete Bahn eine von Belgrad gegen Westen hin stark (14°) aufsteigende gewesen wäre.

Ich selbst habe sowohl die von Tissot benützten, als auch alle anderen mir sonst zugänglich gewesenen Beobachtungen dieses merkwürdigen Ereignisses ebenfalls einer genauen Discussion unterzogen[2], wobei ich nach allgemeinen Methoden zu dem Resultate gelangt bin, dass die Annahme einer aufsteigenden Bahn aus der Gesammtheit der Beobachtungen nicht als die wahrscheinlichste hervorgeht. Ich fand nämlich, dass der Radiationspunkt ($\alpha: 13°9, \delta: -2°0$ mit $\pm 1°$ wahrscheinlichem Fehler) am Endpunkte der Bahn noch in 0°1 Höhe, die Bahn also eine absteigende war. Die Möglichkeit einer schwach aufsteigenden Bahn ist, bei der vorhandenen Unsicherheit, zwar weder in diesem, noch in einigen ähnlichen Fällen ganz ausgeschlossen, doch kann man sie durchaus nicht als erwiesen betrachten.

Das Meteor vom 7. Juli 1892, dessen Bahn den Gegenstand vorliegender Untersuchung bildet, war eine in vielen Stücken analoge Erscheinung. Es liegt hier ebenfalls eine ungewöhnlich

---

[1] Tissot, Sur le premier Bolide du 5. Septbr. 1868. Comptes rendus der Pariser Akademie, T. 69, p. 326.

[2] Niessl, Über die Bahn des Meteors vom 5. September 1868. Verhandl. des naturf. Ver. in Brünn, 18 Bd.

lange Bahn in den obersten Regionen der Atmosphäre vor, doch in dem gegenwärtigen Falle kann ich, nach eingehendster Prüfung aller Umstände, nicht umhin zu erklären, dass dieselbe wirklich als eine im letzterwähnten Sinne aufsteigende den vorhandenen Beobachtungen allein Genüge leistet. Es scheint mir dies der erste derartige Fall zu sein, welcher kaum mehr in Zweifel gezogen werden kann und daher besonderes Interesse beansprucht.

Die Sicherstellung des Resultates wäre ohne zahlreiche, gute Beobachtungen nicht zu erreichen gewesen. Diese verdanke ich zunächst dem freundlichen Entgegenkommen der geehrten Redaction der »Neuen freien Presse«, welche meinem Aufrufe um Mittheilung von Beobachtungen jene grosse Verbreitung gab, die, bei dem in Frage kommenden ausgedehnten Wahrnehmungsgebiete, allein zum Ziele führen konnte. Es ist entweder ein besonders glücklicher Zufall oder ein Zeichen zunehmenden Interesses an derlei Erscheinungen, dass die Zahl guter Beobachtungen, welche sich entweder auf Gestirne beziehen oder durch Messungen sichergestellt wurden, diesmal relativ grösser als sonst ist.

Ausser den im Texte genannten Beobachtern, welche vielfach in weitgehendster Weise meinen Bitten entsprochen haben, bin ich noch den Herren k. k. Oberbergrath F. Seeland in Klagenfurt, Professor C. Prochaska in Graz und Professor M. Marek in Karlstadt für Mittheilung von Wahrnehmungen zu lebhaftem Danke verpflichtet.

Bei Ableitung der Resultate habe ich fast durchweg die von mir zuletzt benützten Methoden wieder angewendet und nur etwaige Abweichungen besonders hervorgehoben. Auch hinsichtlich der vorkommenden Kürzungen, sowie bezüglich der kosmischen Betrachtungen kann auf meine früheren zumeist in diesen Schriften erschienenen Abhandlungen verwiesen werden.

Beobachtungen.

Mähren, Nieder- und Oberösterreich.

1. Eisgrub (34°18′; 48°48′.) Nach einer Mittheilung des Herrn Notars H. Rottleuthner wurde das Meteor hier von

Arbeitern wahrgenommen. Sie berichteten »es sei ein Drache mit feurigem Schweife in ganz geringer Höhe langsam dahingeflogen«.

2. Wolkersdorf (34°10′; 48°24′). Die wagrechte Bahn am östlichen, südlichen und theilweise südwestlichen Himmel betrug mehr als einen Quadranten. Anfang ungefähr gegen Pillichsdorf (A: 326°) oder Marchegg (A: 293) hin, $h = 6°$ (gemessen); Ende gegen Ebersdorf (A: 51°) und den Kahlenberg (A: 45°), $h = 6°$. Dauer 13^s, nachträglich gezählt und als sehr sicher bezeichnet, mit Rücksicht auf Nebenumstände. (Herr Lehrer A. Gaipl.)

3. Mauthausen (32°11′; 48°15′) $9^h 5^m$. Leuchtender Himmelskörper in Form eines Kometen, langsam, in ganz horizontaler Bahn, während des Zuges flammende Körpertheilchen absondernd, immer kleiner werdend und schliesslich in der Richtung gegen Enns (A: 45°) gänzlich erlöschend. (Zeitungsbericht.)

4. Pöchlarn (32°52′; 48°13′). Ein länglicher, feuriger Körper, von schwach gelblichem Lichte, bewegte sich am südöstlichen Himmel etwa 20° hoch in horizontaler Bahn gegen SW, wo er, ohne dass eine Senkung der Bahn wahrnehmbar gewesen wäre, verschwand. (N. Fr. Presse, 10013.)

5. Stadlau (34°8′; 48°13′). Richtung gegen SW, Farbe weiss, D: 4—5^s (N. Fr. Presse). Herr A. Hauser berichtete mir überdies: die Flugrichtung war parallel zur Bahnlinie Pressburg—Wien (aus A: 266°), Bahn sehr niedrig, blendend weisses Licht, Funken sprühend. D: 5—8^s.

6. Kremsmünster (31°48′; 48°3′). Die folgende sehr wichtige Beobachtung verdanke ich der besonderen Gefälligkeit des Herrn Adjuncten der Stiftssternwarte, Franz Schwab. Das Meteor fiel um $9^h 3^m$ mitteleuropäischer Zeit. Es bewegte sich in sehr flacher, eben noch merkbar gekrümmter Bahn in horizontaler Richtung von E über SE nach S. Flugdauer 5—7^s; 1—2^s nachleuchtend. Der Anfangspunkt hatte ein östliches Azimut von ungefähr 73°, der Endpunkt ein westliches von 15°. Für die Höhen dieser beiden Punkte konnte zwar keine bestimmte Angabe erhalten werden, wohl aber für einige Punkte innerhalb der Bahn. Der Schüler Seng bezeichnete zwei Punkte

an Hausdächern, welche von seinem Standpunkte aus, die Bahn begrenzten. Der eine hat 60° östl. Azimut, bei 7° Höhe, der andere 5° westl. Azimut und 8° Höhe. Schüler Adler gibt die Höhen kleiner an, bei 301° Azimut, 5°, bei 324° Azimut 4°. Zu Beginn der Erscheinung — berichtete Seng — bestand das Meteor aus einer Kugel mit kegelförmigem Schweife, welcher ganz so aussah, wie der zurückbleibende Satz einer Rakete. In der Mitte der Bahn nahm die Helligkeit der Kugel ab, die des Schweifes, in dem sich knotenartige Verdickungen bemerkbar machten, zu. Am Schlusse erschien der Schweif nicht mehr deutlich zusammenhängend, die Verdickungen waren so stark, dass das Meteor einer »Geissler'schen Röhre« glich. Die Farbe war glänzend roth, intensiver roth als das Licht des Mars, die Helligkeit trotz Mondlicht und Dämmerung grösser als die der Venus im grössten Glanze.

7. Gainfarn (33° 52′; 47° 57′). $9^h 6^m$. Vom Wasserleitungsdamme aus erschien das Meteor über Kottingbrunn (*A*: beiläufig 290°), zog in geringer Höhe parallel zum Horizonte gegen SSW und verschwand oberhalb Enzesfeld (etwa 28° Azimut) (N. Fr. Presse, 10012.)

8. Lahnsattel (33° 10′; 47° 47′). Kometenartige Lichterscheinung, Richtung: NE—SW, den südöstlichen Himmelsraum in nicht bedeutender Höhe durchstreifend und wenige Secunden sichtbar (Herr F. Wallner.)

Steiermark und Kärnten.

9. Donawitz (32° 44′; 47° 23′). 9^h. Schönes Meteor, E—W wagrecht ziehend und Lichtfunken hinter sich lassend. (Durch Herrn Prof. C. Prochaska, sowie auch Nr. 10 bis 14, 19 und 20.)

10. Pöllau (33° 30′; 47° 18′). 9^h. Prachtvolles Meteor in Form eines Balkens, ganz niedrig, von E nach W, durch etwa 10ˢ. (Herr J. Gogg.)

11. Weiz (33° 17′5; 47° 13′). $9^h 5^m$. In W prächtiges Meteor in Form eines glänzend weissen Streifens. Richtung SE—NW in mässiger Höhe. *D*: 5ˢ.

12. Fohnsdorf (32° 20′; 47° 12′5). $8^h 50^m$. Richtung E—W, Lauf ganz horizontal, sehr niedrig und durch 1½ Minuten noch phosphorescirend. (Herr A. Polz.)

13. Graz (33° 8′; 47° 4′). $9^h 4^m$. Herr Prof. Prochaska beobachtete hier selbst das Meteor. Es bewegte sich in horizontaler Bahn von ESE nach WSW. Bei ungefähr A: 340° war $h = 9°$ (gem.) Das Ende konnte nicht gesehen werden. Licht goldgelb.

14. Reichenfels (32° 24'5; 47° 0'5). $9^h 10^m$. Richtung: NE—SW, gelbes Licht, D: 10^s.

15. Glandorf (32° 2'8; 46° 45'4). Bahn horizontal, 9° hoch (gem.) Richtung: NE—SW, Ende verdeckt, D: 2—3^s. (Herr Forstverwalter F. Kofler.)

16. St. Georgen unterm Stein (32° 35′; 46° 43′). 9^h. Das Meteor hatte die Richtung vom Weissegger her (A: 293°), wurde jedoch erst am südöstlichen Himmel als Feuerkugel mit anschliessendem, mächtigen Streifen von gelbem Lichte erblickt. Ungefähr als es über dem Gipfel des Rainkogels in A: 4°, h: 8° (gem.) hinzog, löste sich der Kopf des Meteors, ohne Funkensprühen oder sonstige Anzeichen eines gewaltsamen Bruches, vom Schweife und es entstand zwischen beiden ein sich mehr und mehr erweiternder Zwischenraum, da der Kopf sich etwas schneller weiter bewegte, als der Schweif. Die Lichtstärke nahm schnell ab, das Ende war jedoch durch Bäume verdeckt. (Herr Pfarrer P. Pl. Kainbacher.)

17. Pörtschach (31°48′; 46° 38′). 9^h. Richtung: ENE bis WSW, in horizontaler Bahn über den See ziehend. D: 5^s. (Herr Dr. Kallab.)

18. Moschganzen (33° 39′; 46° 25'5). $9^h 3^m$. Einem Drachen gleich, mit röthlichem Kopfe und weissem Lichtschweife, zog das Meteor funkensprühend ganz niedrig in wagrechter Bahn, Richtung: E—W, und erlosch plötzlich in gleicher Höhe. Nach einer späteren Mittheilung des Herrn Beobachters wurde es zuerst etwa in 348° Azimut gesehen und es verschwand hinter Bäumen in 38° Azimut. Die Höhe wurde durch zwei Messungen in der Bahnmitte zu 6° und 8°, im Mittel 7° gefunden. (Herr Stationsvorstand G. Gilg.)

19. Laporje (33° 15'5; 46° 21′). 9^h. Das Meteor kam von der Stelle, wo zur Zeit der Mond stand; es war hellgelb mit grünem Streifen dahinter. Das Ende wurde nicht gesehen. (Herr Planker.)

20. St. Marein bei Erlachstein (33° 11′; 46° 14′). Richtung: NE—SW, schwefelgelb, zuletzt sich in Funken auflösend. (Herr F. Jurkovič.)

Küstenland und Dalmatien.

21. Triest (31° 25'3; 45° 38'6). *a)* Herr P. Gialuss. hatte die besondere Gefälligkeit, die Specialkarte seiner Umgebung mit den eingezeichneten Azimuten zu übersenden. Er berichtete dazu: Es mögen einige Minuten nach 9^h gewesen sein, als meine Begleiterin mich auf eine fast gerade im Ostpunkte hinter den dortigen Hügeln (nach der Karte in *A*: 280°) aufsteigende Rakete aufmerksam machte, welche jedoch gleich einen horizontalen Lauf nahm, sich bis zu einer Höhe von beiläufig 16° (gem.) am südlichen Himmel erhob und weit gegen W hin, nachdem sie fast den halben Himmel durchzogen hatte (*A*: 45°, *h*: 11°, gem.), erlosch. Die Farbe ging ins Röthliche.

b) Herr E. Böhme sah nur den letzten Theil der Bahn, welche nach dem ersten Eindrucke Richtung ENE—WSW hatte und schätzungsweise 20—25° über dem Horizonte befunden wurde. Der Herr Beobachter, welcher mit dem Vorgenannten in gar keiner Verbindung stand, war auf meine Bitte später ebenfalls so freundlich, die entsprechenden Azimute, sowie die scheinbare Flugrichtung in die Specialkarte einzutragen und die Höhen mit dem Gradbogen zu messen. Hiernach ergab sich für den ersten Punkt *A*: 303°, *h*: 32°, für das Erlöschen *A*: 23°, *h*: 17°. Die eingezeichnete scheinbare Flugrichtung geht aus *A*: 257°, *D*: 2ˢ. Die Feuerkugel war gelblichweiss, von schwacher Leuchtkraft und hinterliess einen etwa 2ˢ nachleuchtenden gelben Streifen. Für die folgende Untersuchung erscheint es nicht unwichtig, dass Herr Böhme aus eigenem Antriebe erwähnt, das Meteor sei ganz bestimmt am Himmel erloschen, da er es sehr genau verfolgt habe und seine Aussicht über das Meer von S bis gegen W ganz frei war, so dass er es bis an den Horizont hätte sehen müsssen, wenn es länger sichtbar geblieben wäre.

22. Abbazia (31° 58′; 45° 20′). Nach 9^h. Richtung: ENE bis WSW, mit nur 4° scheinbarer Neigung gegen den Horizont, über den Quarnero hinziehend. (Herr Prof. W. Kriesche.) Ein

ungenannter Beobachter schrieb mir, er habe das Meteor von E kommen und nach 8 Sec. hinter dem Monte Maggiore (etwa 30° Azimut) verschwinden sehen. Ein Streifen blieb zurück.

23. Pola (31° 31′; 44° 52′). $9^h\,2 \cdot 5^m$ mitteleuropäische Zeit. Der Director des k. und k. hydrographischen Amtes in Pola, Herr R. Müller, hat das Meteor hier in Gesellschaft seiner Gemahlin, welche es zuerst bemerkte, beobachtet, und einige Zeit nachher, da er sich nicht am Beobachtungsorte befand, mir nach der Erinnerung für den Anfang A: 325°, für das Erlöschen A: 25° und für die beiläufige Höhe der »ungefähr horizontalen Bahn« 20° angegeben. Als er selbst die Feuerkugel sah, war sie schon nahe an Süd und sie erlosch nach kaum 3^s. Mehrere Wochen später hatte der Herr Beobachter die Güte, eine Nachmessung mit dem Meteoroskop vorzunehmen, wobei erhalten wurde: I. A: 330°, h: 26°; II. A: 25°, h: 20°. Das Meteor war etwa Jupiter gleich.

24. Spalato (34° 6′5; 43° 20′5). Nach 9^h. Herr Dr. A. Mahkovec berichtete mir, dass er das Meteor zuerst am südlichen Himmel gesehen, nachdem es einen langen Bogen beschrieben hatte. »Es kam etwas nördlich von Macarsca her und erlosch nach 2—3^s etwa 25° (gem.) über der Südspitze der Insel Bua« (A: 59°).[1]

25. Vergorac (35° 2′2; 43° 12′4). Nach 9^h. Richtung aus ENE, über Ljubuski (liegt von Vergorac in 275° Azimut) und Vergorac, scheinbar sehr nahe, einen blendend weissen Streifen zurücklassend, in nicht zu schnellem Fluge. (Herr A. Thara.)

26. Cattaro (36° 13′5; 42° 24′). Das Meteor wurde um $9^h\,15^m$ von mehreren Artillerieofficieren auf der Terrasse des mitten in der Einfahrt in die Bocche di Cattaro gelegenen Seeforts Mamula beobachtet. Nach der ersten Mittheilung erschien die Feuerkugel über Punta d'Arza (A: 288°), ging in einem sehr flachen Bogen über Mamula, um hierauf über Punta d'Ostro (A: 83°5) nach 15^s zu verschwinden. Sie war ungefähr von sechsfacher Grösse des Jupiter, mit stark röthlich strahlendem Glanze und hinterliess eine lange sichtbare, feurige Spur.

---

[1] Es ist offenbar das östliche Ende der Insel gemeint, welche gegen Süden keine ausgezeichnete Spitze besitzt.

Herr Hauptmann Bscheiden, dem ich diese wichtige Nachricht verdanke, hatte später die Gefälligkeit, die Bahn nach Sternbildern genauer zu fixiren und überdies die scheinbaren Höhen, mit dem Gradbogen gemessen, anzugeben. Darnach war die Feuerkugel beim ersten Erblicken 3°, beim Verschwinden nur $^1/_2$° hoch. Der Culminationspunkt der nördlich vorüberziehenden Bahn war etwa 28°. Nach einer beigefügten Skizze ging diese einige Grade unter den Hauptsternen der Cassiopeja, dann etwa 8° unter Polaris und 5—7° unter α-, β-Ursae maj., an dieser Stelle ungefähr parallel zur Verbindungslinie der beiden letzteren Sterne. Dem Meteor folgten in der Bahn mehrere kleinere leuchtende Körper.

Ungarn, Bosnien und Hercegowina.

27. Agram (33° 38′; 45° 49′). $9^h 2^m$. Richtung ENE zu E gegen WSW zu W. Einer horizontal abgelassenen Rakete gleichend und sprühend, einen Funkenregen hinter sich lassend, in gelblich rother Farbe. »Im halben Wege änderte sich die Farbe in helles Grün, der Körper zerfiel in etwa 6—8 Theile, von denen die kleineren in südlicher Richtung abweichend, bald erloschen, wogegen der grösste Theil sich in seiner urprünglichen Richtung noch weiter bewegte, ehe er verschwand. Die beobachtete Bahn mass circa 70—80°.« (Bericht im Agramer Tagblatt.)

28. Essegg (36° 23′; 45° 33′5). »Das Meteor kam senkrecht herunter, bis es, natürlich scheinbar, nur mehr etwa 60 *m* über den Häusern erschien, worauf dasselbe eine wagrechte Flugbahn gegen W einschlug. Dem Phänomen, welches in schönem, intensiv weissem Lichte erstrahlte, folgte ein Funkenschwarm. Fast volle 30(?) Secunden war es sichtbar.« (N. Fr. Presse, 10013.) Die in der gedruckten Notiz mit (?) bezeichnete Dauer kann sich immerhin auf das Nachleuchten des Streifens beziehen.

29. Alibunar (38° 38′; 45° 5′). Richtung NE—SW. Die Bahn war ursprünglich wagrecht und im höchsten Punkte 15° hoch (gem.), ging dann in einen stark gekrümmten Bogen über und in 10° Höhe (gem.) erlosch die Feuerkugel. Sie war von

grosser Lichtstärke, wie ein »riesiger Stern mit einem kometenartigen Schweife.« *D*: 4—5^s. (Herr A. Wiener, Gutsbesitzer.)

30. Zenica (35° 32′; 44° 11′). Der Beobachter, dem ich die folgende werthvolle Mittheilung verdanke, Herr G. Černy, ging auf der Strasse in der Richtung E—W, als er, durch einen Ausruf aufmerksam gemacht, links oben das Meteor gewahrte, welches sich in langem, flachen Bogen von E gegen W bewegte, einen langen, erst deutlich sichtbaren, später etwas verblassenden Schweif zurücklassend. Es leuchtete wie Magnesiumlicht, culminirte ungefähr in gleicher Höhe mit dem Polarsterne, aber auf der entgegengesetzten Seite und verschwand in *A*: 65°, *h*: 12° (gem.), *D*: 10—12^s.

31. Nevesinje (35° 47′; 43° 15′5). Nach 9^h. Das Meteor, von schönem, intensiv weissem Lichte, zog über uns in wagrechter Flugbahn von NE gegen SW, und länger als eine Minute blieb dessen Bahn durch einen lichten, einem glühenden Drahte gleichenden Streifen kennbar. *D*: 10—12^s. (Herr Hauptmann Sahule.)

32. Lubinje (36° 2′; 42° 46′). 9^h 7^m mitteleuropäische Zeit. Auch die folgende Beobachtung ist von entscheidender Wichtigkeit. Das Meteor ging von einem nahe dem Horizonte gelegenen Punkte aus, hatte die Richtung E—W, zog fast über die ganze Himmelssphäre, hinter sich einen leuchtenden, noch etwa 10^s sichtbar bleibenden Streifen zurücklassend. Der scheinbare Durchmesser entsprach etwa $^1/_6$ der Mondscheibe. Die Bahn des Meteors, respective der zurückgebliebene Streifen war zur Beobachtungszeit nahezu parallel dem Verbindungsbogen α und β Ursae maj. und ging ausserhalb, bei η dieses Sternbildes in demselben Abstande vorbei, als ζ von η entfernt erscheint. Der absteigende Theil der Bahn war senkrecht zum Horizonte, und in etwa 20° Höhe lösten sich schwach leuchtende Theile vom Kerne ab. Zur Zurücklegung der vom Beobachter gesehenen Bahn dürfte das Meteor ungefähr 5^s benöthigt haben (Herr W. Wallaschek, Einlösleiter der bosn.-herceg. Tabakregie.)

Die Feuerkugel ist auch sonst in Bosnien mehrfach beobachtet worden, doch lauten die Berichte darüber sehr unbestimmt. In Folge meines Ersuchens erhielt ich durch die hoch-

löbliche Landesregierung für Bosnien und die Hercegowina aus den folgenden meteorologischen Beobachtungsstationen Nachrichten:

Prnjavor (35° 20′; 44° 52′). 9h. Meteor von NE—SW, ein herrliches Licht hinter sich lassend und in sehr geringer Höhe.

Sanskimost (34° 20′; 44° 46′). 9h 15m. Meteor in der Richtung E—W, mit gelblich bläulich-weissem Lichte, sehr nahe am Horizonte, einen länger sichtbaren Lichtstreifen hinterlassend.

Bielina (36° 53′; 44° 45′). Gegen 9h 15m. Auftreten in E, 50° hoch, Verschwinden in S, 15° hoch. Die Orientirung ist jedoch sicher sehr unrichtig.

Italien.

Die beiden Mittheilungen, deren wesentlichster Inhalt hier folgt, habe ich im »Bolletino mensuale della società meteorologica Italiana, Ser. II, Vol. XII, Nr. 8 (1892)« gefunden. Obwohl dieses Meteor sicher auch in Italien an vielen Orten gesehen worden ist, konnte ich anderweitige Wahrnehmungen von dort nicht kennen lernen.

33. Bari (34° 33′; 41° 7′). 8h 50m Röm. Zeit. Bahn von E—W, parallel zu α—β Ursae majoris und von ihnen ungefähr ebensoweit abstehend, als diese von γ—δ desselben Sternbildes entfernt sind. Kopf von Jupitersgrösse, glänzend silberweiss, Schweif gleichsam aus nicht ganz geschlossenen Ringen gebildet (schraubenförmig?). Der Beobachter befand sich in einer von S gegen N ziehenden, durch dreistöckige Häuser flankirten Strasse, so dass das Meteor sich bald seinen Blicken entzog, doch wurde ihm berichtet, dass es von Anderen noch eine Strecke von »ungefähr 400 *m*« weiter ziehen gesehen wurde, bis es ohne Detonation erlosch. (Ingenieur P. Tramonte.)

34. Castellanetta (34° 28′; 40° 36′). 7h 50m Röm. Zeit (Schreibfehler?). Die Feuerkugel erschien in N — durch Häuser wurden Anfang und Ende verdeckt — und bewegte sich in einer fast horizontalen, etwas ansteigenden Linie, ungefähr 30° hoch, von links nach rechts. *D*: 2s (M. Perrone). Die Zugehörigkeit dieser Beobachtung bleibt zweifelhaft, denn die Zeit wäre um eine Stunde zu früh und die Bewegungsrichtung

gerade entgegengesetzt angegeben, da man doch annehmen muss, dass der Beobachter gegen N gekehrt stand. Allerdings spricht Manches für ein Übersehen bei Angabe der Zeit, da es um $7^h\ 50^m$ noch heller Tag war, was anzuführen kaum unterlassen worden wäre. Dass die Richtungen durch ähnliche Bezeichnungen wie die obige verkehrt angegeben werden, kömmt auch nicht selten vor. Im Übrigen würde die Wahrnehmung jener von Bari und den Berichten aus den dalmatinischen Orten wohl entsprechen; daher habe ich sie auch angeführt, wegen der bestehenden Zweifel jedoch nicht weiter benützt.

Mit Rücksicht auf die beiden offenbar sehr sicheren und auch gut übereinstimmenden Angaben aus Kremsmünster und Pola kann für die Epoche: 1892, Juli 7., $8^h\ 2\cdot5^m$ Greenw. Zeit (Weltzeit) genommen werden.

Endpunkt der gesehenen Bahn.

Zur Bestimmung der Lage desjenigen Punktes, über welchem, nach den Beobachtungen, das Erlöschen der Feuerkugel stattfand, sind folgende Azimute verwendbar: Kremsmünster 15°, Gainfarn 28°, Triest (*b*) 23°, Pola 25°, Spalato 59°, Cattaro 83°5, Zenica 65°, Lubinje 75°. Die letztere Angabe ist aus der von der Verticalen dort nicht viel abweichenden Bahnlage geschlossen, die andern Werthe sind, wie aus den oben mitgetheilten Beobachtungen zu entnehmen ist, direct gegeben. Die erste Beobachtung (*a*) aus Triest gibt, ziemlich stark abweichend, $A = 45°$ und wurde, wie die ähnlichen, mehr beiläufigen Angaben aus Wolkersdorf und Mauthausen vorläufig nicht berücksichtigt.

Die oben angeführten acht Richtungsbeobachtungen geben, mit gleichen Gewichten in Rechnung gebracht, für die geographische Lage des Endpunktes:

$29°12\cdot6' \pm 10\cdot2'$ östl. Länge von Ferro und
$41°26\cdot3' \pm\ 7\cdot4'$ nördl. Breite

über dem tyrrhenischen Meere etwa 70 *km* WSW von der Tibermündung entfernt. Die oben beigesetzten mittleren Fehler entsprechen einer Unsicherheit von 14 *km* auf dem Parallel und von 13·5 *km* im Meridian, welche an und für sich freilich gross ist; allein im Hinblicke auf den Umstand, dass der Endpunkt von allen in Frage kommenden Beobachtungsorten ungewöhnlich weit entfernt lag (430—770 *km*), wird man das Resultat sogar als ein relativ gutes bezeichnen müssen, wie es allein aus durchschnittlich sehr guten Beobachtungen zu erzielen war. Der mittlere Fehler eines Azimutes stellt sich in der That nur auf $\pm 2^\circ 2$.

Zur Bestimmung der linearen Höhe dieses Punktes über der Meeresfläche wurden die direct auf den Endpunkt bezüglichen Angaben der scheinbaren Höhe benützt, aus Wolkersdorf 6°, Triest (Mittel aus *a* und *b*) 14°, Pola 20°, Spalato 25°, Alibunar 10°, Zenica 12°. Überdies konnten einige Messungen verwendet werden, welche sich zwar nicht, oder wenigstens nicht ganz bestimmt, auf den Punkt des Erlöschens beziehen, allein wegen der beigefügten Bemerkung, dass die Bahn fast genau horizontal war, für die Endhöhe genommen werden durften, so die Angaben aus Glandorf 9°, St. Georgen 8° und Moschganzen 7°. Von Kremsmünster wurde jene scheinbare Höhe $7^\circ 2$ benützt, welche sich aus der ersten scheinbaren Bahn folgern lässt, wenn dieselbe bis in das Azimut des Endpunktes verlängert wird. Es sind hier durchweg — allerdings nachträglich — gemessene und keine abgeschätzten Höhen benützt worden. Die Angabe aus Cattaro, dass das Meteor erst in einer Höhe von $^1/_2{}^\circ$ erloschen ist, bezieht sich vielleicht auf herabfallende Theile und konnte in Bezug auf den Endpunkt nicht verwendet werden.

Bei der Berechnung der linearen Höhe wurde hinsichtlich der Gewichtsbemessung auf die Unterschiede der Entfernungen Rücksicht genommen. Weil das Schlussresultat ein nicht ganz gewöhnliches ist, führe ich hier die Werthe der Höhen an, welche sich aus den einzelnen Beobachtungen ergeben. Hiebei bezeichnet *D* die Entfernung und *H* die gesuchte lineare Höhe.

	D in *km*	H in *km*	Gewicht
Wolkersdorf	879	151·8	1·4
Kremsmünster	770	142·7	1·8
Glandorf	638	132·2	2·6
St. Georgen	652	124·3	2·4
Moschganzen	668	116·1	4·7 [1]
Triest	506	145·7	10·6 [1]
Pola	430	170·6	6·0
Spalato	456	228·2	5·2
Alibunar	868	211·3	1·4
Zenica	611	158·5	2·8

Hieraus folgt, mit Berücksichtigung der Gewichte, für die

Höhe des Endpunktes: 158 *km* ± 11·5 *km*.

Der rohe Durchschnitt, ohne Rücksicht auf die Gewichte, ist ebenfalls 158 *km*.

Der mittlere Fehler einer Höhenangabe beträgt ±3°2. Auch hier gilt das bei der Bestimmung der geographischen Lage hinsichtlich der relativen Güte des Resultates Bemerkte.

Die Verbesserungen der einzelnen Beobachtungen in Azimut und Höhe sind aus folgender Übersicht zu entnehmen

	ΔA	Δh
Wolkersdorf	—	+0·3°
Kremsmünster	+1·4°	+1·1
Gainfarn	+0·5	—
Glandorf	—	+2·1
St. Georgen	—	+2·8
Moschganzen	—	+3·5
Triest *a)*	—	+4·2
Triest *b)*	—1·2	—1·8
Pola	+1·8	—1·5
Spalato	+2·2	—6·9
Cattaro	—1·6	—
Lubinje	+2·4	—
Zenica	—3·2	0·0
Alibunar	—	—3·5

[1] Je zwei Messungen.

Das in Moschganzen angegebene Azimut 38°, welches hier nicht einbezogen wurde, weil das Ende hinter einer Baumreihe lag, stimmt ebenfalls gut genug, denn der berechnete Werth ist 34°.

Eine Endhöhe von 158 *km* oder mehr als 21 geographische Meilen ist allerdings auffallend, denn durchschnittlich in dieser Region beginnen sonst die grossen Meteore durch ihr Aufleuchten uns erst sichtbar zu werden. Es ist jedoch zu erkennen, dass selbst die niedrigsten Einzelresultate in der obigen Zusammenstellung (116, 124 und 132 *km*) immer noch eine sehr grosse Höhe anzeigen und dass überdies eben jene Beobachtungen, welche besonderes Vertrauen verdienen, wie jene aus Kremsmünster, Triest, Pola, Zenica, Resultate geben, welche dem Schlusswerthe ziemlich nahe kommen. Schliesst man den am meisten abweichenden Werth (jenen von Spalato) aus, so erhält man als Mittel noch immer 148 *km*. Es ist nach all dem an der Realität dieser nicht gewöhnlichen Endhöhe kaum zu zweifeln.[1]

Radiationspunkt und Bahnlage gegen die Erde.

Wenn auch die Unsicherheit des oben ermittelten Endpunktes hinsichtlich der geographischen und Höhenlage noch mehr als 20 *km* betragen kann, so entsteht hieraus, bei einer durchschnittlichen Entfernung der Beobachtungsorte von 600

[1] Dieses Resultat ist übrigens nicht ganz vereinzelt. Am meisten sichergestellt ist die grosse Endhöhe bei dem Meteor vom 5. September 1868. Wie schon oben in der Einleitung erwähnt, fand Tissot für die Höhe des Endpunktes nicht weniger als 307 *km* (41·3 geogr. Meilen). Dies ist aus verschiedenen Gründen, welche man leicht nachweisen kann, erheblich zu viel. Weilermann (Notizen der Sternwarte in Zürich, XIII, 3) gibt dafür 22 geogr. Meilen, womit der von mir (a. a. O.) gefundene Werth: 25 geogr. M. ± 2·5 geogr. M. viel besser übereinstimmt. Minder sicher, aber doch mehr als beiläufig, sind die Endhöhen für folgende Feuerkugeln: 25. September 1857: 20 geogr. Meilen, 12. December 1863: 20 geogr. Meilen, 9. Juni 1841: 19 geogr. Meilen, 4. September 1848: 17·5 geogr. Meilen, 31. December 1867: 16 geogr. Meilen, 13. November 1869: 15·5 geogr. Meilen u. s. w., welche ich seinerzeit aus der noch nicht veröffentlichten Untersuchung des betreffenden Materiales abgeleitet habe. In der zweiten Hälfte des Jahres erlöschen die Meteore durchschnittlich häufiger in sehr grossen Höhen und es sind in dieser Periode daher auch minder häufig Detonationen zu vernehmen.

bis 700 *km* für den auf dieser Grundlage berechneten scheinbaren Endpunkt ein Fehler von 1—2°, welcher immer noch geringer ist als der mittlere Fehler der directen Beobachtungen. Daher wurde auch diesmal, wie in früheren Fällen, für jeden Beobachtungsort die berechnete Endposition statt der beobachteten als Punkt II der betreffenden scheinbaren Bahn angesetzt und es konnte diese auch zur Ergänzung derjenigen unvollständigen Beobachtungen dienen, welche den Endpunkt nicht bezeichneten.

Für den Punkt I der scheinbaren Bahn sind in Graz, Moschganzen, Cattaro, Laporje (Mondort), Lubinje und Bari (Beziehung auf Ursa major) directe Angaben vorhanden. Aus Kremsmünster sind deren sogar mehrere mitgetheilt, aus welchen ein Mittelwerth (A : 300°5 h : 6°) gebildet wurde. Für Triest wurde der in der Beobachtung *a* angegebene, offenbar sehr sichere Punkt am östlichen Horizont beibehalten. Für Wolkersdorf wurde das Mittel der beiden im Azimut nicht übereinstimmenden Angaben (A : 309°5 h : 6°) für den Anfangspunkt genommen. In St. Georgen ist zwar nicht das erste Aufleuchten fixirt worden, wohl aber ein späterer Punkt (A : 4° h : 8°). Die Beobachtung aus Pola wurde durch Parallelverschiebung der beobachteten Bahn in den berechneten Endpunkt verbessert, endlich sind für Abbazia und Alibunar die aus den Beobachtungen ersichtlichen scheinbaren Neigungen in bekannter Weise benützt worden.

Neben diesen 14 scheinbaren Bahnen besteht noch eine Gruppe von Beobachtungen, welche dadurch charakterisirt ist, dass, ohne eine weitere bestimmte Angabe, die scheinbare Bahn als horizontal bezeichnet wird. Ich habe dieselben ebenfalls, jedoch nur mit dem Gewichte $^1/_4$ so in Rechnung gebracht wie andere Bahnen, deren scheinbare Neigung abgeschätzt wurde. Bei allen diesen (mit einem * bezeichneten) ist der erste Punkt überhaupt nicht gegeben, sondern nur die Lage des betreffenden grössten Kreises, welche unter I durch den Knoten am Äquator bestimmt ist.

Zur Ermittlung des Radiationspunktes konnten daher folgende 21 scheinbare Bahnen, und zwar die ersten 14 mit Gewicht 1, die letzten sieben mit Gewicht $^1/_4$ benützt werden.

	I.		II.	
	α	δ	α	δ
1. Wolkersdorf (2)...	298·2°	—20·0°	210·2°	—29·8°
2. Kremsmünster (6).	303·6	—15·1	221·8	—31·8
3. Graz (13)........	265·7	—31·2	211·0	—28·0
4. St. Georgen (16) ..	237·0	—35·6	212·4	—27·9
5. Moschganzen (18).	257·6	—35·5	205·2	—25·5
6. Laporje (19)......	258·3	—25·9	207·1	—25·9
7. Triest (21).......	321·1	— 4·4	218·0	—26·0
8. Pola (23)........	268·7	—15·5	213·2	—22·2
9. Cattaro(26).......	65·5	+82·0	170·0	+ 2·4
10. Zenica (30)......	244·8	— 2·0	183·0	—10·5
11. Lubinje (32)......	210·0	+45·0	172·9	— 0·7
12. Bari (33)..........	145·5	+60·0	163·4	+16·0
*13. Alibunar (29).....	338·5	0	180·4	—12·3
*14. Abbazia (22).....	339·2	0	211·4	—23·7
*15. Mauthausen (3)...	336·5	0	218·8	—31·3
*16. Pöchlarn (4)......	337·1	0	216·0	—31·0
*17. Gainfarn (7)......	340·3	0	214·4	—29·4
*18. Donawitz (9).....	338·9	0	213·2	—28·9
*19. Fohnsdorf (12)....	338·6	0	214·8	—29·1
*20. Glandorf (15).....	339·0	0	217·0	—29·0
*21. Pörtschach (17)...	339·5	0	216·4	—28·3

Hieraus erhielt ich für den scheinbaren Radiationspunkt den Ort:

Rectascension: 349°±2° m. Fehler
Declination: +8°±1°5 m. Fehler

Die Verbesserung am Punkt I, $\Delta s = \sqrt{(\Delta\alpha \cos\delta)^2 + \Delta\delta^2}$, d. i. der Abstand der in Rechnung gebrachten Position von dem schliesslich ermittelten, durch den scheinbaren Radianten gehenden Bahnbogen, ergibt sich für die einzelnen Beobachtungen wie folgt:

	Δs
1. Wolkersdorf.............	— 4·3°
2. Kremsmünster............	— 4·0
3. Graz....................	— 0·6

		Δs
4.	St. Georgen	+ 3·2
5.	Moschganzen	+ 4·0
6.	Laporje	— 5·7
7.	Triest	— 2·4
8.	Pola	— 6·2
9.	Cattaro	+13·7
10.	Zenica	— 7·2
11.	Lubinje	+ 3·5
12.	Bari	— 0·7
13.	Alibunar	+ 8·0

Durchschnittlich 4°9.

Die Verbesserung der angegebenen scheinbaren Neigungen beträgt:

		Δi
14.	Abbazia	+ 3·5°
15.	Mauthausen	— 0·3
16.	Pöchlarn	— 0·3
17.	Gainfarn	+ 2·4
18.	Donawitz	+ 1·6
19.	Fohnsdorf	+ 1·3
20.	Glandorf	+ 2·1
21.	Pörtschach	+ 2·2

Durchschnittlich 1°7.

Der mittlere Fehler für eine Beobachtung von der Gewichtseinheit ist ± 4°9. Es zeigt sich übrigens, dass die Neigungsangaben (14—21) besonders gut durch das Resultat dargestellt werden, namentlich jene, welche die Bahn als scheinbar horizontal bezeichneten.

Aus dem hier abgeleiteten Radianten folgt direct, dass, in Bezug auf den Horizont des Endpunktes die gesehene Bahn aus 250°2 Azimut und 99°5 Zenithdistanz gerichtet, d. h. also 9°5 gegen den Horizont des Endpunktes a u f s t e i g e n d war.

Ferner ergibt sich hieraus, dass das Perigeum, oder jener Punkt der Bahn, welcher der Erde am nächsten lag, sich in 41° 40'5 östl. Länge und 44° 0' nördl. Breite, das ist WSW von

Karakal in Rumänien und 68 *km* (9·2 geogr. Meilen) über der Erdoberfläche befand. In Bezug auf den Horizont dieses Punktes war die Bahn horizontal, allein, mit Rücksicht auf die Krümmung der Erdoberfläche erhob sie sich sowohl gegen West als gegen Osten hin immer mehr und mehr über die Letztere. Indem das Meteor von der Ostseite herkam, verfolgte es also bis zu dem hier erwähnten Punkte der grössten Erdnähe eine absteigende Bahn. Von hier aus bewegte es sich, indem es sich beständig von der Erdoberfläche wieder mehr und mehr entfernte über die Donau an der Lom-Mündung, nur wenige Kilometer nördlich von Alexinac und fast über Kruševač in Serbien, nördlich von Sienica im Gebiete von Novibazar, nur wenig südlich von Stolac in der Hercegowina, über die Westspitze der dalmatinischen Insel Meleda, südlich von Lagosta, nördlich von Vasto in Italien, über die Abbruzzen bei Solmona, über Albano bei Velletri, südlich von Ostia zu dem vorhin, bezeichneten Endpunkte. Es ist beizufügen, dass die geocentrische Bahn, soweit sie hier beschrieben ist, als Gerade betrachtet und berechnet wurde. In Wirklichkeit war sie zwar ein hyperbolischer Bogen, aber wegen der grossen Geschwindigkeit, wie später sich ergeben wird, so wenig von der Geraden abweichend, dass die vorhandene Krümmung auch durch die genauesten Beobachtungen nicht nachweisbar sein konnte. Die beobachteten Krümmungen sind selbstverständlich richtig, jedoch nur projectivische Erscheinungen.

Ich kann nicht unterlassen, diesem wichtigen Resultate noch einige Bemerkungen zu widmen. Obgleich dasselbe aus der Vereinigung aller Beobachtungen hervorgegangen ist und aus diesem Gesichtspunkte die relativ grösste Wahrscheinlichkeit besitzt, so sind es doch hauptsächlich die Beobachtungen aus den Orten in der Nähe der Bahn, wie aus Zenica, Lubinje und Cattaro, welche sich als besonders ausschlaggebend erweisen, weil sie recht bestimmte Angaben über die Bahn enthalten und gute Durchschnitte der scheinbaren Bahnbogen liefern, während für die zahlreichen weit nördlich liegenden Orte die scheinbaren Bahnen so nahe zusammenfallen, dass ihre Unterschiede mehr den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern als der äusserst geringen Parallaxe zuzuschreiben sind.

Insbesondere jene anscheinend genauen Beobachtungen sind es jedoch, welche nicht allein die Annahme einer absteigenden Bahn völlig ausschliessen, sondern dieselbe noch mehr aufsteigend erscheinen lassen als die übrigen. Es ist in dieser Hinsicht insbesondere die grosse Parallaxe in Höhe auffallend, welche die Beobachtungen aus Lubinje und Cattaro gegenseitig darbieten, obgleich diese beiden Orte nur etwa 42 *km* von einander entfernt sind.

Die Linie Cattaro-Lubinje hat 160° Azimut. Nach der Beobachtung in Lubinje war das Meteor, welches nördlich beider Orte vorüberzog, in diesem Azimute 78° hoch, in Cattaro erschien es in demselben Azimute nur 34° hoch. Hieraus würde folgen, dass es in diesem Momente etwa 7 *km* horizontal von Lubinje entfernt und nur 33 *km* hoch war. Dies würde, nicht allein mit der Endhöhe von 158 *km*, sondern auch selbst mit dem geringsten nach den Beobachtungen noch annehmbaren Werthe der Endhöhe eine viel stärker aufsteigende Bahn als sie oben in viel allgemeinerer Weise ermittelt wurde, geben. Man bemerkt auch leicht, dass hieraus für die weiter nördlich liegenden Orte viel zu geringe scheinbare Höhen hervorgehen würden (z. B. für Zenica nur 11—12° in SSE statt 40°, ähnlich für Pola, Triest u. s. w.), so dass für viele von den nördlichsten Beobachtungsorten schon dieser Theil der Bahn unter den Horizont gefallen wäre. Dies beweist, dass die Höhe des Meteors über der Gegend von Lubinje doch wesentlich grösser und daher die Angabe aus Cattaro etwas zu gering gewesen sein muss. Allein es ist andererseits ganz und gar unmöglich eine im Endpunkte auch nur horizontale Bahn, geschweige denn eine absteigende mit den Beobachtungen aus Lubinje und Cattaro in Einklang zu bringen. Für eine horizontale Bahn würde, wegen der Erdkrümmung die Höhe nördlich von Lubinje schon 183 *km* betragen haben und in Cattaro müsste dann das Meteor in NNW nur wenig tiefer als in Lubinje, nämlich 75°—76° hoch, daher nicht unter dem Polarsterne, unter Cassiopeia und den bezeichneten Bärensternen, sondern hoch über denselben gesehen worden sein. Berücksichtigt man nun (vergl. Nr. 26), dass schon im ersten Berichte der Bahnbogen als ein »sehr flacher« bezeichnet, später dessen Culminationspunkt zu 28° gemessen

und überdies die Bahn gegen die Sternbilder in ganz übereinstimmender Weise skizzirt wurde, so ist ein derartiger Fehler in der Auffassung und Erinnerung, zumal bei der Qualität der Beobachter, schlechterdings undenkbar. Hieran würde auch nichts wesentliches geändert, wenn die oben berechnete Endhöhe (158 *km*) innerhalb der wahrscheinlichen Grenzen vermindert würde.

Zu ähnlichen Resultaten gelangt man auch, wenn die Beobachtungen aus Lubinje und Cattaro mit jener aus Zenica verglichen werden.

Auch die von mir angewendete allgemeine Methode ist wegen der Verbesserung der scheinbaren Endposition auf einen gemeinschaftlichen, vorher berechneten Punkt von dem Resultate dieser Ermittlung mehr oder weniger abhängig und es kann unter Umständen ein grösserer Fehler in dieser Bestimmung das Schlussresultat in Bezug auf den Radiationspunkt völlig entstellen. Man kann sich jedoch hierüber einige Beruhigung verschaffen, wenn man den Versuch macht, die beiläufige Lage des Radianten auch aus den rohen Beobachtungen zu ermitteln. Im gegenwärtigen Falle wird dabei das Resultat kein wesentlich anderes und es ist nach sorgfältiger Prüfung desselben nicht daran zu zweifeln, dass es den Thatsachen wirklich entspricht.

Die an den verschiedenen Orten gesehenen Bahnlängen sind sehr ansehnlich. Die längste Bahn entspricht der Beobachtung von Kremsmünster, wenn man die Angabe berücksichtigt, dass das Meteor dort schon in 287° Azimut wahrgenommen wurde. Dieses Azimut weist in der vorhin entwickelten Bahn auf einen Punkt, welcher 74 *km* (10 geogr. Meilen) über 45° 0′ östl. Länge und 44° 26′ nördl. Breite (südlich von Slobozia in Rumänien) lag. Die Bahnlänge von hier bis zum Endpunkt betrug nicht weniger als 1350 *km* (181·9 geogr. Meilen). Die Beobachtung *a)* aus Triest, welche sehr bestimmt lautet, und jene aus Wolkersdorf geben unter sich gleiche und etwas geringere Bahnlänge, nämlich 1077 *km* (145 geogr. Meilen), welche ziemlich genau der Entfernung des oben angegebenen tiefsten Punktes der Bahn vom Endpunkte entspricht. Einige der minder bestimmt lautenden Angaben über

die erste Wahrnehmung, wie z. B. jene aus Gainfarn und Lubinje dürften sich ebenfalls auf diesen Moment beziehen. Auch die Beobachtung von Cattaro ergibt nur wenig mehr für die Bahnlänge. Dass das Meteor dort über der Punta d'Arza (A: 288°) aufgetaucht sein könnte, ist wohl mit Rücksicht auf die anderen Beobachtungen nicht möglich, weil es sonst südlich vorbeigezogen wäre. Hält man sich jedoch an die angegebene Höhe, so würde sich hieraus die Länge der dort gesehenen Bahn auf 1144 *km* belaufen.

Die hier sichergestellte Bahnlänge von mindestens 1000 bis 1100 *km* ist jedoch nur ungefähr die Hälfte, nämlich im Wesentlichen der nach dem Durchgange durch das Perigeum von den Meteoriten im aufsteigenden Sinne zurückgelegte Weg der in der Atmosphäre durchlaufenen Bahn, weil ja wenigstens eine ebenso grosse Strecke dem absteigenden Theile zufällt. Es ist eine nothwendige Folge der früheren Resultate, dass die Feuerkugel nach ihrem Eintritte in die Atmosphäre, als sie sich ungefähr über der Gegend von 54° 8′ östl. Länge und 45° nördl. Breite — im Osten der Krim — befand, ebenso hoch war als im Endpunkte über dem tyrrhenischen Meere, und es ist kaum zu bezweifeln, dass dieser Theil der Bahn, von welchem in unseren Gegenden nur wenig gesehen werden konnte, in den südöstlichsten europäischen Gebieten und selbst auch in Asien sichtbar war.

Grösse der Feuerkugel, Lichtentwicklung, Theilungen.

Durch die hohe Bahnlage und die grosse Entfernung der Beobachtungsorte wird es erklärlich, dass keine Detonationen vernommen wurden und dass auch die optischen Wahrnehmungen hinter jenen zurückblieben, welche ähnliche Erscheinungen sonst in der Regel begleiten. Dabei ist auch noch als sehr wahrscheinlich in Anschlag zu bringen, dass eben in dem zweiten Bahntheil, welcher diesmal fast ausschliesslich beobachtet worden ist, die meteorischen Massen schon bedeutend reducirt waren, da ja ein Lichtstreifen von ungeheurer Länge zurückgeblieben ist, dem ein materielles Substrat zu Grunde liegen musste.

Fünf verschiedene Nachrichten liefern Abschätzungen des scheinbaren Durchmessers der Feuerkugel. Lubinje gibt $^1/_6$ Monddurchmesser, Cattaro sechsfache Jupitergrösse, in Pola und Bari erschien sie gleich Jupiter, in Kremsmünster schätzte man sie grösser, als Venus im höchsten Glanze. Wenn man nun, da keine bestimmteren Angaben vorliegen, diese Vergleichungen auf die Stelle grösster Annäherung an den betreffenden Ort bezieht, welche für Lubinje und Cattaro zufällig nahezu identisch ist (nämlich 86 *km* über 35° 55′ östl. Länge und 43° Breite), so geben diese zwei Schätzungen für den wirklichen Durchmesser der Feuerkugel fast ganz übereinstimmende Resultate, nämlich: Lubinje 132 *m*, Cattaro 139 *m*. Von den übrigen Beobachtungen gibt Kremsmünster 192 *m*, Pola 71 *m* und Bari nur 46 *m*. Zieht man in Betracht, dass die beiden letzteren Beobachtungen sich auf einen dem Erlöschen näheren Theil der Bahn beziehen als die übrigen, so erscheint es nicht ganz unwahrscheinlich, dass diese Unterschiede wenigstens zum Theile reell sind und nicht ganz und gar auf der allerdings grossen Unsicherheit solcher Schätzungen beruhen. Im Mittel würden sich nur 116 *m* für den Durchmesser ergeben, welchen die Feuerkugel im letzten Dritttheile der ungewöhnlich langen aufsteigenden Bahn noch hatte.

Dieser Durchmesser ist vergleichsweise gering.[1] Es ist aber ohne Zweifel auch die Lichtwirkung an den einzelnen Beobachtungsorten wesentlich schwächer gewesen als bei gleicher Entfernung in vielen anderen Fällen. Denn während z. B. bei den in der Note angeführten Meteoren selbst noch an Orten, welche weit über 100 *km* von der Bahn entfernt lagen, der Lichteindruck ein so bedeutender war, dass in den Berichten der Ausdruck »taghell« fast regelmässig wiederkehrt, kommt bei der vorliegenden Erscheinung in keiner Nachricht eine auch

[1] Zum Vergleiche führe ich hier einige Resultate anderer Bestimmungen an, welche nach ähnlichen Schätzungen erfolgten. Für das Meteor am 23. October 1887: 1000 *m* (sehr unsicher); 17. Jänner 1890: 490 *m*; 22. April 1888: 453 *m*; 2. April 1891: 350 *m*; 23. October 1889: 310 *m*. Für den Meteoritenfall bei Pultusk fand Prof. Dr. Galle, dass der Durchmesser der Feuerkugel nach der geringsten Schätzung nicht unter 1000 Fuss betragen haben konnte, was den oben angeführten Maassen ziemlich gleichkömmt.

nur annähernd so hohe Schätzung der Lichtintensität vor, auch nicht aus Lubinje, Nevesinje, Vergorac und Cattaro, wo die Entfernung der nächsten Bahnpunkte 90—120 *km* betrug. Diese Umstände scheinen geeignet, die früher ausgesprochene Vermuthung zu bestätigen, dass die betreffenden Meteoriten im aufsteigenden Bahntheil schon stark an Masse vermindert waren.

Wenn es nun richtig wäre, dass sich die Lichtstärke des Meteors vermindert hatte, so würde sich dann die Frage aufdrängen, ob der ermittelte Endpunkt der Bahn thatsächlich die Stelle des Erlöschens bezeichnet und ob denn ein solches in einer für alle Orte gleichmässig und gleichzeitig sichtbaren Weise stattgefunden hatte, oder ob das Meteor nicht allmälig gänzlich aufgelöst worden ist, was an sich wohl möglich erscheint. Man darf nämlich nicht vergessen, dass in dem Momente vor der Hemmung und dem nachfolgenden Erlöschen sonst in der Regel die Lichtentwicklung ein Maximum ist infolge des hohen Widerstandes in der Atmosphäre, und dieses momentane Ereigniss begünstigt die gleichzeitige Wahrnehmung in hohem Grade, was man im Gegentheile von dem allmäligen Erlöschen nicht behaupten kann. Dieser Gedankengang würde im Weitern dahinführen, die Möglichkeit einzuräumen, dass Reste der Meteoriten die Atmosphäre auch wieder verlassen haben konnten. Man muss nun wirklich zugeben, dass eine in allen Dingen sonst sehr sorgfältige Beobachtung die weitere Fortsetzung der Bahn wohl andeutet, nämlich jene von Triest (*a*), welche das Ende erst in $A = 45°$, $h = 11°$, also weit westlicher, etwa über der Westküste der Insel Sardinien angibt, mit der Beifügung, dass das Meteor fast den halben Himmel durchlaufen habe. Andere viel weniger bestimmte Wahrnehmungen, wie jene in Wolkersdorf, Pöchlarn, Mauthausen verlängern die Bahn in ähnlicher Weise weiter gegen Westen. Dem gegenüber muss jedoch an den Umstand erinnert werden, dass derartige mehr oder weniger unwillkürliche Bahnverlängerungen in jeder grösseren Beobachtungsgruppe sich vorfinden, auch dann, wenn das Erlöschen ganz zweifellos momentan erfolgte. Es ist ein eigenthümliches, aber doch wohl zufälliges Zusammentreffen, dass die zweite Beobachtung in Triest, welche von einem

andern Standpunkte und ganz unabhängig von der ersten gemacht wurde, sich gleichsam wie eine Polemik gegen diese — hinsichtlich des Endpunktes — ausnimmt, obwohl der Beobachter sie wohl kaum gekannt haben dürfte. Er bemerkt ganz aus freien Stücken, dass, weil seine Aussicht eine ganz unbehinderte war und er die Erscheinung sorgfältig im Auge behielt, er sie hätte sehen müssen, wenn sie nicht an der von ihm bezeichneten Stelle (A: 23°) schon erloschen wäre. Es ist zwar denkbar, dass der eine Beobachter ein schärferes Auge hat als der andere, allein abgeschwächt wird denn doch die unbedingte Zuverlässigkeit der ersteren Angabe. Berücksichtigt man ferner, dass die zur Bestimmung des Endpunktes benützten Beobachtungen eine sehr gute Übereinstimmung zeigen, so erscheint die Annahme, dass das Meteor sich noch wesentlich weiter nach Westen hinausbewegt haben sollte, nicht hinlänglich begründet

Die Gestalt des Meteors wird in den meisten Berichten als kometenähnlich bezeichnet. Der zurückgebliebene, durch einige Zeit nachleuchtende Streifen muss mindestens 600 *km* lang gewesen sein, da er in Lubinje sich noch in der Nähe des Zeniths befand. Bemerkenswerthe Einzelnheiten werden aus mehreren Orten berichtet. In Kremsmünster schien es, dass schon in der Mitte der Bahn die Helligkeit der Kugel geringer, die des Schweifes grösser geworden sei. An diesem machten sich knotenartige Verdickungen bemerkbar, welche schliesslich so weit auseinanderrückten, dass der Schweif kaum mehr zusammenhängend erschien. In Bari stellte sich der Schweif geringelt dar. Herr Pfarrer Kainbacher in St. Georgen bemerkte, dass sich die Kugel vom Schweife lostrennte — ungefähr als das Meteor im Süden war — und dass der Zwischenraum an Grösse zunahm. Er berichtete auch, dass die Lichtstärke schnell abnahm, obgleich die Entfernung vom Beobachtungsorte gegen das Ende hin nicht viel zugenommen hatte. Der Beobachter in Agram theilte mit, dass im halben Wege der Körper in sechs bis acht Theile zerfallen ist, von welchen die kleineren, gegen Süden hin abweichend, bald erloschen. Auch in Cattaro wurde wahrgenommen, dass dem Hauptkörper mehrere kleinere Theile folgten. Alle diese Angaben deuten auf partielle Hemmungen und fortgesetzte Verminderung der Massen.

In Bezug auf die Farbe des Lichtes herrscht diesmal eine verhältnissmässig gute Übereinstimmung. 63 Procent der Angaben (12 unter 19) bezeichnen dieselbe in den verschiedenen Abstufungen von hellgelb bis goldfarben und glänzendroth (hellgelb 3, gelb 3, goldgelb 2, röthlich 3, glänzendroth 1), während die übrigen sieben — von welchen vier aus Orten in der Nähe der Bahn, nämlich aus Zenica, Vergorac, Nevesinje und Bari — das Licht als intensiv weiss bezeichnen. In anderen Fällen herrscht gewöhnlich unter den Angaben die Bezeichnung weiss vor. Das Vorherrschen der gelblichen und röthlichen Farbe entspricht erfahrungsgemäss einer geringeren Intensität; es kann hier aber auch durch die grosse Entfernung der meisten Beobachtungsorte begründet sein.

Geocentrische Geschwindigkeit.

Zur Abschätzung der Geschwindigkeit, mit welcher diese Meteoriten die Atmosphäre durchzogen haben, finden sich aus den verschiedenen Beobachtungsorten 15 Angaben über die Dauer. Von diesen kann man nach den betreffenden Berichten neun mit hinlänglicher Wahrscheinlichkeit auf bestimmte Bahnstrecken beziehen; für die übrigen ist die Bahnlänge in keiner Weise bezeichnet. Aber auch von den erstern Beobachtungen sind einige auszuschliessen oder zu restringiren. In Kremsmünster wurden von verschiedenen Beobachtern dreierlei Azimute für das erste Erblicken angegeben (287°, 300°5, 324°), welchen der Reihe nach die Bahnlängen 1351 *km*, 1021 *km* und 655 *km* entsprechen. Die angeführte Dauer von 5—7ˢ kann wohl füglich nur auf die letzte Strecke bezogen werden, weil sie sonst eine unwahrscheinlich grosse Geschwindigkeit liefern würde. Die zwischen den in Pola bezeichneten Punkten liegende Strecke beträgt 377 *km*, was mit der Dauer von 3ˢ verglichen 126 *km* Geschwindigkeit gäbe. Auch dieser Werth erscheint mir noch zu gross und es dürfte richtiger sein, die angegebene Dauer nur auf jenes Bahnstück zu beziehen, welches Herr Director Müller selbst gesehen hat, da die Feuerkugel schon nahe an S war. Es würden dann nur 260 *km* für die Bahnlänge und 87 *km* für die Geschwindigkeit zu nehmen sein. Für die in Triest (*a*) gesehene sehr lange Bahn ist leider keine Dauer

angegeben. Der Beobachtung (*b*) würde eine Länge von 655 *km* entsprechen, welche für die bezeichnete Dauer von nur 2ˢ offenbar viel zu gross ist und daher hier nicht benützt wurde.

In Spalato ist das Meteor erblickt worden »als es seinen Culminationspunkt erreicht hatte«. Dieser Darstellung würde ein in 2—3ˢ zurückgelegte Bahnstrecke von etwa 400 *km* entsprechen. Die sich hieraus ergebende Geschwindigkeit von 160 *km* ist ebenfalls auffallend gross. Ähnliches gilt von der Beobachtung in Alibunar. Es ist hervorzuheben, dass diese Beobachtungen hier ausgeschlossen wurden, nicht weil sie zu geringe, sondern anscheinend zu grosse Geschwindigkeiten geben.

Benützt wurden folgende Daten:

	Bahnlänge	Dauer	Geschwindigkeit
Wolkersdorf	1077 *km*	13ˢ	82·8 *km*
Kremsmünster	655	6	109·2
Pola	260	3	86·7
Lubinje	580	5	116·0
Zenica	600	11	54·5
Cattaro	1144	15	76·3

Ausserdem liegen noch sechs Angaben ohne irgend eine Beziehung auf die Bahnlänge vor, nämlich aus Stadlau 4—5ˢ und 5—8ˢ, Pöllau 10ˢ, Pörtschach 5ˢ, Abbazia 8ˢ, Nevesinje 11ˢ, im Durchschnitte 7ˢ5. Wird diese Dauer auf das Mittel der oben angeführten sechs Bahnstrecken (719 *km*) bezogen, so würde sie 96 *km* für die Geschwindigkeit geben. Mit Benützung dieser Einzelresultate habe ich für die geocentrische Geschwindigkeit den Schlusswerth 87·0 *km* $\pm$ 8 *km* gefunden, welcher mit dem Durchschnitte (88·8 *km*) sehr nahe übereinstimmt.

Kosmische Verhältnisse.

Für die von der Erdstörung befreite geocentrische Geschwindigkeit erhält man 86·3 *km* und für den Radianten α: 349°2, δ: +7°8, oder in Länge und Breite λ: 353°2, β: +11°4. Die Länge des aufsteigenden Knotens war 106°, und hieraus ergibt sich, dass die heliocentrische Geschwindigkeit v=61·5 *km*,

oder, im Vergleiche mit der Geschwindigkeit der Erde 2·12 betragen hatte. Endlich folgt hieraus, dass diese Meteoriten aus dem Weltraume in der heliocentrischen Richtung, welche durch den Ausgangspunkt: 351°3 Länge und 17°6 nördl. Breite bestimmt ist, in das Sonnensystem eingetreten sind und in demselben eine Hyperbel, deren Axe ungefähr 0·4 betrug, beschrieben haben. In dieser Bahn sind die Meteoriten der Erde, in ihrem Laufe um die Sonne, fast entgegen gekommen, denn die Elongation des scheinbaren Radianten vom Apex der Erdbewegung betrug nur 27°5 und auch die wahre Elongation ergibt sich nicht grösser als 40°, entsprechend einer entschieden rückläufigen Bahn.

Hieraus erklärt es sich, dass die relative Geschwindigkeit eine sehr grosse gewesen sein muss, wie dies auch aus der Analyse der Beobachtungen hervorgeht.

In solcher Lage des Radianten werden grosse Feuerkugeln nicht sehr häufig beobachtet und auch entsprechende Meteoritenfälle kommen ziemlich selten vor, sehr wahrscheinlich desshalb, weil die bedeutende Geschwindigkeit, mit welcher die Massen alsdann durch die Atmosphäre der Erde ziehen, ihre vollständige Auflösung schon in den höheren Regionen beschleunigt, so dass nur grössere Körper dieser Art, welche gewiss viel seltener vorkommen als die kleinen, in tiefe atmosphärische Schichten gelangen.

Es kann angenommen werden, dass die in Rede stehende Erscheinung begünstigt wurde durch die grosse Höhe der Bahn in sehr dünnen atmosphärischen Schichten und vielleicht auch durch den Umstand, dass bei der horizontalen Lage derselben der Übergang in dichtere Schichten nicht so rasch erfolgte als bei Bahnen von grosser Neigung. Trotzdem zeigte die Erscheinung noch immer ganz deutlich die Merkmale allmäliger Auflösung, und man wird annehmen müssen, dass die Massen beim Eintritte in die Atmosphäre nicht unbeträchtlich waren.

In dem mir bekannten Material befindet sich keine Feuerkugel aus dieser Epoche, deren Radiationspunkt dem der gegenwärtigen nahe liegen würde, dagegen finden sich mehrere solche Fälle in den Monaten September bis Jänner, für welche der scheinbare Radiationspunkt zwar an eine ganz andere Stelle

des Himmels fällt, während der kosmische Ausgangspunkt, also die Richtung, in welcher diese Massen in das Sonnensystem getreten sind, innerhalb der gewöhnlichen Fehlergrenzen gut genug mit dem gegenwärtigen Falle übereinstimmt. Diese Epoche umfasst zum grössten Theile jene Lagen, wo die relative Geschwindigkeit solcher Meteoriten, welche, aus dem bezeichneten Ausgangspunkte kommend, mit der Erde zusammentreffen, eine viel geringere ist und insbesondere im December und Jänner auf den dritten Theil derjenigen herabsinkt, welche beim Zusammenstosse im Juli entsteht.

Um diese Beziehungen übersichtlich darzustellen, habe ich die Umrisse einer Ephemeride für die scheinbare Bewegung des Radianten durch das ganze Jahr gerechnet, welche hier folgt. Derselben liegt die Voraussetzung zu Grunde, dass an jeder Stelle, welche die Erde in ihrer Bahn einnehmen kann, mit ihr möglicherweise Meteoriten zusammentreffen, die alle aus derselben Gegend des Weltraumes, wie jene, welchen sie am 7. Juli 1892 begegnet ist, mit der heliocentrischen Geschwindigkeit $\sqrt{2}$ in das Sonnensystem eingetreten sind, und in der Entfernung $r = 1$ die Geschwindigkeit $v = 2$ [1] erlangt haben.

Um Missverständnissen vorzubeugen erinnere ich daran, dass diese hyperbolischen Bahnen in Bezug auf die meisten ihrer Elemente unter einander sonst nicht vergleichbar sind. Sie bieten alle möglichen Längen der Knoten und Perihele, sowie die verschiedensten Periheldistanzen und Neigungen dar. Dagegen besitzen sie sämmtlich gleiche reelle Halbaxe, alle durchschneiden die Erdbahn und gehen für $r = \infty$ mit einem Bahnast durch den gemeinschaftlichen Ausgangspunkt.

Den nur beispielsweise, nämlich für eine vorläufig angenommene Geschwindigkeit, berechneten Radianten sind zur Vergleichung mehrere Ergebnisse der Beobachtung beigefügt.

---

[1] Dieser Werth weicht so wenig von dem aus den Beobachtungen erhaltenen (2·12) ab, dass der Unterschied geringer ist, als die Sicherheit des Resultates. Da ich für abgerundete Werthe von v Tafeln berechnet habe, welche solche sonst recht umfangreiche Arbeiten abkürzen, wurde der nächstliegende Betrag $v = 2$ zu Grunde gelegt. Mit dieser Hypothese ist dann der Ausgangspunkt für die weitere Rechnung in 352·3 Länge und 18°1 nördl. Breite.

Unter den grösseren Meteoren, welche dabei in Frage kommen, ist allerdings nur die Bestimmung des Radianten der Feuerkugel vom 15. October 1889[1] ungefähr ebenso genau als die vom 7. Juli 1892, während die übrigen grösstentheils auf eine geringere Zahl oder auf minder bestimmte Beobachtungen gegründet sind und daher nur als beiläufig gelten können.

Berechnete Radianten		α	δ	Beobachtete Radianten von Feuerkugeln und Sternschnuppen
Jänner	1.	355°5	+38°5	December 27. (1875) Feuerkugel, α: 352°, δ: +40°
	16.	346	+37	
				Jänner 1. (1868) Feuerkugel, α: 347°5, δ: +33°
				Jänner 7. (1856) Feuerkugel, α: 350°, δ: +33°
Februar	1.	338	+37	
	15.	329·5	+38·5	
März	1.	314	+38	März 31. bis April 13. Sternschn., α: 304°, δ: +12° (Denning, Rep. 1877, p. 185).
	16.	304	+24	
April	1.	302·5	+ 6·5	April 30. (1870) Sternschn., α: 325°, δ: —3° und
	16.	308	+ 1	
Mai	1.	319·5	+ 0	Mai 2.—3. (1870) Sternschn., α: 325°, δ: —2°5 (Tupman, Observations, p. XI).
	16.	326·5	+ 0·5	
				Mai 26. bis Juni 13. (1872) Sternschn., α: 332°, δ: —1° (Den. Rep. 1877, p. 185).
Juni	1.	334	+ 2·5	
	16.	352·5	+ 4·5	Juni 6. α: 335°, δ: +10° (Schmidt).
Juli	1.	346·5	+ 6·5	Juli 7. (1892) Vorl. Feuerkugel, α: 349°, δ: +8°
	16.	352·5	+ 9	
				Juli 31. bis August 1. (1878) Sternschn., α: 6°, δ: +11° (Den., Rep. 1879, p. 48).
August	1.	358·5	+12	August 12. Sternschn., α: 354°, δ: +12° (Brünner Beobacht.)
	16.	4	+14·5	
				August 6. (1869) Sternschnuppen, α: 0°, δ: +17°5
				August 18. (1869) Sternschnuppen, α: 7°, δ: +13 (Tupman, p. XIII).
				August 20. (1885) Sternschn., α: 5°, δ: +12°

[1] Dr. F. Koerber: »Über das Meteor vom 15. October 1889«, in den Annalen des k. k. naturhist. Hofmuseums, Bd. V, S. 463.

Berechnete Radianten		α	δ	Beobachtete Radianten von Feuerkugeln und Sternschnuppen
				August 22. (1885) Sternschn., α: 5°, δ: +17° (Den., Monthly Not. 50. B., p. 439 und 440).
Septb.	1.	9·5	+18	September 5. (1863) Feuerkugel α: 18°, δ: +23°
	16.	13·5	+21	September 19. (1862) Feuerkugel, α: 22°, δ: +16°
				September 25. (1862) Feuerkugel, α: 23°, δ: +22°
Octob.	1.	16·5	+24	October 15. (1889) Feuerkugel, α: 24°, δ: +18°5
	16.	19·5	+27	October 17. (1849—1851) Sternschnuppen, α: 23°8, δ: +26°7
				October 20.—22. (1849—1851) Sternschn., α: 15°8, δ: +26°0
				Mittel α: 19°8, δ: +26°4 (Gruber).
				October 17.—28. Sternschnuppen, α: 23°8, δ: +26°7 (Heis, p. 174 = Gruber's Rad.)
Novb.	1.	20·5	+30·5	November 2.—14. Sternschnuppen, α: 24°, δ: +27° (Heis ib.)
	16.	19·5	+33·5	November 5. (1885) Sternschn., α: 19°, δ: +30° (Den. Monthly Not., 50. B., p. 457).
Decb.	1.	14·5	+36·5	
	16.	6	+38·5	
Jänner	1.	355·5	+38·5	

Die auf die Radianten der Feuerkugeln bezüglichen Angaben sind, soweit sie nicht schon citirt wurden, entnommen:

Für 1875, December 27. Amerika, (Report of the Brit. Assoc. 1876, p. 170 und 1877, p. 104 und 150) Mittheilungen von C. W. Irish. Bestimmung nur beiläufig.

Für 1868, Jänner 1. England, (Rep. 1868) vier Beobachtungen.

Für 1856, Jänner 7. England, (Rep. 1856, p. 54 und 60; 1857, p. 134 und 140) neun Beobachtungen, Bestimmung ziemlich gut.

Für 1863, September 5. England, (Rep. 1864, p. 4 und p. 90. Zwei vollständige Beobachtungen).

Für 1862, September 19. England und Frankreich, (Rep. 1862, p. 70; 1863 p. 218), neun Beobachtungen.

Für 1862, September 25. England (Rep. 1863, p. 320), ohne Angabe der Einzelheiten, nur die Bahnlage gegen die Erde, woraus das obige Resultat folgt. Im Report 1880, p. 5 ist dagegen der Radiant dieses Meteors in $\alpha: 15° \; \delta: +28°$ angegeben.

Die Abweichungen zwischen Beobachtung und Rechnung betragen durchschnittlich $\pm 4°$ in Rectascension und $\pm 3°$ in Declination, doch liegen die berechneten Radianten im Mittel etwas zu weit nordwestlich (im Durchschnitte wäre $\Delta\alpha = +1^\circ 5$, $\Delta\delta = -0^\circ 5$) und es wäre daher eine etwas grössere Rectascension und kleinere Declination für den als Rechnungsgrundlage gewählten Radianten des Meteors vom 7. Juli 1892 aus diesem Gesichtspunkte nicht unwahrscheinlich. Diese Lage würde auch der Beobachtung aus Cattaro besser entsprechen als die ermittelte, wogegen jedoch die grössere Zahl der Beobachtungen einer solchen Annahme minder günstig ist.

In der Voraussetzung, dass die oben angeführten beobachteten Daten wenigstens zum grössern Theile untereinander in dem vermutheten Zusammenhange stehen, könnte man nun sowohl die Position des kosmischen Ausgangspunktes, als auch die angenommene heliocentrische Geschwindigkeit nach dem Grundsatze verbessern, dass die übrig bleibende Fehlerquadratsumme die kleinste wird. Allein ich halte diesen Versuch noch für verfrüht, weil die Anzahl der eigentlich sicheren Feststellungen doch noch zu gering ist.

Beiträge zur Kenntniss der Absorption und Verzweigung elektrischer Schwingungen in Drähten

von

Ignaz Klemenčič.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz.

(Mit 3 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 16. März 1893.)

Die theoretischen Untersuchungen lehren, dass die elektrische Strömung bei Schwingungen eine andere Vertheilung im Querschnitte des Leiters hat wie beim constanten Strom; sie ist an der Oberfläche dichter wie in der Mitte, ja bei sehr schnellen elektrischen Oscillationen findet sie überhaupt nur in den Oberflächenschichten statt; eine Thatsache, welche bekanntlich von Hertz auch durch Experimente bestätigt wurde. Lord Rayleigh und Stefan haben für den Widerstand bei Schwingungen Formeln berechnet, welche zeigen, dass der Widerstand mit der Schwingungszahl wächst und ausserdem vom Material und von der Magnetisirbarkeit desselben abhängt. Während man die Richtigkeit dieser Formeln bei Wechselströmen von der in der Praxis üblichen Häufigkeit nicht bezweifelt hat, schien es, als ob sie bei Hertz'schen Schwingungen nicht mehr zutreffend wären. Insbesondere glaubte man aus einigen Beobachtungen schliessen zu müssen, dass das Eisen dem magnetisirenden Einflusse sehr rascher Schwingungen nicht folgen könne, und dass die in der theoretischen Formel enthaltene Permeabilität keine Rolle spiele.

Trowbridge[1] und Emden[2] haben durch Versuche gezeigt, dass Oscillationen, wie sie bei Entladungen von Leydenerflaschen auftreten, durch Drähte aus verschiedenem Material ungleich stark gedämpft werden und dass insbesondere die Anwendung eines Leiterkreises aus Eisen die Schwingungen sehr rasch zum Verlöschen bringt. Später habe ich[3] einige Beobachtungen mit Schwingungen von der geringsten bisher erreichten Dauer angestellt, und diese haben ergeben, dass die Absorption solcher Oscillationen im Eisen viel stärker ist als in irgend einem nichtmagnetisirbaren Metall von gleicher Form, dass also die Magnetisirung auch dem Einflusse so rasch verlaufender elektrischer Strömungen folgt. Zur selben Zeit gelangte V. Bjerknes[4] durch Experimente, die er mit elektrischen Wellen von 4 *m* Länge machte, zu dem gleichen Resultate; überdies zeigte er, dass auch die nichtmagnetisirbaren Metalle eine verschiedene Absorptionsfähigkeit für elektrische Wellen zeigen.

Die vorliegende Arbeit betrifft ebenfalls diese Frage; durch dieselbe werden auf einem anderen Wege meine früheren Beobachtungen und die Untersuchungen von Bjerknes controlirt und bestätigt; überdies wurde ein erster Versuch unternommen, an den Beobachtungsdaten die theoretischen Formeln zu prüfen. Die Methode von Bjerknes und auch mein früheres Verfahren beruht darauf, dass man an irgend einer Stelle des von Schwingungen durchflossenen Leiters einen durch die Intensität der Schwingungen bedingten Effect misst und aus der Grösse dieses Effectes auf die grössere oder geringere Absorption, respective Dämpfung der Schwingungen im Leiterkreise schliesst. Das allmälige Verlöschen der Oscillationen ist bekanntlich auf zwei Ursachen zurückzuführen, auf die elektromagnetische Strahlung und die Absorption der Energie elektrischer Schwingungen durch den Widerstand des Drahtes. Von diesen dürfte die letzte Ursache weitaus das meiste zur Dämpfung beitragen, und ich habe mich in der vorliegenden Untersuchung auch nur mit ihr beschäftigt, indem ich direct

[1] Phil. Mag., N. 199, December 1891.

[2] Sitzungsber. der Münchener Akademie 1892.

[3] Diese Sitzungsberichte, Bd. 101, Jahr 1892.

[4] Wied. Ann., Bd. 47.

ein Mass für die in den Drähten entwickelte Wärmemenge zu gewinnen suchte. Zu diesem Zwecke diente ein Verfahren, welches darin besteht, dass man in nächster Nähe des zu erwärmenden Drahtes eine Löthstelle eines aus feinen Drähten (Constantan—Eisen) gebildeten Thermoelementes anbringt und die Höhe der Erwärmung des Drahtes durch dessen Ausstrahlung gegen die Löthstelle und den hiedurch verursachten Thermostrom misst.[1] Der Erreger der Primärschwingungen lieferte Wellen von 3·3 *m* Länge und bestand aus zwei Messingscheiben von 30 *cm* Durchmesser, welche durch einen in der Mitte mit Funkenstrecke versehenen Leiter verbunden waren. Ein genau gleicher Körper bildete den Secundärinductor; nur hatte er keine Funkenstrecke, und der mittlere Theil der linearen Leitung war aus den zu untersuchenden Drähten gebildet. Es waren immer zwei Versuchsdrähte eingeschaltet, und die Länge betrug in keinem Falle mehr als 6 *cm* bei jedem Drahte, während der ganze lineare Theil des Secundärinductors eine Länge von 39 *cm* hatte.

Die Versuche über die Wärmeentwicklung in den Drähten führten dann zur Frage über die Verzweigung der elektrischen Strömung bei Schwingungen. Bekanntlich lehrt in diesem Falle die Theorie, dass für die Verzweigung hauptsächlich der Coëfficient der Selbstinduction massgebend ist, nicht aber der Widerstand. Diese Frage konnte nun durch eine Messung der Wärmeentwicklung in verzweigten Leitern auch experimentell untersucht werden. Mit Rücksicht auf den Umstand, dass die Wärmeentwicklung bei diesen schnellen elektrischen Schwingungen hauptsächlich an der Oberfläche erfolgt, schien es mir ferner nicht unwichtig zu untersuchen, wie sich in diesem Falle die Grösse der Ausstrahlung zur Widerstandsänderung des erwärmten Drahtes verhält und dann weiters zu beobachten, welchen Werth dieses Verhältniss beim constanten Strom annimmt. Die Versuche haben ergeben, dass bei Drähten von der hier gebrauchten Dicke (0·037 *cm*) in dieser Beziehung kein nennenswerther Unterschied besteht. Die an der Oberfläche entwickelte Wärme wird also sehr rasch nach dem Inneren des Drahtes abgeleitet.

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 101, 1892, S. 309

Die Versuchsanordnung.

Fig. 1 zeigt die Anordnung der Apparate. *PP* sind die beiden Scheiben des Primärinductors, $k_1 k_2$ die kleinen Kugeln, zwischen denen der Funke überspringt, *J* das Inductorium, welches von drei Accumulatoren betrieben wurde. Der Interruptor machte ungefähr 23 Unterbrechungen in der Secunde. Dem Primärinductor gegenüber steht der Secundärinductor mit den Scheiben *SS* und dem dieselben verbindenden linearen Theile, welcher in der Mitte die Versuchsdrähte eingeschaltet hat. In Fig. 2 ist dieser mittlere Theil noch einmal gezeichnet.

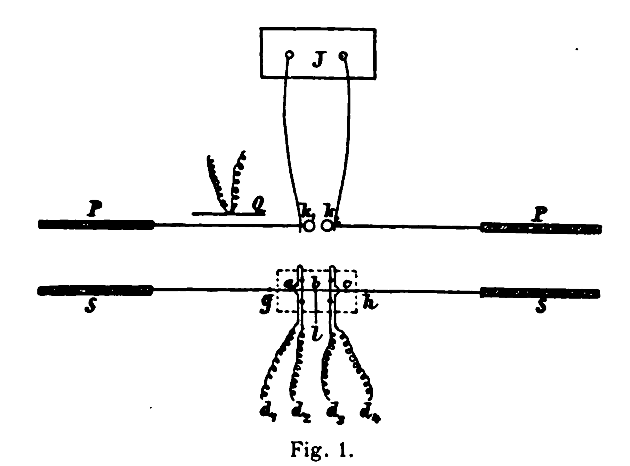


Fig. 1.

Die Versuchsdrähte *ab* und *bc* sind bei *a*, *b* und *c* an 5 *mm* dicke Kupferdrähte angelöthet.

Der Draht *bl* hatte den Zweck, die Widerstandsmessung für jeden Versuchsdraht extra zu ermöglichen und dann sollten die Wärmeableitungsverhältnisse in diesem Falle ungefähr ebenso sein wie bei den späteren Beobachtungen über die Verzweigung der Schwingungen. Die Drähte, welche das Thermoelement bildeten, waren zwischen dickeren Kupferdrähten bei *kf* und *mn* gespannt und hatten eine Löthstelle in der Nähe des Versuchsdrahtes. Als Thermoelement wurde die Combination Constantan — Eisen (0·09 *mm* dick) mit einer thermoelektrischen Kraft von 51 M. V. pro 1° genommen. Die zum Galvanometer führenden Drähte sind mit *d* bezeichnet. Die

Enden bei g und h waren senkrecht gegen die Axe des Drahtes abgefeilt und amalgamirt; dasselbe war mit den Enden des

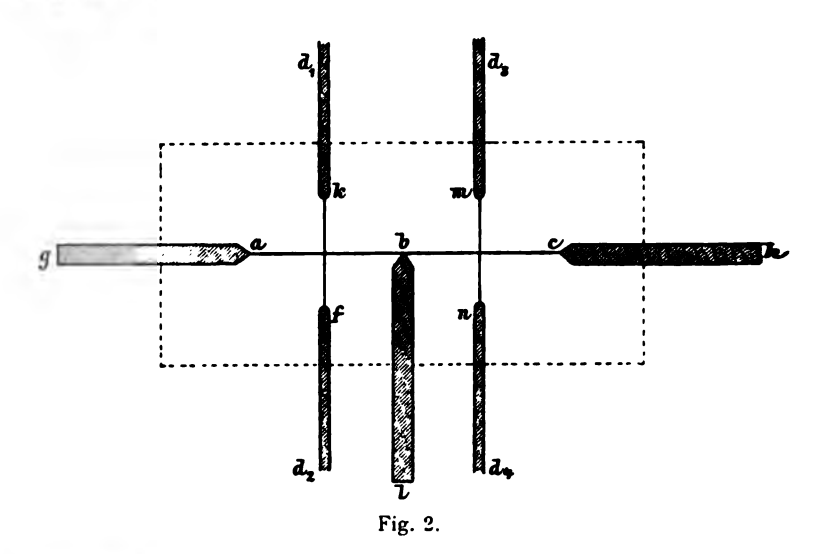


Fig. 2.

von den Scheiben S kommenden linearen Leiters der Fall Die Verbindung geschah durch blosses Zusammenstossen der Enden.

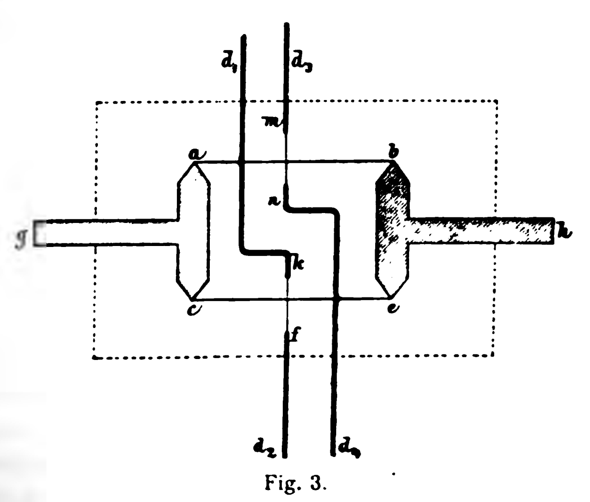


Fig. 3.

Fig. 3 gibt die Anordnung des mittleren Theiles, wie er zur Beobachtung der Verzweigung diente. Die Versuchsdrähte

ab und *ce* sind an den beiden Querstücken *ac* und *be* angelöthet. Der ganze mittlere Theil war in allen Fällen in ein Gehäuse aus Glas, welches durch die punktirte Linie angedeutet ist, luftdicht eingeschlossen.

Für die Versuche hatte ich Drähte aus verschiedenem Material von 0·37 *mm* Dicke gewählt. In gewisser Beziehung, was nämlich die Bedingungen anbelangt, unter welchen die theoretischen Formeln entwickelt sind, wäre es vortheilhaft gewesen, dickere Drähte zu nehmen; allein bei diesen wäre die Erwärmung viel kleiner ausgefallen, und dann wären die von der Wärmeableitung durch die Zuleitungsdrähte herrührenden Störungen noch stärker aufgetreten als in unserem Falle. Dünnere Drähte durften aber mit Rücksicht auf die theoretischen Voraussetzungen nicht genommen werden. Die Versuchsdrähte waren immer paarweise eingeschaltet und höchstens je 6 *cm* lang, bildeten daher nur einen kleinen Theil des linearen Leiters des Secundärinductors. Wie in früheren Fällen habe ich mich auch jetzt eines bei *Q* aufgestellten Standardinductors mit eingeschaltetem Thermoelement bedient, um die Primärfunken zu controliren.

Versuche über die Wärmeentwicklung.

Zur Bestimmung der in einem Drahte durch elektrische Strömungen entwickelten Wärme kann man verschiedene Wege einschlagen. Es ist zunächst das calorimetrische Verfahren, welches ja bei constanten Strömen sehr gute Resultate liefert; auch bei Schwingungen ist dieses nicht ganz ausgeschlossen, doch müsste man bei demselben schon ein länger dauerndes Funkenspiel anwenden, was wieder verschiedene Unannehmlichkeiten mit sich bringt. Ein anderes Mittel würde die durch die entwickelte Wärme bewirkte Widerstandsänderung des Drahtes bieten. Bei Schwingungen würden in diesem Falle durch die Zuleitungsdrähte Störungen verursacht, so dass man nie sicher wäre, dass die beiden Drähte von gleich starken Schwingungen durchflossen werden. Ich habe daher den hier beschriebenen Weg gewählt, bei welchem der lineare Theil des secundären Leiters von allen Zuleitungsdrähten frei

bleibt, denn die Thermoelemente berühren ja die Versuchsdrähte nicht.[1]

Die entwickelte Wärmemenge wird durch die Stärke des Thermostromes gemessen, welcher durch die Ausstrahlung des Versuchsdrahtes gegen die in der Nähe befindliche Löthstelle erzeugt wird. Zur Messung der Thermoströme diente ein Thomson-Carpentier-Galvanometer (Schwingungsdauer der Galvanometernadel = 11 Secunden).[2] Die Primärfunken wurden vom Beobachtungsstuhle aus erregt, stets 10 Secunden lang unterhalten und die Ausschläge so wie in früheren Fällen notirt.

Die Erwärmung der Löthstelle hängt nicht nur von der Ausstrahlung des Drahtes, sondern auch von der Lage der Löthstelle gegen den Draht selbst ab, obwohl die Abhängigkeit von der letzten Bedingung innerhalb gewisser Entfernungen nicht gross ist. Bestimme ich das Verhältniss der Erwärmung zweier Drähte durch elektrische Schwingungen, so ist in dem Werthe dieses Verhältnisses auch die ungleiche Wirksamkeit der Löthstellen enthalten. Ich habe daher in allen Fällen auch das Verhältniss der Wärmeentwicklung durch den constanten Strom gemessen. Beim constanten Strom muss ja dieses Ver-

[1] Bei Versuchen, wie die hier beschriebenen, ist es von wesentlicher Wichtigkeit, dass die beiden Drähte von Schwingungen gleicher Intensität durchflossen werden. Das konnte man bei dieser Anordnung voraussetzen, da nicht nur die beiden Versuchsdrähte gleich dick waren, sondern auch alle anderen Umstände bei beiden gleich gehalten wurden. Für Drähte verschiedener Dicke wäre diese Annahme vielleicht nicht mehr zutreffend, da beim Übergang der Schwingungen von dickeren auf dünnere Drähte und umgekehrt immer Reflexionen auftreten, wie dies ganz neulich J. Ritter v. Geitler-Armingen (Inaug.-Diss., Bonn 1893) gezeigt hat. Es scheinen überall Reflexionen vorzukommen, wo Änderungen des Coëfficienten der Selbstinduction oder des gegenseitigen Inductionscoëfficienten oder ähnlich wirkende Ursachen vorhanden sind.

[2] Hier wird wegen der Einfachheit stets von einer Ausstrahlung des erwärmten Drahtes gegen das Thermoelement gesprochen; es ist aber selbstverständlich, dass neben der Bestrahlung jedenfalls auch die Convection und Leitung durch die Luft zur Erwärmung der Löthstelle beiträgt. Man spricht ja wohl auch von einer Ausstrahlungsconstante oder von einer äusseren Wärmeleitungsfähigkeit in Fällen, wo es einzig richtig wäre Abkühlungsconstante zu sagen.

hältniss, falls alle sonstigen Umstände bei beiden Drähten die gleichen sind, übereinstimmen mit dem Quotienten der specifischen Widerstände.

Die vom Primärinductor ausgehenden Wellen treffen bei ihrer Ausbreitung im Raume auch auf die zum Thermoelement und zum Galvanometer führenden Drähte, laufen längs derselben weiter und erwärmen ebenfalls die Löthstelle, was Beobachtungsfehler mit sich bringen kann. Obwohl ich nun bemüht war, alle Zuleitungsdrähte möglichst senkrecht zur Richtung der Schwingungen zu führen, so war es doch nicht möglich diese Störungen ganz zu beseitigen. Es konnte zwar die Grösse der Störung für sich bestimmt werden, indem man ganz einfach die beiden Endtheile des Secundärinductors auseinanderzog, so dass bei g und h eine Luftstrecke von 1—2 *cm* eingeschaltet war. Dann wirkte beinahe nur die Störungsursache auf das Thermoelement, da in dem kurzen Mittelstück keine kräftigen Schwingungen möglich waren. Auf diese Weise konnte der fremde Einfluss, welcher insbesondere bei Kupfer mehr als die Hälfte des Gesammteffectes ausmachte, in Rechnung gebracht werden. Noch besser schien es mir, die ganze Störung zunächst durch ein (in der Nähe des Secundärinductors), in die Galvanometerleitung entgegengeschaltetes Thermoelement möglichst zu reduciren, den Rest des Einflusses auf obige Weise zu bestimmen und dann in Rechnung zu ziehen. So wurde dann auch gemacht; es ergab sich in einigen Fällen auch eine Übercompensation, welche natürlich im richtigen Sinne in die Correction gesetzt werden musste.

Um jedoch eine besondere Controle für die Richtigkeit der erhaltenen Werthe zu bekommen, habe ich noch bei zwei verschiedenen Entfernungen des Secundärinductors vom Primärinductor beobachtet. Es hat sich nämlich herausgestellt, dass die Intensität der durch die Schwingungen bewirkten Erwärmung nahezu proportional mit dieser Entfernung abnimmt, während sich der störende Einfluss nur wenig ändert. Ergab daher die Beobachtung bei zwei verschiedenen Entfernungen gleiche Werthe für das Verhältniss der Erwärmung der Drähte, so war das ein Zeichen, dass die störende Ursache richtig in Rechnung gezogen wurde.

Tabelle I gibt einige Daten über die untersuchten Drähte. Obwohl die meisten durch dasselbe Loch gezogen wurden, so ergab die Dickenbestimmung doch etwas verschiedene Werthe, was zum Theil auf einem wirklichen Unterschiede, zum Thei[l] aber auch auf Fehlern in der Auswerthung des Durchmesser[s] beruht.

Tabelle I.

Drahtsorte	Widerstand (18°) pro 1 *cm* Länge in S. E.	Dicke in Centimetern	Querschnitt in Quadrat-centimetern	Leitfähigkeit bezogen auf Hg
Eisen	0·0109	0·0372	0·00109	8·5
Neusilber.	0·0224	0·0369	0·00107	4·2
Kupfer	0·00191	0·0365	0·00104	50·4
Messing	0·00654	0·0374	0·00110	14·3
Eisen	0·158	0·0094	0·0000694	9·1

Im Nachfolgenden bezeichnet V_0 das Verhältniss d[er] Wärmeentwicklung durch die Schwingungen, V jenes d[er] Wärmeentwicklung durch den constanten Strom. m bedeut[et] das Verhältniss der specifischen Widerstände der Versuch[s]drähte und D die Entfernung des Secundärinductors vo[m] Primärinductor. Die Bezeichnung der Metalle, auf welche sic[h] die Daten beziehen, gibt zugleich den Sinn an, wie das Ve[r]hältniss aufzufassen ist.

Tabelle II. $\frac{\text{Eisen}}{\text{Neusilber}}$ je 3 *cm* lang.

$V = 0·46 \qquad m = 0·49$

$D = 20$ *cm*	$V_0 = 7·8,\ 7·0,\ 7·3,\ 5·6$	Mittel =	6·9
40	$7·5,\ 7·8 \qquad 6·2$		7·2

Die beiden Mittelwerthe 6·9 und 7·2 besagen, dass d[as] Eisen durch die elektrischen Schwingungen ungefähr siebe[n]mal so stark erwärmt wird wie ein gleich dicker Neusilberdra[ht], während es beim constanten Strom nur halb soviel Wärme e[nt]wickelt wie das Neusilber. Wären die beiden Thermoelemen[te]

gleich wirksam, so sollte $V = m$ sein; das ist in diesem Falle auch angenähert erfüllt.

Tabelle III. $\frac{\text{Eisen}}{\text{Neusilber}}$ } je 6 *cm* lang.

$V = 0 \cdot 41 \qquad m = 0 \cdot 49$

$D = 20$ *cm*	$V_0 = 5 \cdot 1,\ 5 \cdot 3,\ 4 \cdot 7$	Mittel $= 5 \cdot 0$
40	$4 \cdot 9,\ 4 \cdot 8,\ 5 \cdot 1,\ 5 \cdot 0$	$5 \cdot 0$

Tabelle IV. $\frac{\text{Neusilber}}{\text{Messing}}$ } je 6 *cm* lang.

$V = 3 \cdot 5 \qquad m = 3 \cdot 4$

$D = 20$ *cm*	$V_0 = 1 \cdot 73,\ 1 \cdot 88,\ 1 \cdot 73,\ 1 \cdot 86$	Mittel $= 1 \cdot 80$
40	$1 \cdot 75,\ 1 \cdot 80,\ 1 \cdot 88,\ 1 \cdot 97$	$1 \cdot 85$

Tabelle V. $\frac{\text{Neusilber}}{\text{Kupfer}}$ } je 3 *cm* lang.

$V = 50 \cdot 3 \qquad m = 12 \cdot 0$

$D = 20$ *cm*	$V_0 = 4 \cdot 1,\ 4 \cdot 1,\ 4 \cdot 1$	Mittel $= 4 \cdot 1$
40	$4 \cdot 3,\ 4 \cdot 3,\ 4 \cdot 5$	$4 \cdot 3$

Der für V erhaltene Werth ist bedeutend grösser als m; es liegt jedoch nicht an einer so weit verschiedenen Wirksamkeit der Thermoelemente, sondern an der ausserordentlich ungleichen Wärmeleitungsfähigkeit der Metalle. Der Einfluss der dicken Zuleitungsdrähte macht sich beim Kupfer viel mehr bemerkbar als beim Neusilber.[1]

---

[1] Herr Dr. Paul Czermak hat mit einem 4 *cm* langen Kupferdraht [illegible] Strom und mit einem ebenso langen Neusilberdraht [illegible] über die Intensität der Ausstrahlung [illegible] einen constanten Strom [illegible] Zuleitungen [illegible]. Die Intensität [illegible] beim Neusilber [illegible] Mitte eine 1 *cm* lange Strecke [illegible] Ausstrahlung constant ist. Beim Kupfer [illegible] Strecke [illegible] Ausstrahlung [illegible] Kupfer[illegible] genommen werden, damit sich der Einfluss der Zuleitungen [illegible] bemerkbar machen würde.

Tabelle VI. $\frac{\text{Neusilber}}{\text{Kupfer}}$ } je 6 *cm* lang.

	$V = 19 \cdot 5$ $m = 12$	
$D = 20$ *cm*	$V_0 = 3 \cdot 03,\ 2 \cdot 68,\ 2 \cdot 76$	Mittel $= 2 \cdot 82$
40	$2 \cdot 80,\ 2 \cdot 70,\ 2 \cdot 77$	$2 \cdot 76$

Bei dieser Combination stimmt V mit m schon besser überein, obwohl sich auch da noch der Einfluss der ungleichen Wärmeleitungsfähigkeit bemerkbar macht.

Schliesslich habe ich noch zwei ungleich lange Kupferdrähte untersucht und folgendes Resultat erhalten:

Tabelle VII. $\frac{\text{Kupfer 6 cm lang}}{\text{Kupfer 3 cm lang}}$.

	$V = 2 \cdot 82$ $m = 1$	
$D = 20$ *cm*	$V_0 = 1 \cdot 63,\ 1 \cdot 70,\ 1 \cdot 68$	Mittel $= 1 \cdot 67$
40	$1 \cdot 63,\ 1 \cdot 58,\ 1 \cdot 57$	$1 \cdot 59$

Es sei bemerkt, dass man ungefähr die Zahlen der letzten Tabelle erhält, wenn man aus den Daten der Tabellen V und VI das Neusilber eliminirt.

Versuche über die Verzweigung.

Wie schon früher erwähnt, war bei diesen Versuchen der mittlere Theil des Secundärinductors nicht mehr linear, sondern rechteckig, wobei die beiden Versuchsdrähte die langen und die dicken kupfernen Querdrähte die kurzen Seiten bildeten. Hier wurden alle Bestimmungen nur aus einer Entfernung $D = 20$ *cm* gemacht und jeder Werth aus vier Beobachtungen abgeleitet, die folgenden Stellungen des mittleren Theiles entsprachen: *a)* Rechteck horizontal, erster Draht näher am Primärinductor; *b)* Rechteck horizontal, zweiter Draht näher am Primärinductor; *c)* Rechteck vertical, erster Draht oben; *d)* Rechteck vertical, zweiter Draht oben.

Die Bestimmung der Erwärmung durch den constanten Strom geschah ebenfalls so, dass der Strom beiden gemeinsam zugeführt wurde und sich dann verzweigen musste.

Tabelle VIII. $\frac{\text{Eisen}}{\text{Neusilber}}$ } je 6 *cm* lang.

$$V = 1 \cdot 78 \qquad m = 0 \cdot 49$$
$$V_0 = 5 \cdot 0,\ 5 \cdot 4,\ 5 \cdot 4,\ 5 \cdot 9 \qquad \text{Mittel} = 5 \cdot 4$$

Bei dieser Bestimmung war in der Leitung des Thomson-Carpentier-Galvanometers kein Ballastwiderstand eingeschaltet. Bei einer Einschaltung von 15·4 S. E. ergab eine nochmalige Beobachtung folgende Werthe:

$$V = 1 \cdot 68 \qquad m = 0 \cdot 49$$
$$V_0 = 5 \cdot 0,\ 6 \cdot 1,\ 4 \cdot 4,\ 4 \cdot 9 \qquad \text{Mittel} = 5 \cdot 1$$

Um zu sehen, wie weit die beiden Thermoelemente gleich wirksam waren, muss man V auf gleiche Stromstärken reduciren, d. h. man muss jenen Werth von V suchen, welcher sich ergeben hätte, wenn die beiden Drähte vom gleichen Strom durchflossen worden wären. Man erhält diesen Werth, wenn man das beobachtete V mit m^2 multiplicirt. Das gibt

$$V = 0 \cdot 43 \text{ und } 0 \cdot 41,$$

also sehr nahe die Zahlen der Tabellen II und III.

Tabelle IX. $\frac{\text{Neusilber}}{\text{Kupfer}}$ } je 6 *cm* lang.

$$V = 0 \cdot 117 \qquad m = 12$$
$$V_0 = 2 \cdot 6,\ 2 \cdot 7,\ 2 \cdot 5,\ 2 \cdot 2 \qquad \text{Mittel} = 2 \cdot 5$$

Reducirt man den beobachteten Werth von V auf gleiche Stromstärken, so bekommt man

$$V = 16 \cdot 9,$$

welcher mit dem entsprechenden Werthe der Tabelle VI ziemlich gut übereinstimmt.

Versuche über das Verhältniss der Ausstrahlung zur Erwärmung des Drahtes.

Die Entwicklung Joule'scher Wärme findet beim constanten Strom im ganzen Querschnitte gleichmässig statt, während sie bei Schwingungen nur in den oberflächlichen Schichten auftritt. Es schien mir daher eine Untersuchung über das in beiden Fällen herrschende Verhältniss der Ausstrahlung zur Erwärmung, respective Widerstandsänderung des Drahtes nicht uninteressant zu sein, zumal damit gewisse Fragen bezüglich der Zulässigkeit der hier angewendeten Methode in Zusammenhang stehen. Im Allgemeinen sollte das Verhältniss der Ausstrahlung zur Widerstandsänderung bei den Schwingungen etwas grösser ausfallen als beim constanten Strom, wie aus einer Betrachtung der Wärmeentwicklung in diesem Falle hervorgeht. Die Dauer der Wärmeentwicklung bei den Schwingungen ist ebenso gross wie die Dauer der Schwingungen selbst; also wenn wir eine Wellenlänge von $3 \cdot 3\,m$ und bei jedem Erregerfunken 10 Oscillationen annehmen, ungefähr 11×10^{-6} Secunden. Während dieser Zeit wird die entwickelte Wärme zum Theile durch die Oberfläche nach aussen abgegeben, zum Theile aber nach dem Inneren des Drahtes abgeleitet. Der letzte Theil ist, wie dies ein Vergleich der Wärmeleitungsfähigkeit und der Abkühlungsconstante lehrt, wohl vielmals grösser als der erste. Sehr schnell nach Aufhören der Schwingungen stellt sich jedoch ein Zustand her, wie er beim constanten Strom ebenfalls vorhanden ist; der Draht gibt nur noch Wärme nach aussen ab, und zwar proportional seiner jeweiligen Temperatur. Die Dauer dieser Periode ist gleich der Zeit, welche zwischen zwei Erregerfunken vergeht, also ungefähr $^1/_{23}$ Secunde. Die Zeit also, während welcher der Draht mit einer grösseren Intensität strahlt als dies seiner mittleren Temperatur entspricht, ist sehr klein gegenüber der zweiten Periode.

Der Draht bildet für die durch Schwingungen entwickelte Wärme sozusagen ein Reservoir, in welchem sie gesammelt und in der Zwischenzeit, die zwischen zwei Erregerfunken vergeht, wieder abgegeben wird.

Im Nachfolgenden wurde die Strahlung so wie früher, die Erwärmung aber durch die Widerstandsänderung gemessen. Diesmal waren an dem linearen Theil des Secundärinductors zu beiden Seiten des Mittelstückes, worin sich die Versuchsdrähte befanden, Klemmen angelegt[1] und dieser Theil mit der einen Rolle eines Differentialgalvanometers (im Nebenschluss) verbunden. Die zweite Rolle enthielt einen Compensationswiderstand mit grossem Querschnitt. Durch die beiden gegeneinander geschalteten Widerstände wurde ein Strom von passender Stärke geschickt, der den Versuchsdraht zunächst nur wenig erwärmte. Bei dieser Stromintensität wurden die beiden Widerstände mittelst eines Nebenschlussrheostaten möglichst genau compensirt. Eine Verstärkung des Stromes oder die Erregung der Schwingungen bewirkte dann sofort einen Ausschlag am Galvanometer infolge der Erwärmung des Versuchsdrahtes.[2]

Es schien mir am passendsten, zu diesem Theil der Versuche Drähte zu nehmen, bei denen die elektrische Strömung möglichst stark in der Oberflächenschichte concentrirt ist, also Eisendrähte; ich habe daher zwei solche von verschiedener Dicke zu den Beobachtungen herangezogen.

Im Nachfolgenden beziehen sich die Buchstaben mit dem Index 0 auf Oscillationen, die Buchstaben ohne Index auf den constanten Strom. α gibt die Galvanometerausschläge, welche

---

[1] Das Anlegen der Klemmen brachte eine sehr beträchtliche Störung in den Verlauf der elektrischen Schwingungen im Secundärinductor. Die Erwärmung der Drähte war bedeutend geringer wie ohne angelegte Klemmen.

[2] Sind die beiden Widerstände nicht vollkommen abgeglichen, so ist bei der Verstärkung des Stromes ein Theil des Ausschlages auch auf Rechnung dieses Umstandes zu setzen. Dieser Theil kann bald positiv, bald negativ sein, überdies wächst er proportional der Verstärkung des Stromes, während die infolge Erwärmung des Drahtes auftretende Ablenkung mit dem Quadrat der Verstärkung geht. Der Fehler der nicht vollkommenen Abgleichung kann durch viele Beobachtungen ziemlich reducirt werden. Ein grösserer Fehler, der nur in einem Sinne wirkt, rührt von der Selbstinduction her. Überwiegt diese in einem Zweige, so macht sich das bei der hier angewendeten Beobachtungsmethode, bei welcher die Stromverstärkung immer nur 10 Secunden lang unterhalten wurde und man die Ausschläge so wie früher notirte, sehr bemerkbar. Durch passende Formen des Compensationswiderstandes war es möglich, den von der Induction herrührenden Ausschlag ganz zum Verschwinden zu bringen.

die Strahlung der Oberfläche messen, β jene, welche der Widerstandsänderung entsprechen.

Tabelle X. Eisendraht (Dicke 0·0372 *cm*).

Leitfähigkeit des Drahtes bezogen auf $Hg = 8·5$; $D = 20$; Differentialgalvanometerstrom = 0·043 Ampère.

Erwärmung durch elektrische Schwingungen.

β_0	α_0	Mittel β_0	Mittel α_0	$\frac{\alpha_0}{\beta_0}$
67	116			
192	353	145	260	1·79
175	312			
148	260			

Erwärmung durch den constanten Strom — Steigerung der Intensität des Differentialgalvanometerstromes auf das 4·2-fache.

β	α	Mittel β	Mittel α	$\frac{\alpha}{\beta}$
215	94			
207	91	214	91	0·425
227	91			
208	89			

Die Ausschläge β_0 und β beziehen sich auf eine verschiedene Galvanometerempfindlichkeit. Damit also die Verhältnisse unter sich vergleichbar werden, muss das letzte mit 4·2 multiplicirt werden.[1] Ferner ist Rücksicht zu nehmen auf den Einfluss der Induction in den Zuleitungsdrähten, welcher sich auch jetzt, sowie in früheren Fällen bemerkbar machte. Es war auch hier ein Gegenthermoelement eingeschaltet; die beiden Thermoelemente compensirten sich nicht ganz, es war das Hilfselement etwas stärker, und der Einfluss der Zuleitung

[1] Um die Verstärkung des Stromes im Differentialgalvanometer herbeizuführen, wurde neben den schon eingeschalteten Widerstand (in diesem Falle 50 S. E.) ein anderer von passender Grösse als Nebenschluss gelegt. Das Verhältniss der Stromstärken konnte leicht durch den Ausschlag bestimmt werden, welchen eine kleine Änderung in der Grösse der compensirten Widerstände hervorbrachte.

betrug ungefähr 3% des ganzen Effectes, und zwar wie gesagt im Sinne des compensirenden Elementes; daher sind die Werthe von α_0 um soviel zu erhöhen. Berücksichtigt man alle diese Umstände, so bekommt man

$$\frac{\text{Ausstrahlung}}{\text{Widerstandsänderung}} \left\{ \begin{array}{ll} \text{für Schwingungen} & = 1\cdot 84 \\ \text{für constanten Strom} & = 1\cdot 78 \end{array} \right.$$

Eine andere Bestimmung ergab die Werthe 2·05 und 1·90. In beiden Fällen zeigt sich bei Schwingungen ein grösserer Werth als beim constanten Strom; doch reicht der Unterschied kaum oder nicht weit über die Beobachtungsfehler hinaus.

Tabelle XI. Eisendraht (Dicke = 0·0094 *cm*).

Leitfähigkeit bezogen auf Hg = 9·1; $D = 40$ *cm*; Differentialgalvanometerstrom = 0·0039 Ampère.

Erwärmung durch Schwingungen.

β_0	α_0	Mittel β_0	Mittel α_0	$\frac{\alpha_0}{\beta_0}$
269	136			
146	66	221	103	0·466
157	71			
294	138			

Erwärmung durch constanten Strom. Steigerung der Intensität auf das 6·4fache.

β	α	Mittel β	Mittel α	$\frac{\alpha}{\beta}$
303	21·8			
287	21·0			
330	21·5	311	2·8	0·070
332	22·2			
307	22·1			
309	22·0			

Die Correction wegen der Induction in den Zuleitungsdrähten macht hier nichts aus. Bringt man die Verhältnisse auf die gleiche Galvanometerempfindlichkeit, so bekommt man

$$\frac{\text{Ausstrahlung}}{\text{Widerstandsänderung}} \left\{ \begin{array}{ll} \text{für Schwingungen} & = 0 \cdot 466 \\ \text{für constanten Strom} & = 0 \cdot 446 \end{array} \right.$$

Eine andere Bestimmung ergab die Werthe 0·488 und 0·463.

Auch hier ist ein schwaches Überwiegen des bei Schwingungen erhaltenen Verhältnisses zu constatiren. Bei nicht magnetisirbaren Metallen wird der Unterschied noch kleiner sein, und man begeht sicher keinen beträchtlichen Fehler, wenn man die bei Schwingungen entwickelte Wärmemenge durch einen Vergleich mit dem constanten Strom, im absoluten Werthe angibt, wie ich das in einem früheren Falle gethan habe.

Discussion der Resultate.

Tabelle XII.

Drahtsorte	Verhältniss der Wärmeentwicklung		Verhältniss der specifischen Widerstände
	für Schwingungen	für constanten Strom	
Eisen / Neusilber je 3 *cm* lang	7·0	0·46	0·49
Eisen / Neusilber je 6 *cm* lang	5·0	0·41	0·49
Neusilber / Messing je 6 *cm* lang	1·82	3·5	3·4
Neusilber / Kupfer je 3 *cm* lang	4·1	50·3	12·0
Neusilber / Kupfer je 6 *cm* lang	2·8	19·5	12·0
Kupfer, 6 *cm* lang / Kupfer, 3 *cm* lang	1·6	2·82	1·0

Tabelle XII gibt eine übersichtliche Zusammenstellung der Resultate, welche sich auf die Wärmeentwicklung beziehen. Man ersieht aus derselben, dass die Wärmeentwicklung bei Schwingungen in ganz anderen Verhältnissen vor sich geht wie beim constanten Strom. Neben der Magnetisirbarkeit des Drahtes ist allerdings auch der specifische Widerstand des

Drahtes für die Absorption der elektrischen Energie massgebend, doch in anderer Weise wie beim constanten Strom. Diese Versuche bestätigen vollkommen meine früheren am Eisen gemachten Beobachtungen und ebenso die Untersuchungen von Bjerknes (l. c.). Wenn man die Metalle nach der Stärke der Wärmeentwicklung bei elektrischen Schwingungen ordnet, so bekommt man nachstehende Reihenfolge: Eisen, Neusilber, Messing, Kupfer. Will man auch Masszahlen für die Metalle dieser Reihe haben, so muss man berücksichtigen, dass sich die Drähte einer Combination nicht immer unter den gleichen, die Strahlung beeinflussenden Umständen befanden und dass auch die angewendeten Thermoelemente nicht immer gleich wirksam waren; darum sind auch die beobachteten Verhältnisse der Wärmeentwicklung beim constanten Strom nicht immer gleich dem Verhältnisse der specifischen Widerstände. Nimmt man darauf Rücksicht, so ergeben sich aus den Combinationen, bei welchen nur 6 *cm* lange Drähte verwendet wurden, folgende relative Werthe: Eisen : Neusilber : Messing : : Kupfer = 10·5 : 1·75 : 1 : 1. Es sei jedoch dabei erwähnt, dass die Ermittlung der auf Kupfer bezüglichen Masszahl mit Hilfe des für constante Ströme gefundenen Verhältnisses vielleicht nicht ganz correct und die Zahl selbst daher nur angenähert richtig ist.

Lord Rayleigh[1] und Stefan[2] haben für den Widerstand, welchen Drähte dem Verlaufe elektrischer Schwingungen entgegensetzen, Formeln berechnet, die bei sehr schnellen Schwingungen eine recht einfache Gestalt annehmen. Bezeichnet nach Stefan w den Widerstand eines Drahtes für constanten Strom, w' den für elektrische Oscillationen, so ist

$$w' = w\left(\pi a \sqrt{\frac{n\mu}{\sigma}} + \frac{1}{4}\right).$$

In dieser Formel bedeutet n die Schwingungszahl, a den Halbmesser des Drahtes, μ die magnetische Permeabilität und σ

[1] Phil. Mag., Vol. 21, Jahrg. 1886.

[2] Diese Sitzungsber., Bd. 99, Jahrg. 1890.

den specifischen Widerstand, ausgedrückt in absoluten Einheiten. Für sehr grosse n geht die Formel über in

$$w' = w\pi a \sqrt{\frac{n\mu}{\sigma}},$$

welche mit der von Lord Rayleigh angegebenen identisch ist. Die Schwingungszahl betrug bei diesen Versuchen 9×10^7, und man kann, ohne einen beträchtlichen Fehler, den letzten Ausdruck für w' nehmen. Die Rechnung wurde von Stefan unter der Voraussetzung durchgeführt, dass die elektrische Strömung nur in einer Schichte stattfindet, welche gegen den Radius des Drahtes klein ist. Die neuesten Versuche von Bjerknes[1] lehren, dass Schwingungen von der hier verwendeten Häufigkeit im Kupfer ungefähr 0·01 *mm* tief eindringen. Bei Neusilber, welches viel schlechter leitet als Kupfer, kommen sie aber jedenfalls tiefer. Der Halbmesser der hier benützten Drähte war 0·18 *mm*; die theoretische Voraussetzung ist also nur angenähert erfüllt; eine exacte Übereinstimmung zwischen den berechneten und beobachteten Werthen ist daher nicht zu erwarten. Hier handelt es sich jedoch nur um Verhältnisse zwischen zwei Drähten, und da kann man wenigstens in solchen Fällen, wo die Bedingungen bei beiden Drähten nicht gar zu verschieden abweichen, annehmen, dass die Beobachtung und Rechnung nahe zum gleichen Resultate führen, falls die Theorie richtig ist. Dies trifft bei der Combination Neusilber—Messing zu.

Die in der Zeit dt entwickelte Joule'sche Wärme ist gegeben durch den Ausdruck wi^2dt beim constanten Strom und durch $w'i^2dt$ bei den Schwingungen. Habe ich daher zwei gleich dicke Drähte mit den specifischen Widerständen σ und σ_1, den Permeabilitätscoëfficienten μ und μ_1, so wird das Verhältniss der entwickelten Wärmemengen

$$V_0 = \frac{w}{w_1}\sqrt{\frac{\mu\sigma_1}{\mu_1\sigma}}$$

---

[1] Comptes rendus, 1892, t. 115.

sein, vorausgesetzt, dass die beiden Drähte von Schwingungen gleicher Intensität und Dauer durchflossen werden.

Betrachten wir also die Combination Neusilber—Messing. Hier ist $\mu = \mu_1 = 1$ und $\sigma_1/\sigma = 0\cdot293$ zu setzen; daher

$$V_0 = \frac{w}{w_1} \times 0\cdot541.$$

Will man den so berechneten Werth von V_0 mit dem beobachteten vergleichen, so muss man auf eine eventuelle ungleiche Wirksamkeit der Thermoelemente Rücksicht nehmen; auch muss man beachten, dass vielleicht andere die Strahlung beeinflussende Umstände nicht in beiden Metallen gleich sind. Statt des Verhältnisses $\frac{w}{w_1}$ führe ich daher das beim constanten Strom beobachtete Verhältniss der Wärmeentwicklung ein und bekomme

$$V_{0\,\text{ber.}} = 3\cdot52 \times 0\cdot541 = 1\cdot90.$$

Die Beobachtung ergab für V_0 die Werthe 1·80 und 1·85; beide in guter Übereinstimmung mit dem berechneten.

Die Combination Neusilber—Kupfer lieferte Resultate, welche mit den aus den Formeln abgeleiteten nicht harmoniren. Man muss aber da zunächst an den grossen Unterschied in der Leitfähigkeit der beiden Metalle denken; den theoretischen Voraussetzungen wird in sehr ungleicher Weise genügt. Für Neusilber—Kupfer (je 3 *cm* lang) ergibt sich $V_{0\,\text{ber.}} = 14\cdot5$, während die Beobachtung 4·2 lieferte.

Die zweite Combination (je 6 *cm* lang) liefert die Werthe 5·6 berechnet und 2·8 beobachtet. Neben dem vorher erwähnten Umstande spielt aber auch die ungleiche Wärmeleitungsfähigkeit der beiden Metalle eine Rolle. Es scheint, als ob die durch Schwingungen erzeugte Wärme langsamer abgeleitet werden würde als die vom constanten Strom herrührende. Mit Rücksicht auf die nur oberflächliche Wärmeentwicklung bei Schwingungen wäre dies ja erklärlich, obwohl die Versuche über das Verhältniss der Ausstrahlung zur Erwärmung, respective Widerstandsänderung des Drahtes einen geringeren Einfluss erwarten liessen. Dass aber ein solcher Einfluss sicher

vorhanden ist, lehrt ganz deutlich der Versuch mit der Combination Kupfer 6 *cm* : Kupfer 3 *cm*. In Zukunft wird es sich empfehlen, für solche Versuche, die auf eine Prüfung der Theorie hinausgehen, dickere und längere Drähte zu verwenden. Zur Berechnung des Werthes V_0 für die Combination Eisen—Neusilber muss man in die Formel die Grösse μ einführen; sie lautet jetzt

$$V_0 = \frac{w}{w_1} \sqrt{\frac{\mu \sigma_1}{\sigma}}.$$

Bekanntlich kann μ sehr verschiedene Werthe annehmen, und bei unseren geringen Erfahrungen über die in solchen Fällen auftretende Magnetisirung ist es ganz unmöglich, irgend eine bestimmte Zahl für μ einzuführen. Wir wollen aber, gestützt auf den Versuch mit Neusilber—Messing, die Formel als richtig annehmen und daraus μ berechnen; wir bekommen dabei allerdings nur einen angenäherten Werth, da, wie gesagt, für unseren Neusilberdraht die theoretischen Voraussetzungen auch nur angenähert erfüllt sind. Man erhält aus den Beobachtungen mit den 3 *cm* langen Drähten $\mu = 111$, während die zweite Combination $\mu = 73$ liefert.[1] Es wäre vielleicht eine, auch vom praktischen Standpunkt aus, dankbare Aufgabe, zu untersuchen, welche Werthe μ bei verschiedenen Intensitäten und bei verschiedener Dauer der Schwingungen annehmen kann. Man hätte da ziemlich weite Grenzen, von den in der Praxis üblichen Wechselströmen an bis zu den Oscillationen, welche den Strahlen elektrischer Kraft entsprechen.

Bezüglich der Verzweigung sehr schneller elektrischer Schwingungen lehrt die Theorie, dass für diese nur der Coëfficient der Selbstinduction, nicht aber der Widerstand massgebend ist. Der Coëfficient der Selbstinduction S ist nach Stefan (l. c.) gegeben durch die Formel

$$S = 2l\left(\log \frac{2l}{ac} + \frac{1}{4\pi a}\sqrt{\frac{\mu\sigma}{n}}\right).$$

[1] Dabei ist vorausgesetzt, dass von der entwickelten Wärmemenge nichts auf Rechnung der Hysteresis zu setzen ist.

Darin bedeutet l die Länge des Drahtes; die übrigen Bezeichnungen sind dieselben wie vorher. c ist eine Constante, welche nach den verschiedenen Theorien der Induction verschiedene Werthe annimmt. Wir nehmen $c = e^{3/2}$, wie das der sogenannten elektromagnetischen Theorie der Induction entspricht. Für unsere 6 *cm* langen Drähte wird das erste Glied der Formel innerhalb der Klammer $= 4 \cdot 97$; das zweite gibt für Eisen, wenn man $\mu = 73$, $n = 9 \times 10^7$ und $\sigma = 11200$ annimmt, die Zahl $0 \cdot 41$; für alle anderen ist es zu vernachlässigen. Sind die Drähte gleich lang und gleich dick, so haben alle denselben Coëfficienten der Selbstinduction, nur der von Eisen ist ungefähr $10^0/_0$ grösser. Der Theorie gemäss müssen sich also die Schwingungen, selbst das Eisen inbegriffen, nahezu in zwei gleiche Theile verzweigen, wenn die beiden Zweige gleich lang und gleich dick sind. Wir müssen daher in diesem Falle für das Verhältniss der Wärmeentwicklung durch die Schwingungen sehr nahe denselben Werth erhalten wie früher, wo die Drähte hintereinander geschaltet waren.

Die Beobachtung ergab für die Combination Eisen—Neusilber die Zahl $5 \cdot 2$ für das Wärmeentwicklungsverhältniss bei Verzweigung der Schwingungen und $5 \cdot 0$, als die Drähte hintereinander geschaltet waren. Der constante Strom theilte sich bei der Verzweigung so, dass er das Eisen $1 \cdot 73$ mal so stark erwärmte wie das Neusilber, während früher bei gleichem Strom $V = 0 \cdot 41$ erhalten wurde.

Die Verzweigung Neusilber—Kupfer lieferte $V_0 = 2 \cdot 5$, gut übereinstimmend mit dem bei der Hintereinanderschaltung erhaltenen Werthe, während die Theilung des constanten Stromes $V = 0 \cdot 117$ und die Erwärmung bei gleicher Intensität $V = 19 \cdot 5$ ergab.

Hier liefert die Beobachtung in der That überall Resultate, wie sie nach den theoretischen Überlegungen zu erwarten waren.

Die Ergebnisse dieser Untersuchung lassen sich also wie folgt zusammenfassen:

Der Widerstand, durch welchen die Wärmeentwicklung beim Durchgange elektrischer Schwingungen von sehr kurzer Dauer bedingt ist, hängt von der Magnetisirbarkeit des betreffenden Drahtes und von der Drahtsorte selbst ab; von dieser

jedoch in anderer Weise wie beim constanten Strom. Für Drähte aus Eisen, Neusilber, Messing und Kupfer von 6 *cm* Länge und 0·018 *cm* Halbmesser ergibt sich bei Schwingungen eine Wärmeentwicklung, welche ungefähr durch die Relationen 10·5 : 1·75 : 1 : 1 gegeben ist; doch dürfte die auf Kupfer bezügliche Zahl etwas zu gross sein.

Wendet man auf diese Beobachtungen die von Stefan berechneten Formeln an, so zeigt sich bei der Combination Neusilber—Messing eine gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung. Die Combination Neusilber—Kupfer liefert nicht harmonirende Werthe, was zum Theile darauf zurückzuführen ist, dass bei diesen Versuchen nicht alle jene Bedingungen erfüllt waren, welche die Theorie voraussetzt.

Für die magnetische Permeabilität des Eisens wurde unter Zugrundelegung der Stefan'schen Formel in einem Falle die Zahl 111, im anderen 73 gefunden.

Die Beobachtungen haben gezeigt, dass bei der Verzweigung elektrischer Schwingungen von sehr kurzer Dauer nur der Coëfficient der Selbstinduction, nicht aber der Widerstand massgebend ist.

Schliesslich sei es mir gestattet, meinen Freunden Dr. Paul Czermak und Dr. Michael Radakovič, welche mich bei dieser Arbeit vielfach unterstützten, meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.



Zur Theorie der astronomischen Refraction

von

Dr. J. v. Hepperger,

Professor an der k. k. Universität in Graz.

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. März 1893.)

Die Theorie der astronomischen Strahlenbrechung ist durch die hervorragenden Arbeiten so vieler Forscher, wie Laplace, Bessel, Young, Schmidt, Ivory, Lubbock und Gyldèn bereits in so trefflicher Weise ausgebildet worden, dass eine neuerliche Behandlung dieses Gegenstandes ohne genügende Berücksichtigung der Veränderlichkeit der meteorologischen Elemente, was bei dem heutigen Stande der Meteorologie noch nicht möglich ist, der praktischen Astronomie überhaupt nur wenig nützen kann. Die nachstehenden Untersuchungen verfolgen auch nicht den Zweck, eine Verbesserung der bisher gewonnenen Resultate zu erzielen, sondern sind hauptsächlich aus dem Grunde angestellt worden, um die analytischen Entwicklungen etwas einfacher zu gestalten, allerdings ohne die Genauigkeit derselben empfindlich zu schädigen. Es kann nämlich wohl nicht geläugnet werden, dass alle eingangs erwähnten Theorien, namentlich aber die auf breitester Grundlage aufgebaute Theorie Gyldèn's, sich für den akademischen Vortrag nicht gut eignen, theils wegen der Weitläufigkeit des Verfahrens, theils weil hierin Capitel aus der höheren Analysis gestreift werden, welche den wenigsten Hörern geläufig sind und daher zu langer intraductorischer Auseinandersetzungen bedürfen. Und bei der Wichtigkeit der Refraction für die beobachtende Astronomie sollte doch gewiss die vollständige theoretische Ableitung der Formeln, nach welchen Beobachtungen vom Einflusse der Strahlenbrechung befreit werden, Gegenstand des Vortrags sein.

Nachdem die brechende Kraft von Gasen, also auch der Luft, eine Function der Dichte ist, und letztere wiederum von Druck und Temperatur abhängt, so müssten zur genauen Bestimmung der Lichtcurve für alle Punkte derselben Druck und Temperatur als gegebene Grössen betrachtet werden können. Nun wissen wir aber über die Temperaturverhältnisse in den höheren Luftschichten sehr wenig, indem fast nur die mittlere Temperaturabnahme und diese nur bis zu Höhen von einigen tausend Metern so ziemlich bekannt ist, und können daher keine Formel aufstellen, nach welcher die Dichte der Luftschichten, aus deren Höhe auch nur einigermassen sicher erhältlich wäre. Es würde desshalb mit sehr grossen Schwierigkeiten verknüpft sein, die beobachteten Refractionen durch eine Theorie befriedigend darzustellen, wenn uns nicht der Umstand zu statten käme, dass fehlerhafte Annahmen über die Änderungen der Dichte einen nur geringen Einfluss auf den Betrag der Refraction ausüben, wie schon daraus hervorgeht, dass die Annahme einer Atmosphäre von gleicher Dichte die Refraction bis zu 80° Zenithdistanz ganz gut darstellt.

Nachdem die Temperatur der Atmosphäre in erster Linie von der absorbirenden Wirkung derselben auf die Wärmestrahlung der Sonne abhängt, darf man erwarten, durch alleinige Berücksichtigung derselben zu einem Ausdrucke zu gelangen, welcher die Temperaturänderungen in verticaler Richtung genähert darstellt. Betrachten wir den sogenannten mittleren Zustand der Atmosphäre, wo an allen Punkten der untersten Schicht derselbe Druck und dieselbe Temperatur obwalten und eine Änderung dieser Grössen nur in verticaler Richtung erfolgen soll, so können wir uns denselben durch eine von aussen her concentrisch eindringende Wärmestrahlung von constanter Intensität hervorgebracht denken. Da hiebei ein seitlicher Abfluss von Wärme nicht stattfindet, genügt es, die Wärmebewegung in der Richtung der Verticalen allein zu berücksichtigen. Der Absorptionscoëfficient der Luft ist für Wärmestrahlen von verschiedener Wellenlänge auch verschieden gross und hängt zweifellos ausser vom Drucke, unter welchem die Luft steht, auch von der Temperatur derselben ab. Doch wird die Annahme, dass der Absorptionscoëfficient innerhalb der hier auf-

tretenden Grenzen von Druck und Temperatur ersterem proportional, von letzterer aber unabhängig sei, von der Wahrheit nicht zu sehr abweichen. Unter dieser Voraussetzung ist auch der Coëfficient der allgemeinen Absorption, den ich α nenne, dem Drucke proportional.

Bedeutet ρ, p, g Dichte, Druck der Luft und Schwerkraft in der Entfernung r vom Erdmittelpunkt, ρ_0, p_0, g_0 dasselbe für die Erdoberfläche, a den Erdradius und

$$s = \frac{r-a}{a},$$

so ist

$$\partial p = -\rho g a \partial s.$$

Nach dem Mariotte'schen Gesetze allein wäre

$$\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0},$$

demnach bei Ausserachtlassung der geringen Veränderlichkeit von g

$$\frac{\partial p}{p} = -\frac{\rho_0 g_0 a}{p_0} \partial s.$$

Ist

$$\frac{p_0}{\rho_0 g_0} = l_0,$$

so wird

$$p = p_0 e^{-\frac{a}{l_0} s}.$$

Bedeutet α_0 den dem Drucke p_0 entsprechenden Absorptionscoëfficienten, so ist auch

$$\alpha = \alpha_0 e^{-\frac{a}{l_0} s}. \qquad 1)$$

Wird die Intensität der Strahlung durch i ausgedrückt, so ist

$$\partial i = \alpha i a \partial s = \alpha_0 i a e^{-\frac{a}{l_0} s} \partial s,$$

woraus folgt

$$\log \text{nat.} \frac{i}{i_0} = \alpha_0 l_0 \left(1 - e^{-\frac{a}{l_0} s}\right), \qquad 2)$$

wo i_0 die Intensität an der unteren Grenze der Atmosphäre bedeutet. Bezeichnet i_1 den Anfangswerth von i, so wäre derselbe, da $e^{-\frac{a}{l_0} s}$ für die Grenze der Atmosphäre von Null sehr wenig verschieden ist

$$i_1 = i_0 e^{\alpha_0 l_0},$$

während für die untersten Luftschichten

$$i = i_0 e^{\alpha_0 a s}.$$

Nimmt man noch an, dass die Temperatursteigerung proportional sei der absorbirten Intensität der Wärmestrahlung, also

$$T + t = C . \alpha i$$
$$T + t_0 = C \alpha_0 i_0,$$

so wird

$$t - t_0 = -C \alpha_0 i_0 \left(1 - e^{-\left[\frac{1}{l_0} - \alpha_0\right] a s}\right),$$

wofür man, da hierin s bereits als klein vorausgesetzt wurde, auch schreiben kann

$$t - t_0 = -C \alpha_0 i_0 \left(\frac{1}{l_0} - \alpha_0\right) a s.$$

Da nach 1) für die Grenze der Atmosphäre $\alpha = 0$ wird, so erhält man, wenn t_1 die Temperatur der äussersten Luftschicht bedeutet

$$T + t_1 = 0$$
$$C \alpha_0 i_0 = t_0 - t_1$$

und daher

$$t - t_0 = -(t_0 - t_1) \left(\frac{1}{l_0} - \alpha_0\right) a s. \qquad 3)$$

Bezeichnet m den Ausdehnungscoëfficienten der Luft, so ist

$$\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0} \frac{1 + m t_0}{1 + m t}.$$

Je geringer die Werthe von s sind, desto genauer wird

$$\frac{1+mt_0}{1+mt} = 1 - \frac{m(t-t_0)}{1+mt_0}.$$

Durch Einführung der Bezeichnung

$$\omega = (t_0 - t_1)\left(\frac{1}{l_0} - \alpha_0\right); \qquad \omega' = \frac{m\omega}{1+mt_0}$$

wird

$$\frac{1+mt_0}{1+mt} = 1 + \frac{m\omega a s}{1+mt_0} = 1 + \omega' a s,$$

oder mit demselben Grade der Annäherung

$$\frac{1+mt_0}{1+mt} = e^{\omega' a s}$$

und hieraus durch Beibehaltung des Näherungswerthes für $\frac{p}{p_0}$

$$\rho = \rho_0 e^{-\left(\frac{1}{l_0} - \omega'\right) a s}$$

oder, wenn

$$\left(\frac{1}{l_0} - \omega'\right) a = \varkappa$$

genommen wird

$$\rho = \rho_0 e^{-\varkappa s}. \tag{4}$$

Man gelangt sonach auf diesem Wege zur Formel, welche Bessel seinen Untersuchungen zu Grunde gelegt hat.

Bedeutet z die scheinbare Zenithdistanz und n, n_0 die absoluten Brechungscoëfficienten der Luft in den Entfernungen r, a vom Erdcentrum, so lautet die Differentialgleichung, aus welcher die Refraction R zu bestimmen ist

$$\partial R = -\frac{\partial n}{n} \cdot \frac{\sin z}{\sqrt{\left(\frac{nr}{n_0 a}\right)^2 - \sin^2 z}}.$$

Aus der Proportionalität von brechender Kraft und Dichte folgt

$$n^2 - 1 = c\rho = c\rho_0 e^{-\varkappa s}$$
$$n_0^2 - 1 = c\rho_0.$$

Führt man eine neue Variable w ein durch die Gleichung

$$e^{-\varkappa s} = 1 - w, \tag{5}$$

so wird

$$-\frac{\partial n}{n} = \frac{c\rho_0 \partial w}{2n^2}$$

$$\left(\frac{n}{n_0}\right)^2 = 1 - \frac{c\rho_0 w}{1 + c\rho_0}$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 + 2s + s^2.$$

Da die unteren Luftschichten wegen ihrer grösseren Dichte auch am stärksten das Licht brechen, kann man bei der relativ geringen Höhe der Erdatmosphäre s^2 vernachlässigen und erhält, indem man

$$\frac{c\rho_0}{1 + c\rho_0} = \beta$$

setzt,

$$\partial R = \frac{\beta \sin z \partial w}{2(1 - \beta w)\sqrt{(1 - \beta w)(1 + 2s) - \sin^2 z}}. \tag{6}$$

Ist die Höhe der Atmosphäre $= H$, so wären die Grenzen von w

$$w_1 = 0$$

$$w_2 = 1 - e^{-\frac{\varkappa H}{a}},$$

wofür man, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, die Grenzen 0 und 1 setzen kann, nachdem $\varkappa$ beiläufig 700 ist. Den ausserhalb des Wurzelzeichens befindlichen Factor $1 - \beta w$ werde ich vorläufig $= 1$ annehmen, wodurch, da β circa $\frac{1}{2000}$ ist, ein nur sehr geringer Fehler entsteht, welcher übrigens noch nachträglich behoben werden kann. Gewöhnlich setzt man $1 - \beta w = 1 - \frac{1}{2}\beta$, welcher Mittelwerth bei circa $z = 84°$, wo ein Einfluss 0"14 beträgt, noch das Hundertstel der Secunde genau liefert, in grösseren Zenithdistanzen jedoch zu grosse Werthe gibt. Bei $z = 90°$ erhält man nämlich hiernach 0"59, während $1 - \beta w$ die Zahl 0"34 gibt.

In dem Radicale jedoch, das bei $z = 90°$ an der Erdoberfläche $= 0$ wird, muss besonders für sehr kleine Werthe von s jede Ungenauigkeit vermieden werden. Wenn man, um s durch w auszudrücken, annehmen würde

$$1+2s = e^{2s} = (1-w)^{-\frac{2}{\varkappa}},$$

was, nachdem s^2 bereits vernachlässigt wurde, unbedenklich geschehen könnte, so erhielte man durch Entwicklung des Binoms

$$1+2s = 1+\frac{2}{\varkappa}w+\frac{1}{\varkappa}\left(\frac{2}{\varkappa}+1\right)w^2+\ldots,$$

welche Reihe, da $\varkappa$ circa 700 ist, ihrer schwachen Convergenz halber, aber nur für sehr kleine Werthe von w benützt werden könnte. Ich nehme an

$$1+2s = \frac{1-\mu w}{1-\nu w} \tag{7)}$$

und bestimme die Coëfficienten μ und ν so, dass die Gleichung sowohl für sehr kleine Werthe von s Geltung hat, als auch für einen grösseren Werth von s genau erfüllt ist.

Ist s sehr klein, so gibt die Gleichung 5)

$$w = \varkappa s.$$

Und sonach

$$1+2s = \frac{1-\mu\varkappa s}{1-\nu\varkappa s}$$

$$\nu-\mu = \frac{2}{\varkappa}.$$

Soll die Gleichung 7) einem bestimmten grösseren Werthe von s, wofür ich $\frac{1}{\varkappa}$ gewählt habe, genau entsprechen, so muss

$$1+\frac{2}{\varkappa} = \frac{1-\mu\left(1-\frac{1}{e}\right)}{1-\nu\left(1-\frac{1}{e}\right)}$$

sein, woraus folgt

$$\nu = \frac{1}{c-1}; \quad \nu - \mu = \frac{2}{\varkappa}. \tag{8}$$

Die Annahme von $s = \frac{1}{\varkappa}$ zur Bestimmung der Coëfficienten ist gewiss nicht die beste; ich habe sie nur wegen ihrer Einfachheit und des vorwiegenden Einflusses der unteren Luftschichten gemacht.

Es wird nun

$$\partial R = \frac{\beta \sin z}{2} \frac{\sqrt{1-\nu w}\, \partial w}{\sqrt{(1-\beta w)(1-\mu w)-(1-\nu w)\sin^2 z}}.$$

Die Substitutionen

$$2c = \frac{\nu \sin^2 z - \beta - \mu}{\beta\mu}; \quad a^2 = \frac{\cos^2 z}{\beta\mu} \tag{9}$$

$$J = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-\nu w}\, \partial w}{\sqrt{w^2+2cw+a^2}}$$

ergeben

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta}{\mu}} \sin z \,.\, J. \tag{10}$$

Um die Reduction von J auszuführen, kann man annehmen

$$\sqrt{1-\nu w} = h \operatorname{tg} \psi, \tag{11}$$

wo h eine noch näher zu bestimmende Constante bedeutet, und erhält

$$\partial w = -\frac{2h^2 \operatorname{tg} \psi}{\nu \cos^2 \psi} \partial \psi$$

$$\nu^2(w^2+2cw+a^2) = 1 + 2c\nu + \nu^2 a^2 - 2h^2(1+c\nu)\operatorname{tg}^2\psi + h^4 \operatorname{tg}^4 \psi.$$

Es ist aber nach 9)

$$1 + 2c\nu + \nu^2 a^2 = 1 + \frac{\nu^2 - \nu(\beta+\mu)}{\beta\mu}$$

mithin constant, und da $\nu - \mu = \frac{2}{\varkappa}$ und $\beta < \frac{2}{\varkappa}$ auch positiv; diese Grösse soll mit h^4 benannt werden.

$$h^4 = 1 + 2c\nu + \nu^2 a^2 = 1 + \frac{\nu^2 - \nu(\beta+\mu)}{\beta\mu} \tag{12}$$

$$\nu^2(w^2 + 2cw + a^2) = h^4\left(1 - 2\frac{1+c\nu}{h^2}\,\mathrm{tg}^2\,\psi + \mathrm{tg}^4\,\psi\right).$$

Man erhält nun, indem man das negative Vorzeichen durch Vertauschung der Integrationsgrenzen beseitigt

$$J = 2h\int \frac{\mathrm{tg}^2\,\psi\, d\psi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1+c\nu}{h^2}\right)\sin^2 2\psi}} \tag{13}$$

$$\mathrm{tg}\,\psi_1 = \frac{\sqrt{1-\nu}}{h}; \quad \mathrm{tg}\,\psi_2 = \frac{1}{h}.$$

Die weitere Behandlung dieses Integrals hängt vom Coëfficienten $1 + \frac{1+c\nu}{h^2}$ ab.

Für $z = 0$ wird nach 9)

$$2c = -\frac{\mu+\beta}{\beta\mu}; \quad a^2 = \frac{1}{\beta\mu}; \quad c^2 - a^2 = \left(\frac{\mu-\beta}{2\beta\mu}\right)^2.$$

Es ist sonach c negativ, $c^2 - a^2$ positiv. Nach 12) ist

$$(1 + c\nu)^2 = h^4 + \nu^2(c^2 - a^2).$$

Daher

$$\frac{(1+c\nu)^2}{h^4} > 1,$$

also auch der absolute Werth von $\frac{1+c\nu}{h^2} > 1$. Nachdem $h > 1$ und c hier negativ ist, muss auch $\frac{1+c\nu}{h^2}$ negativ sein und ebenso

$$1 + \frac{1+c\nu}{h^2}$$

einen negativen Werth erhalten.

Während die Werthe von c mit wachsendem z sich der Null nähern und dann positiv werden, wird, da a continuirlich gegen Null abnimmt, $c^2 - a^2$ zweimal gleich Null, indem zuerst

$-c = a$, dann $+c = a$. Die Werthe von z, für welche $c^2 = a^2$, seien z_1 und z_2, wobei $z_2 > z_1$ sein soll. Sie sind Wurzeln der Gleichung

$$h^4 = (1 + c\nu)^2,$$

woraus sich ergibt

$$1 + c_1\nu = -h^2$$
$$1 + c_2\nu = +h^2$$

und daraus

$$1 - \frac{\nu \cos z_1}{\sqrt{\beta\mu}} = -h^2$$
$$1 + \frac{\nu \cos z_2}{\sqrt{\beta\mu}} = h^2,$$

oder

$$\cos z_1 - \cos z_2 = \frac{2\sqrt{\beta\mu}}{\nu}$$
$$\cos z_1 + \cos z_2 = \frac{2h^2\sqrt{\beta\mu}}{\nu}. \tag{14}$$

Nachdem für $z = z_1$

$$1 + \frac{1 + c\nu}{h^2} = 0,$$

für $z = z_2$

$$1 + \frac{1 + c\nu}{h^2} = 2$$

ist leicht ersichtlich, dass die folgenden Relationen bestehen.

$0 \leqq z < z_1$	$1 + \frac{1 + c\nu}{h^2} < 0$	$c^2 > a^2$	c negativ
$z_1 < z < z_2$	$0 < 1 + \frac{1 + c\nu}{h^2} < 2$	$c^2 < a^2$	$c \mp$
$z_2 < z$	$2 < 1 + \frac{1 + c\nu}{h^2}$	$c^2 > a^2$	c positiv

Betrachten wir zunächst die beiden Fälle, in welchen $z = z_1$ und $z = z_2$ wird.

$$z = z_1.$$

Die Gleichung 13) gibt hiefür

$$J = 2h\int \mathrm{tg}^2 \psi d\psi$$

oder

$$J = 2h\{\mathrm{tg}\,\psi_2 - \mathrm{tg}\,\psi_1 - (\psi_2 - \psi_1)\}.$$

$$z = z_2$$

$$J = 2h\int \frac{\mathrm{tg}^2\psi d\psi}{\cos 2\psi}$$

$$J = 2h\left[\frac{1}{2}\log.\,\mathrm{nat.}\,\frac{\mathrm{tg}(45+\psi_2)}{\mathrm{tg}(45+\psi_1)} - \mathrm{tg}\psi_2 + \mathrm{tg}\psi_1\right].$$

Diese beiden Fälle sind die einzigen, in welchen sich J durch Logarithmen, trigonometrische Functionen und Kreisbögen vollständig ausdrücken lässt.

I.

$$0 \leqq z < z_1.$$

Durch Einführung eines Hilfswinkels γ entsprechend der Gleichung

$$\frac{1+c\nu}{h^2} = -\frac{1}{\cos\gamma},$$

wo γ im ersten Quadranten liegt, wird

$$1 + \frac{1+c\nu}{h^2} = -\frac{2\sin^2\frac{\gamma}{2}}{\cos\gamma}$$

und nach 13)

$$J = 2h\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}}\int\frac{\mathrm{tg}^2\psi d\psi}{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}\cos^2 2\psi}}.$$

Nimmt man

$$\psi = 45 - \frac{1}{2}\chi$$

$$\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} = k, \quad k^2 < 1,$$

so wird

$$J = 2h\sqrt{1-k^2}\int \frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}^2\left(45-\frac{1}{2}\chi\right)d\chi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\chi}}$$

$$\mathrm{tg}\left(45-\frac{1}{2}\chi_1\right) = \frac{1}{h}; \quad \mathrm{tg}\left(45-\frac{1}{2}\chi_2\right) = \frac{\sqrt{1-\nu}}{h}.$$

Es ist

$$\mathrm{tg}\left(45-\frac{1}{2}\chi\right) = \frac{1-\sin\chi}{\cos\chi}$$

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}^2\left(45-\frac{1}{2}\chi\right) = \frac{1-\sin\chi}{\cos^2\chi} - \frac{1}{2}.$$

Setzt man

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\chi} = \Delta$$

$$\int \frac{d\chi}{\Delta} = F$$

$$\int \Delta\, d\chi = E,$$

wobei die Grenzen χ_1 und χ_2 sein sollen, so hat man

$$d(\Delta\,\mathrm{tg}\,\chi) = \left(\frac{1-k^2}{\Delta\cos^2\chi} + \Delta - \frac{1-k^2}{\Delta}\right)d\chi$$

$$d\left(\frac{\Delta}{\cos\chi}\right) = \frac{(1-k^2)\sin\chi}{\Delta\cos^2\chi}\,d\chi$$

und daher

$$J = \frac{2h}{\sqrt{1-k^2}}\left[\frac{1}{2}(1-k^2)F - E - \Delta_2 .\,\mathrm{tg}\left(45-\frac{1}{2}\chi_2\right) + \right.$$

$$\left. + \Delta_1\,\mathrm{tg}\left(45-\frac{1}{2}\chi_1\right)\right] \qquad 15)$$

worin Δ_1 und Δ_2 aus Δ hervorgehen, wenn man für χ einsetzt χ_1 respective χ_2.

Die Werthe F und E können den Legendre'schen Tafeln der elliptischen Integrale entnommen werden, deren Argument Θ aus den Gleichungen erhalten wird

$$\cos\gamma = -\frac{h^2}{1+c\nu} = \frac{2h^2}{\nu^2 a^2 - h^4 - 1}$$

oder wenn man γ direct als Function von z berechnen will

$$\cos\gamma = \frac{\frac{2h^2}{h^4+1}}{\frac{\nu^2\cos^2 z}{\beta\mu(h^4+1)}-1}$$

$$\sin\Theta = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma.$$

II.

$$z_1 < z < z_2.$$

Setzt man in diesem Falle

$$\cos 2\Theta = -\frac{1+c\nu}{h^2} = \frac{\nu^2 a^2 - h^4 - 1}{2h^2},$$

so wird

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1+c\nu}{h^2}\right) = k^2 = \sin^2\Theta.$$

Ist ferner

$$\psi = \frac{1}{2}\chi$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\chi_1 = \frac{\sqrt{1-\nu}}{h}; \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}\chi_2 = \frac{1}{h},$$

so wird

$$J = 2h\int\frac{\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\chi d\chi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\chi}}.$$

Zur Berechnung dieses Integrals dienen die Formeln

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\chi = \frac{1-\cos\chi}{\sin\chi};$$

$$d(\Delta\operatorname{cotg}\chi) = -\frac{d\chi}{\Delta\sin^2\chi} - \Delta d\chi + \frac{d\chi}{\Delta};$$

$$d\left(\frac{\Delta}{\sin\chi}\right) = -\frac{\cos\chi d\chi}{\Delta\sin^2\chi},$$

wonach man erhält

$$J = 2h\left[\frac{1}{2}F - E + \Delta_2 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\chi_2 - \Delta_1 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\chi_1\right]. \tag{16}$$

Die Grenzwerthe von χ sind hier durch die Gleichungen gegeben

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\chi_1 = \frac{\sqrt{1-\nu}}{h}; \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}\chi_2 = \frac{1}{h}.$$

Wie man sofort sieht, ist der Zusammenhang zwischen diesen Grenzen von χ, die ich jetzt mit χ' bezeichne, und den in I vorkommenden, folgender

$$\chi_1' = 90 - \chi_2$$
$$\chi_2' = 90 - \chi_1.$$

Die Grenzwerthe sind sonach durchaus constant.

III.

$$z_2 < z \leqq 90.$$

Nachdem hiefür $1 + \frac{1+c\nu}{h^2} > 2$, würde der Modul grösser als Eins, und daher die unmittelbare Auswerthung der elliptischen Integrale durch die Tafeln nicht möglich. Durch die Substitution

$$\nu^2(c^2 - a^2) = \delta^2$$

erhält man

$$h^4 = (1 + c\nu + \delta)(1 + c\nu - \delta).$$

Die Einführung eines Winkels φ durch die Gleichung

$$1 - \nu w = (1 + c\nu - \delta)\sin^2\varphi$$

gibt

$$\nu^2(w^2 + 2cw + a^2) = h^4 \cos^2\varphi\left(1 - \frac{1+c\nu-\delta}{1+c\nu+\delta}\sin^2\varphi\right).$$

Es sei wieder

$$\frac{1+c\nu-\delta}{1+c\nu+\delta} = k^2,$$

so wird

$$1+c\nu-\delta = h^2 k$$

$$1+c\nu+\delta = \frac{h^2}{k}$$

$$-\nu dw = 2h^2 k \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi.$$

Die ursprüngliche Form von J geht nun über in

$$J = \frac{2h}{\sqrt{k}} \int \frac{k^2 \sin^2\varphi \, d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\varphi}},$$

$$\sin\varphi_1 = \frac{\sqrt{1-\nu}}{h\sqrt{k}}, \quad \sin\varphi_2 = \frac{1}{h\sqrt{k}}.$$

Es sei wieder

$$F = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\varphi}}$$

$$E = \int \sqrt{1-k^2 \sin^2\varphi} \, d\varphi,$$

so wird

$$J = \frac{2h}{\sqrt{k}} (F-E). \qquad 17)$$

k kann auch berechnet werden aus den Formeln

$$\sin\gamma = \frac{h^2}{1+c\nu} = \frac{2h^2}{h^4+1-\nu^2 a^2},$$

$$k = \sin\Theta = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma.$$

Für $z = 90$ wird $k = \frac{1}{h^2}$; $\varphi_2 = 90$.

Ad I.

Nachdem für mässige Werthe von z der Hilfswinkel γ gross ausfällt und daher $k = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma$ von der Einheit nicht zu weit entfernt ist, kann man durch Einführung des Complimentärmoduls k_1, wo $k_1^2 = 1-k^2$, die Grösse J bequemer durch Integration einer nach Potenzen von k_1 fortschreitenden Reihe erhalten.

Da

$$J = 2hk_1\int\frac{\operatorname{tg}^2\psi\, d\psi}{\sqrt{\sin^2 2\psi + k_1^2\cos^2 2\psi}},$$

so wird

$$\operatorname{tg}^2\psi = x$$

gesetzt,

$$\operatorname{tg}^2\psi\, d\psi = \frac{\sqrt{x}\, dx}{2(1+x)},$$

$$\sin 2\psi = \frac{2\sqrt{x}}{1+x},\quad \cos 2\psi = \frac{1-x}{1+x}.$$

$$J = \frac{hk_1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1+k_1^2\frac{(1-x)^2}{4x}}}.$$

$$x_1 = \frac{1-\nu}{h^2},\quad x_2 = \frac{1}{h^2}.$$

Setzt man

$$X_m = \int\left(\frac{1}{x^m} + x^m\right)dx,$$

so wird

$$\xi_1 = \int\frac{(1-x)^2 dx}{x} = X_1 - 2(x_2 - x_1),$$

$$\xi_2 = \int\frac{(1-x)^4 dx}{x^2} = X_2 - 4X_1 + 6(x_2 - x_1),$$

. . . .

. . . .

$$J = \frac{hk_1}{2}\left[x_2 - x_1 - \frac{1}{8}k_1^2\xi_1 + \frac{3}{128}k_1^4\xi_2 - \frac{5}{1024}k_1^6\xi_3 + \ldots\right] \qquad 18)$$

Indem man in dieser Reihe das mit k^{12} multiplicirte Glied noch berücksichtigt, erhält man J noch für $z = 80°$ bis auf sechs Decimalstellen genau. Aus vorstehender Reihe lässt sich dann auch auf eine sehr einfache Weise die Grösse $\frac{\partial J}{\partial c}$ bestimmen.

Um den Einfluss zu ermitteln, welchen Änderungen der Constanten auf die Refraction ausüben, braucht man bloss

die Gleichung 10) zu differenziren und erhält für die Änderung des Logarithmus von R

$$d \log R = d \log g + d \log J,$$
$$g = \sqrt{\frac{\beta}{\mu}}. \tag{19}$$

Nachdem

$$h^4 = 1 + 2c\nu + \nu^2 a^2$$

ist, kann man J als Function von c und h betrachten, wo c implicite ebenfalls von h abhängt, und schreiben

$$J = \nu \int \frac{\sqrt{1-\nu w}\, dw}{\sqrt{\nu^2 w^2 - 2c\nu(1-\nu w) + h^4 - 1}},$$

$$\frac{\partial J}{\partial c} = \nu^2 \int \frac{(1-\nu w)^{\frac{3}{2}}\, dw}{[\nu^2 w^2 - 2c\nu(1-\nu w) + h^4 - 1]^{\frac{3}{2}}},$$

$$= \frac{1}{\nu} \int \frac{(1-\nu w)^{\frac{3}{2}}\, dw}{(w^2 + 2cw + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und erhält nach 11)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial c} &= \frac{2\nu}{h} \int \frac{\sin^4 \psi\, d\psi}{\left[1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1+c\nu}{h^2}\right) \sin^2 2\psi\right]^{\frac{3}{2}}} \\
2 \sin^4 \psi &= 1 - \cos 2\psi - \frac{1}{2} \sin^2 2\psi \\
\frac{\partial J}{\partial h} &= -\int \frac{\sin^2 2\psi\, d\psi}{\left[1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1+c\nu}{h^2}\right) \sin^2 2\psi\right]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{\sqrt{1-\nu}}{h}, \quad \operatorname{tg} \psi_2 = \frac{1}{h}.$$

Bei der Reduction dieser Integrale werden wieder die Fälle I, II, III zu unterscheiden sein.

I.

$$0 \leqq z < z_1; \quad 2\psi = 90 - \chi; \quad 1 + \frac{1+c\nu}{h^2} = -\frac{2\sin^2\frac{\gamma}{2}}{\cos\gamma};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = k; \quad \operatorname{tg}\left(45 - \frac{1}{2}\chi_1\right) = \frac{1}{h}; \quad \operatorname{tg}\left(45 - \frac{1}{2}\chi_2\right) = \frac{\sqrt{1-\nu}}{h}.$$

Setzt man

$$\frac{1}{2}(1-k^2)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{F-E}{k^2} + \frac{\sin\chi_2\cos\chi_2}{\Delta_2} - \frac{\sin\chi_1\cos\chi_1}{\Delta_1}\right] = A,$$

$$\sqrt{1-k^2}\cos\gamma\left[F + \frac{\cos\chi_2}{\Delta_2} - \frac{\cos\chi_1}{\Delta_1}\right] = B,$$

so wird

$$\frac{\partial J}{\partial c} = \frac{\nu}{2h\cos\gamma}(B-A); \qquad \frac{\partial J}{\partial h} = -A. \tag{21)}$$

c ist eine Function von β und μ, welche selbst wieder als Functionen von g und h aufgefasst werden können, nachdem

$$\beta = g\sqrt{\beta\mu},$$

$$\mu = \frac{\sqrt{\beta\mu}}{g}$$

und aus 12) sich ergibt

$$\frac{h^4-1}{\nu}\beta\mu = \nu - \frac{1+g^2}{g}\sqrt{\beta\mu}.$$

Durch Differenzirung erhält man

$$\frac{1}{2}\left(h^4 - 1 + \frac{\nu^2}{\beta\mu}\right)\frac{\partial(\beta\mu)}{\beta\mu} = -4h^4\frac{\partial h}{h} + \frac{\nu(1-g^2)}{\beta}\frac{\partial g}{g}.$$

Nach 12) ist auch

$$c\nu\partial\log c = 2h^4\partial\log h - \nu^2a^2\partial\log a$$

$$= 2h^4\partial\log h + \frac{1}{2}\nu^2a^2\partial\log(\beta\mu)$$

und daher

$$c\nu\partial \log c = 2h^4\left(1-\frac{2\nu^2\cos^2 z}{\nu^2+(h^4-1)\beta\mu}\right)\partial \log h +$$

$$+\frac{\nu^3(1-g^2)\cos^2 z}{\beta[\nu^2+(h^4-1)\beta\mu]}\,\partial \log g \qquad 22)$$

Durch Einsetzung dieses Ausdruckes in Gleichung 19), welche sich auch folgendermassen schreiben lässt

$$d\log R = d\log g + \frac{c}{J}\frac{\partial J}{\partial c}\,d\log c + \frac{h}{J}\frac{\partial J}{\partial h}\,d\log h \qquad 23)$$

ist unter Benützung der Gleichungen 21) die Beziehung zwischen der Änderung der Refraction und jener der Constanten hergestellt.

Bis zur Zenithdistanz von 80° erhält man die Änderungen von J bequemer und sicherer durch Reihenentwicklung. Setzt man nämlich, wie in ad I $\operatorname{tg}^2\psi = x$, so wird

$$\sin^4\psi = \left(\frac{x}{1+x}\right)^2; \qquad k_1^2 = 1-k^2.$$

$$1+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1+c\nu}{h^2}\right)\sin^2 2\psi = \frac{1}{k_1^2}(\sin^2 2\psi + k_1^2\cos^2 2\psi),$$

$$\frac{\partial J}{\partial c} = \frac{\nu k_1^3}{8h}\int\frac{dx}{\left[1+k_1^2\frac{(1-x)^2}{4x}\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\frac{\partial J}{\partial h} = -\frac{k_1^3}{4}\int\frac{dx}{x\left[1+k_1^2\frac{(1-x)^2}{4x}\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

So erhält man für $\frac{\partial J}{\partial c}$ eine Reihe, welche sich von der in 18) nur durch die Binomialcoëfficienten unterscheidet

$$\frac{\partial J}{\partial c} = \frac{\nu k_1^3}{8h}\left[x_2 - x_1 - \frac{3}{8}k_1^2\xi_1 + \frac{15}{128}k_1^4\xi_2 - \frac{35}{1024}k_1^6\xi_3\ldots\right] \qquad 24)$$

Durch ähnliche Behandlung ergibt sich die Reihe für $\frac{\partial J}{\partial h}$.

Es sei

$$Y_m = \int\left(\frac{1}{x^{m+1}} + x^{m-1}\right) dx,$$

so wird

$$\eta_1 = \int \frac{(1-x)^2}{x^2} dx = Y_1 - 2 \log \text{nat.} \frac{x_2}{x_1},$$

$$\eta_2 = \int \frac{(1-x)^4}{x^3} dx = Y_2 - 4Y_1 + 6 \log \text{nat.} \frac{x_2}{x_1},$$

. . . .

$$\frac{\partial J}{\partial h} = -\frac{k^3}{4}\left[\log \text{nat.} \frac{x_2}{x_1} - \frac{3}{8} k_1^2 \eta_1 + \frac{15}{128} k_1^4 \eta_2 - \frac{35}{1024} k_1^6 \eta_3 + \ldots\right] \quad 25)$$

II.

$$z_1 < z < z_2.$$

$$\cos 2\Theta = -\frac{1+c\nu}{h^2}; \quad \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1+c\nu}{h^2}\right) = k^2 = \sin^2\Theta,$$

$$\psi = \frac{1}{2}\chi; \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2}\chi_1 = \frac{\sqrt{1-\nu}}{h}; \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2}\chi_2 = \frac{1}{h}.$$

Nach Formel 20) hat man

$$\frac{\partial J}{\partial c} = \frac{\nu}{2h} \int \frac{\left(1 - \cos\chi - \frac{1}{2}\sin^2\chi\right) d\chi}{(1 - k^2 \sin^2\chi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial J}{\partial h} = -\frac{1}{2} \int \frac{\sin^2\chi\, d\chi}{(1 - k^2 \sin^2\chi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Bezeichnet man

$$\frac{1}{2\cos^2\Theta}\left(\frac{E - F\cos^2\Theta}{\sin^2\Theta} - \frac{\sin\chi_2 \cos\chi_2}{\Delta_2} + \frac{\sin\chi_1 \cos\chi_1}{\Delta_1}\right) = C$$

$$F - \frac{\sin\chi_2}{\Delta_2} + \frac{\sin\chi_1}{\Delta_1} = D$$

so wird

$$\frac{\partial J}{\partial c} = \frac{\nu}{2h}[D - C\cos 2\Theta]; \quad \frac{\partial J}{\partial h} = -C.$$

$$d\log J = \frac{c\nu}{2hJ}[D - C\cos 2\Theta]\, d\log c - \frac{h}{J} C\, d\log h. \qquad 26)$$

Diese Gleichung in Verbindung mit 22), welche allgemein gilt, stellt den Zusammenhang der Incremente von J, h und g dar.

III.

$$z_2 < z \leqq 90.$$

$$\sin\gamma = \frac{h^2}{1 + c\nu}; \quad k = \sin\Theta = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2};$$

$$1 + c\nu - \delta = h^2 k; \quad 1 + c\nu + \delta = \frac{h^2}{k};$$

$$1 - \nu w = h^2 k \sin^2\varphi; \quad \sin\varphi_1 = \frac{\sqrt{1-\nu}}{h\sqrt{k}}; \quad \sin\varphi_2 = \frac{1}{h\sqrt{k}}.$$

Die Formel für J, aus welcher die Gleichungen 20) abgeleitet wurden, gibt im vorliegenden Falle

$$\frac{\partial J}{\partial c} = \frac{1}{\nu}\int\frac{(1 - \nu w)^{\frac{3}{2}}\, dw}{(w^2 + 2cw + a^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\frac{\partial J}{\partial h} = -\frac{2h^3}{\nu^2}\int\frac{\sqrt{1 - \nu w}\, dw}{(w^2 + 2cw + a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Durch die Substitution der Variablen φ wird

$$w^2 + 2cw + a^2 = \frac{h^4\cos^2\varphi}{\nu^2}(1 - k^2\sin^2\varphi)$$

und

$$\frac{\partial J}{\partial c} = \frac{2\nu}{h} k^{\frac{5}{2}}\int\frac{\operatorname{tg}^2\varphi\sin^2\varphi\, d\varphi}{(1 - k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\frac{\partial J}{\partial h} = -4k^{\frac{3}{2}}\int\frac{\operatorname{tg}^2\varphi\, d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nachdem

$$\operatorname{tg}^2\varphi\sin^2\varphi = \operatorname{tg}^2\varphi-\sin^2\varphi$$

ist, so wird durch Annahme der Bezeichnung

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \Delta,$$

$$(1-k^2)F-2E+\Delta_2\operatorname{tg}\varphi_2-\Delta_1\operatorname{tg}\varphi_1+ \\ +k^2\left(\frac{\sin\varphi_2\cos\varphi_2}{\Delta_2}-\frac{\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{\Delta_1}\right) = M;$$

$$E-(1-k^2)F-k^2\left(\frac{\sin\varphi_2\cos\varphi_2}{\Delta_2}-\frac{\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{\Delta_1}\right) = N;$$

$$\int\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{\Delta^3}\,d\varphi = \frac{M}{(1-k^2)^2};\quad \int\frac{\sin^2\varphi}{\Delta^3}\,d\varphi = \frac{N}{k^2(1-k^2)};$$

$$\frac{\partial J}{\partial c} = \frac{2\nu\sin^{\frac{1}{2}}\Theta}{h\cos^2\Theta}(M\operatorname{tg}^2\Theta-N);$$

$$\frac{\partial J}{\partial h} = -\frac{4\sin^{\frac{3}{2}}\Theta}{\cos^4\Theta}M;$$

$$d\log J = \frac{2c\nu\sin^{\frac{1}{2}}\Theta}{hJ\cos^2\Theta}(M\operatorname{tg}^2\Theta-N)\,d\log c-\frac{4h\sin^{\frac{3}{2}}\Theta}{J\cos^4\Theta}M\,d\log h \qquad 2$$

Die Grösse $d\log c$ ist durch Formel 22) gegeben.

Für

$$z = 90°$$

wird

$$\delta = c\nu,\quad \sin\Theta = \frac{1}{h^2},\quad c\nu d\log c = 2h^4 d\log h,$$

$$\sin\varphi_1 = \sqrt{1-\nu},\quad \varphi_2 = 90°$$

und daher

$$d\log J = -\frac{4h^2}{(h^4-1)J}\left[F-h^4(F-E)+\frac{\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{\Delta_1}\right]d\log h.$$

Um den allgemeinen Factor in Gleichung 6) $\frac{1}{1-\beta w}$ zu berücksichtigen, kann man hiefür setzen $1+\beta w$, wodurch sich zu J noch das Increment

$$\Delta J = \beta\int\frac{w\sqrt{1-\nu w}\,dw}{\sqrt{w^2+2cw+a^2}}$$

gesellt, wofür man auch schreiben kann

$$\Delta J = \frac{\beta}{\nu}\left[J-\int\frac{(1-\nu w)^{\frac{3}{2}}dw}{\sqrt{w^2+2cw+a^2}}\right].$$

Bezeichnet man

$$f = E-\Delta_2 \sin\varphi_2 \cos\varphi_2+\Delta_1 \sin\varphi_1 \cos\varphi_1,$$

so wird z. B. für den Fall III

$$\int\frac{(1-\nu w)^{\frac{3}{2}}dw}{\sqrt{w^2+2cw+a^2}} = \frac{h^2}{3k}\left[(2+k^2)J-2hk^{\frac{3}{2}}f\right].$$

Es sei ΔR die durch ΔJ bewirkte Refractionsänderung, $\Delta' R$ die Änderung, welche R erfährt, wenn man für $\frac{1}{1-\beta w}$ setzt $\frac{1}{1-\frac{1}{2}\beta}$, so findet man

z	ΔR	$\Delta' R$
90°0	+0ʺ34	+0·59
89·5	0·33	0·48
89·0	0·31	0·41
88·5	0·29	0·35
88·0	0·26	0·31
87·5	0·24	0·27
87·0	0·22	0·24
86·5	0·20	0·22
86·0	0·18	0·20
85·5	0·17	0·18
85·0	+0·16	+0·16

Für kleinere Zenithdistanzen wird der Unterschied unmerklich.

Nachdem ich einige Werthe der mittleren Refraction mittelst der Bessel'schen Refractionsconstante und des Werthes $\varkappa = 700$ berechnet hatte, fand ich unter nur oberflächlicher Berücksichtigung des Einflusses von ∂g und ∂h auf R, dass man zu einem befriedigenden Resultate gelangt, wenn man annimmt

$$\log g = 8 \cdot 4925500; \quad \log h = 0 \cdot 1786500.$$

Hieraus folgt

$$\log \beta = 6 \cdot 7478447; \quad \log \mu = 9 \cdot 7627446;$$

$$\varkappa = 692 \cdot 3544.$$

Nach 4) ist

$$\varkappa = \frac{a}{l_0} - a\omega'.$$

Der Werth von $\frac{a}{l_0}$ ist nach Bessel 773·726, nach Gyldèn 773·136; man kann sonach annehmen

$$a\omega' = 81 \cdot 0.$$

Aus der zur Ableitung der Gleichung 4) benützten Formel

$$\frac{1 + mt_0}{1 + mt} = e^{\omega' as}$$

würde mithin folgen, dass die Höhe, in welcher $t_0 - t = 1°$ C. [$m = 0 \cdot 00367$] 280^m beträgt, während sie in Wirklichkeit ungefähr 190^m ist. Eine bessere Übereinstimmung war auch nicht zu erwarten, nachdem in der Ableitung der Formeln 2) und 3) nur die directe Wärmestrahlung der Sonne berücksichtigt wurde und die Rückstrahlung seitens der Erde vernachlässigt worden ist. Wenngleich die Intensität dieser Strahlung eine viel geringere ist, so hat sie doch besonders auf die Temperaturvertheilung in den untersten Luftschichten einen sehr merklichen Einfluss, da sie durch die Atmosphäre erfahrungsgemäss eine wesentlich stärkere Absorption erfährt, als die directe

Strahlung der Sonne und hiedurch die untersten Luftschichten sowohl wegen ihrer geringeren Entfernung von dieser Wärmequelle, als auch wegen ihrer grösseren Dichte sich am meisten erwärmen, was eine raschere Temperaturabnahme in der Richtung der Verticalen zur Folge hat. Es wäre nicht schwierig, auch den Einfluss der Rückstrahlung in Rechnung zu ziehen; man würde jedoch ohne gleichzeitige Verbesserung der Formel für die Druckvertheilung, wodurch die Ableitung der Refraction bedeutend erschwert wird, kaum wesentlich bessere Resultate erzielen.

Die Temperatur der äussersten Luftschicht wäre nach der gegebenen Ableitung bestimmt durch

$$t_0 - t_1 = \frac{1+mt_0}{m} \cdot \frac{a\omega'}{\frac{a}{l_0}(1-\alpha_0 l_0)},$$

worin

$$\alpha_0 l_0 = \log \text{nat} \frac{i_1}{i_0}.$$

Da unsere Atmosphäre beiläufig 50% der Wärmestrahlen der Sonne absorbirt, ist $\frac{i_1}{i_0}$ ungefähr gleich 2.

Für

$$\left.\begin{array}{l} \frac{i_1}{i_0} = 2, \quad t_0 = 9^\circ 3 \text{ C. wird } t_0 - t_1 = 96^\circ \\ \frac{i_1}{i_0} = 2\cdot 2, \quad t_0 = 9\cdot 3 \text{ C. wird } t_0 - t_1 = 140 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a\omega' = 81\cdot 0 \\ \frac{a}{l_0} = 773\cdot 35 \end{array}$$

Bei Annahme einer Absorption von 55% erhielte man sonach den Pouillet'schen Werth für die Temperatur an der Grenze unserer Atmosphäre. Der Werth von α_0 wäre in diesem Falle 0·000096.

Die in die Refractionsgleichung aufgenommene Formel

$$\frac{1+mt_0}{1+mt} = e^{\omega' as}$$

bedarf zu ihrer allgemeinen Giltigkeit der Voraussetzung einer gewissermassen unendlichen Ausdehnung der Atmosphäre und

gibt eine continuirliche Temperaturabnahme gegen den Grenzwerth $-\frac{1}{m} = -272°$. Für den angenommenen Werth von $a\omega'$ würde $t_0 - t = 140°$ in einer Höhe von 54 *km*.

Zur Ausführung des Überganges von der mittleren zur wahren Refraction bedarf man der Kenntniss des Einflusses, welchen Änderungen von t_0 und p_0 auf die Constanten der Refraction β, μ oder g, h nehmen. Bei der ausserordentlichen Beweglichkeit der Atmosphäre und des hiedurch ermöglichten raschen Wechsels von Temperatur und Druck ist weder die Refraction selbst, noch ihre Änderung nur von den Angaben der meteorologischen Instrumente an der Erdoberfläche abhängig. Man ist daher angewiesen, die Berechnung der Refractionsänderungen unter gewissen Voraussetzungen zu machen, wie dies ja auch bei der Ableitung der mittleren Refraction geschehen ist. Es ist nun am einfachsten anzunehmen, dass die Gesetze, nach welchen die Änderungen von Druck und Temperatur in der Verticalen vor sich gehen, von den Anfangswerthen dieser Grössen unabhängig seien und in einer solchen Ausdehnung gelten, dass für alle Punkte der Lichtcurve nur die Daten der Beobachtungsstation massgebend sind. Diese Voraussetzung führt uns wieder auf einen mittleren Zustand der Atmosphäre, welcher sich vom Normalzustande hauptsächlich nur durch seine Beschränkung auf die Gegend des Beobachtungsortes unterscheidet.

Doch wird im Allgemeinen eine Verschiedenheit bestehen zwischen der Art und Weise, in welcher die Änderungen von Normal-Temperatur und -Druck hervorgebracht werden. Während nämlich erstere vorwiegend durch seitliche Strömungen bedingt werden, welche Luft aus nördlichen oder südlichen Gegenden zuführen, dürften letztere mehr durch Hebung und Senkung des Luftmeeres nach Art der Gezeiten zu Stande kommen.

Der im Früheren behandelte Normalzustand wird genähert für zwei Zonen in mittleren Breiten Geltung haben. Gegen den Äquator hin erreicht t_0 in Folge der intensiveren Wärmewirkung der Sonne grössere Werthe, gegen die Pole hin kleinere. Nach den gegebenen Gesichtspunkten erscheinen diese Änderungen

von t_0 hervorgerufen durch Änderungen der mittleren Strahlungs-Intensität i_1. Und so wird, wenn wir uns auf die gemässigte Zone beschränken, der wahre Temperaturzustand der Atmosphäre an irgend einer Beobachtungsstation gleich dem mittleren Zustande derselben für eine Zone, in welcher der beobachtete Thermometerstand der mittlere ist. Für die Rechnung bleibt es sich gleich, ob man annimmt, dass an Stelle der ursprünglichen normal temperirten Luftsäule durch seitliche Strömungen eine andere getreten ist, die dem wahren Temperaturzustande entspricht, oder ob man sich an Ort und Stelle den wahren Temperaturzustand aus dem normalen durch Änderung der Strahlungsintensität entstanden denkt.

Die Änderung des Normaldrucks lässt sich leicht berücksichtigen, da die Formel für die Druckvertheilung auch im Falle einer Erhöhung oder Erniedrigung der Atmosphäre anwendbar bleibt. Da aber ω', welches den Zusammenhang von t_0 und t_1 gibt, wobei t_1 als durchaus constant zu betrachten ist, auch von α_0 abhängt, und letztere Grösse dem Drucke proportional gesetzt worden ist, so entsteht die Frage, ob bei einer Änderung des Normaldrucks deren Einfluss auf den Temperaturcoëfficienten ω' zu berücksichtigen ist oder nicht. Wenn durch längere Zeit hindurch bei ruhiger und klarer Luft ein gleichmässiger Druck zu beobachten wäre, so müsste gewiss auch α_0 dementsprechend abgeändert werden. Nachdem aber in den meisten Fällen diese Voraussetzung nicht zutrifft und z. B. eine Druckänderung bei Nacht die Absorption der Sonnenstrahlung natürlich gar nicht, bei Tag und bedecktem Himmel nur theilweise beeinflussen würde, so kann man im Allgemeinen die Abhängigkeit der Grösse ω' vom Druck nicht bestimmen; man wird daher annehmen müssen $\frac{\partial \omega'}{\partial p} = 0$.

Unter Beibehaltung des Index 0 zur Bezeichnung jener Grössen, welche sich auf den Normalzustand beziehen, werde ich die dem wahren Zustande der Atmosphäre an der Erdoberfläche entsprechenden Bestimmungsstücke im Folgenden ohne jeglichen Index geben.

Es sei D die Dichte des Quecksilbers bei 0°, b der auf die Temperatur 0 reducirte Barometerstand, (ρ) die Dichte der Luft

für $t = 0$ und $b = 0 \cdot 760$, so wird

$$p = Dgb; \qquad \rho = (\rho)\frac{\frac{b}{0 \cdot 760}}{1 + mt};$$

$$l = \frac{p}{\rho g} = \frac{D}{(\rho)} \times 0 \cdot 760 (1 + mt);$$

$$\beta = \frac{c\rho}{1 + c\rho}; \quad \mu = \frac{1}{e - 1} - \frac{2}{\varkappa}; \quad \varkappa = a\left(\frac{1}{l} - \omega'\right);$$

$$\omega' = \frac{m(t - t_1)}{1 + mt}\left(\frac{1}{l} - \alpha\right).$$

Durch Differentiation erhält man bei Vernachlässigung von β^2

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{m}{1 + mt}\rho; \qquad \frac{\partial \rho}{\partial b} = \frac{\rho}{b};$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = -\frac{m\beta}{1 + mt}; \qquad \frac{\partial \beta}{\partial b} = \frac{\beta}{b};$$

$$\frac{\partial l}{\partial t} = \frac{m}{1 + mt} l; \qquad \frac{\partial l}{\partial b} = 0.$$

Indem man α als constant betrachtet und die Bezeichnung wählt

$$\sigma = \frac{m(t - t_1)}{1 + mt}$$

wird ferner, da t_1 constant ist

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{m}{1 + mt}(1 - \sigma);$$

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t} = \frac{m}{1 + mt}\left(\frac{1 - \sigma}{l} - \alpha - \omega'\right);$$

$$\frac{\partial \varkappa}{\partial t} = -\frac{am}{1 + mt}(1 - \sigma)\left(\frac{2}{l} - \alpha\right),$$

wofür man durch Elimination von α und l auch schreiben kann

$$\frac{\partial \varkappa}{\partial t} = -\frac{m}{1 + mt}\varkappa \left\{ 1 - \left(\sigma - \frac{a\omega'}{\varkappa} \cdot \frac{1 - \sigma^2}{\sigma}\right)\right\},$$

während

$$\frac{\partial \varkappa}{\partial b} = 0.$$

Setzt man

$$\Delta = -\left(\sigma - \frac{a\omega'}{\varkappa}\frac{1-\sigma^2}{\sigma}\right),$$

so ergibt sich hiefür unter Annahme nachstehender Werthe von $\frac{i_1}{i_0}$ Folgendes.

$\frac{i_1}{i_0}$	1·9	2·0	2·1	2·2
σ	0·292	0·341	0·406	0·495
$t_0 - t_1$	82°	96°	114°	140°
Δ	+0·073	−0·038	−0·165	−0·317

Für $\frac{i_1}{i_0} = 1·97$ würde sonach Δ nahezu gleich Null, während $t_0 - t_1$ beiläufig 90° betrüge.

In Ermanglung einer genaueren Kenntniss des Verhältnisses der Strahlungsintensitäten, sowie der Temperatur an der Grenze der Atmosphäre lässt sich der Werth von Δ nicht bestimmen und wird man daher keine wesentlich bessere Annahme machen können, als $\Delta = 0$ zu setzen, was darauf hinauskommt

$$\omega = (t - t_1)\left(\frac{1}{l} - \alpha\right)$$

als constant zu betrachten.

Aus dem Bisherigen geht zur Genüge hervor, dass man bei Berechnung der wahren Refraction aus der mittleren nur die Hauptglieder zu berücksichtigen hat und die Einbeziehung der zweiten Differentialquotienten nur eine illusorische Erhöhung der Genauigkeit gibt.

Bezeichnet man

$$P = \frac{\partial \log R}{\partial \log g}; \qquad Q = \frac{\partial \log R}{\partial \log h},$$

so wird

$$d \log R = Pd \log g + Qd \log h.$$

Aus

$$\frac{h^4-1}{\nu} \beta\mu = \nu-\mu-\beta; \quad \nu-\mu = \frac{2}{\varkappa};$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial t} = \frac{2}{\varkappa^2}\frac{\partial\varkappa}{\partial t} = -\frac{m}{1+mt} \cdot \frac{1}{\varkappa}; \quad \frac{\partial\mu}{\partial b} = 0$$

folgt, wenn zur Abkürzung

$$m' = \frac{m}{1+mt}$$

gesetzt wird,

$$\frac{4h^3\beta\mu}{\nu}\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{2m'}{\varkappa}\left(1+\frac{\nu-\beta}{\mu}\right);$$

$$\frac{4h^3\beta\mu}{\nu}\frac{\partial h}{\partial b} = -\frac{2}{\varkappa b}.$$

Indem man in der ersten Gleichung β gegen ν vernachlässigt, erhält man

$$\frac{\partial \log h}{\partial t} = \text{Mod.} \frac{2m'\nu}{4h^4\beta\varkappa\mu}\left(1+\frac{\nu}{\mu}\right).$$

$$\frac{\partial \log h}{\partial b} = -\text{Mod.} \frac{\nu}{2h^4\beta\varkappa\mu b}.$$

In ähnlicher Weise ergibt sich aus

$$g^2 = \frac{\beta}{\mu}$$

$$\frac{\partial \log g}{\partial t} = -\text{Mod.} \frac{m'}{2}\left(1-\frac{2}{\varkappa\mu}\right);$$

$$\frac{\partial \log g}{\partial b} = \frac{\text{Mod.}}{2b}.$$

Führt man, um auf den Bessel'schen Ausdruck für die an die mittlere Refraction anzubringende Correction überzugehen, die Bezeichnungen ein



$$\lambda = \frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{\mu\varkappa}\right)P - \frac{\nu}{2h^4\beta\varkappa\mu}\left(1+\frac{\nu}{\mu}\right)Q,$$

$$A = \frac{1}{2}\left(P - Q\frac{\nu}{h^4\beta\varkappa\mu}\right),$$

so wird

$$\frac{\partial \log R}{\partial t} = -\text{Mod. } m'\lambda,$$

$$\frac{\partial \log R}{\partial b} = \frac{\text{Mod.}}{b} A.$$

Ferners kann man sich erlauben anzunehmen

$$-\text{Mod. } m'dt = -\frac{m \text{ Mod.}}{1+m\frac{t+t_0}{2}}(t-t_0),$$

(wofür nach Bessel die Bezeichnung $\log \gamma$ zu wählen ist) und

$$\text{Mod.}\frac{db}{b} = d\log b = \log b - \log b_0.$$

Ist b' der bei einer Temperatur τ (inneres Thermometer) abgelesene Barometerstand, ε der Ausdehnungscoëfficient des Quecksilbers, so wird

$$b = \frac{b'}{1+\varepsilon\tau},$$

oder wenn gesetzt wird

$$T = \frac{1}{1+\varepsilon\tau}; \quad \log B = \log b' - \log b_0;$$

$$\log b = \log b' + \log T;$$

$$\log b - \log b_0 = \log B + \log T.$$

Es wird sonach

$$d\log R = A(\log B + \log T) + \lambda \log \gamma.$$

Im Folgenden sind die unter Zugrundelegung von

$$\log g = 8\cdot4925500,$$
$$\log h = 0\cdot1786500$$

berechneten Werthe von

$$R = \frac{1}{2} g \sin z (J + \Delta J),$$

sowie der Logarithmen von R, P, Q zusammengestellt, und auch die Differenzen beigefügt, welche zwischen den von mir erhaltenen Werthen für die mittlere Refraction und jenen von Bessel (B) und Gyldèn (G) angegebenen bestehen.

Nachdem in der Refractionstafel nach Bessel die Werthe für $85° \leqq z \leqq 90°$ unmittelbar aus Beobachtungen von Argelander abgeleitet sind, habe ich die Unterbrechungsstelle in der Continuität der Tafelwerthe durch einen Strich gekennzeichnet.

z	log R	log P	log Q	R	$B-H$	$G-H$	$B-G$
90°	3·32048	0·0000	0″3773	2091″60	+15″50	−29″90	+45″40
	3·23674	0·0713	0″2859	1724·81	+18·99	−12·15	+31·14
89	3·16300	0·1196	0″2013	1455·46	+ 9·17	− 5·36	+14·53
	3·09703	0·1546	0″1213	1250·36	+ 0·58	− 3·32	+ 3·90
88	3·03740	0·1811	0″0448	1089·93	− 1·35	− 2·33	+ 0·98
	2·98308	0·2015	9″9715	961·80	− 0·88	− 2·09	+ 1·21
87	2·93331	0·2176	9″9012	857·66	− 3·10	− 1·83	− 1·27
	2·88749	0·2304	9″8339	771·77	− 3·44	− 1·55	− 1·89
86	2·84511	0·2406	9″7698	700·02	− 1·09	− 1·30	+ 0·21
	2·80578	0·2489	9″7087	639·41	+ 0·18	− 1·11	+ 1·29
85	2·76912	0·2557	9″6506	587·66	− 3·05	− 0·96	− 2·09
	2·73486	0·2613	9″5954	543·07	− 1·18	− 0·83	− 0·35
84	2·70271	0·2659	9″5432	504·32	− 1·01	− 0·69	− 0·32
	2·67246	0·2698	9″4937	470·39	− 0·87	− 0·49	− 0·38
83	2·64391	0 2731	9″4468	440·47	− 0·78	− 0·41	− 0·37
	2·61690	0·2758	9″4023	413·91	− 0·66	− 0·30	− 0·36
82	2·59127	0·2782	9″3602	390·19	− 0·56	− 0·21	− 0·35
	2·56690	0·2803	9″3202	368·89	− 0·48	− 0·14	− 0·34
81	2·54367	0·2820	9″2822	349·68	− 0 40	− 0·08	− 0·32
	2·52148	0 2835	9″2462	332·26	− 0·31	− 0·04	− 0·27

z	$\log R$	$\log P$	$\log Q$	R	$B-H$	$G-H$	$B-G$
80°	2·50024	0·2848	$9^{n}2120$	316"41	— 0"25	0"00	— 0"25
	2·47988	0·2860	$9^{n}1795$	301·91	— 0·19	+ 0·03	— 0·22
79	2·46032	0·2870	$9^{n}1485$	288·62	— 0·15	+ 0·06	— 0·21
	2·44150	0·2879	$9^{n}1190$	276·38	— 0·10	+ 0·08	— 0·18
78	2·42337	0·2888	$9^{n}0910$	265·07	— 0·07	+ 0·10	— 0·17
	2·40586	0·2895	$9^{n}0642$	254·60	— 0·04	+ 0·12	— 0·16
77	2·38895	0·2901	$9^{n}0387$	244·88	— 0·01	+ 0·13	— 0·14
	2·37258	0·2907	$9^{n}0144$	235·82	+ 0·01	+ 0·15	— 0·14
76	2·35673	0·2913	$8^{n}9912$	227·36	+ 0·03	+ 0·15	— 0·12
	2·34134	0·2917	$8^{n}9690$	219·45	+ 0·04	+ 0·15	— 0·11
75	2·32641	0·2922	$8^{n}9478$	212·04	+ 0·05	+ 0·15	— 0·10
	2·31189	0·2926	$8^{n}9276$	205·07	+ 0·06	+ 0·15	— 0·09
74	2·29776	0·2929	$8^{n}9082$	198·50	+ 0·08	+ 0·16	— 0·08
	2·28400	0·2932	$8^{n}8896$	192·31	+ 0·09	+ 0·16	— 0·07
73	2·27058	0·2936	$8^{n}8719$	186·46	+ 0·10	+ 0·16	— 0·06
	2·25749	0·2938	$8^{n}8549$	180·92	+ 0·10	+ 0·16	— 0·06
72	2·24470	0·2941	$8^{n}8386$	175·67	+ 0·11	+ 0·16	— 0 05
	2·23220	0·2943	$8^{n}8229$	170·69	+ 0·11	+ 0·16	— 0·05
71	2·21998	0·2946	$8^{n}8079$	165·95	+ 0·12	+ 0·17	— 0·05
	2·20801	0·2948	$8^{n}7936$	161·44	+ 0·12	+ 0·16	— 0·04
70	2·19629	0·2950	$8^{n}7798$	157·14	+ 0·13	+ 0·16	— 0·03
70	2·19629	0·2950	$8^{n}7798$	157·14	+ 0·13	+ 0·16	
69	2·17353	0·2953	$8^{n}7538$	149·12	+ 0·13	+ 0·16	
68	2·15160	0·2956	$8^{n}7299$	141·78	+ 0·13	+ 0·16	
67	2·13043	0·2958	$8^{n}7077$	135·03	+ 0·13	+ 0·16	
66	2·10993	0·2961	$8^{n}6872$	128·80	+ 0·14	+ 0·15	
65	2·09005	0·2963	$8^{n}6682$	123·04	+ 0·13	+ 0·15	
64	2·07072	0·2965	$8^{n}6506$	117·68	+ 0·14	+ 0·15	
63	2·05190	0·2966	$8^{n}6342$	112·69	+ 0·13	+ 0·14	
62	2·03354	0·2968	$8^{n}6190$	108·03	+ 0·13	+ 0·14	
61	2·01560	0·2969	$8^{n}6048$	103·66	+ 0·12	+ 0·13	
60	1·99803	0·2970	$8^{n}5916$	99·55	+ 0·12	+ 0·13	

z	log R	log P	log Q	R	$B-H$	$G-H$
59°	1·98080	0·2971	8″5792	95^{s}68	+ 0^{s}12	+ 0^{s}12
58	1·96389	0·2972	8″5677	92·02	+ 0·12	+ 0·12
57	1·94725	0·2973	8″5570	88·56	+ 0·12	+ 0·12
56	1·93086	0·2974	8″5469	85·28	+ 0·11	+ 0·12
55	1·91469	0·2975	8″5375	82·17	+ 0·11	+ 0·12
54	1·89873	0·2975	8″5286	79·20	+ 0·11	+ 0·11
53	1·88294	0·2976	8″5203	76·37	+ 0·11	+ 0·11
52	1·86730	0·2976	8″5126	73·67	+ 0·11	+ 0·11
51	1·85179	0·2977	8″5052	71·09	+ 0·10	+ 0·10
50	1·83640	0·2977	8″4984	68·61	+ 0·10	+ 0·10
49	1·82109	0·2978	8″4919	66·24	+ 0·09	+ 0·09
48	1·80586	0·2978	8″4858	63·95	+ 0·09	+ 0·09
47	1·79068	0·2979	8″4800	61·76	+ 0·08	+ 0·08
46	1·77554	0·2979	8″4746	59·64	+ 0·09	+ 0·09
45	1·76041	0·2979	8″4695	57·60	+ 0·08	+ 0·08
44	1·74528	0·2980	8″4647	55·63	+ 0·08	+ 0·08
43	1·73013	0·2980	8″4602	53·72	+ 0·08	+ 0·08
42	1·71494	0·2980	8″4559	51·87	+ 0·08	+ 0·08
41	1·69969	0·2980	8″4518	50·08	+ 0·08	+ 0·08
40	1·68436	0·2981	8″4480	48·35	+ 0·07	+ 0·07

z	log $\frac{R}{\text{tg } z}$	log P	log Q	R	$B-H$
40°	1·76055	0·2981	8″4480	48^{s}35	+0^{s}07
38	59	81.	4409	45·02	0·07
36	63	82	4346	41·87	0·06
34	67	82	4289	38·87	0·06
32	70	82	4238	36·01	0·06
30	73	82	4192	33·28	0·05
28	75	83	4152	30·65	0·05
26	77	83	4115	28·12	0·04
24	79	83	4083	25·67	0·04
22	81	83	4054	23·30	0·03
20	82	83	4028	20·99	0·03
18	83	84	4006	18·73	0·03
16	84	84	3986	16·53	0·03
14	85	84	3969	14·37	0·03
12	86	84	3955	12·25	0·02
10	87	84	3943	10·16	0·02
8	87	84	3933	8·10	0·01
6	88	84	3926	6·06	0·01
4	88	84	3920	4·03	0·01
2	88	84	3917	2·01	0·01
0	1·76088	0·2984	8″3916	0·00	0·00

Durch passende Änderung von g und h könnten die Werthe von R noch in etwas bessere Übereinstimmung mit den Tafeln von Bessel oder Gyldèn gebracht werden. Wenn man aber nach Bessel annehmen darf, dass der wahrscheinliche Fehler seiner Tafelwerthe bei 45° = ±0"27, bei 81° ±1" beträgt, so wären die Abweichungen noch immer zu gering, um eine neuerliche Bestimmung der Refractionsconstanten zu rechtfertigen, so lange nicht genauere Daten für die Refractionen in grossen Zenithdistanzen vorliegen.

Eine Methode zur Messung der Phasendifferenz von harmonischen Wechselströmen und deren Anwendung zur Bestimmung der Selbstinduction

von

Prof. J. Puluj.

(Mit 1 Textfigur.)

Eine einfache Methode, nach welcher mit Hilfe des Elektrodynamometers die Phasendifferenz der elektrischen Schwingungen an zwei verschiedenen Stellen eines geschlossenen Stromkreises bestimmt werden kann, wurde 1864 von W. Weber[1] angegeben und für Messungen verwendet. Dieselbe Methode wurde 1885 auch von Blakesley[2] angegeben und bemerkt, dass nach derselben Phasendifferenzen in zwei getrennten Stromkreisen sich bestimmen lassen, welche von harmonischen Wechselströmen von gleicher Periode durchflossen werden. Prof. Ferraris[3] bestimmte 1887 nach der elektrodynamometrischen Methode an den Gaulard-Gibbs'schen Transformatoren die Phasendifferenzen zwischen den Primär- und Secundärströmen, beim variablen Widerstande des Secundärkreises jedoch mit dem Unterschiede, dass die Mes-

---

[1] Wilhelm Weber, Elektrodynamische Massbestimmungen, fünfte Abhandlung über elektrische Schwingungen. 1864, S. 654.

[2] Blakesley, Phil. Magazin, XXV., 1888, p. 295. Die elektrischen Wechselströme von Th. H. Blakesley, übersetzt von Cl. P. Feldmann. 1891, S. 73.

[3] Ferraris, Sulle differenze di fase delle correnti et sulla dissipazione di energia nei transformatori. Mem. d. Accad. d. Sc. di Torino, 38, 1887. — Kittler, Handbuch der Elektrotechnik, II. Bd., S. 288.

sungen nicht mit einem Elektrodynamometer nach einander, sondern mit drei gleichzeitig vorgenommen wurden.

Nach dieser Methode werden bekanntlich die effectiven Stromstärken in beiden Stromkreisen durch je ein Elektrodynamometer mit serienweise geschalteten Spulen bestimmt und gleichzeitig eine Messung mit dem dritten Elektrodynamometer in der Weise ausgeführt, dass die fixe Spule von dem einen Strome und die bewegliche Spule von dem zweiten Strome allein durchflossen werden, infolge dessen die Ablesungen des Instrumentes dem Producte der maximalen Stromstärken und dem Cosinus ihrer Phasendifferenz proportional sind.

Bedeuten $A_1 A_2$ die Reductionsfactoren der Elektrodynamometer mit serienweise verbundenen Spulen, B den Reductionsfactor des dritten Elektrodynamometers mit getrennten Spulen, $\varphi_1 \varphi_2$ und φ die entsprechenden gleichzeitigen Ablesungen, so ist die Phasendifferenz ν zwischen den Wechselströmen durch die Beziehung

$$\cos \nu = \frac{B^2 \varphi}{A_1 A_2 \sqrt{\varphi_1 \varphi_2}} \qquad 1)$$

gegeben.

Handelt es sich um die Messung der Phasendifferenz nicht zwischen getrennten Stromkreisen, sondern zwischen zwei Wechselströmen, welche durch Verzweigung eines Hauptstromkreises entstanden sind, so kann die Bestimmung etwas einfacher in der Weise vorgenommen werden, dass die effectiven Stromstärken in den Verzweigungen und im Hauptstromkreise entweder mit Hilfe eines einzigen gewöhnlichen Elektrodynamometers nach einander oder mit drei Elektrodynamometern gleichzeitig gemessen werden, je nachdem die Stromverhältnisse genügend stabil oder veränderlich sind. Das Elektrodynamometer mit getrennten Spulen ist nach dieser Methode nicht erforderlich.

Die Phasendifferenz zwischen den Zweigströmen ist zufolge der bekannten Gleichung

$$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + 2 J_1 J_2 \cos(\nu_2 - \nu_1),$$

in welcher J, J_1 und J_2 die Maximalwerthe der Stromstärken im Hauptstromkreise und in den Verzweigungen und $\nu_2 - \nu_1$ die

Phasendifferenz der Zweigströme bedeuten, und mit Berücksichtigung der Beziehung, welche zwischen den effectiven Stromstärken und jenen Maximalwerthen besteht, durch die einfache Formel

$$\cos(\nu_2 - \nu_1) = \frac{\varphi - (\varphi_1 + \varphi_2)}{2\sqrt{\varphi_1 \varphi_2}}$$

gegeben, wenn zu den Messungen nur ein einziges Elektrodynamometer verwendet wird und $\varphi_1 \varphi_2$ die Ablesungen am Elektrodynamometer in den Verzweigungen und φ im Hauptstromkreise bedeuten.

Bei Benützung von drei Elektrodynamometern mit den Reductionsfactoren $A_1 A_2$ und A wird die Phasendifferenz zwischen den Zweigströmen nach der Formel

$$\cos(\nu_2 - \nu_1) = \cos[J_2 J_1] = \frac{A^2\varphi - (A_1^2\varphi_1 + A_2^2\varphi_2)}{2A_1A_2\sqrt{\varphi_1\varphi_2}} \tag{2}$$

zu bestimmen sein. Die Phasendifferenz zwischen dem Hauptstromkreise und dem Zweigstrome J_1 ist durch

$$\cos[JJ_1] = \frac{A^2\varphi + A_1^2\varphi_1 - A_2^2\varphi_2}{2AA_1\sqrt{\varphi\varphi_1}} \tag{3}$$

und die Phasendifferenz zwischen dem Hauptstrome und dem Zweigstrome J_2 durch

$$\cos[J_2 J] = \frac{A^2\varphi + A_2^2\varphi - A_1^2\varphi_1}{2AA_2\sqrt{\varphi\varphi_2}} \tag{4}$$

gegeben.

Um den Selbstinductionscoëfficienten eines Apparates, beispielsweise der primären oder secundären Bewickelung eines Transformators, oder einer Maschinenarmatur u. s. w. zu bestimmen, wird derselbe, wie schematisch angedeutet ist, mit einem entsprechenden inductionsfreien Widerstande r_1 parallel geschaltet und durch beide ein sinusartiger Wechselstrom von bekannter Periodicität $p = \frac{2\pi}{T}$ verzweigt. In diesem Falle ist bekanntlich

$$\tan \nu_1 = \frac{pL_1}{r_1} = 0, \quad \nu_1 = 0$$

$$\tan \nu_2 = \frac{pL_2}{r_2}, \qquad \nu_2 > 0,$$

und wenn die effectiven Stromstärken im Hauptstromkreise und in den Verzweigungen mittelst dreier Elektrodynamometer in der oben angedeuteten Weise gemessen werden und die Ablesungen $\varphi \varphi_1 \varphi_2$ liefern, so ist die Phasendifferenz zwischen den Zweigströmen nach Gleichung 2)

$$\cos \nu_2 = \frac{A^2\varphi - (A_1^2\varphi_1 + A_2^2\varphi_2)}{2\,A_1 A_2 \sqrt{\varphi_1 \varphi_2}}.$$

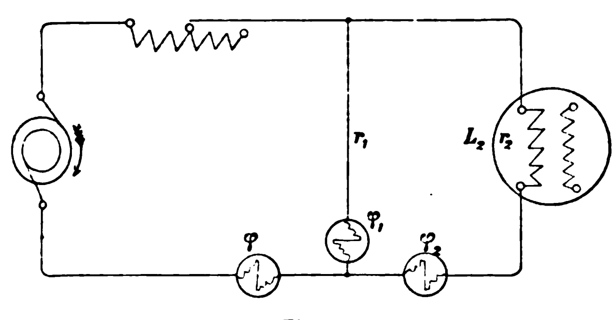


Fig. 1.

Aus der experimentell bestimmten Phasendifferenz ν_2 und aus den bekannten Grössen r_2 und p lässt sich der Selbstinductionscoëfficient nach der Formel

$$L_2 = \frac{r_2 \tan \nu_2}{p}$$

berechnen.

Durch Änderung eines inductionslosen Widerstandes im Nebenschluss, oder eines auch nicht inductionsfreien Widerstandes im Hauptstromkreise, kann die Stromstärke im Zweige r_2 geändert und auf diese Weise die Selbstinduction bei verschiedenen Stromstärken einfach und bequem bestimmt werden.

Es sei noch zum Schlusse bemerkt, dass statt des inductionslosen Verzweigungswiderstandes r_1 auch eine Normalrolle mit bekannter Selbstinduction L_1 als Nebenschluss verwendet

werden kann und dass in diesem Falle zur Bestimmung von L_2 zwei Gleichungen dienen:

$$\cos(\nu_2 - \nu_1) = \frac{A^2\varphi - (A_1^2\varphi_1 + A_2^2\varphi_2)}{2A_1A_2\sqrt{\varphi_1\varphi_2}} = c$$

und

$$\cos(\nu_2 - \nu_1) = \frac{r_1r_2 + p^2L_1L_2}{\sqrt{(r_1^2 + p^2L_1^2)(r_2^2 + p^2L_2^2)}}.$$

Aus denselben ergibt sich

$$L_2 = \frac{r_2}{p}\,\frac{pr_1L_1 + (r_1^2 + p^2L_1^2)c\sqrt{1 - c^2}}{(r_1^2 + p^2L_1^2)c^2 - p^2L_1^2}$$

und für $L_1 = 0$, wie oben,

$$L_2 = \frac{r_2}{p}\,\frac{\sqrt{1 - c^2}}{c} = \frac{r_2 \tan\nu_2}{p}.$$

Über die Phasendifferenz zwischen der elektromotorischen Gesammtkraft und der Spannungsdifferenz an einer Verzweigungsstelle des Stromkreises bei Anwendung harmonischer Wechselströme

von

Prof. J. **Puluj**.

(Mit 5 Textfiguren.)

In der vorliegenden Mittheilung wird angenommen, dass in einem geschlossenen, an einer Stelle verzweigten Stromkreise eine bekannte elektromotorische Gesammtkraft

$$E = E_0 \sin \frac{2\pi}{T} t$$

wirke und die Spannungsdifferenz e an den Verzweigungspunkten ihrer Grösse und Phase nach zu bestimmen sei. Der Hauptstromkreis habe einen Widerstand r und die Selbstinduction L und die Verzweigung desselben (Fig. 1) bestehe aus zwei Leitern mit Widerständen r_1 und r_2 und Selbstinductionscoëfficienten L_1 und L_2. Beide Zweige sollen ferner keine gegenseitige Induction haben.

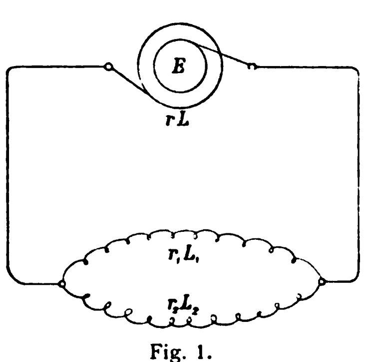


Fig. 1.

Die Anwendung der Kirchhoff'schen Gesetze auf diesen Fall gibt mit Berücksichtigung der Selbstinduction die bekannten Gleichungen

$$i = i_1 + i_2 \tag{1}$$

$$E_0 \sin pt = ri + r_1 i_1 + L\frac{di}{dt} + L_1 \frac{di_1}{dt} \tag{2}$$

$$E_0 \sin pt = ri + r_2 i_2 + L\frac{di}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \tag{3}$$

worin der Kürze halber p für $\frac{2\pi}{T}$ gesetzt wurde.

Die Integration der beiden Differentialgleichungen 2) und 3) liefert bei stationärer Elektricitätsströmung für den unverzweigten Strom den Ausdruck

$$i = \frac{E_0 \sin(pt - \psi)}{\sqrt{(r+R_g)^2 + p^2(L+L_g)^2}} \tag{4}$$

und für die Phasenverschiebung der momentanen Stromstärke gegen die elektromotorische Gesammtkraft

$$\tan\psi = p\frac{L+L_g}{r+R_g}. \tag{5}$$

R_g und L_g bedeuten den äquivalenten Ohm'schen Widerstand, beziehungsweise die äquivalente Selbstinduction der beiden Stromzweige und sind durch nachstehende Ausdrücke[1] bestimmt.

$$R_g = \frac{\frac{r_1}{R_1^2} + \frac{r_2}{R_2^2}}{\left[\frac{r_1}{R_1^2} + \frac{r_2}{R_2^2}\right]^2 + p^2\left[\frac{L_1}{R_1^2} + \frac{L_2}{R_2^2}\right]^2} \tag{6}$$

[1] Lord Rayleigh hat, von mechanischen Principien ausgehend, für eine Stromverzweigung, bei welcher mehrere Stromkreise mit Selbstinduction parallel geschaltet sind und keine gegenseitige Induction besitzen, die nachstehenden Beziehungen abgeleitet:

$$R_g = \frac{A}{A^2+p^2B^2}, \quad L_g = \frac{B}{A^2+p^2B^2},$$

$$A = \sum \frac{r}{r^2+p^2L^2}, \quad B = \sum \frac{L}{r^2+p^2L^2},$$

$$\tan\psi = p\frac{B}{A}.$$

Forced harmonic oscillation of various periods. Phil. Mag. May 1886, p. 379.

$$L_g = \frac{\frac{L_1}{R_1^2} + \frac{L_2}{R_2^2}}{\left[\frac{r_1}{R_1^2} + \frac{r_2}{R_2^2}\right]^2 + p^2 \left[\frac{L_1}{R_1^2} + \frac{L_2}{R_2^2}\right]^2}, \qquad 7)$$

worin R_1 und R_2 die scheinbaren Widerstände der beiden Zweige bedeuten und gegeben sind durch die Ausdrücke:

$$R_1 = \sqrt{r_1^2 + p^2 L_1^2}, \quad R_2 = \sqrt{r_2^2 + p^2 L_2^2}.$$

Für die beiden Stromzweige gibt die Rechnung

$$i_1 = \frac{E_0 \sqrt{r_2^2 + p^2 L_2^2} \sin(pt - \psi_1)}{\sqrt{(r+R_g)^2 + p^2 (L+L_g)^2} \sqrt{(r_1+r_2)^2 + p^2 (L_1+L_2)^2}}, \qquad 8)$$

$$i_2 = \frac{E_0 \sqrt{r_1^2 + p^2 L_1^2} \sin(pt - \psi_2)}{\sqrt{(r+R_g)^2 + p^2 (L+L_g)^2} \sqrt{(r_1+r_2)^2 + p^2 (L_1+L_2)^2}} \qquad 9)$$

und für die Phasenverschiebungen der beiden Zweigströme gegen die elektromotorische Gesammtkraft die Beziehungen

$$\tan \psi_1 = p \frac{S_2 (L+L_g) + (r+R_g)(L_1 r_2 - L_2 r_1)}{S_2 (r+R_g) - p^2 (L+L_g)(L_1 r_2 - L_2 r_1)}, \qquad 10)$$

$$\tan \psi_2 = p \frac{S_1 (L+L_g) + (r+R_g)(L_2 r_1 - L_1 r_2)}{S_1 (r+R_g) - p^2 (L+L_g)(L_2 r_1 - L_1 r_2)}, \qquad 11)$$

worin $S_1 S_2$ nachstehende Bedeutung haben:

$$S_1 = r_1(r_1 + r_2) + p^2 L_1 (L_1 + L_2),$$
$$S_2 = r_2(r_1 + r_2) + p^2 L_2 (L_1 + L_2).$$

Die Phasendifferenz der beiden Zweigströme ist durch den bekannten Ausdruck

$$\tan(\psi_2 - \psi_1) = p \frac{L_2 r_1 - L_1 r_2}{r_1 r_2 + p^2 L_1 L_2} \qquad 14)$$

gegeben.

Zur Bestimmung der Spannungsdifferenz an den Verzweigungspunkten und ihrer Phasenverschiebung gegen die elektromotorische Gesammtkraft führt die Gleichung

$$e = i_1 r_1 + L_1 \frac{di_1}{dt}.$$

Man erhält nach Einsetzung des für i_1 erhaltenen Ausdruckes, wenn der Kürze halber

$$\frac{E_0 \sqrt{r_2^2 + p^2 L_2^2}}{\sqrt{(r+R_g)^2 + p^2 (L+L_g)^2} \sqrt{(r_1+r_2)^2 + p^2 (L_1+L_2)^2}} = J_1$$

gesetzt wird,

$$e = r_1 J_1 \sin (pt - \psi_1) + p J_1 L_1 \cos (pt - \psi_1)$$

und durch nachstehende Substitution

$$\begin{aligned} r_1 J_1 &= A \cos \nu_1 \\ p L_1 J_1 &= A \sin \nu_1 \\ A &= J_1 \sqrt{r_1^2 + p^2 L_1^2} \\ \tan \nu_1 &= \frac{p L_1}{r_1} \end{aligned} \tag{15)}$$

den Ausdruck

$$e = \frac{E_0 \sqrt{r_1^2 + p^2 L_1^2} \sqrt{r_2^2 + p^2 L_2^2} \sin (pt - \varepsilon)}{\sqrt{(r+R_g)^2 + p^2 (L+L_g)^2} \sqrt{(r_1+r_2)^2 + p^2 (L_1+L_2)^2}}. \tag{16)}$$

Die Phasendifferenz ε zwischen der Spannung an den Verzweigungspunkten und der elektromotorischen Gesammtkraft ist durch die Beziehung

$$\varepsilon = \psi_1 - \nu_1$$

bestimmt und kann, wie man sieht, positiv oder negativ oder auch gleich Null sein, je nachdem ψ_1 grösser oder kleiner als ν_1 oder diesem gleich ist. Die Spannung an den Verzweigungspunkten kann somit in der Phase hinter der elektromotorischen Gesammtkraft zurückbleiben oder derselben vorauseilen oder auch mit derselben gleiche Phase haben. Die Bedingungen für diese drei Fälle ergeben sich aus der Formel

$$\tan \varepsilon = \frac{\tan \psi_1 - \tan \nu_1}{1 + \tan \psi_1 \tan \nu_1}.$$

Durch Einsetzung der Werthe aus 10 und 15 in die letzte Gleichung erhält man nach einigen Reductionen

$$\tan \varepsilon = p \frac{\frac{L+L_g}{r+R_g} - \frac{L_g}{R_g}}{1 + p^2 \frac{L_g}{R_g} \cdot \frac{L+L_g}{r+R_g}}.$$

Einfacher gelangt man zu dieser Gleichung, indem man berücksichtigt, dass

$$\varepsilon = \psi - \nu$$

ist, wenn mit ψ und ν die Phasenverschiebung des unverzweigten Stromes gegen die elektromotorische Gesammtkraft, beziehungsweise gegen die Spannung an der Verzweigungsstelle bezeichnet wird, und ausserdem noch die Beziehungen

$$\tan \psi = p \frac{L+L_g}{r+R_g} \quad \text{und} \quad \tan \nu = p \frac{L_g}{R_g}$$

bestehen, aus denen sich die obige Gleichung für $\tan \varepsilon$ direct ergibt.

Diese Gleichung liefert die drei Bedingungen

$$\frac{L}{r} > \frac{L_g}{R_g}, \quad \frac{L}{r} < \frac{L_g}{R_g} \quad \text{oder} \quad \frac{L}{r} = \frac{L_g}{R_g},$$

je nachdem die Spannungsdifferenz an den Verzweigungspunkten hinter der elektromotorischen Gesammtkraft in der Phase zurückbleibt, beziehungsweise derselben vorauseilt oder mit ihr gleiche Phase hat.

Da $\frac{L}{r}$ und $\frac{L_g}{R_g}$ Zeitconstanten sind, so kann das Ergebniss auch in folgender Weise ausgedrückt werden: Die Spannungsdifferenz an den Verzweigungspunkten eines Stromkreises kann in der Phase der elektromotorischen Gesammtkraft entweder vorauseilen oder hinter derselben zurückbleiben, je nachdem die Zeitconstante des Hauptstromkreises und der Elektricitätsquelle kleiner oder grösser ist als die äquivalente Zeitconstante der Zweigströme. Sind die Zeitconstanten gleich, so haben beide elekromotorischen Kräfte gleiche Phase.

Für $L = 0$ und $r > 0$ ist ferner $\frac{L_g}{R_g} > \frac{L_g}{r+R_g}$ und daher $\tan \psi_1 < \tan \nu_1$, d. h. ist r von Null verschieden, so eilt die Spannung an den Verzweigungspunkten in der Phase stets voraus.

Bezüglich des dritten Falles $\frac{L}{r} = \frac{L_g}{R_g}$ sei hier noch Folgendes bemerkt. Wäre es möglich, die Phasendifferenz zwischen der Spannung an der Verzweigungsstelle des Stromkreises und der elektromotorischen Gesammtkraft experimentell zu verfolgen, so könnte man durch Änderung eines inductionsfreien Widerstandes im Hauptstromkreise die Phasengleichheit leicht herbeiführen und hätte für diesen Fall die Beziehung

$$\frac{L}{r} = \frac{L_1(r_2^2+p^2L_2^2)+L_2(r_1^2+p^2L_1^2)}{r_1(r_2^2+p^2L_2^2)+r_2(r_1^2+p^2L_1^2)}, \tag{18}$$

welche dazu benützt werden könnte, um einen der drei Selbstinductionscoëfficienten L, L_1, L_2 zu bestimmen, wenn die übrigen Grössen bekannt wären.

Die besprochene Gleichheit der Phasen könnte in der Weise experimentell festgestellt werden, dass man an der Wechselstrommaschine um eine der Armaturspulen einige Drahtwindungen legt und den dieser Hilfsspule entnommenen Wechselstrom mit einem zweiten, an den Verzweigungspunkten entnommenen Strome durch entsprechend grosse selbstinductionslose Widerstände und, nach der Weber'schen Methode,[1] durch drei Elektrodynamometer leitet. In diesem Falle wäre

$$\cos \varepsilon = \frac{B^2\varphi}{A_1A_2\sqrt{\varphi_1\varphi_2}} = 1,$$

wenn A_1A_2 die Reductionsfactoren, $\varphi_1\varphi_2$ die Ablesungen der zwei Elektrodynamometer bedeuten, welche von den Wechselströmen einzeln durchflossen werden; B und φ beziehen sich auf das dritte Elektrodynamometer mit getrennten Spulen.

---

[1] W. Weber, Elektrodynamische Massbestimmungen, 5. Abhandlung, 1864, S. 654.

Bei der angegebenen Anordnung der Stromkreise könnte die Phasendifferenz zwischen e und E auch optisch, mittelst schwingender Membranen und Spiegel nach der Lissajous'-schen Methode, verfolgt und die Phasengleichheit, wie bereits erwähnt, mittelst eines Rheostaten hergestellt werden.

Die betrachteten, ziemlich complicirten Stromverhältnisse lassen sich geometrisch in einfacher Weise darstellen. Die Darstellungsmethode ist dieselbe, wie sie von Fleming[1] und Anderen auf verschiedene Fälle schon angewendet wurde.

Man zieht unter einem beliebigen Winkel $\alpha = pt$ gegen die Abscissenaxe eine Gerade OA_0 (Fig. 2), welche der Grösse nach der Amplitude E_0 der elektromotorischen Gesammtkraft gleich ist. Ihre Projection auf der Ordinatenaxe, $E_0 \sin pt = E$, ist die momentane elektromotorische Gesammtkraft, welche der Phase pt entspricht. Über E_0 wird ein Halbkreis beschrieben, von O aus eine Gerade unter dem Winkel ψ gezogen, dessen Tangente gegeben ist durch

$$\tan\psi = p\,\frac{L+L_g}{r+R_g}$$

Fig. 2.

und der Durchschnittspunkt B_0 mit A_0 verbunden. Es bedeuten dann: die Gerade OB_0 die maximale elektromotorische Nutzkraft

$$OB_0 = (r+R_g)J,$$

A_0B_0 die maximale elektromotorische Kraft der Selbstinduction

$$A_0B_0 = p(L+L_g)J$$

und die Projectionen von OB_0 und A_0B_0 auf der Ordinatenaxe die momentanen Werthe derselben.

[1] Fleming, The alternate current transformer. Vol. I, p. 140.

Die Gerade OB_0, getheilt durch die Summe aus dem Ohm'schen Widerstande des Hauptstromkreises und dem äquivalenten Widerstande der Verzweigung, gibt die maximale unverzweigte Stromstärke

$$J = \frac{OB_0}{r+R_g} = OC.$$

Die Projection dieser Geraden auf der Ordinatenaxe repräsentirt die momentane Stromstärke im Hauptstromkreise, welche, wie aus Fig. 2 ersichtlich ist, in der Phase hinter der elektromotorischen Gesammtkraft um ψ zurückbleibt.

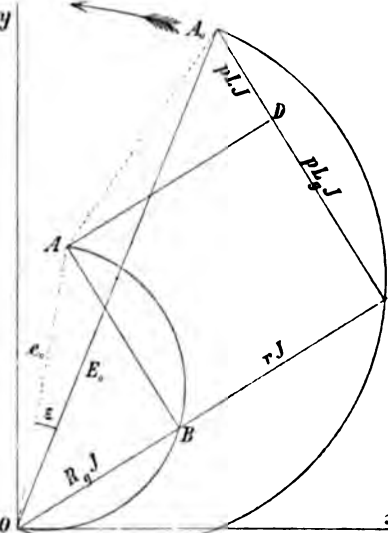
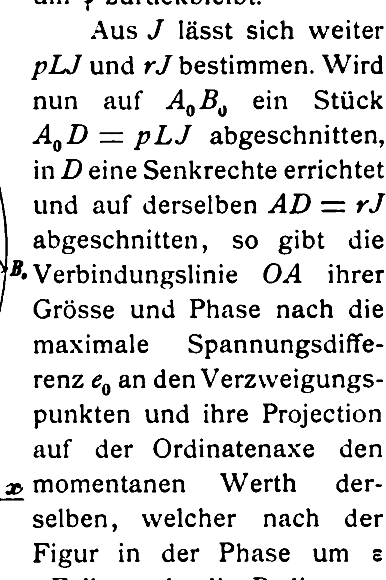


Fig. 3.



Aus J lässt sich weiter pLJ und rJ bestimmen. Wird nun auf A_0B_0 ein Stück $A_0D = pLJ$ abgeschnitten, in D eine Senkrechte errichtet und auf derselben $AD = rJ$ abgeschnitten, so gibt die Verbindungslinie OA ihrer Grösse und Phase nach die maximale Spannungsdifferenz e_0 an den Verzweigungspunkten und ihre Projection auf der Ordinatenaxe den momentanen Werth derselben, welcher nach der Figur in der Phase um ε hinter E zurückbleibt. Für diesen Fall wurde die Bedingung $\frac{L}{r} > \frac{L_g}{R_g}$ gefunden, und diese ist, wie ersichtlich, mit der Bedingung $\tan OAB > \tan AA_0D$, also $\sphericalangle OAB > AA_0D$ identisch.

Aus Fig. 2 ist ferner zu ersehen, dass die Spannung an den Verzweigungspunkten dieselbe Phase hat wie die gesammte elektromotorische Kraft, wenn der Punkt A auf der Geraden OA_0 liegt und derselben vorauseilt, wenn A links von OA_0 liegt. Ebenso ist aus der Construction zu ersehen, dass für $L = 0$

und $r > 0$ die Spannungsdifferenz e in der Phase immer vorauseilen muss. Die Construction Fig. 3 bringt den Fall $\frac{L}{r} < \frac{L_g}{R_g}$ und Fig. 4 den Fall $L = 0$ zur Anschauung.

Zur Bestimmung der maximalen Stromstärken der Zweigströme J_1 und J_2 beschreibt man über $OA = e_0$ Fig 2 einen Halbkreis, zieht, wie bekannt, von O aus zwei Geraden OA_1 und OA_2 unter den Winkeln $\nu_1 = AOA_1$ und $\nu_2 = AOA_2$, deren Tangenten gegeben sind durch

$$\tan \nu_1 = p\frac{L_1}{r_1} \quad \tan \nu_2 = p\frac{L_2}{r_2},$$

und verbindet A mit A_1 und mit A_2. Es ist dann

$$OA_1 = r_1 J_1, \quad AA_1 = pL_1 J_1$$
$$OA_2 = r_2 J_2, \quad AA_2 = pL_2 J_2$$

und da r_1 und r_2 bekannt sind,

$$J_1 = \frac{OA}{r_1} = OM,$$
$$J_2 = \frac{OA_2}{r_2} = OK.$$

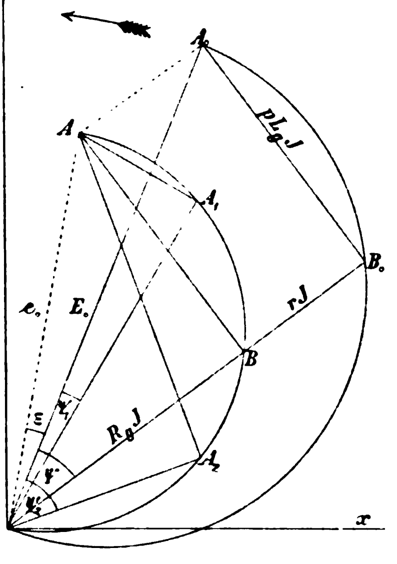


Fig. 4.

Die Punkte M und K lassen sich auch dadurch bestimmen, dass man von C aus zu OA_1 und OA_2 zwei Parallelen zieht. Die Phasenverschiebungen der Zweigströme J_1 und J_2 gegen die Spannung an der Verzweigungsstelle sind durch ν_1 und ν_2 und gegen die elektromotorische Gesammtkraft durch $\psi_1 = A_0OA_1$ und $\psi_2 = A_0OA_2$ gegeben.

Lässt man die ganze Fig. 2 entgegen dem Uhrzeiger um den Punkt O in der XY-Ebene gleichmässig rotiren, so dass eine Umdrehung in der Zeit T vollendet wird, so sind die momentanen Werthe E, e, i, i_1 und i_2 ihrer Grösse und Phase nach zu jeder Zeit durch die Projectionen der entsprechenden Maximalwerthe E_0, e_0, J, J_1 und J_2 auf der Ordinatenaxe gegeben.

Aus der Construction ist es nicht schwer zu ersehen, dass der über e_0 beschriebene Halbkreis durch den Punkt B geht und somit folgende Beziehungen bestehen:

$$e_0^2 = J_1^2(r_1^2+p^2L_1^2) = J_2^2(r_2^2+p^2L_2^2) = J^2(R_g+p^2L_g^2), \quad 19)$$

$$E_0^2 = J^2[(r+R_g)^2+p^2(L+L_g)^2], \quad 20)$$

$$\frac{J_1^2}{r_2^2+p^2L_2^2} = \frac{J_2^2}{r_1^2+p^2L_1^2} = \frac{J^2}{(r_1+r_2)^2+p^2(L_1+L_2)^2} = \quad 21)$$
$$= \frac{E_0^2}{[(r+R_g)^2+p^2(L+L_g)^2][(r_1+r_2)^2+p^2(L_1+L_2)^2]}$$

und

$$\frac{e_0}{E_0} = \frac{\sqrt{R_g+p^2L_g^2}}{\sqrt{(r+R_g)^2+p^2(L+L_g)^2}}. \quad 22)$$

Aus der letzten Gleichung ist zu ersehen, dass die Maximalwerthe der Klemmenspannung an der Verzweigungsstelle und der elektromotorischen Gesammtkraft in demselben Verhältnisse zu einander stehen, wie der scheinbare Widerstand der Verzweigung und der des ganzen Stromkreises.

Die Stromstärken J_1 und J_2 lassen sich nach 19) aus e_0 oder nach 21) aus E_0 berechnen. Der unverzweigte Strom J kann entweder aus e_0 nach 19) oder aus E_0 nach 21) oder auch, wie aus der Construction (Fig. 2) zu ersehen ist, aus J_1 und J_2 nach der Formel

$$J^2 = J_1^2+J_2^2+2J_1J_2\cos(\nu_2-\nu_1) \quad 23)$$

bestimmt werden.

Es sei hier noch bemerkt, dass wenn die Spannungsdifferenz an den Verzweigungspunkten bekannt ist, aus derselben nach den oben mitgetheilten Formeln E_0 sich berechnen lässt, wenn ausserdem die Grössen p, r, r_1, r_2, L, L_1 und L_2 gegeben sind.

Zur Erläuterung des Gesagten sei hier noch beispielsweise gezeigt, wie die Stromverhältnisse sich gestalten, wenn ein harmonischer Wechselstrom in einer von Prof. Ferraris angegebenen und wiederholt praktisch verwendeten Weise zwischen einem Elektromagnet mit sehr kleinem Widerstande und grosser Selbstinduction und zwischen einem inductionslosen grossen

Widerstande zu dem Zwecke verzweigt wird, um zwei in Phase verschiedene Zweigströme zu erhalten. Es sei

$$e_0 = 500 \text{ Volt}$$
$$p = 628$$
$$T = 0\cdot01 \text{ S.}$$
$$r_2 = 0\cdot5\,\Omega \qquad L_2 = 0\cdot1 \times 10^9 \text{ C.}$$
$$r_1 = 50 \;\text{»} \qquad L_1 = 0$$

In diesem Falle ist

$$\tan \nu_1 = \frac{pL_1}{r_1} = 0 \quad \text{und} \quad \tan \nu_2 = \frac{pL_2}{r_2} = 125\cdot6,$$

somit die Phasendifferenz zwischen den Zweigströmen

$$\nu_2 - \nu_1 = 89^\circ 55.$$

Ferner ist

$$J_1 = 10\cdot000 \text{ Ampère},$$
$$J_2 = 7\cdot962 \;\text{»}$$
$$J = 12\cdot832 \;\text{»}$$

Die Phasenverschiebung des unverzweigten Stromes gegen e_0 und gegen J_1 ergibt sich nach der Formel

$$\cos \nu = \frac{J_1^2 + J^2 - J_2^2}{2JJ_1} \qquad 24)$$

zu

$$\nu = 38^\circ 21'.$$

Die momentanen Werthe von e, i_1, i_2 und i sind durch nachstehende Formeln

$$e = 500 \sin 35982\, t$$
$$i_1 = 10 \sin 35982\, t$$
$$i_2 = 7\cdot962 \sin (35982\, t - 89^\circ 55)$$
$$i = 12\cdot832 \sin (35982\, t - 38^\circ 35)$$

gegeben und ausserdem in Fig. 5 graphisch dargestelt.

Die Rechnung ergibt ferner für den äquivalenten Widerstand der Verzweigung

$$R_g = 30\cdot559\,\Omega,$$

für die äquivalente Selbstinduction der beiden Zweige

$$L_g = 0\cdot038496 \times 10^9 \text{ C.}$$

und für die äquivalente Zeitconstante

$$\tau = \frac{L_g}{R_g} = 0\cdot0012597 \text{ S.}$$

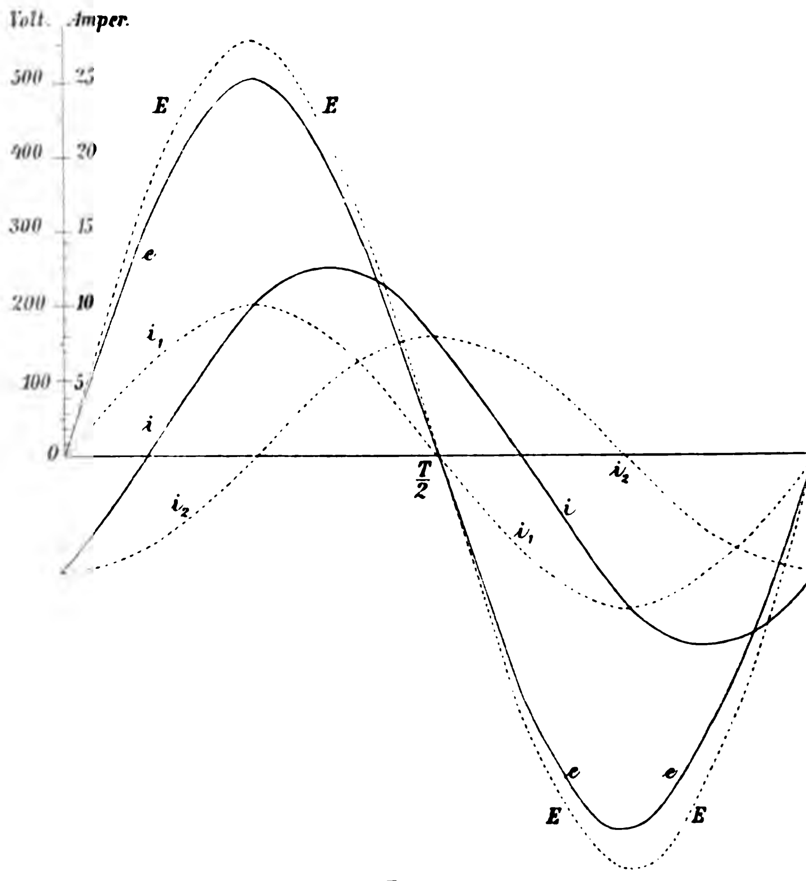


Fig. 5.

Es sei ferner angenommen, dass die Maschine, welche den Wechselstrom liefert, einen Selbstinductionscoëfficienten $L = 0\cdot004 \times 10^9$ besitzt, und es soll jener inductionslose Widerstand r berechnet werden, welcher gewählt werden müsste, damit die elektromotorische Gesammtkraft und die Spannungs-

differenz an den Verzweigungspunkten gleiche Phase haben. Nach Gleichung

$$\frac{L}{r} = \frac{L_g}{R_g}$$

ergibt sich dafür

$$r = 3 \cdot 175\ \Omega.$$

Schliesslich erhält man für den scheinbaren Widerstand des ganzen Stromkreises

$$R_s = 43 \cdot 01\ \Omega,$$

und für den maximalen Werth der elektromotorischen Gesammtkraft

$$E_0 = 552 \text{ Volt.}$$

In Fig. 5 ist die elektromotorische Gesammtkraft, welche durch

$$E = 552 \sin 35982\, t$$

gegeben ist und mit e dieselbe Phase hat, durch die punktirte Sinuscurve E dargestellt.

Es sei zum Schlusse noch bemerkt, dass wenn die Selbstinduction der Wechselstrommaschine unbekannt wäre, dieselbe in der Weise experimentell bestimmt werden könnte, dass man bei zwei verschiedenen Widerständen $r' = r + \rho$ und $r'' = r - \rho$ mit Hilfe eines passenden Elektrodynamometers die effectiven Stromstärken $J'_\omega = A\sqrt{\alpha'}$ und $J''_\omega = A\sqrt{\alpha''}$ beobachtet und die Selbstinduction des ganzen Stromkreises nach der Gleichung

$$J_\omega^2 = \frac{{}^1/_2\, E_0^2}{(r+R_g)^2 + p^2\,(L+L_g)^2}$$

berechnet.[1] Es ist dann

$$L + L_g = \frac{1}{p}\sqrt{\frac{\alpha'(r'+R_g)^2 - \alpha''\,(r''+R_g)^2}{\alpha'' - \alpha'}},$$

---

[1] Stefan, Offic. Bericht der Wiener Ausstellung, 1886, S. 222.

und die Phasenverschiebung ψ des Hauptstromes, welcher dem Mittelwerthe r entspricht, ist durch

$$\tan\psi = p\,\frac{L+L_g}{r+R_g}$$

bestimmt, vorausgesetzt, dass L_1, L_2, r_1, r_2, also auch R_g bekannt sind.

Unter dieser Voraussetzung lässt sich aus $L+L_g$ auch L und mittelst L auch r, d. i. jener Widerstand des Hauptstromkreises berechnen, bei welchem e und E gleiche Phasen haben.

Über die Ursache der Sonnenflecken

von

Egon v. Oppolzer.

(Mit 1 Textfigur.)

Wenn wir die Fleckenhypothesen überblicken, so finden wir bezüglich der Ursache der Sonnenflecken die mannigfaltigsten, ja häufig widersprechendsten Ansichten, die nicht einmal bezüglich der Constitution der Flecken übereinstimmen; man betrachte die neueren Hypothesen: Zöllner's Schlacken- (1870), Secchi's Eruptionshypothese (1872), die Wirbeltheorie Faye's (1872), die Cyclonentheorie Reye's (1872), Hasting's Russhypothese (1880) und die Lokyer'sche Hypothese (1886), die von Massen spricht, welche in verdichteter Form auf die Sonnenoberfläche stürzen. Die zahlreichen sorgfältigen Beobachtungen hauptsächlich der jüngsten Zeit lassen, wie mir scheint, eine sehr begründete Hypothese zu. Sie erklärt die Flecken aus bloss mechanischen und thermischen Wirkungen, kosmische oder elektrische Einflüsse wurden ganz beiseite gelassen.

Das Spectrum eines Sonnenflecks zeigt eine verstärkte Absorption; der grösste Theil der Absorption fällt der sogenannten allgemeinen Absorption zu, eine secundäre Rolle spielt die auswählende Absorption, die darin besteht, dass gewisse Linien des Sonnenspectrums stärker, breiter oder verwaschener erscheinen. Die genaue Untersuchung der allgemeinen Absorption führte zuerst Young[1] und neuerdings Dunér[2] auf das

---

[1] Young, Phil. Mag., vol. XVI, p. 460, 1883.

[2] Dunér, Nov. acta reg. soc. Ups., vol. XIV, p. 13, 1891.

wichtige Ergebniss, dass diese Absorption eigentlich auch nur eine auswählende ist, indem es ihnen gelang, diese Absorption in ein zahlloses Heer von feinen, sehr nahe aneinander stehenden Linien aufzulösen. Dunér gelangt somit zu folgendem Schlusse: »Mais on ne saurait guère admettre que les taches aient la forme d'un nuage planant dans l'atmosphère solaire. Car les nuages tels que nous les connaissons en l'atmosphère de la terre sont composés de parties demi-fluides, demi-gazeuses, par conséquent à peine demi-diaphanes. Il faudrait donc que les nuages solaires eussent un spectre généralement voilé. Un spectre composé de raies sombres, nombreuses, sur un fond clair ne saurait être expliqué pas cette hypothèse. M. Young a aussi, dans la note que nous venons de mentionner,[1] emis cette même opinion. Il dit: »»Of course the resolution of the spot-spectrum into lines tends to indicate that the absorption which darkens the center of a sun-spot is produced, not by granules of solid or liquid matter, but by matter in the gaseous form.«««

Die Flecken sind also Massen in Gasform, also keine Schlacken oder Russmassen. Diese Gasmassen bewirken die hauptsächlichste Absorption; sie absorbiren mehr Licht, als sie emittiren, und desshalb müssen wir nach dem allgemein giltigen Kirchhoff'schen Gesetze annehmen, dass sie kühler sind. Es könnte etwa eine grössere Dichte der Gase in den Flecken die Absorption vermehren, oder es könnte geringeres Emissionsvermögen der Fleckenmassen die betreffende Stelle vielleicht dunkler erscheinen lassen; im ersteren Falle würde aber, wenn keine Temperaturänderung eintritt, das Emissionsvermögen dementsprechend steigen, im zweiten Falle das Absorptionsvermögen derartig abnehmen, dass die Stelle eher heller als dunkler erscheinen würde. Kirchhoff's Behauptung,[2] »welches auch die Beschaffenheit der Sonne sein möge, die Sonnenflecken lassen sich nur erklären durch eine Temperaturerniedrigung in dem Raume, den sie ein-

---

[1] Young, Amer. Journ. of Sc., vol. XXV, p. 333—336, 1883.

[2] Kirchhoff's Schreiben an Spörer, Astr. Nachr., Bd. LXIX, S. 22, 1867.

nehmen«, muss entschieden aufrecht erhalten werden. Wir sind daher weiter berechtigt, zu sagen:

Die Flecken sind kühlere Gasmassen.

Dunér konnte die Linien der »allgemeinen« Absorption auch noch bis ins normale Sonnenspectrum verfolgen, so dass er den Satz ausspricht: »La couche absorbante dans les taches ayant, à de légères modifications près, la même composition chimique que celle du photosphère«. Die Verbreiterungen und Verwaschenheiten gewisser Linien deuten darauf hin, dass die Massen der absorbirenden Schicht im Flecken grösser sind. Nach dem Satze der Äquivalenz von Dichte und Dicke der absorbirenden Schicht[1] können wir die Verbreiterung durch grössere Dichte der Gase im Flecken, oder dadurch erklären, dass die Flecken tiefer als die sichtbare Sonnenoberfläche liegen, wodurch die Dicke der absorbirenden Massen grösser wird. Diese letztere Annahme hat durchaus nichts Absonderliches, wenn wir die Constitution der Photosphäre berücksichtigen, und ist, wie wir sehen werden, sogar wahrscheinlicher.

Die Beobachtung der Structur der Photosphäre und vor Allem die Entdeckung des photosphärischen Netzes durch Janssen[2] lassen zweifellos eine gas- oder wolkenförmige Natur erkennen. Veränderungen lassen sich schon im Laufe von einigen Minuten nachweisen und schliessen eine continuirlich tropfbarflüssige Constitution vollkommen aus. Die Photosphäre strahlt ein continuirliches Spectrum aus; entweder rührt also das Licht von flüssigen Partikelchen, Condensationsproducten, also Wolken her, oder von Gasen, die unter genügend hohem Drucke stehen. Eine dritte Erklärung ist nach dem heutigen Stande der Wissenschaft kaum annehmbar. Durch eine Reihe von Versuchen kamen Frankland und Lokyer[3] zu dem Schlusse, dass der Druck am Fusse der Chromosphäre weit geringer, als an der Oberfläche der Erde ist. Nach ähnlichen Principien verfuhr Zöllner und fand aus Wüllner's Versuchen den Partialdruck der Wasserstoffatmosphäre an der

[1] Zöllner, Wiss. Abh., Bd. IV, S. 212, 1870.
[2] Janssen, C. R., vol. LXXXV, p. 775, 1877.
[3] Frankland und Lokyer, Proc. Roy. soc., vol. XVII, p. 289, 1869.

Basis der Chromosphäre zu 0·00000000016 *mm.*[1] Bekannt ist ja das Experiment Kirchhoff's, dass eine ins Sonnenlicht gebrachte Natriumflamme schon eine merkliche Verbreiterung der *D*-Linien bewirkt.

An der Thatsache des äusserst geringen Druckes müssen wir festhalten. Scheiner[2] sagt daher mit Recht: »Im Innern des Sonnenkörpers wird die Materie ein Spielball sein zwischen unvorstellbar hohen Druck- und Temperaturverhältnissen, auf der Oberfläche werden wir die letzten Äusserungen des Kampfes in unvorstellbar geringen Dichtigkeitsgraden der Materie erkennen. Bei einer zukünftigen Sonnentheorie muss es sich darum handeln, diese Anschauungen zu adoptiren und sich gänzlich frei zu machen von den Vorstellungen, wie sie der Anblick so klar zu beweisen scheint. Dann wird die Erklärung der in der Sonnenatmosphäre auftretenden grossen Geschwindigkeiten keine Schwierigkeiten bereiten«. Der geringe Druck an der Photosphäre schliesst also den Gedanken aus, dass das continuirliche Spectrum vielleicht von Gasen unter hohem Drucke herrühre. Das Aussehen der Spectrallinien wäre auch ein anderes, als das thatsächliche, die Schärfe der meisten Linien wäre unmöglich, da der Übergang von den emittirenden Gasschichten zu den absorbirenden nur ein continuirlicher sein könnte.[3] Die hellen Chromosphärenlinien zeigen an der Basis nicht die geringste Verwaschenheit. Das Fleckenspectrum müsste eine allgemeine Absorption zeigen, denn, wie wir später sehen werden, liegen die Flecken vertieft in der Photosphäre, stehen also unter höherem Drucke als die Oberfläche der Photosphäre. Alles dies ist kaum mit einer gasförmigen Constitution vereinbar und erfordert eine wolkenförmige. Das Licht geht dann von flüssigen Theilchen aus; dies erklärt das starke Emissionsvermögen, die scharfe Begrenzung, welche der Sonnenrand darbietet. Die wolkenförmige Constitution wird auch jetzt fast allgemein angenommen. Young[4] hält es auch für eine sichere

---

[1] Zöllner, Wiss. Abh., Bd. IV, S. 259, 1873.

[2] Scheiner, Spectralan. d. Gest., S. 208, 1890.

[3] Ib. S. 195.

[4] Young, die Sonne, S. 9, 1883.

Thatsache der Sonnenphysik. Die photosphärischen Wolken können aber nicht mit den Wolken unserer Atmosphäre schlechthin verglichen werden. Wenn wir die ungemeine Verdünnung der Atmosphäre, in der die photosphärischen Wolken schweben, berücksichtigen, so sind sie, wie Scheiner bemerkt,[1] dem »kaum merklichen Dunste, der bei uns fast gleichmässig nach dem Horizonte sowohl, als nach dem Zenith hin erscheint«, vergleichbar. Langley[2] hält die photosphärischen Wolken für leichter als unsere dünnsten Cirri.

Eine derartige Beschaffenheit der Photosphäre lässt jedenfalls Erhöhungen und Einsenkungen ihrer Oberfläche zu, wenn entsprechend starke Temperaturdifferenzen auftreten, solche sind aber sicher in den Fackeln und Flecken vorhanden. Die beträchtlichen Verbreiterungen mancher Linien im Fleckenspectrum können also ihre Ursache in einer Einsenkung der Fleckenmassen im Wolkengebiet der Photosphäre haben. Hiemit kommen wir auf die Frage der »Tiefenparallaxe« der Flecken; vorher wollen wir aber den Bau und einige Merkmale der Sonnenatmosphäre behandeln. Unter Sonnenatmosphäre will ich hier nur den Theil der Sonne verstehen, welcher über der Photosphäre lagert.

Wir haben gesehen, unter welch' geringem Druck die Gase und Dämpfe über der Photosphäre stehen. Man kann sagen, die Gase befinden sich hier im idealen Zustande. Desshalb wollen wir die Sätze der mechanischen Wärme- und kinetischen Gastheorie als giltig voraussetzen.

In einer Schichte der Atmosphäre herrsche der Druck p, die Dichte ρ und die absolute Temperatur T. Die Schwere g' sei in diesen Schichten constant vorausgesetzt und gleich der, die auf der Sonnenoberfläche herrscht. g sei die Erdschwere; dann nimmt der Druck auf die Flächeneinheit ($1\,m^2$) mit der Erhebung um dh nach folgendem Gesetze ab:

$$dp = -\frac{g'}{g}\rho dh.$$

[1] Scheiner, Spectralan. d. Gest., S. 194, 1890.

[2] Newcomb, pop. Astr., übers. von Engelmann, S. 311; 1881.

Nach dem Gay Lussac-Mariotte'schen Gesetze ist für die Masseneinheit $p = R\rho T$; ρ aus dieser und der vorigen Gleichung eliminirt und zur Abkürzung $\frac{g'}{g} = \gamma$ gesetzt, ergibt:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\gamma}{RT} dh. \tag{1}$$

T ist nun eine Function von h, die natürlich unbekannt ist; nehmen wir z. B. an, es herrsche der adiabatische Gleichgewichtszustand; das würde sein, wenn der Druck und die Temperatur der verschiedenen Schichten so vertheilt wären, dass eine Luftmasse aus einer Höhenlage in eine andere gebracht, mit der Temperatur anlangt, die in letzterer herrscht; eine verticale Bewegung könnte trotz adiabatischer Ausdehnung und Compression nie eine Temperaturänderung mit sich bringen. In einer Atmosphäre, wo fortwährende Störungen im vertikalen Sinne stattfinden, wird sich dieser Zustand annähernd herstellen. Er wird durch folgende Gesetze bestimmt sein.

Für adiabatische Vorgänge, bei denen also keine äussere Wärmezufuhr oder Wärmeentziehung stattfindet, ist die Temperaturänderung mit der Druckänderung durch das differenzirte Poisson'sche Gesetz verbunden:

$$\frac{dT}{T} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \frac{dp}{p}; \tag{2}$$

$\varkappa$ ist gleich $\frac{c_p}{c_v}$, wo c_p die specifische Wärme bei constantem Druck, c_v die bei constantem Volumen bedeutet. Berücksichtigen wir noch die Relation $c_p - c_v = AR$ (A = Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit) und eliminiren wir aus 1) und 2) $\frac{dp}{p}$, so erhält man die Temperaturabnahme mit der Höhe:

$$\frac{dT}{dh} = -\gamma \cdot \frac{A}{c_p} = \text{const.} = \theta. \tag{3}$$

Die Temperatur befolgt also das lineare Gesetz:

$$T = T_0 - \theta h. \tag{4}$$

T_0 sei die Temperatur irgend einer Schicht, z. B. die der Oberfläche der Photosphäre, h die Höhe der Schicht von der Temperatur T über der Schicht von der Temperatur T_0. Der Werth von T, aus Gleichung 4) in 1) eingeführt und von der Photosphäre bis in eine beliebige Höhe h integrirt, ergibt das adiabatische Druckgesetz:[1]

$$p = p_0\left(1 - \frac{\theta}{T_0} h\right)^{\frac{\gamma}{R\theta}}. \qquad 5)$$

Die Gleichungen 4) und 5) bestimmen also den adiabatischen Gleichgewichtszustand. Es bestehe die Atmosphäre aus reinem Wasserstoff; dann erhalten wir aus Gleichung 3) für die Temperaturabnahme pro Kilometer ($\gamma = 27\cdot62$, $c_p = 3\cdot409$, $\frac{1}{A} = 425$):

$$\theta = \frac{27\cdot62}{425.3\cdot409} \cdot 1000 = 19\cdot063^\circ.$$

Pro Secunde ($1'' = 720860\,m$)

$$\theta = 13\,742^\circ.$$

Bei dieser Vertheilung würde 1″ über der Photosphäre eine um mindestens 13000° niederere Temperatur herrschen, in der Höhe der Chromosphäre (8″) eine um 100 000° niederere in einer Höhe, wo Gase noch glühen, wo Calcium noch in Dampfform existirt! Lokyer[2] fand in Übereinstimmung mit Respighi aus Sonnenfinsternissbeobachtungen, dass der Wasserstoff von der Photosphäre an bis in Höhen von mindestens 420″ in glühender Form reicht; in dieser Höhe müsste bei adiabatischem Gleichgewichte eine um 5,600 000° niederere Temperatur herrschen. Wenn wir bedenken, dass wir eine ungünstige Annahme zur Erzielung schneller Temperaturabnahme

---

[1] Diese Gleichung ergibt für die Höhe einer im adiabatischen Zustande verharrenden Atmosphäre $H = \gamma \cdot \frac{c_p T_0}{A}$, eine interessante Gleichung, die Ritter (Wied. Ann., n. F., Bd. V, S. 408) auf anderem Wege gefunden hat.

[2] Lokyer, Contrib. to solarphysics, p. 373, 1874.

gemacht haben, indem wir die Atmosphäre als aus Wasserstoff bestehend vorausgesetzt haben, der ein sehr grosses c_p besitzt, so zeigen diese Zahlen, dass lange nicht der adiabatische Zustand besteht, dass die Temperatur weit langsamer mit der Höhe abnehmen muss. Denn wir kämen zu Temperaturen der Oberfläche der Photosphäre, die weit über 100 000° betragen würden. Dies ist kaum zulässig. Die »Temperatur der Sonne« leidet hauptsächlich wegen der Unkenntniss des Strahlungsgesetzes an grosser Unsicherheit. Die französischen Physiker gelangten infolge von Anwendung des falschen Dulong-Petit'schen Gesetzes zu viel zu niedrigen Temperaturen, die kaum 3000° [1] erreichen. Andere gelangten zu Temperaturen von über 3,000 000°,[2] die ihre Schlüsse auf das Newton'sche Gesetz bauten. Stefan[3] hat im Jahre 1879 ein anderes Gesetz aus den Beobachtungen Dulong-Petit's abgeleitet, und hier trat der in der Wissenschaft äusserst seltene Fall ein, dass das empirisch gefundene Gesetz mit dem später theoretisch abgeleiteten vollkommen übereinstimmt. Boltzmann[4] zeigte, dass das Stefan'sche Gesetz fast eine unmittelbare Folge der elektromagnetischen Lichttheorie und des zweiten Hauptsatzes ist. Nach diesem Gesetze ergibt sich unter Zugrundelegung der Violle'schen Solarconstante[5] $= 2\cdot 54$ für das Emissionsvermögen der Photosphäre $= 1$ die Temperatur der Sonne zu ungefähr 6100°, für das Emissionsvermögen $= \frac{1}{10}$ ergibt sich die Temperatur zu über 11000°. Verwendet man die Langley'sche Constante[6] $= 3$, die nach den neueren Untersuchungen wahrscheinlich noch viel zu klein ist, so erhält man für das Emissionsvermögen $= 1$ und $= \frac{1}{10}$

---

[1] Vicaire findet 1398°, C. R., vol. LXV, p. 526, 1867; Violle 3000°. ibid., vol. XCVI, p. 254, 1881.

[2] Waterston findet 7,000 000°, Phil. Mag., vol. XXIII, p. 505, 1860. — Secchi 10,000 000°, C. R., vol. LXV, p. 526, 1867. — Ericsson 4,000 000, Nat., vol. IV, p. 204, 1871.

[3] Stefan, diese Sitzungsber., Bd. LXXIX, Abth. II, S. 426, 1879.

[4] Boltzmann, Wied. Ann., n. F., Bd. XX, S. 291, 1884.

[5] Violle, Ann. de Chim., vol. X, p. 321, 1875.

[6] Langley, Amer. Journ. of Sc., vol. XXVIII, p. 163, 1883.

Temperaturen von 6400° und 11 700°. Nach der dunstförmigen Constitution der Photosphäre zu urtheilen, wird das Emissionsvermögen noch viel kleiner als $\frac{1}{10}$ sein, das ungefähr das des Messings wäre; ferner absorbirt die Hülle der Sonne einen grossen Theil der Wärme; Frost[1] findet in ziemlicher Übereinstimmung mit Langley, dass die Sonne nach Entfernung der Hülle 1·7mal mehr Hitze ausstrahlen würde, so dass wir nach dem heutigen Stande der Wissenschaft vollkommen berechtigt sind, die Temperatur der Photosphärenoberfläche grösser als 20000° anzunehmen und kleiner als 100000°.

Da die Wärmeabnahme mit der Höhe viel langsamer erfolgt, als es der adiabatische Zustand erfordern würde, so sind die oberen Schichten viel wärmehältiger. Es herrscht also hier ein ungemein stabiles Gleichgewicht. Für geringe Höhenunterschiede wird es daher gestattet sein, das isothermische Gleichgewicht anzunehmen, ja es wird der Wahrheit viel näher kommen als das adiabatische; das isothermische Gesetz wird sehr nahe gelten, wenn wir in grössere Höhen über der Photosphäre kommen, wo weniger Störungen stattfinden und die Strahlung die fast allein massgebende Wärmequelle ist.

Die Gase und die für die herrschenden Temperaturen uncondensirbaren Dämpfe werden sich über der Photosphäre nach dem Dalton'schen Gesetze vertheilen. Nehmen wir als Beispiele zwei Gase. Der Partialdruck des einen Gases in einem Niveau N_0 sei p'_0, seine Dichte ρ'_0 und seine Constante des Gay Lussac-Mariotte'schen Gesetzes R'; für das zweite Gas gelten dieselben Bezeichnungen mit zwei Strichen oben. Das isothermische Gesetz mit der Temperatur T_0 ist vorausgesetzt; dann ergibt die Integration der Gleichung 1) sofort das bekannte isothermische Druckgesetz:

$$p = p_0 e^{-\frac{\gamma}{R T_0} h}. \tag{6}$$

Setzen wir zur Abkürzung $\frac{\gamma}{R' T_0} = C'$ und $\frac{\gamma}{R'' T_0} = C''$, und führen wir statt der Drucke die entsprechenden Dichten ein, so

[1] Frost, Astr. Nachr., Bd. CXXX, S. 140, 1892.

erhält man für beide Gase folgende Gleichungen:

$$\rho' = \rho'_0 e^{-C'h}$$
$$\rho'' = \rho''_0 e^{-C''h},$$

oder dividiren wir die beiden durcheinander, so wird

$$\frac{\rho'}{\rho''} = \frac{\rho'_0}{\rho''_0} e^{-h(C'-C'')}. \qquad 7)$$

Die beiden Gase seien Wasserstoff und Sauerstoff. Im Niveau N_0 seien die Dichten der beiden Gase einander gleichgesetzt, also $\rho'_0 = \rho''_0$, das wäre z. B. 8″ unter der Oberfläche der Photosphäre. Dann berechnet sich das Verhältniss der Dichte des Wasserstoffes ρ' und der des Sauerstoffes ρ'' in einem um 8″ höheren Niveau, also unmittelbar auf der Oberfläche der Photosphäre, zu folgenden Werthen unter Verwendung verschiedener Temperaturen T_0:

T_0	5000°	50 000°	500 000°
$\frac{\rho'}{\rho''}$	7.10^{389}	96.10^{47}	791.10^{2}

Nach diesem überraschenden Ergebniss könnte nach Gleichung 7) die Dichte des Sauerstoffes 8″ unter der Oberfläche der Photosphäre eine trillionmal (10^{18}) grösser sein als die des Wasserstoffes in demselben Niveau; bei der Photosphärentemperatur von 50 000° würde die Dichte des Wasserstoffes an der Oberfläche trotzdem 96.10^{29} grösser sein als die des Sauerstoffes. Zöllner[1] hat eine ähnliche Rechnung angestellt, und ich habe sie nur wiedergegeben, weil die Werthe, die Zöllner erhielt, nicht das genügende Vertrauen gefunden haben; dies hat seinen Grund darin, dass Zöllner selbst in einer Anmerkung die Unrichtigkeit der benützten Werthe erwähnt; aber er hält die Folgerungen doch aufrecht und ganz mit Recht, denn die obigen Betrachtungen sind von der Annahme eines bestimmten Druckes an der Photosphäre unabhängig; wenn Zöllner auch den Druck $p_0 = 184\,000$ Atmosphären annimmt, der, wie er später selbst gefunden hat, bedeutend niedriger ist, so bekommen wir ja ganz dieselben Resultate; man könnte

[1] Zöllner, Wiss. Abh., Bd. IV, S. 200, 1870.

natürlich bei so grossen Drucken die Giltigkeit des Gay Lussac-Mariotte'schen Gesetzes entschieden nicht voraussetzen. Wenn also Zöllner aus diesen Ergebnissen schliesst, »aus dem Mangel von Linien in dem Spectrum eines selbstleuchtenden Gestirnes darf nicht auf die Abwesenheit der entsprechenden Stoffe geschlossen werden«, so ist dies vollkommen berechtigt. Es kann uns nicht wundern, wie so weit verbreitete Stoffe wie Sauerstoff oder Stickstoff im Sonnenspectrum durch keine Linien nachzuweisen sind. Es wird vergeblich sein, diese Stoffe im Spectrum aufzusuchen, die absorbirenden Massen müssen in verschwindend kleiner Menge vorhanden sein über den Schichten, von denen das continuirliche Spectrum ausgeht. Die Dichte der Gase wird also hauptsächlich von dem entsprechenden R abhängen. Im Sonnenspectrum können nur die Linien der Stoffe sichtbar sein, welche ein entsprechend grosses R besitzen. Aus diesen Betrachtungen kann man folgern, dass eine Einsenkung der Photosphäre eine Vermehrung der Linien im Sonnenspectrum, eine Erhebung eine Verminderung zur Folge haben wird.

Es soll nun untersucht werden, wie tief die Einsenkungen sein müssen, damit sich die Masse der absorbirenden Schicht eines Gases verdopple. Die Masse der absorbirenden Theilchen eines Gases, die auf der Gesichtslinie zwischen dem Spectroskope und der Photosphäre in der Richtung gegen den Sonnenmittelpunkt liegen, heisse m_1, die entsprechende Masse bis zum Boden der Einsenkung, die die Tiefe h besitzen soll, heisse m_2; dann ist, wenn ρ_0 die Dichte an der Oberfläche der Photosphäre bedeutet:

$$m_2 = m_1 + \int_0^h \rho_0 e^{Ch} dh = m_1 + \frac{\rho_0}{C}(e^{Ch} - 1).$$

Nun ist $m_1 = \int_0^\infty \rho_0 e^{-Ch} dh = \frac{\rho_0}{C}$, also ist weiter:

$$m_2 = m_1 e^{Ch}.$$

Es soll nun $m_2 = 2m_1$ sein. Dann erhält man, nachdem wir den Werth von C eingesetzt haben:

$$h = \frac{RT_0}{\gamma} \frac{\log 2}{\log e}.$$

Nehmen wir als Beispiel Wasserstoff, so ergeben sic folgende Werthe für h unter Zugrundelegung verschieden Temperaturen an der Photosphäre:

T_0	5000°	10 000°	50 000°	100 000°
h	0·07″	0·1″	0·7″	1·5″

Für Sauerstoff ergeben sich folgende Einsenkungen:

T_0	5000°	10 000°	50 000°	100 000°
h	0·005″	0·009″	0·05″	0·09″

Eine Einsenkung von ungefähr 0·7″ würde die abso birenden Wasserstoffmassen bei 50 000° verdoppeln, die Saue stoffmassen aber um das 60 tausendfache vermehren. E werden sich demnach, wenn Einsenkungen stattfinden besonde die Linien im Sonnenspectrum verändern, welche ein kleinere R besitzen, die also nicht so hoch in die Chromosphäre hinau ragen, während die Stoffe wie Wasserstoff oder Calcium, d hoch hinaufragen, davon nicht wesentlich berührt werden, fal die Einsenkung nicht zu bedeutend wird. Es ist hier natürlic wohl zu beachten, dass die Verbreiterung der Linien überhau nur eintritt, wenn das Absorptionsvermögen in der Umgebun der betreffenden Linie von Null verschieden ist; ist letzter nicht der Fall, so bewirkt eine noch so grosse Vermehrung d absorbirenden Massen keine Veränderung der Linienbreit Wir ersehen auch, dass eine Einsenkung eine ausgiebige U sache für das Auftreten neuer Linien, die also im gewöhnliche Sonnenspectrum fehlen, ist.

Der Druck jedes einzelnen Gases muss mit der Tiefe zu nehmen, die Dichte aber keineswegs. Die Heliumlinie gibt ei Beispiel für dieses Verhalten. Im allgemeinen sitzen die Chrom sphärenlinien auf ihrer Absorptionslinie breit auf, weil im allg meinen die Dichte bis zur Oberfläche der Photosphäre zunimm Die Heliumlinie sitzt aber auf dem Sonnenrande nicht bre auf, sondern nähert sich ihm, immer spitzer werdend. In ein gewissen Höhe über der Photosphäre erreicht sie das Maximu ihrer Breite, um dann allmälig sich wieder in grossen Höhe zu verlaufen. Dies zeigt, dass die Dichte des Heliums an de

Basis der Chromosphäre geringer ist als in einer gewissen Höhe. Es erklärt sich dies auf folgende Weise:

Die Temperaturabnahme befolge das Gesetz:

$$T = T_0 - \Theta h. \qquad 9)$$

Θ ist eine beliebige Constante; für geringe Höhenunterschiede können wir das lineare Gesetz voraussetzen. Als Druckgesetz folgt aus der Integration der Gleichung 1) nach Einsetzung von 9):

$$p = p_0 \left(1 - \frac{\Theta}{T_0} h\right)^{\frac{\gamma}{R\Theta}}. \qquad 10)$$

Führt man mit Hilfe des Gay Lussac-Mariotte'schen Gesetzes die Dichten ein, so erhält man:

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{\Theta}{T_0} h\right)^{\frac{\gamma}{R\Theta} - 1}.$$

Da für die meisten Stoffe die Dichte mit der Höhe abnimmt, so folgt für diese, z. B. Wasserstoff $\frac{\gamma}{R_1\Theta} > 1$; für Helium gilt aber die Ungleichung $\frac{\gamma}{R_2\Theta} < 1$, so dass $R_2 > R_1$ sein muss, also $R_2 > 422 \cdot 6$. Dass die Dichte des Heliums nicht bis in die grössten Höhen zunimmt, beweist, dass das lineare Temperaturgesetz nicht bis in grössere Höhen gilt, wie es ja natürlich ist, sondern dass die Temperaturabnahme in grösseren Höhen verzögerter erfolgt; das Θ ist in grossen Höhen kleiner, ein Resultat, das wir schon früher S. 383 deductiv gefolgert haben. Die Erdatmosphäre zeigt ja ein analoges Verhalten. In Höhen von 6000 *m* ist die Temperaturabnahme ungefähr schon doppelt so langsam wie unmittelbar über dem Erdboden.[1] Eine genügend starke Temperaturumkehrung am Sonnenrande könnte das Aussehen der Heliumlinie bedeutend ändern; es ist daher möglich, dass die genaue Beobachtung derselben werthvolle Ergebnisse über die Temperaturverhältnisse an der Sonnenoberfläche geben könnte.

---

[1] Hann-Mendeleff, Met. Zeitschr., Bd. XI, S. 228, 1876.

In engem Zusammenhange mit diesem Verhalten d
Heliumlinie scheint der Umstand zu stehen, dass ihr kei
Absorptionslinie im Sonnenspectrum entspricht. An eine Au
nahme von dem Kirchhoff'schen Gesetze, dessen Giltigk
als allgemein angenommen werden muss, ist nicht zu denke
nachdem die Heliumlinie von Young in einem Flecken »a
deutlicher Schatten« gesehen wurde.[1] Wilsing[2] erklärt die
Erscheinung durch den Intensitätsunterschied zwischen Ra
und Mitte der Sonnenscheibe, der durch die grössere Dicke d
ausstrahlenden Schicht am Rande hervorgebracht würde. E
ergibt sich der erforderliche Intensitätsunterschied bei ein
Dicke von 2—3″. Helium gehört aber zu den Stoffen, welch
sehr hoch, mindestens 6″ in die Chromosphäre hinaufrage
man müsste, wenn man Wilsing's Erklärung aufrec
halten wollte, annehmen, dass die oberen Heliumschicht
schon zu dünn sind, um eine merkliche Absorption herv
zurufen; es erscheint mir daher gleich wahrscheinlicher, wer
man mit Hastings[3] die Gase der Chromosphäre von de
höchsten Höhen bis unmittelbar zur Oberfläche der Phot
sphäre für so durchsichtig, von so geringem Absorption
vermögen hält, dass sie nicht im Stande sind, eine merklich
Absorptionslinie hervorzurufen. So erklärt es sich sehr einfac
dass die Protuberanzen, obwohl sie ein grösseres Emission
vermögen, daher auch grösseres Absorptionsvermögen besitze
auf der Mitte der Sonnenscheibe keinerlei Absorptionsersch
nungen zeigen. Der grösste Theil der Absorption scheint al
unmittelbar über der Photosphäre und, wie wir aus folgend
Betrachtungen schliessen werden, hauptsächlich unter der Obe
fläche der Photosphäre stattzufinden.

Setzen wir voraus, die Oberfläche der Photosphäre ve
hielte sich wie eine lichtausstrahlende Kugeloberfläche. D
Lichtstrahl AB durchdringt auf der Strecke AC, die die Hö

der absorbirenden Atmosphäre darstellen soll, die Masse $m_1 =$

unter Anwendung der vorhergehenden Bezeichnungen. D

[1] Young, Die Sonne, S. 127, 1883.
[2] Scheiner, Spectralan. d. Gest., S. 202, 1890.
[3] Hastings, Nat., vol. VIII, p. 77, 1873.

Lichtstrahl $A'B'$ unterliegt der Absorption der Masse m_2, welche auf der Strecke $A'C'$ liegt. Das beliebige Theilchen P sei durch den Abstand x von A' gegeben, seine Höhe über der Oberfläche heisse h. Dann ist m_2 durch folgendes Integral gegeben ($X = A'C'$):

$$m_2 = \int_0^X \rho_0 e^{-Ch} dx.$$

Fig. 1.

Nun ist, wenn r der Sonnenradius ist, $(h+r)^2 - r^2 = x^2$, oder, da h im Vergleich zu r klein ist, $2hr = x^2$. Es wird dann:

$$m_2 = \rho_0 \int_0^X e^{-\frac{C}{2r}x^2} dx,$$

oder, statt $\frac{C}{2r}x^2 = y^2$ gesetzt:

$$m_2 = \sqrt{2rC} \cdot \frac{\rho_0}{C} \int_0^{Y\sqrt{\frac{2r}{C}}} e^{-y^2} dy.$$

Die obere Grenze $Y\sqrt{\frac{2r}{C}}$ ist gleich $\sqrt{2Hr}$, wenn H die Höhe der absorbirenden Atmosphäre des betreffenden Gases

ist, also nach den bestehenden Verhältnissen für die meisten Gase grösser als 30,000 000, selbst wenn wir die Höhe der Atmosphäre bloss 1″, ungefähr $\frac{r}{1000}$, annehmen. Dies berechtigt uns bei der bekannt raschen Convergenz des Integrals die obere Grenze unendlich zu setzen; dann nimmt aber das Integral den einfachen Werth $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ an, und es ist dann:

$$m_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2r\pi C}.m_1.$$

Unmittelbar über dem Rande blicken wir durch die doppelt so grosse emittirende Masse $2m_2$, die auf der Strecke $C'C''$ liegt; desshalb sitzen die Chromosphärenlinien auf ihren Absorptionslinien breit auf. Die Absorptionslinien, welche aber von der Masse m_2 gebildet werden, zeigen keine sehr merklichen Unterschiede von denen, welche von der Mitte der Sonnenscheibe ausgehen. Das Randspectrum zeigt jedenfalls lange nicht solche Verbreiterungen, wie es das Chromosphärenspectrum zeigt, man denke nur an die F-Linie, so dass wir schliessen können, dass auf der Strecke $A'C'$ nicht die doppelte Masse von AC liegen kann, oder $\frac{m_2}{m_1} < 2$ ist; daraus folgt die Ungleichung:

$$4 > \sqrt{2r\pi C}.$$

Da $C = \gamma \cdot \frac{1}{RT_0}$ ist, so folgt weiter:

$$T_0 > \frac{1}{8}\gamma\frac{r\pi}{R};$$

dies ergibt, für $\gamma = 27 \cdot 62$, für $R = 422 \cdot 61$ (Wasserstoff) und für $r = 691,750\,000\,m$ eingesetzt, die Ungleichung:

$$T_0 > 17,750\,000°.$$

Dies ist jedenfalls ein viel zu grosser Werth für die Oberflächentemperatur der Photosphäre; es kann also die Fläche, von der das continuirliche Spectrum ausgeht, keine Kugelfläche sein, sondern die Strahlen müssen in der Mitte der Sonnenscheibe aus grösseren Tiefen kommen. Wir blicken also hier in

grössere Tiefen der Photosphäre. Dies erscheint auch ganz natürlich, wenn wir die Feinheit und Dünne des photosphärischen Dunstes berücksichtigen, Eigenschaften, die sich früher ergeben haben. Die Tiefen, aus denen die Strahlen herausdringen, brauchen gar nicht gross zu sein, da wir gesehen haben, wie rasch die Massen mit der Tiefe wachsen. Zu demselben Resultate gelangte Hastings[1] durch directe Vergleichung des Randspectrums mit dem der Mitte; er fand eine Linie, welche gegen den Rand hin vollkommen verschwindet, obwohl sie in der Mitte der Sonnenscheibe sehr deutlich und scharf sichtbar ist. Diese Erscheinung lässt sich eben, wie Hastings bemerkt, nur durch die Annahme erklären, dass für den Stoff, der diese Linie erzeugt, die Absorption innerhalb der Photosphäre stattfindet, in Übereinstimmung mit unserem Schlusse. Dass der grösste Theil der Absorption unter der Oberfläche der Photosphäre stattfindet, scheint mir auch von anderer Wichtigkeit zu sein. Die Beobachtungen Vogel's[2] über die Abnahme der Intensität verschiedenfarbigen Sonnenlichtes gegen den Rand hin scheinen in Widerspruch mit der Thatsache des geringen Druckes an der Photosphäre zu stehen. Vogel's Beobachtungen erfordern nach Seeliger's Untersuchungen[3] eine Gashülle von stark brechender Kraft, und da sich keine Dispersion der Hülle nachweisen lässt, schliesst Seeliger, dass die Hülle grosse Dichte und geringe Höhe besitzen muss, Bedingungen, die totale Reflexionen bewirken und hiemit eine Dispersion verhindern. Die spectroskopischen Beobachtungen sprechen aber für eine äusserst dünne Atmosphäre, also scheinbar gegen Seeliger's Hypothese. Eine Dunsthülle, die die tieferen Schichten der Photosphäre umhüllt, scheint mir nun den Mangel an Dispersion und die Zunahme der Absorption gegen den Rand hin zu erklären und so den herrschenden Widerspruch zu beseitigen.

Nun wollen wir an die Frage der »Tiefenparallaxe« der Flecken herantreten. Liegen die Flecken über, auf oder unter der Photosphäre?

---

[1] Hastings, Nat., vol. VIII, p. 77, 1873.

[2] Vogel, Monatsber., Berlin, S. 104, 1877.

[3] Seeliger, Sitzungsber., München, Bd. XXI, Heft 3, 1891.

Wenn Scheiner[1] bemerkt, dass es wohl nicht zulässig ist, die starken Verbreiterungen gewisser Linien im Fleckenspectrum allein durch Druck- oder Dichtigkeitsänderungen zu erklären, so ist dies wohl berechtigt; aber diese Erscheinungen durch chemische Verbindungen zu erklären, erscheint mir nicht wahrscheinlicher, sondern unmöglich. Wir haben früher gezeigt, dass die Temperatur der Photosphäre mindestens 20 000° beträgt; Gustav Jäger[2] hat aus rein theoretischen Folgerungen als oberste Grenze der Dissociationstemperatur 6000° angegeben; dies beweist die Unmöglichkeit einer chemischen Verbindung auf der Sonnenoberfläche. Sehr leicht erklären sich aber die Verbreiterungen und Verwaschenheiten durch eine in der Photosphäre eingesenkte Lage der Flecken. Wir haben ferner gezeigt, dass, wenn die Photosphärentemperatur zu 50000° angenommen wird, eine Einsenkung von 0·7″ die absorbirenden Massen des Wasserstoffes bloss verdoppelt, die Massen des Sauerstoffes aber um das 60tausendfache vermehrt. Die absorbirenden Massen eines Gases, dessen R viermal so gross wäre als das des Sauerstoffes, würden bei dieser Einsenkung 16mal grösser werden. Man braucht also die Tiefen nicht einmal so gross anzunehmen, wie sie etwa Manche anzunehmen geneigt sind, die sie bis auf 8″ schätzen, um die starken Verwaschenheiten und Verbreiterungen zu erklären. Wenn die Wasserstofflinien im Flecken dunkel erscheinen, zeigen sie selten eine Verbreiterung, obwohl die Wasserstofflinie F äusserst verbreiterungsfähig ist, wie das Chromosphärenspectrum zeigt; dies rührt eben davon her, dass Einsenkungen auf die hoch in die Chromosphäre ragenden Gase von sehr geringem Einflusse sind.[3] Es werden sich also die Linien der tiefer liegenden Stoffe wesentlich verbreitern. Natrium, Eisen, Nickel, Titan und Magnesium werden stark beeinflusst werden. Ebenso treten im Fleckenspectrum sehr häufig ganz deutlich scharfe Linien auf, die im gewöhnlichen Sonnenspectrum fehlen, wieder eine Stütze für die Ansicht, dass die Flecken tiefer liegen.[4]

---

[1] Scheiner, Spectralan. d. Gest., S. 190, 1890.

[2] Jäger, Sitzungsber., Wien, Bd. C, Abth. II. a., S. 1192, 1891.

[3] Siehe S. 386.

[4] Siehe S. 386.

Lokyer[1] hat in der Periode 1879—1885 700 Fleckenspectren untersucht und gelangt zu folgenden wichtigen Ergebnissen:

Die Linien, welche am meisten verbreitert sind, wechseln zu verschiedenen Zeiten der Fleckenperiode.

Während des Minimums und kurz nachher gehören die meist verbreiterten Linien den verschiedenen Metallen an.

Während des Maximums und kurz nachher gehören die meist verbreiterten Linien unbekannten Stoffen an.

Zur Zeit des Maximums finden sich viele Linien, welche im Sonnenspectrum fehlen.

Diese Beobachtungen lassen erschliessen, dass die Tiefe der Flecken mit der Zunahme der Fleckenhäufigkeit wächst. Die Flecken liegen zur Zeit des Maximums tiefer. In die Chromosphäre ragen Stoffe empor, die grösstentheils bekannt sind; von den 273 Chromosphärenlinien Young's sind nur 31 noch nicht identificirt.[2] Es werden daher die Linien im Sonnenspectrum, deren Ursprung wir nicht kennen, Stoffen angehören, die den tiefsten Schichten der Sonnenatmosphäre angehören. Falls also die Abkühlung in die tiefen Regionen dringt, so werden die Linien unbekannten Ursprungs sich am meisten verbreitern, ausserdem wird »die allgemeine« Absorption stark hervortreten müssen. Ferner werden Linien auftreten, die im gewöhnlichen Sonnenspectrum unsichtbar sind; diese Erscheinungen aber zeigen nach den Beobachtungen Lokyer's die Maximumflecken, so dass wir sie als tiefer liegend betrachten dürfen. Cortie[3] gelangte zu ähnlichen Resultaten wie Lokyer; er untersuchte 90 Fleckenspectren; von 53 Eisenlinien zeigten sich in der Maximumperiode nur eine einzige stärker, 3 sehr stark verbreitert gegen 14 zur Zeit des Minimums. Perry und Cortie[4] haben einen Maximumfleck untersucht. In dessen Spectrum fand sich keine einzige Eisenlinie verbreitert, die man auch in der Chromosphäre beobachten kann; die Untersuchung eines Minimumflecks ergab, dass 10 verbreiterte Linien mit Eisenlinien der Chromosphäre zusammenfielen. Überhaupt

[1] Lokyer, Chemistry of the Sun, p. 324, 1887.

[2] Scheiner, Spectralan. d. Gest., S. 198, 1890.

[3] Cortie, Monthly Not., vol. LI, p. 76, 1890—1891.

[4] Perry und Cortie, Monthly Not, vol. XLIX, p. 417, 1888—1889.

fanden sie, dass die meist verbreiterten Linien auch anderer Stoffe beim Maximumfleck mit nur 5, beim Minimumfleck mit 24 Chromosphärenlinien coincidirten; dies deutet ja fast unmittelbar auf die tiefere Lage des Maximumflecks hin; ebenso auch die Beobachtung Perry's und Cortie's, dass sich im Maximumfleck mehrere Linien weit in den Hof des Fleckens erweitert zeigten; beim Minimumfleck trat dies nur bei einer Linie ein; da der Kern beim Maximumfleck tiefer lag, so musste dies auch der innere Rand des Hofes thun, wodurch sich diese Erscheinung leicht erklärt.

Auch die directen Beobachtungen sprechen für eine Tiefenparallaxe der Flecken. Die zuverlässigste Methode haben de la Rue, Stewart und Löwy[1] angewendet. Sie unterzogen mehr als 600 Flecken mit messbarem Halbschatten einer eingehenden Discussion und fanden, dass in etwas mehr als 75% aller Fälle der Halbschatten an der dem Sonnenrande zugewendeten Seite am breitesten war, wie es die perspectivische Wirkung der Tiefenparallaxe erfordert. In der einen Hälfte der übrigen Fälle war ein Unterschied nicht zu bemerken, während in der anderen Hälfte (etwa 12% der Gesammtzahl) der Halbschatten an der inneren Seite am breitesten war. Secchi, Faye, Spörer und Peters, auch andere haben eine weniger zuverlässige Methode angewendet und kamen daher zu den widersprechendsten Resultaten. Spörer leugnete lange Zeit das Wilson'sche Phänomen; er war unter den hervorragendsten Sonnenphysikern in der letzten Zeit der einzige Gegner der Tiefenparallaxe; auch er kommt schliesslich zu folgendem Ergebniss:[2] »Für diese Flecke muss angenommen werden, dass die scheinbare Kernoberfläche entschieden tiefer lag, als es durchschnittlich der Fall ist, wenn man in diesen und anderen Fällen die Abweichungen allein den Beobachtungsfehlern oder den Gestaltsverhältnissen der Flecke zuschreiben will«. Spörer hält aber Tiefenparallaxen von 2″ schon für zu gross, während de la Rue, Stewart und Löwy zu 8″ und

---

[1] Young, Die Sonne, S. 124, 1883. — De la Rue, Stewart, Löwy, Researches in Solar Physics, part I, p. 20, 1868.

[2] Spörer, Publ. d. astrophys. Obs. Potsdam, Bd. IV, Stück 4, S. 427, 1886.

Faye[1] zu Werthen gelangt, die zwischen 4 und 8″ schwanken. Es ergeben also Beobachtungen jeder Art eine vertiefte Lage des Fleckenkernes, und auch die directen Beobachtungen scheinen anzudeuten, dass die Tiefenparallaxe von Fleck zu Fleck verschieden sein kann.

Den Verbreiterungen der Linien steht die Erscheinung gegenüber, dass Linien im Fleckenspectrum dünner erscheinen; vor allen betrifft dies die Wasserstofflinien und die Linien der Stoffe, welche in hohen Regionen der Chromosphäre vorkommen. Die Sonnenatmosphäre besteht hauptsächlich aus Wasserstoff, er ist der Träger der Dämpfe. Folglich kann die Dichte des Wasserstoffs keinen grossen Schwankungen unterliegen, da dies zu grosse Druckdifferenzen zur Folge hätte. Es ist daher wahrscheinlicher, dass die Dicke der absorbirenden Wasserstoffmassen kleiner ist; dies kann nur dadurch geschehen, dass über einem Flecken die Wasserstoffmassen ungefähr so heiss sind, wie der Fleck selbst, dann kann keine Absorption hervortreten, nur die oberen kühleren Schichten werden eine solche in Form einer feinen schmäleren Absorptionslinie bewirken. Wenn auch die Linien von Stoffen schmäler erscheinen, die den tieferen Regionen angehören, so müssen wir auf eine grosse Tiefe der Fleckenmassen schliessen. Häufiger tritt der Fall ein, ja bei einigen Linien fast regelmässig, dass Linien im Fleckenspectrum hell erscheinen. Und dies kann natürlich nur bei den Linien eintreten, welche den Stoffen angehören, die hoch in die Chromosphäre ragen, wie Wasserstoff, Natrium, Calcium, Helium, Coronium, auch Magnesium; denn die Helligkeit der Linien kann nur über den Fleckenmassen ihren Ursprung haben. Wenn der äusserst seltene Fall eintritt, dass auch andere Linien, z. B. Eisenlinien, umgekehrt erscheinen, so müssen wir wieder auf eine besonders tiefe Lage des Fleckenkernes schliessen. Ein sehr lehrreiches Verhalten zeigen die Natriumlinien im Fleckenspectrum: »Dieselben kehren sich niemals in ihrer ganzen Breite um, sondern sie erscheinen stellenweise ausserordentlich verbreitert und in ihrer Mitte tritt eine schmale, sehr helle Linie auf.« »Eine Erklärung dieser Erscheinung ist nur möglich unter

[1] Faye, C. R., vol. LXI, p. 1082, 1865: vol. XCVI, p. 356, 1883.

der Annahme, dass eine sehr dichte Schicht von Natriumdampf niedriger Temperatur im Flecken vorhanden ist, über welcher sich eine solche von höherer Temperatur als die Photosphäre innerhalb des Fleckens, aber von geringerer Dichtigkeit befindet.«[1] Nach unserer Auffassung ist überall statt Dichtigkeit Masse der strahlenden Schicht zu setzen. Ein wichtiges Moment ist, dass in der Mitte der sehr hellen Linien nicht noch eine sehr feine Absorptionslinie auftritt; das deutet darauf hin, dass die Erwärmung so hoch reicht als unter normalen Verhältnissen die absorbirenden Natriumschichten. Höchst wichtige und sorgfältige Beobachtungen hat Hale angestellt mit seinem Spectroheliographen:[2] »The bright H and K lines seem to invariably extend entirely across every sun-spot. Both lines are doubly reversed in the faculae which probably completely surround every spot. In the umbra the reversals are narrower and the dark central line is usually absent.« Hale erklärt diese Erscheinung vollkommen richtig: »The single reversals in the umbra, however, probably take their rise in the chromosphere, which presumably overlies the cooler regions of the spot.« Die Erhitzung reicht also im Allgemeinen über dem Kern in grössere Höhen hinauf als über dem Hof. Diese letztere Erscheinung der einfachen Umkehrung über dem Kern ist äusserst wichtig; sie zeigt, dass die hellen Linien nicht etwa von Protuberanzen herrühren, die in der Nähe des Fleckens aufsteigen, oder von Fackeln, die in der Umgebung des Fleckens liegen, sondern dass sie für den Fleck charakteristisch ist, denn Hale findet für die Fackelspectren: »The reversals in faculae are usually double, a narrow dark line running down the center of the broader bright line.« In schöner Übereinstimmung mit dieser Hale'schen Beobachtung stehen die thermischen Beobachtungen Langley's;[3] sie ergaben, dass der Kern der Flecken durchschnittlich mehr Wärme ausstrahle als der Hof. Diese Ergebnisse zeigen, dass unmittelbar über dem Kern des Flecks eine specifische Wärmequelle thätig sein muss, die über dem Hof in geringerer

[1] Scheiner, Spectralan. d. Gest., S. 193—194, 1890.
[2] George Hale, Astronomy and Astrophysics, No. 109, 1892.
[3] Langley, Monthly Not., vol. XXXVII, p. 5, 1876.

Wirksamkeit auftritt. Ja die neuesten Beobachtungen Frost's[1] ergeben, dass überhaupt ein Fleck wärmer sein kann als die ihn umgebende Photosphäre, ein allerdings überraschendes Resultat. »A rather surprising result of these observations was that spots are occasionally relatively warmer than the surrounding photosphere.« Da wir an der Thatsache entschieden festhalten müssen, dass Flecken kühlere Stellen sind, die auf der Photosphäre liegen, so ist nur die Annahme möglich, dass über den betreffenden Flecken heisse Schichten lagerten, so dass die Gesammtstrahlung der Fleckenmassen und dieser Schichten grösser war als die normale Strahlung der Photosphäre; im Allgemeinen gibt aber die Abkühlung der Fleckenmassen den Ausschlag, wie es eben auch schon die Beobachtungen Henry's[2] und Langley's ergeben haben. Den schlagendsten Beweis dafür, dass über den Fleckenmassen eine anormal heisse Schichte lagert, liegt in der genügend bewiesenen Thatsache, dass die Flecken in die Photosphäre eingesenkt sind. Die Fleckenmassen liegen am Boden einer Höhlung, die von Condensationsproducten gebildet ist. Wie kann denn überhaupt eine derartige Einsenkung in einer Dunsthülle monatelang bestehen? Dies kann ich mir nur durch eine an der betreffenden Stelle herrschende anormale Hitze erklären, die die Condensationsproducte zum Verdampfen bringt; da von diesen das Licht ausgeht, so wird sich an der betreffenden Stelle eine Einsenkung zeigen.

Nach diesen Erörterungen glaube ich berechtigt zu sein, eine über den Fleckenmassen lagernde heisse Schicht anzunehmen, deren Temperatur sogar anormal hoch ist; ein Fleck ist also eine Stelle, wo eine extreme Temperaturumkehrung auftritt. Fassen wir alle Ergebnisse, die wir über die Flecken erhalten haben, zusammen, so ergibt sich folgendes Bild eines Fleckenkörpers:

In der dunstförmigen Wolkenhülle der Photosphäre ist eine Höhlung, die mit abgekühlten Gas- und Dampfmassen ausgefüllt ist; über diesen befindet sich eine Schichte anormal hoher Temperatur.

[1] Frost, Astr. Nachr., Bd. CXXX, S. 143, 1892.

[2] Henry, Pogg. Ann., Bd. LXVIII, S. 102, 1845.

Dies soll uns für die weiteren Deductionen als Grundlage dienen. Von unmittelbaren Ursachen einer starken örtlichen Abkühlung in einer Atmosphäre können offenbar nur drei bestehen:

1. Leitung, indem etwa aus den höheren kühleren Schichten Ströme auf die Photosphäre herabkommen, die abkühlend wirken würden.

2. Ausdehnung der Gase durch mechanische Wirkung:

a) durch aufsteigende Ströme, die sich adiabatisch ausdehnen und hiemit abkühlen;

b) durch die Centrifugalkraft von Wirbeln.

3. Strahlung, die an einer Stelle durch grössere Klarheit der darüber lagernden Atmosphäre begünstigt wird.

Viele Sonnenfleckentheorien nehmen die Leitung zwar nicht als unmittelbare Ursache der Sonnenflecken an, sondern sie schreiben ihr eine secundäre Rolle zu, indem die aus den höheren, kühleren Schichten herabkommenden Ströme ihre Kälte auf die Flecken übertragen und durch fortwährende Bespülung einen mächtigen Factor für die lange Erhaltung der Flecken bilden. Wie aus den folgenden Betrachtungen zu schliessen ist, ist die Ansicht, Ströme aus der Höhe brächten Kälte, unstatthaft.

Es herrsche das Temperaturgesetz $T = T_0 - \Theta h$; dann folgt als Druckgesetz die Gleichung

$$p = p_0\left(1 - \frac{\Theta}{T_0} h\right)^{\frac{\gamma}{R\Theta}}. \tag{10}$$

Bringen wir nun die Masseneinheit der Atmosphäre aus der Höhe h in ein tieferes Niveau, wo der Druck p_0 und die Temperatur T_0 herrschen soll, so wird diese Gasmasse infolge der Zunahme des Druckes eine Compression erleiden, die fast rein adiabatisch erfolgen wird, da eine beträchtliche Wärmeentziehung oder Wärmezufuhr kaum auftreten kann. Die Gase sind hier in unvorstellbarem Verdünnungszustande, haben daher ein äusserst geringes Strahlungsvermögen, durch das etwa die adiabatische Erwärmung verringert würde. Die Temperatur T', die die Masse im unteren Niveau durch die adia-

batische Erwärmung erhält, ergibt sich aus der Poisson'schen Gleichung

$$\frac{T}{T'} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Setzt man in diese Gleichung für p den Werth aus 10) ein und benützt noch die Relationen $\frac{k-1}{k} c_p = AR$ und $\theta = \gamma . \frac{A}{c_p}$, so wird

$$\frac{T'}{T} = \left(1 - \frac{\Theta}{T_0} h\right)^{-\frac{\theta}{\Theta}}.$$

Führen wir für $T = T_0 - \Theta h$ ein, so erhält man für das Verhältniss der im unteren Niveau entstehenden zu der da herrschenden Temperatur:

$$\frac{T'}{T_0} = \left(1 - \frac{\Theta}{T_0} h\right)^{1-\frac{\theta}{\Theta}}. \tag{11)}$$

Wir haben schon auf S. 382 nachgewiesen, dass die thatsächliche Temperaturabnahme Θ viel langsamer erfolgt als die adiabatische θ; daher besteht die Ungleichung $\theta > \Theta$, und daraus folgt, da der Klammerausdruck dem Wesen nach offenbar kleiner als die Einheit ist,

$$T' > T_0.$$

Also jeder absteigende Strom muss eine Erhitzung mit sich bringen und, wie wir aus der Formel ersehen, eine umso grössere, je grösser die Höhe ist, aus der er kommt. Um uns einen Begriff von der Grösse der Erhitzung zu machen, wollen wir annehmen, der Strom komme aus der Höhe von 1″; dazu sind wir berechtigt, denn die aufsteigenden Ströme der Protuberanzen erreichen immer Höhen von 15—20″, zwei Drittel solche von ungefähr 40″.[1] Ferner wollen wir $\Theta = \frac{\theta}{2}$ setzen, um ja ein extremès Minimum für die Erhitzungen zu erhalten. Bei

[1] Young, Die Sonne, S. 200, 1883.

dieser Vertheilung würde in der Höhe von 1″ eine um 7000° in der Höhe der Chromosphäre eine um 60000°, in der Höhe der gewöhnlichen Protuberanzen eine um 140000° niedrigere Temperatur als an der Oberfläche der Photosphäre herrschen. Für die Erhitzung $\Delta T = T' - T_0$ erhält man aus Gleichung 1

$$\Delta T = T_0\left[\left(1-\frac{\Theta}{T_0}h\right)^{1-\frac{\theta}{\Theta}}-1\right]. \quad .$$

Ich habe auch, um Maximalwerthe zu erhalten, die Erhitzungen (ΔT) bei isothermischem Gleichgewichte berechnet nach der sich leicht ergebenden Formel

$$(\Delta T) = T_0\left(e^{\frac{\theta h}{T_0}}-1\right).$$

Es folgen dann folgende Werthe für verschiedene T_0:

T_0	5000°	10 000°	20 000°	50 000°	100 000°	1,000 000°
ΔT	—	21 960	10 470	7 970	7 380	6 900
(ΔT)	73 100	29 520	19 760	15 820	14 730	13 850
$\frac{\Delta T}{T_0}$	—	2·20	0·52	0·16	0·07	0·007
$\frac{(\Delta T)}{T_0}$	14·62	2·95	0·99	0·32	0·15	0·014

Selbst wenn ein Drittel der Erhitzung durch Strahlung verloren geht, so müssen wir Erhitzungen von mindestens 5000° annehmen, wenn wir die ungünstigen Annahmen berücksichtigen: reine Wasserstoffatmosphäre, $\Theta = \frac{\theta}{2}$ und $h = 1''$. Der Druck wird nämlich thatsächlich viel schneller mit der Tiefe zunehmen, weil immer neue Atmosphären von anderen Gasen und Dämpfen hinzutreten, und wird die Erhitzungen noch viel mehr beschleunigen.

Wenn wir die Verhältnisse $\frac{\Delta T}{T_0}$ betrachten, so sehen wir, dass bei 20000° eine Erhitzung erfolgt, die die Hälfte der au

der Sonne überhaupt herrschenden Temperatur ausmacht. Solche Schwankungen erscheinen kaum annehmbar, und wir können mit grosser Wahrscheinlichkeit annehmen, dass $T_0 > 20\,000°$ ist, ein Resultat, das wir früher schon aus directen Beobachtungen abgeleitet haben (S. 383).

Nach diesen Zahlen muss die Erklärung der directen Fleckenabkühlung durch absteigende Ströme fallen gelassen werden. Hiemit ist Punkt 1) Leitung ausgeschlossen, und wir wollen zum nächsten Punkt übergehen.

Die Abkühlung der Fleckenmassen könnte auch dadurch entstehen, dass im Flecken ein aufsteigender Strom herrscht, der durch die adiabatische Ausdehnung eine Abkühlung erleidet. Auf dieser Ansicht beruht die Fleckentheorie Reye's[1] (Cyclonen-Theorie).

Ein aufsteigender Strom riefe allerdings beträchtliche Abkühlungen hervor, wenn seine Ausdehnung rein adiabatisch erfolgte. Aus Gleichung 10) und dem Poisson'schen Gesetze folgt wieder sofort für die Temperatur T', mit der der von der Photosphäre aufsteigende Strom in der Höhe h anlangt:

$$T' = T_0\left(1 - \frac{\Theta}{T_0} h\right)^{\frac{\theta}{\Theta}}.$$

Da $\theta > \Theta$ ist, so folgt, dass $T' < T_0$ ist, dass also eine Abkühlung statthat. Mit kleiner werdendem Θ wird T' grösser, die Erkaltung geringer, so dass wir $\Theta = 0$ setzen, um für die Abkühlungen ein Minimum zu erhalten. Für $\Theta = 0$ herrscht das isothermische Gleichgewicht. Ein aufsteigender Strom wird dann in der Höhe h über der Photosphäre mit der Temperatur (T') ankommen, die sich in analoger Weise aus Gleichung 6) und dem Poisson'schen Gesetz ergibt:

$$(T') = T_0 e^{-\frac{\theta h}{T_0}}.$$

Setzen wir für h die Werthe 10″, 50″ und 500″, Höhen, die Protuberanzen mit Ausnahme der letzteren nicht selten erreichen, so erhalten wir für verschiedene T_0 folgende Temperaturen (T'),

[1] Reye, Wirbelstürme... Aufl. II, S. 178, 1880.

mit denen ein von der Photosphäre aufsteigender Strom in de
betreffenden Höhen anlangt:

T_0	20 000°	50 000°	80 000°	100 000°	500 000°	1,000 000
$h =$ 10"	21	3200	14 400	25 300	380 000	871 600
$h =$ 50"	—	—	15	106	126 500	503 000
$h =$ 500"	—	—	—	—	—	1 060

Würde also die Abkühlung rein adiabatisch erfolgen, s
müssten wir Temperaturen der Photosphäre von über 500 000
annehmen; solche wollen wir den früheren Erörterungen gemäs
ausschliessen; wir müssen dann aber eine Quelle beträchtlich
Wärmezufuhr annehmen, die die adiabatische Abkühlung ve
zögert. Diese ausgiebige Quelle kann nur die Condensation
wärme der sich condensirenden Dämpfe sein. Die fortwährenc
Abkühlung des Stromes wird Dämpfe condensiren, es wi
dadurch Wärme frei, die sich dem Strome mittheilt. W
wirksam die Condensationswärme ist, das sehen wir a
unserer Atmosphäre. Ein trockener, vertical aufsteigend
Luftstrom kühlt sich für je 100 *m* fast um 1° C. ab,[1] e
gesättigt feuchter, bei anfänglichem Druck von 760 *mm* ur
anfänglicher Temperatur von 15° C. aufsteigender Luftstro
nur mehr um 0°49 C. für 100 *m*, also schon fast nur mel
um die Hälfte; bei anfänglicher Temperatur von 30° C. küh
er sich für je 100 *m* nur mehr um 0°38 C. ab. Die adiab
tische Abkühlung wird also in den Protuberanzen stark ve
zögert und kann daher an der Oberfläche der Photosphäı
keine beträchtlichen Abkühlungen erzeugen. Steigt also e
Strom aus der Photosphäre auf, so wird er infolge sein
Abkühlung das Condensationsniveau des photosphärische
Dunstmeeres erhöhen. Die Fleckenmassen liegen unter de
Oberfläche der Photosphäre, dies erklärt ein aufsteigend
Strom nicht; die anormale Hitze über den Fleckenmassen kan

[1] Hann, Met. Zeitschr., Bd. IX, S. 326—328, 1874.

er auch nicht erklären, die, wie wir früher gesehen haben, gerade über dem Kern des Fleckens herrscht. Ausserdem spricht schon der Umstand gegen einen Aufstrom im Flecken, dass die Protuberanzen als aufsteigende Ströme, die mit den Flecken bezüglich ihres Aussehens gar keine Ähnlichkeit und bezüglich ihrer heliographischen Vertheilung wesentliche Verschiedenheiten zeigen, dieselbe Ursache wie die Flecken hätten.

Auch ein Wirbel kann in seinem Körper Abkühlung hervorrufen. Es müsste also in einem Flecken heftige Wirbelbewegung herrschen, wenn wir die Fleckenabkühlung durch eine derartige Bewegung erklären wollen. Wenn überhaupt durch directe Beobachtung eine Wirbelbewegung merkbar sein soll, so könnte sie sich nur an der Structur des Hofes zeigen; nun haben aber Secchi's[1] Untersuchungen dargethan, dass nur 2—3% aller Fleckenhöfe eine solche Bewegung zeigen. Faye[2] sieht sich daher zu folgender Erklärung gezwungen: »Le tourbillon pénètre verticalement à travers les couches inférieures de la photosphère en déterminant tout autour de lui un abaissement de températur considérable. Dès lors, les filets ascendants de vapeurs, qui forment la photosphère par la condensation d'une foule de petits nuages lumineux, forment ces nuages à une élévation moindre tout autour de la tache et y produisent ainsi des grains de lumière légèrement étirés dans le sens des génératrices de cette surface conique refroidie. La masse gazeuse froide à travers laquelle nous contemplons la pénombre en affaiblit considérablement l'éclat; celle-ci paraît grisâtre par rapport aux régions ambiantes de l'éclatante photosphère.«

»Ainsi la pénombre se trouve à un niveau inférieur et enveloppe le cône du tourbillon tout en restant à distance. Elle ne participe donc pas, en général, à son mouvement de rotation.«

Faye fasst also den Hof gleichsam als Projection des nach oben sich erweiternden Wirbeltrichters auf die Photosphäre auf. Wollen wir nachsehen, was die Spectralbeobachtungen zur Wirbelbewegung sagen. Es findet Dunér[3]: »...il est difficile

[1] Secchi, »Le soleil«, vol. I, p. 87—90, 1875.
[2] Faye, C. R., vol. CXV, p. 986, 1892.
[3] Dunér, Nov. acta reg. soc. Ups., vol. XIV, p. 12—13, 1891.

d'imaginer une autre forme des taches que celle d'une cavit remplie par des gaz métalliques soit tourbillonants comme l veut M. Faye, soit en repos comme le croyait Secchi, bien qu l'immobilité des raies qui appartiennent au spectre des tache proprement dit, constaté par M. Young et moi, semble plus e accord avec la théorie de Secchi.« Oder betrachten w die neuen sorgfältigen Beobachtungen Hale's:[1] »Distortion of the bright H and K lines in spots are extremely rare. Diese Linien gehören den oberen Schichten an, wo gerad heftige Wirbelbewegung herrschen soll. Die Hitze, die hie herrscht, ist wieder nicht erklärlich, und es lässt sich gegen di Wirbeltheorie wieder derselbe Einwand wie gegen die Theori der aufsteigenden Ströme machen; dass gerade in den Pro tuberanzen die heftigsten Wirbelbewegungen herrschen, läss die wohlberechtigte Vermuthung zu, dass die Flecken nicht di selbe Entstehungsursache haben. Ein Fleck, besonders sein Ker gewährt das Bild grosser Ruhe; erst in seiner Umgebung a äusseren Rande des Hofes finden die heftigsten Störungen stat

Keine der vorhergehenden unmittelbaren Ursachen zu Erklärung der Fleckenabkühlung, weder Punkt 1), noch Punkt 2 leisten den Beobachtungen Genüge; es bleibt daher zur Er klärung nur Punkt 3) übrig: vermehrte Strahlung. Wi sich zeigen wird, löst sich durch diese Erklärung jeder Wider spruch, und die Beobachtungsthatsachen stehen mit ihr i vollster Übereinstimmung.

Kirchhoff und vor allen Zöllner waren die ersten, welch die mächtige Wirkung der Strahlung in den Weltraum kla erkannt und sie als Erzeugerin der Dunkelheit der Flecke betrachtet haben. Zöllner geht von dem für unsere Atmosphär jedenfalls giltigen Satze aus, dass die stärksten Temperatur depressionen durch die nächtliche Ausstrahlung erzeug werden, und stellt sich die Entstehung eines Flecks folgender massen vor:[2]

»Die Beschaffenheit dieser (Sonnen-) Atmosphäre muss di Intensität der Wärmeausstrahlung der von ihr eingehüllte

[1] Hale, Astronomy and Astrophysics, Nr. 109, 1892.

[2] Zöllner, Wiss. Abh., Bd. IV., S. 70, 1870.

Sonnenoberfläche in ähnlicher Weise beeinflussen, wie die Beschaffenheit der irdischen Atmosphäre die Wärmeausstrahlung der erwärmten Erdoberfläche beeinflusst. Ist nämlich die Atmosphäre unserer Erde ruhig und wolkenfrei, so ist die durch nächtliche Ausstrahlung erzeugte Temperaturerniedrigung am stärksten und als Resultate dieser Ausstrahlung bilden sich je nach der Temperatur Thau oder Reif.«

»In analoger Weise muss die Temperaturerniedrigung der glühendflüssigen Sonnenoberfläche durch Ausstrahlung an denjenigen Stellen am bedeutendsten sein, wo die darüber befindliche Atmosphäre möglichst ruhig und klar ist. An solchen Stellen wird sich die eingetretene Temperaturerniedrigung bei hinreichender Grösse auch durch eine Verminderung der Leuchtkraft bemerkbar machen und hiedurch einem entfernten Beobachter die Erscheinung eines dunklen Fleckes darbieten müssen.«

Dies muss auch die richtige Erklärung sein, nur setzen wir statt »der glühendflüssigen Sonnenoberfläche« die glühendflüssigen Theilchen der Photosphäre. Worin die Ursache für die Klarheit gerade an einer Stelle liegt, hat Zöllner nicht ausgesprochen. Er hält die äquatorialen und polaren Regionen für Gegenden beständiger Trübungen, die durch eine unserer Erdatmosphäre analoge Circulation hervorgebracht würden, so dass die Flecken auf mittlere Breiten beschränkt bleiben.

Die Strahlung geht von den Condensationsproducten der Photosphäre aus; sind nun durch die darüberlagernde Atmosphäre Bedingungen zu örtlich vermehrter Ausstrahlung gegeben, so werden fast nur die Condensationsproducte davon betroffen werden. Die Beobachtungen ergeben eine beträchtliche Absorption der Atmosphäre, so dass sie einen starken Schutz gegen die Ausstrahlung der tieferen Schichten bildet. Wir haben früher erwähnt, dass der grösste Theil der Photosphärenstrahlung aus den tieferen, heisseren Schichten der Condensationsproducte hervordringt, so dass den grössten Theil der Absorption die oberen dunstähnlichen, photosphärischen Schichten ausüben. Die Strahlung der tieferen Schichten der Photosphäre wird also besonders begünstigt werden, wenn der Dunstgehalt, die Menge der oberen Conden-

sationsproducte, verringert wird; dies geschieht, wenn die Condensationsproducte in Dampfform übergehen, und dies geschieht wieder, wenn hier in den obersten Schichten der Photosphäre anormal hohe Temperatur herrscht; anormale Hitze an der Oberfläche der Photosphäre ist also die Ursache der vermehrten Ausstrahlung der tieferen Schichten. Sie löst die Condensationsproducte auf, erzeugt hiemit grosse Klarheit, die sich als eine Einsenkung in der Photosphäre kundgeben wird. Die Beobachtungen ergeben in der That 1. Einsenkung, 2. anormale Hitze über den Fleckenmassen. So sind wir zu dem Satze berechtigt:

Die Sonnenflecken sind ein Strahlungsphänomen.

Hiemit sind also die Sonnenflecken auf ihre unmittelbare Ursache zurückgeführt. Als nächst mittelbare Ursache hat sich grosse Hitze an der Oberfläche der Photosphäre ergeben. Dies fordert uns auf, weiterzugehen und den Grund zu dieser Ursache zu suchen.

Über der abgekühlten Schicht der Fleckenmassen liegt eine Schicht heisser und zwar anormal hoher Temperatur. Woher soll diese stammen? Von unten auf keinen Fall; es könnten also vielleicht seitliche, in horizontaler Richtung streichende Winde von hoher Temperatur, die ihren Ursprung aus heisseren Regionen der Sonne, z. B. den Fackeln, haben, die Condensationsproducte auflösen und hiemit Ursache zu einem Flecken geben; auch dies ist keine haltbare Annahme. Die Beobachtungen ergeben grosse Ruhe in den höheren heissen Schichten, die vertiefte Lage der Flecken wäre schwer erklärlich, die Beobachtungen Langley's haben ergeben, dass es über dem Kern des Fleckens heisser ist, als in der Umgebung des Kernes, über dem Hof. Alles dies lässt sich nur durch einen über dem Flecken absteigenden Strom erklären. Dieser ist, wie wir gesehen haben, eine ergiebige Wärmequelle, indem er, wenn er von Höhen, die mehr als 1″ betragen, herabkommt, eine Erwärmung von mindestens 5000° erzeugt. Es erübrigt nur noch zu zeigen, wesshalb der absteigende Strom über den Fleckenmassen aufhört. Ein mechanisches Hinderniss bilden die Fleckenmassen jedenfalls nicht. Es ist aber eine andere Kraft vorhanden, welche jede absteigende Bewegung

schliesslich vernichtet, es ist der durch die Erwärmung wachgerufene Auftrieb. Der Auftrieb wird aber Ursache zu einer bedeutenden Drucksteigerung sein. Der Strom sinkt herab, der Auftrieb wirkt aber beständig entgegen, so dass die Fleckenmassen eine um den Auftrieb des absteigenden Stromes vermehrte Drucksteigerung erleiden müssen. Wie gross die Wirkung des Auftriebes sein kann, soll eine mathematische Ableitung lehren.

Wir schneiden aus der ruhenden Sonnenatmosphäre einen verticalen Kreiscylinder von der Höhe H, der Basis 1 und dem Gewichte G heraus, dann einen gleichen, wenn die absteigende Bewegung in der Höhe H beginnt und bis zur Basis reicht; dieser Cylinder wird infolge der durch die Zunahme des Druckes bewirkten Erwärmung das geringere Gewicht G' besitzen; der Auftrieb Δp, den er erleidet, ist dann durch die Gleichung

$$\Delta p = G - G'$$

gegeben. Wir betrachten das Niveau in der Höhe H als Ausgangsniveau mit dem Drucke p'_0, der Temperatur T'_0. Ist ρ_1 die Dichte der ungestörten Sonnenatmosphäre im Abstande h vom Ausgangsniveau, so ist G durch folgendes Integral gegeben:

$$G = \int_0^H \frac{g'}{g} \rho_1 dh.$$

Ist p der Druck, T_1 die Temperatur im Abstande h, so ist $\rho_1 = \frac{p}{RT_1}$; es herrsche das Temperaturgesetz $T_1 = T'_0 + \Theta h$, dann gilt, indem man $\frac{R}{\gamma} = R'$ abkürzend setzt, das Druckgesetz, das aus der Integration der Gleichung 1) hervorgeht:

$$p = p'_0 \left(1 + \frac{\Theta}{T'_0} h\right)^{\frac{1}{R'\Theta}}.$$

Daraus folgt

$$\rho_1 = \frac{p'_0}{RT'_0} \left(1 + \frac{\Theta}{T'_0} h\right)^{\frac{1}{R'\Theta} - 1}.$$

Mit diesem Werthe von ρ_1 in das obige Integral eingegangen, ergibt die Integration

$$G = p_0'\left[\left(1+\frac{\Theta}{T_0'}H\right)^{\frac{1}{R'\Theta}}-1\right].$$

Auf ähnliche Weise findet sich G'. ρ_2 sei die Dichte im absteigenden Strome im Abstande h vom Ausgangsniveau, dann ist wieder

$$G' = \int_0^H \frac{g'}{g}\rho_2 dh.$$

Im Abstande h entstehe durch adiabatische Compression die Temperatur T_2, die sich nach dem Poisson'schen Gesetze $\frac{T_2}{T_0'} = \left(\frac{p}{p_0'}\right)^{\frac{k-1}{k}}$ berechnen lässt. Setzt man zur Abkürzung $1+\frac{\Theta}{T_0'}H = E$, so ergibt sich mit Benützung des Druckgesetzes für T_2 folgender Ausdruck:

$$T_2 = T_0'E^{\frac{1}{R'\Theta}\frac{k-1}{k}}.$$

Nun besteht wieder die Relation $\rho_2 = \frac{p}{RT_2}$, so dass nach den Beziehungen für T_2 und p

$$\rho_2 = \frac{p_0'}{RT_0'}E^{\frac{1}{R'\Theta k}}$$

wird. Setzt man diesen Werth von ρ_2 in das Integral für G' ein, so erhält man

$$G' = p_0'\frac{k}{1+R'\Theta k}(E^{\frac{1+R'\Theta k}{R'\Theta k}}-1).$$

Der Auftrieb Δp ist also

$$\Delta p = p_0'\left[E^{\frac{1}{R'\Theta}}-1-\frac{k}{1+R'\Theta k}(E^{\frac{1+R'\Theta k}{R'\Theta k}}-1)\right].$$

Führen wir den Druck p_0 und die Temperatur T_0 an der Basis des Cylinders (an der Oberfläche der Photosphäre) ein, so erhalten wir nach den Beziehungen

$$p_0 = p'_0 E^{\frac{1}{R'\Theta}}$$

und

$$T_0 = T'_0 + \Theta H$$

schliesslich für den Auftrieb

$$\Delta p = p_0 \left\{ 1 + \left(\frac{k}{1+R'\Theta k} - 1 \right) \left(1 - \frac{\Theta}{T_0} H \right)^{\frac{1}{R'\Theta}} - \right.$$
$$\left. - \frac{k}{1+R'\Theta k} \left(1 - \frac{\Theta}{T_0} H \right)^{\frac{1}{R'\Theta}\left(1 - \frac{R'\Theta k}{k}\right)} \right\}.$$

Um für das Verhältniss $\frac{\Delta p}{p_0}$ ein Minimum zu erhalten, setzen wir in der Formel $\varkappa = 1 \cdot 413$, $R = 422 \cdot 61$ (Wasserstoff), $\gamma = 27 \cdot 62$, $\Theta = \frac{\theta}{2}$ und $T_0 = 100\,000°$; dann ergeben sich für dieses Verhältniss mit Berücksichtigung verschiedener Höhen (in Secunden) folgende Werthe:

H	1″	4″	10″
$\frac{\Delta p}{p_0}$	0·08	0·63	0·996

Ein Strom, der also aus einer Höhe von 4″ über der Photosphäre sich auf diese herabsenkt, würde hier Druckschwankungen erzeugen, die mehr als die Hälfte des ganzen unter normalen Verhältnissen bestehenden Druckes betragen würden. Eine derartige Annahme erscheint kaum statthaft. Sei die Oberflächentemperatur 50 000°, so würde unter der Annahme $\Theta = \frac{\theta}{2}$ ungefähr in der Tiefe von 7″ die Temperatur 100 000° betragen. In dieses Niveau verlegen wir nun die Basis des Cylinders; dann folgt aus den obigen Betrachtungen, dass ein absteigender Strom, der noch über der Photosphäre entsteht, kaum in diese Tiefe gelangen kann; allerdings wird dem absteigenden Strome unterhalb des Photosphärenniveaus

Wärme entzogen, indem er die Condensationsproducte in Dampf überführen muss, wodurch seine Erhitzung verzögert, sein Auftrieb verringert werden muss. Wenn wir aber voraussetzen, dass die absteigende Bewegung schon in einer Höhe von über 1″ über der Photosphäre beginnt, und dies können wir, wie wir früher gefolgert, als höchst wahrscheinlich bezeichnen, und, wenn wir wieder Temperaturen der Photosphärenoberfläche von über 100000° ausschliessen, so erscheinen Tiefenparallaxen von über 7″ kaum annehmbar, ein Ergebniss, zu dem Spörer auf directem Weg gekommen ist; er hält schon Tiefen von 2″ für zu gross. Es treten also über den Fleckenmassen infolge des Auftriebes, den die herabsinkenden Massen erleiden, grosse Stauungen auf, die die Fleckenmassen von dem heissen Niederstrome unberührt lassen. Die Folge davon wird sein, dass die Flecken Gebiete höheren Druckes sein werden; dies wird wieder Winde zur Folge haben, die vom Flecken weggerichtet sind; es ist thatsächlich Spörer gelungen, diese Erscheinung zu beobachten.[1] Die Protuberanzen, die in der Umgebung der Flecken auftreten, zeigen von den Flecken abgewandte Richtungen, sie divergiren. Spörer schliesst desshalb auf einen über den Flecken vertical abwärts gerichteten Strom. Spörer glaubt, dass die dynamische Wirkung des Stromes die Protuberanzen gleichsam auseinander bläst; die absteigende Bewegung scheint, wie die Spectralbeobachtungen zeigen, jedenfalls keine so grosse Geschwindigkeit zu besitzen, dass eine derartige dynamische Wirkung eintreten würde. Dass die Winde in der Umgebung der Flecken divergiren, ist, wie ich glaube, nur den Druckdifferenzen zuzuschreiben, die allerdings ihre letzte Ursache in der dynamischen Wirkung haben.

Durch die Eigenschaft der Flecken, dass sie Gebiete hoher Druckes sind, erscheinen sie erst als vollständige Analoga zu den Gebieten hohen Druckes, wie sie im Winterhalbjahre über Europa lagern. Die Untersuchungen Hann's ergeben Folgendes.

Der Luftkörper über solchen Gebieten ist in herabsinkender Bewegung; infolge dessen herrscht in ihm grosse Lufttrockenheit und anormal hohe Temperatur, geradeso

[1] Spörer, Publ. d. Astr. Ges., XIII, S. 158, 1874.

wie es beim Föhn der Fall ist. Der Luftkörper ist von ausnehmender Klarheit und grosser Heiterkeit. Die absteigende Bewegung muss schliesslich aufhören und in eine ebenso langsame horizontale übergehen; in diesem Theile ihrer Bahn erkaltet die Luft durch Wärmestrahlung, welche durch die gleichzeitige Heiterkeit und Trockenheit der höheren Luftschichten ausserordentlich begünstigt wird. Infolge dieser starken Erkaltung entstehen dann jene dichten kalten Bodennebel, welche zu solchen Zeiten die Niederungen erfüllen. Die obere warme Luftschichte schwimmt auf dieser kalten Unterschichte, ohne in dieselbe einzudringen. Treten locale Strömungen auf, so können sich die auffallendsten Temperaturschwankungen zeigen. Die Kälte der unteren Schichten hat mit dem dynamischen Vorgang im Luftkörper nichts zu thun, sie ist nur eine secundäre Erscheinung. Dabei ist allerdings anzunehmen, dass die Abkühlung der tieferen Schichten den einmal eingeleiteten Zustand der verticalen Luftcirculation in seiner Stabilität unterstützt, indem sie die Abfuhr der Luftmassen an der Erdoberfläche wesentlich befördert.[1]

Die Analogie mit den Erscheinungen, die die Flecken zeigen, springt in die Augen. Wir haben indirect auf das Vorhandensein absteigender Ströme über den Flecken geschlossen, indem die Beobachtungen eine specifische Wärmequelle unmittelbar über dem Fleck ergeben, ferner, indem ein absteigender Strom die einzige Ursache vermehrter Ausstrahlung bilden kann; von letzterer haben wir gezeigt, dass sie wieder die einzige unmittelbare Ursache zur Fleckenabkühlung ist.

Hiemit ist die Entstehung eines Fleckens auf eine über der Photosphäre herabsinkende Bewegung zurückgeführt.

Auch diese Folgerung, dass die erste Ursache ein absteigender Strom ist, wurde durch zahlreiche Fälle direct beobachtet. Spörer[2] fand öfters »Fälle in Bezug auf Gruppen, wobei die atmosphärischen (vertical ab-

[1] Hann, Met. Zeitschr., Bd. XI, S. 135, 1876; Denkschr. Wien. Akad., Bd. LVII, S. 7—8, 1890.

[2] Spörer, Publ. d. astrophys. Obs. Potsdam, Bd. I, Stück 1, S. 79, 1878.

wärts gerichteten) Strömungen nicht bloss zur Erhaltung der Flecke, sondern auch zur Bildung derselben wesentlich beitragen mussten«.

Die Entstehung eines Sonnenflecks geht also auf folgende Weise vor sich:

Durch dynamische Ursachen, die in der Circulation der Sonnenatmosphäre etwa in aufsteigenden Strömen begründet sind, hervorgerufen, bildet sich über der Photosphäre eine herabsinkende Bewegung; infolge des mit der Tiefe zunehmenden Druckes werden sich die herabsinkenden Massen erhitzen und mit hoher Temperatur an der Oberfläche der Photosphäre anlangen: ist nun die dynamische Ursache noch genügend kräftig, so wird sich die Bewegung noch in die Photosphäre hinein fortsetzen und infolge der grossen Hitze die hier lagernden Condensationsproducte auflösen. Durch die grosse Erhitzung der sinkenden Massen wird ein Auftrieb derselben wachgerufen, der der dynamischen Wirkung entgegentritt. Die Folge davon wird sein, dass die vertical abwärts gerichtete Bewegung schliesslich aufhört und die oben nachdrängenden Massen gezwungen sind, ihren Weg seitwärts in horizontalen Bahnen zu nehmen. Es schwebt also gleichsam ein anormal heisser Gaskörper unmittelbar an der Oberfläche der Photosphäre, der den hier lagernden, äusserst feinen, stark absorbirenden photosphärischen Dunst auflöst, damit Klarheit erzeugt, dadurch die Strahlung der unteren Schichten wesentlich befördert und die Ursache zu einem Flecken gibt.

Wie man sich nach dieser Fleckenhypothese das Entstehen und Verschwinden der Flecken mit allen Einzelheiten vorstellen soll, dies gibt der Phantasie einen weiten Spielraum. Jedenfalls lässt der ganze Bau eines Fleckenkörpers mit den dicht aneinander grenzenden Schichten von grosser Temperaturdifferenz plötzlich eintretende Veränderungen zu, die mit den heftigsten Umwälzungen verbunden sind. Die abgekühlten Fleckenmassen sind eng an den absteigenden Strom gebunden wie der Schatten an den schattenwerfenden Körper. Die alten Fleckenmassen verschwinden mit dem horizontalen Fortrücken des absteigenden Stromes, um sofort neuen Platz zu machen. Die Fleckenmassen bewegen sich also nicht, sondern nur der sie erzeugende Strom.

Ich habe mir bloss vorgenommen, ganz allgemein die Abkühlung der Fleckenmassen auf die wahre Ursache zurückzuführen; es wird nun noch nothwendig sein, vor allem die äusserlichen Einzelheiten, die die Flecke darbieten, zu erklären, den Hof, die Gruppen u. s. w. Dann wird aber noch die Young'sche Forderung[1] zu erfüllen sein:

»Selbstverständlich muss jede Sonnenfleckentheorie als unvollkommen angesehen werden, wenn sie nicht die Vertheilung und das periodische Auftreten der Flecke ebenso wie die Erscheinungen erklärt, welche sie für teleskopische und spectroskopische Beobachtung bieten.«

Daran muss sich dann die Erklärung der eigenthümlichen Rotation der Sonnenatmosphäre anschliessen.[2]

---

[1] Young, Die Sonne, S. 174, 1883.

[2] Einen Versuch zur Erklärung aller dieser Erscheinungen habe ich Astr. Nachr., Bd. CXXXII, S. 17, 1893 gewagt.



Über die Photographie der Lichtstrahlen kleinster Wellenlängen

von

Victor Schumann in Leipzig.

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. April 1893.)

I. Theil.

(Mit 4 Textfiguren.)

Die Erweiterung des ultravioletten Spectralgebietes steht mit der Erfindung der Photographie und mit der Entdeckung der Fluorescenz in innigem Zusammenhang. Den Anfang damit machte die Photographie, der grössere Erfolg blieb der Fluorescenz vorbehalten. Das Hauptgebiet des ultravioletten Lichtes wurde mit Hilfe der Fluorescenz erschlossen; bei seiner Erforschung hat jedoch die Photographie für ihre Überlegenheit ein glänzendes Zeugniss abgelegt. Die Beobachtungsmethode der Fluorescenz hat seitdem allmählich und in dem Masse an Boden verloren, wie sich die Leistung der lichtempfindlichen Platte auf ultraviolettem Gebiet gesteigert hat.

Die ersten belangreichen Beobachtungen auf ultraviolettem Gebiet unternahm Edmond Becquerel (Bibliothèque universelle de Genève, nouvelle série, t. XXXIX, p. 341—367 [1842]), zur Zeit, als er die chemische Wirkung der Sonnenstrahlen auf Daguerre-Platten studirte. Die Sonnenspectra Becquerels entstanden aber unter dem hemmenden Einfluss der Absorption des Glases und erstrecken sich daher nur bis zur Fraunhoferlinie P.

Stokes, der die grössere Lichtdurchlässigkeit des Quarzes erkannte, (Phil. Transact., Vol. CXLII, p. 463, p. 559 [1852]; Vol. CLII, p. 599—619 [1862]) vermochte mit Prismen und Linsen aus Quarz das Ultraviolett des Sonnenspectrums auf eine Strecke zu verfolgen, die, von der Fraunhoferlinie H aus

gemessen, zweimal so lang als das gesammte sichtbare Spectrum war. Noch überraschender war sein Erfolg bei elektrischem Licht. Das Ultraviolett seiner Funkenspectra erreichte die sechs- bis achtfache Länge des sichtbaren Spectrums. Die brechbarsten Strahlen von allen Stoffen gab ihm das Aluminium, dessen Spectrum die Region der kleinsten wahrnehmbaren Wellenlängen mit einem lichtstarken Linienpaare, von den Wellenlängen 186·0 μμ und 185·2 μμ begrenzte. Noch stärker abgelenkte Strahlen scheinen jedoch Stokes und auch seine Nachfolger auf diesem Gebiete nie wahrgenommen zu haben. An demselben Tage (19. Juni 1862), wo Stokes seine Abhandlung über den vorgenannten Gegenstand der Royal Society in London überreichte, legte auch W. A. Miller seine nicht minder bedeutende Arbeit: »On the Photographic Transparency of various Bodies etc.« (Phil. Transact. Vol. CLII, p. 861—887 [1862]) derselben Gesellschaft vor.

Beide Abhandlungen verfolgen dasselbe Ziel: die Ermittlung der ultravioletten Spectra elektrischen Ursprungs und das Verhalten dieser Spectra Stoffen aller drei Aggregatzustände gegenüber. Während aber Stokes seine Beobachtungen mit Hilfe der Fluorescenz anstellte, benutzte Miller die photochemische Wirkung der Strahlen, und nahm seine Spectra photographisch auf. Auffallenderweise erwies sich die Methode der Fluorescenz dem photographischen Verfahren in einem Punkte weit überlegen: Stokes erreichte die Wellenlänge 185·2 μμ, Miller kam über die Wellenlänge 202·4 μμ nicht hinaus. Miller hat in der Folge, durch Stokes angeregt, wiederholt die Aufnahme der übrigen Strahlen versucht, aber stets ohne den gewünschten Erfolg (Phil. Transact. Vol. CLII, p. 882: 52 Aluminium). Das Fluorescenzspectrum behielt hier und auch in der Folge einen Vorsprung, der sich auf das beträchtliche Mass von 17·2 μμ belief.

Dieser photographische Misserfolg im äussersten Ultraviolett erregt Bedenken, wenn man sieht, dass L. Soret, Edouard Sarasin u. A. bei ihren umfangreichen Arbeiten diesen Theil des Spectrums nur mit Hilfe der Fluorescenz beobachteten. Hiernach könnte es scheinen, als sei die Photographie zur Beobachtung des brechbarsten Lichtes nicht

geeignet. Solche Annahme würde jedoch eine vollständige Widerlegung finden durch die Thatsache, dass sich Cornu zur Bestimmung der Wellenlängen der brechbarsten Lichtstrahlen des Mg, Cd, Zn und Al der Photographie bediente (Archives des Sc. phys. et nat., III. Periode, t. II, p. 119—126 [1879]). Cornu, durch die Lichtschwäche seines Gitters auf die Photographie angewiesen, entschied sich hiebei für das nasse Verfahren, gebrauchte jedoch, zum Unterschied von Miller, die Vorsicht, die sensibilisirte Collodplatte vor ihrer Belichtung in destillirtem Wasser zu baden. Auf diese Weise beseitigte er das wesentlichste photographische Hinderniss, dem die brechbarsten Strahlen bei ungebadeter Platte begegnen, und sicherte sich dadurch von vornherein einen besseren photographischen Erfolg.

Noch ein Unterschied, der zwischen den Versuchsanordnungen Miller's und Cornu's besteht, verdient Beachtung. Die Apparate beider Forscher unterschieden sich wesentlich in ihren Brennweiten. Die Brennweite des Miller'schen Apparates war die bei weitem grössere von beiden. Im Sinne dieses Brennweitenverhältnisses dürfte sich auch die Absorption der Strahlen in der Luft bei der Aufnahme in verschiedenem Masse geltend gemacht haben. Der Versuchsanordnung Cornu's gebührt demnach auch in dieser Hinsicht der Vorzug.

Der photographische Erfolg Cornu's bei der Aufnahme der kleinsten Wellenlängen schien der Erforschung des bis dahin vernachlässigten Ultravioletten eine günstige Perspective zu eröffnen. Leider hat die Folgezeit solcher Erwartung nicht zu entsprechen vermocht. Experimentelle Hindernisse unbekannter Art haben das Gebiet der brechbarsten Strahlen des Aluminiums (198·8—185·2 $\mu\mu$) der photographischen Spectroskopie wieder vollständig entfremdet. Die Mehrzahl aller Untersuchungen erstreckt sich auch gegenwärtig noch bis in die Gegend der brechbarsten Linien des Cadmiums (226·55 — 214·41 $\mu\mu$), und nur ab und zu wird noch der Bereich der brechbarsten Linien des Zinks (214·41—198·8 $\mu\mu$) mit in Betracht gezogen.

Diese Erscheinung ist um so auffallender, als der Spectroskopie seit der genannten Untersuchung Cornu's in der Brom-

silbergelatinetrockenplatte ein Hilfsmittel erwachsen ist, da
die Leistungen der früher angewandten Collodiumplatte i
allen Beziehungen in den Schatten stellt.

Die Gelatineplatte hat der spectralen Forschung seit eine
Reihe von Jahren unschätzbare Dienste geleistet. Hat sich doc
überhaupt erst mit Einführung der Gelatineplatte die photo
graphische Beobachtung in der Spectroskopie erfolgreich Bah
gebrochen und mit ihr zugleich die Überzeugung befestigt
dass das Studium des sichtbaren Spectrums allein zur Er
kenntniss der spectralen Vorgänge nicht ausreicht, sonder
dass dazu ebenso gründliche Kenntniss der unsichtbare
Spectralbezirke, insonderheit des Ultravioletten, nöthig se
Dieser Nothwendigkeit findet man auch, wo es nur imme
möglich war, bei neuern Beobachtungen Rechnung getrage

Bei der Fruchtbarkeit der Bestrebungen auf ultravioletten
Gebiete, wie sie die letztverflossenen Jahre gezeitigt habe
schien es mir wünschenswerth und im hohen Grade lohnend
auch das übrige Ultraviolett bis zur Wellenlänge $185 \cdot 2\,\mu\mu$ mi
Hilfe eines zweckentsprechenderen Verfahrens, als es die seit
her angewandten waren, der photographischen Beobachtun
zugänglich zu machen und zugleich auf Erweiterung diese
Beobachtungsgebietes im Sinne grösserer Ablenkung Bedach
zu nehmen.

Der Ausführung dieses Gedankens bin ich bereits vo
mehreren Jahren näher getreten. Meine Aufgabe zerfiel in zwe
Theile. Der erste galt der photographischen Aufnahme de
Spectralbezirkes zwischen den Wellenlängen $231 \cdot 35$ und $185 \cdot 2\,\mu\mu$
der andere der Erschliessung des unbekannten Gebietes jenseit
der Wellenlänge $185 \cdot 2\,\mu\mu$.

Der gegenwärtige Bericht behandelt den ersten The
dieser Arbeit und zugleich die Vorarbeiten zum zweiten Thei
während dessen Ergebnisse, sowie die Abbildungen der an
gewandten Apparate und der damit erlangten Spectra den Inha
eines in Kürze nachfolgenden zweiten Berichtes bilden werde

Ein jeder dieser Theile hat mich geraume Zeit beschäftig
und der zweite sieht auch heute noch seinem Abschluss
entgegen.

Wenn ich mit den bisher erlangten Ergebnissen schon jetzt, wo voraussichtlich noch Jahre bis zum Abschlusse meiner Arbeit vergehen werden, an die Öffentlichkeit trete, so geschieht es einmal auf Anregung einer Anzahl hervorragender Physiker, denen ich meine Hauptergebnisse im Original zu unterbreiten die Ehre hatte, und dann dem hieraus entsprossenen eigenen Wunsche zufolge, die gewonnenen Thatsachen frühzeitiger, als es ehedem meine Absicht war, zur Kenntniss weitester Kreise zu bringen.

Photographische Aufnahme des Spectralbezirkes zwischen den Wellenlängen 231·35 und 185·2 $\mu\mu$.

A. Mit gewöhnlichen ultraviolettdurchlässigen Apparaten.

Der photographische Spectralapparat mit besonderer Berücksichtigung seines optischen Theiles.

Die photographische Aufnahme dieses Spectralbezirkes verlangt einen Apparat von grosser Lichtdurchlässigkeit. Glas,[1] das die meisten ultravioletten Strahlen zurückhält, ist zu den Prismen und Linsen eines solchen Instrumentes ungeeignet. Nicht viel besser steht es mit dem Kalkspath.[2] Seine Brauchbarkeit für das Ultraviolett endet schon dort, wo das genannte Aufnahmegebiet erst beginnt. Die einzigen Medien, die hier in Betracht kommen, sind Quarz[3] und weisser Flussspath.[4] Flussspath in seiner weissen Varietät — alle anderen Arten des Flussspathes sind farbig und wenig ultraviolettdurchlässig — ist zwar durchlässiger als Quarz, allein seiner Seltenheit wegen

[1] G. G. Stokes, Phil. Transact. 1852, Bd. CXLII, Art. 202.

[2] L. Soret, Archives des Sc. phys. et nat., t. LXI, p. 334 (1878).

[3] L. Soret, ebendaselbst, p. 332.

G. G. Stokes, On the change of refrangibility of light: Phil. Transact. (1852) Art. 204.

[4] W. A. Miller, On the phot. Transp. of various Bodies; Phil. Transact. Vol. CLII. p. 865 (1862).

A. Cornu, Arch. des Sc. phys. et nat., III. Periode, t. II, p. 119.

und weil er häufig Krystallfehler[1] enthält, die die Klarheit de
Bildes gefährden, gelangte er bisher nur in vereinzelten Fälle
zur Anwendung.

Quarz gewährt der Photographie des Ultravioletten durch
schnittlich grössere Vortheile als jedes andere Medium. E
liefert Spectra von tadelloser Zeichnung, und seine Minde
durchlässigkeit, wovon soeben die Rede war, ist nach de
bisherigen Erfahrung nicht so belangreich, dass sie die photo
graphische Aufnahme bedenklich beeinträchtigen könnte.

Das Quarzprisma. Nicht jedes Quarzprisma ist zu
Spectralphotographie geeignet. Untauglich hierzu ist jede
dessen brechende Kante mit der optischen Axe parallel läuf
Der Grund hiervon liegt in der theilweisen Übereinande
lagerung der Spectra des ordentlichen und ausserordentliche
Strahles und in dem Umstande, dass der photographisch
Erfolg bei der Auslöschung des einen oder des anderen de
beiden Spectra, was mit einem Nicol'schen Prisma wohl durch
führbar ist, an der Undurchlässigkeit des Kalkspaths scheiter

Schon günstiger liegen die Verhältnisse bei einem Quarz
prisma, dessen brechende Kante derart rechtwinklig zu
optischen Axe geschnitten ist, dass letztere mit den brechende
Flächen gleiche Winkel bildet. Durchsetzen die Strahlen de
Quarz in Richtung seiner optischen Axe, so erfahren sie nich
mehr die gewöhnliche Doppelbrechung, aber sie unterliege
dann der Circularpolarisation und in so fühlbarem Masse, das
beispielsweise bei einem Prisma von 60° jede Linie de
Spectrums in zwei, zwar sehr nahe liegende, aber doch kla
aufgelöste Componenten gespaltet wird. Es leuchtet ein, das
ein solches Spectrumbild schon bei vereinzelt stehenden Linie
unsicher, bei zusammengedrängten Linien aber völlig unkla
ausfallen muss. Zwar lässt sich diese Spaltung der Linien ve
meiden, indem man durch ein in den austretenden Strahl einge
schaltetes Viertelwellenplättchen sammt Nicol ein Liniensyste
aufhebt; allein das Plättchen ist, weil es aus Glimmer[2] besteh

---

[1] H. Deslandres, Spectres des bandes ultraviolets des Métalloïd
avec une faible dispersion. Paris, 1888 (p. 32).

[2] W. A. Miller, Phil. Transact. Vol. CLII. p. 865 (1862).

so undurchlässig, dass es beinahe alle Strahlen jenseits der Wellenlänge 325 μμ absorbirt, und, ganz abgesehen von dem Hinderniss, das der Aufnahme durch die Undurchlässigkeit des Nicols erwächst, jeden photographischen Erfolg im Ultravioletten von vornherein unmöglich macht.

Das einzige Mittel, das Bild vor dem störenden Einfluss der linearen und circularen Polarisation ohne Beeinträchtigung der Helligkeit zu bewahren, besteht in der Anwendung eines Doppelprismas,[1] das sich aus einem links- und einem rechtsdrehenden Quarzprisma, beide von gleichgrossem brechenden Winkel (30°) zusammensetzt. Bei Anfertigung solcher Prismen ist darauf zu achten, dass die optischen Axen der Halbprismen auf deren gemeinschaftichen Berührungsfläche senkrecht stehen, mithin gleiche Richtung haben müssen. Zur Vermeidung von Lichtverlust können die Halbprismen mit Glycerin oder destillirtem Wasser zusammengeklebt werden. Nothwendig ist es aber nicht. Doppelprismen dieser Art geben einzeln oder auch mehrere zu einem Kreise vereinigt, tadellos gezeichnete Spectra.

Die Quarzlinse. Die Linsen zum Collimator und der Camera erhalten am besten planconvexe Form. Sie können von gleichgerichtetem oder entgegengesetztem Drehungsvermögen sein. Bedingung ist nur, dass ihre geometrische Axe mit der optischen Axe des Krystalles gleiche Richtung hat, oder dass sie, wie es der Optiker nennt, rechtwinklig zur Axe geschnitten sind. Eintheilige Quarzlinsen verdoppeln das Bild niemals. Darum bieten auch zweitheilige biconvexe Linsen, nach Art des erwähnten Doppelprismas aus links- und rechtsdrehenden planconvexen Quarzlinsen zusammengesetzt, der Spectralphotographie keine Vortheile.

Die Brennweite der Linsen sollte von gleicher Grösse sein und einen Meter nicht übersteigen. Macht man sie grösser, kann es leicht geschehen, dass die Apertur des Apparates zu klein ausfällt. Wenn sich auch Linsen von hinreichendem Durchmesser nicht allzuschwer beschaffen lassen, bleibt doch immer noch die Öffnung des Prismas übrig. Quarzprismen mit

[1] A. Cornu, Comptes rendus, 1885.

einigermassen grosser Öffnung gehören aber zu den Seltenheiten. Ungenügende Apertur führt gern zur Bildung von Beugungsfransen, die auf beiden Seiten der helleren Spectrumlinien auftreten und der Deutung des Spectrums leicht verhängnissvoll werden können.

Andererseits sollte man mit der Brennweite nicht zu weit wohl nicht unter $^3/_4$ *m* heruntergehen. Das Spectrum fällt sonst gar zu kurz aus. Vergrösserung der Dispersion durch Anwendung mehrerer Prismen, wodurch sich wohl Abhilfe schaffen liesse, ist nicht empfehlenswerth. Bei einer Verbindung mehrerer Doppelprismen erscheint das Spectrum immer nur auf verhältnissmässig kurzer Strecke klar definirt. Je grösser die Zahl der Prismen, desto kürzer die klargezeichnete Strecke. Die gleichzeitige Aufnahme umfangreicher Spectralbezirke sollte darum höchstens mit einigen, oder am besten nur mit einem Doppelprisma geschehen. Das gilt insonderheit für die Gesammtaufnahme des Ultravioletten.

Es ist wohl selbstverständlich, dass die Auswahl der Krystalle, woraus die Prismen und Linsen gefertigt werden mit aller Sorgfalt zu erfolgen hat. Verwachsungen, die in Quarzkrystallen nicht zu den Seltenheiten gehören, machen jeden Quarzkrystall zu genanntem Zweck untauglich.

Ebenso grosse Aufmerksamkeit verdient die Beschaffenheit der brechenden Flächen. Flächenkrümmungen, die wegen ihrer mässigen Grösse beispielsweise bei Glasprismen am Spectrum spurlos vorübergehen, können den Effect des Quarzprismas schon empfindlich beeinträchtigen.

Quarzprismen mit fehlerhaften Flächen geben immer ein unklares Linienbild. Einzeln angewandt weniger als bei Vereinigung mehrerer zu einem Prismenkreise. Ein derartiger Prismenkreis ist sogar im Stande das Spectrum bis zur vollständigen Unklarheit zu verwirren.[1]

[1] Vortreffliche Prismen und Linsen aus Quarz fertigt der Optiker Bernhard Halle in Steglitz bei Berlin. Als ein Beweis für die Vorzüglichkeit Halle'scher Arbeit kann die Thatsache gelten, dass ein mir von Herrn Halle gelieferter Prismenkreis von 9 Doppelprismen, wobei die Strahlen also 36 brechende Prismenflächen zu durchsetzen haben, auf einer Strecke von $5^1/_4$ *mm* alle 85 Linien gibt, die der Atlas des Sonnenspectrums des Herrn H. C. Vogel in Potsdam zwischen den Fraunhoferlinien H und K aufweist.

Auffallend ist die mässige Empfindlichkeit des Spectrums gegen gewisse Fehler der Linsen. Das gilt von der Centrirung und von der Richtung der optischen Axe des Krystalls.[1]

Dieser Umstand verdient Beachtung, und umsomehr, als das Spectrum gegen Prismenfehler aller Art beim Quarz sehr empfänglich ist.

Die Aufstellung des Prismas und der Linsen hat in derselben Weise zu erfolgen, wie bei anderen Spectralapparaten.

Das Spaltrohr des photographischen Spectralapparates ist von gewöhnlicher Art. Abweichend von bekannten Einrichtungen ist am Apparat nur der photographische Theil, und hievon auch nur die Cassettenbahn, worunter ich den zur Aufnahme der Cassette dienenden Theil der Camera verstehe.

Die Cassettenbahn besitzt eine weit grössere Drehbarkeit, als an der gewöhnlichen Camera, und zwar aus folgendem Grunde.

Quarzlinsen verlangen, weil ihre Brennweiten mit der Wellenlänge beträchtlich abnehmen, bei Aufnahmen des Spectrums häufig eine ganz ungewöhnliche Schiefstellung der photographischen Platte zur Axe der Cameralinse. Beträgt beispielsweise die Brennweite für die Natriumlinie D (589 $\mu\mu$) 1000, dann ist die Brennweite für die brechbarste Linie des Aluminiums, Nr. 32 (185 $\mu\mu$) nur noch 806·2.[2] Diese Schiefstellung ist nicht constant, sie ändert sich mit der Dispersion, auch mit dem Verhältniss der Brennweiten von Collimator und Camera. Ist die Brennweite beider gleichgross, der gewöhnliche Fall, dann variirt der Winkel zwischen Axe und Platte, gemessen auf der brechbareren Seite beider, von 22° bei einem einzelnen Prisma (60°) bis zu ungefähr 90° bei 12 Doppelprismen (zwei hintereinanderstehende Prismenkreise). Aber auch für denselben

[1] Ein Paar Quarzlinsen, die in beiden Beziehungen ganz ungewöhnliche Abweichungen verrathen, habe ich ohne Nachtheil anhaltend zur Auflösung dichter Liniengruppen benutzen können.

[2] Eduard Sarasin, Archives des Sc. phys. et nat., t. LXI, p. 109 (1878).

Prismenkörper ist der Winkel nicht constant. Hier ändert er sich mit der Wahl der Strahlen, wofür das Prisma ins Minimum der Ablenkung eingestellt ist, auch mit der Höhe der Anforderungen, die an die Auflösung einzelner Theile der Aufnahme gestellt werden. So variirt er unter diesen Umständen beim einzelnen Doppelprisma zwischen 28 und 22°. Dem vorgenannten Winkelumfang entsprechend, muss die Platte mit Cassette und Cassettenbahn um eine der beiden Mittellinien ihrer lichtempfindlichen Seite drehbar sein und eine derartige Lage haben, dass diese Mittellinie eine die optische Axe der Cameralinse schneidende Parallele zur brechenden Kante des Prismas bildet.

Der Lichtquell.

Der Zweck der Aufnahme verlangt einen Lichtquell, der reich an energischen Strahlen der kleinsten Wellenlängen ist. Dieser Bedingung entspricht allein das Licht elektrischer Entladungen. Es blieb mir sonach nur die Wahl zwischen Bogen- und Funkenlicht. Da der elektrische Funke den besseren Erfolg versprach, so sind auch meine sämmtlichen Aufnahmen mit Funkenlicht ausgeführt worden. Zu seiner Erzeugung kam ein Inductorium nach Ruhmkorff zur Anwendung, das für eine Maximalfunkenlänge von 25 *cm* eingerichtet ist. Den Primärstrom dazu lieferten 6 Groveelemente. In die Bahn des Secundärstromes war eine Leydner Flasche von 500 cm^2 Beleg ihrer Aussenfläche eingeschaltet. In einigen Fällen wurde noch eine Flasche, zuweilen auch zwei solcher hinzugenommen.

Für den Bezirk der Wellenlängen 198·8 $\mu\mu$ bis 185·2 $\mu\mu$ waren nach den Beobachtungen von Stokes[1] und Cornu[2] einzig und allein Aluminiumelektroden brauchbar, und nur für die Wellenlängen 230·0 $\mu\mu$ bis 198·0 $\mu\mu$, die ich nicht unberücksichtigt lassen durfte, kamen Elektroden aus Zink und Cadmium zur Anwendung. Zink und Cadmium verdienen hier, der

[1] Phil. Transact., Vol. CLII, p. 606, fig. 1 (1862).

[2] Archives des Sc. phys. et nat., III. Période, t. II, p. 125 (1879).

gleichmässigen Vertheilung und verhältnissmässig kräftigen Wirkung ihrer brechbarsten Strahlen halber, vor anderen Metallen den Vorzug.

Das photographische Verfahren.

Die Aufnahme geschah mit Gelatinetrockenplatten eigener Präparation. Handelsplatten sind zur Photographie der Spectra weniger geeignet. Wo es darauf ankommt, das optische Vermögen des photographischen Spectralapparates nach Möglichkeit zu unterstützen, wo die Schärfe des Bildes Haupterforderniss ist, auch wo es auf grosse Intensitätscontraste der Linienbilder (Photometrie) ankommt, da reicht die Handelsplatte nicht mehr aus. Sie arbeitet nicht intensiv genug, um der Spectroskopie nach Kräften der modernen Trockenplatte Hilfe leisten zu können.

Die Gelatineplatte, die ich mir selbst bereite, gibt ein intensives und feinkörniges Bild auf glasklarem Grunde. Die Emulsion dazu ist verhältnissmässig reich an Silberjodid; auf 100 Gewichtstheile Silberbromid enthält sie 4 bis 5 Gewichtstheile Silberjodid. Ihre Bereitung erfolgt ausschliesslich nach Eder's Methode mit Silberoxydammoniak,[1] wonach ich seit länger als einem Jahrzehnt arbeite.

Zum Hervorrufen der Platten benutzte ich den Soda-Pyrogallusentwickler, zum Fixiren unterschwefligsaures Natrium.

Die photographische Aufnahme.

Ehe ich zur Besprechung der photographischen Aufnahmen übergehe, sei bemerkt, dass ich mich schon früher eingehend mit der Photographie des Ultravioletten beschäftigt habe. Mein Augenmerk war jedoch damals in der Hauptsache auf die Ausbildung des graphischen Theiles der Aufnahmen gerichtet, wobei die brechbarsten Strahlen unberücksichtigt bleiben konnten. Nur hin und wieder habe ich, doch auch dann

---

[1] J. M. Eder, Ausf. Handb. d. Photographie, III. Theil, p. 208—211, 4. Auflage, Halle a. S., 1890.

nur vorübergehend, die brechbarsten Linien des Aluminiums zu photographiren versucht, aber dabei nie Erfolg gehabt.

Günstiger schon als beim Aluminium lagen die Verhältnisse bei den brechbarsten Linien des Zinkes, die den genannten Linien des Aluminiums in der Reihe der markantesten Strahlen des Ultravioletten vorangehen. Doch wenn ich hiebei auch nicht erfolglos arbeitete, so war doch das Bild, das ich erhielt, immer nur blass und ausdruckslos.

Die brechbarsten Linien des Cadmiums endlich, die noch weniger abgelenkt sind als die brechbarsten Zinklinien, erschienen regelmässig schon nach kurzer Belichtung. Ihrer Intensität nach blieben aber auch sie hinter den Nachbarlinien desselben Spectrums von kleinerer Wellenlänge merklich zurück.

Im Allgemeinen bildet die Wellenlänge der Cadmiumlinie Nr. 24 (226·55) die Grenze meiner früheren Aufnahmen des Ultravioletten.

Die genannten brechbarsten Linien des Cadmiums, Zinkes und Aluminiums sind von Mascart und Soret mit Zahlen bezeichnet worden, und allenthalben in der Spectroskopie, wo ihre Wellenlängen entbehrlich waren, hat diese Bezeichnung Anwendung gefunden. Ich werde mich darum ihrer in der Folge ebenfalls bedienen. Nachstehend das Verzeichniss dieser Linien nebst der Mascart-Soret'schen Bezeichnung, den betreffenden Wellenlängen, wie sie Cornu[1] gefunden hat und einer Zeichnung (Fig. 1), die ich meinen eigenen Aufnahmen entlehnt habe.

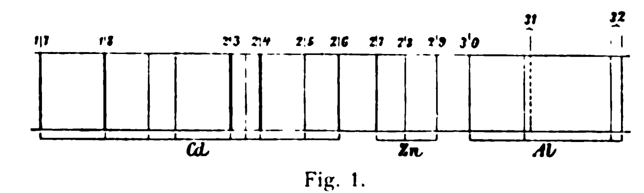


Fig. 1.

(Cd, Nr. 23, 231·35), (Nr. 24, 226·55), (Nr. 25, 219·45), (Nr. 26, 214·41), (Zn, Nr. 27, 209·88), (Nr. 28?, 206·10), (Nr. 29,

[1] Archives des Sc. phys. et nat., III. Période, t. II, p. 121—126 (1879).

202·43), (Al, Nr. 30, 198·81), (Nr. 31(?), 193·35), (Nr. 32(?), 185·22); Nr. 28, Nr. 31 und Nr. 32 sind Doppellinien.

Die Aufnahme des Cadmiumspectrums bildete den Anfang meiner Untersuchung.

Bei einer Spaltweite von 0·020 *mm* und einer Belichtungsdauer von 1 Minute gab der Flaschenfunken des Cadmiums sämmtliche Hauptlinien, die beiden brechbarsten davon, Nr. 25 und Nr. 26, jedoch, im Gegensatz zu den übrigen, auffallend blass. Wie zu erwarten war, verschwand dieser Intensitätsunterschied auch bei Verlängerung der Belichtungsdauer nicht eher, als bis sich an den intensiveren Linien Solarisation bemerkbar machte. Der Unterschied in der Intensität, der der normalen Belichtung regelmässig folgte, würde mein Bedenken nicht erregt haben, wenn mir nicht mehrere Cadmiumaufnahmen fremden Ursprunges — es sind dies drei Originalplatten, deren Besitz ich der Güte des Herrn W. N. Hartley in Dublin verdanke — die ebenfalls mit Quarzprisma und Quarzlinsen auf Bromsilbergelatine aufgenommen sind, zur Verfügung gestanden hätten.

Diese Aufnahmen zeigten den Intensitätsunterschied der genannten Linien bei weitem mässiger als meine Platten. Sie berechtigten demnach zu der Annahme, dass die Versuchsanordnung Hartley's die photographische Wirkung der Linien Nr. 25 und Nr. 26 in irgend einer Weise relativ unterstützt habe. Ich wurde hierin noch bestärkt durch andere drei Cadmiumaufnahmen desselben Spectroskopikers, die in guter photographischer Reproduction einer seiner Abhandlungen[1] beigegeben sind und die, im Gegensatz mit den vorher genannten Originalplatten, mit meinen Platten vollständig in Einklang stehen. Woher rührte nun der Unterschied zwischen den Aufnahmen Hartley's? Diese Frage war für die Fortsetzung meiner Arbeit von wesentlicher Bedeutung.

Hartley hat in den Plattengrund seiner vorgenannten zwei Negative mit Diamant die Jahreszahl 1880 eingeritzt, seine Abhandlung erschien im Jahre 1882, meine Untersuchung

---

[1] Scientific Transactions of the R. Dublin Society, Photographs of the Spark Spectra of Twenty-one Elementary Substances, Vol. I (Series II), p. 231–238 (1882).

begann im Jahre 1889. Über die Aufnahmeanordnung der erwähnten Platten Hartley's war mir nur bekannt, dass ein Quarzprismenapparat dabei zur Verwendung gekommen sei, über die Aufnahmeanordnung der anderen Spectra Hartley's gab die Abhandlung Aufschluss. Aus Gründen, deren Anführung hier zu weit führen würde, habe ich mich in der Folge bei Lösung der erwähnten Frage gleichwohl in beiden Fällen einzig und allein an die Aufnahmen gehalten. Und das war zulässig, weil sie einen, für vorliegenden Fall belangreichen, sinnfälligen Unterschied aufweisen: die Länge ihrer Spectra ist verschieden, sie beträgt gemessen zwischen den Cadmiumlinien Nr. 9 und Nr. 26, bei den Platten 82 *mm*, bei den Tafeln 157 *mm*. Da beide Spectra in der Auflösung ihrer dichtstehenden Linien keinen nennenswerthen Unterschied erkennen lassen, war die Annahme erlaubt, dass die Dispersion der Hartley'schen Spectralapparate dieselbe und nur die Brennweite der Linsen verschieden gewesen sei. In annähernd demselben Masse wie die Brennweiten mussten sich dann aber auch die Längen der Luftwege der Strahlen beider Apparate von einander unterschieden haben. Dass die Lichtdurchlässigkeit der Luft mit der Wellenlänge der Lichtstrahlen, und besonders auffallend im Ultravioletten abnimmt, hat bereits Cornu[1] nachgewiesen, aber freilich an Schichten von ungleich grösserer Dicke, als die der Hartley'schen Apparate war. Gleichwohl habe ich an dem Luftwiderstand, als der einzigen Ursache des genannten Intensitätsunterschiedes der beiden brechbarsten Linien des Cadmiums festhalten zu können geglaubt. Einmal, weil bereits die Aufnahmen Miller's darauf hindeuteten, dass schon eine Luftschicht von mässiger Dicke bei der Photographie des Ultravioletten zum unüberwindlichen Hinderniss werden könne, und dann, weil alle weiteren Versuche, die ich zur Ermittlung anderer Ursachen dieser Erscheinung anstellte, erfolglos verliefen. Eine Erhärtung dieser Annahme auf experimentellem Wege, deren Nothwendigkeit sich mit jeder neuen Aufnahme dringlicher gestaltete, musste der Beschaffung der erforderlichen Instrumente halber bis zum Abschluss der

[1] D'Almeida J. 10, p. 5—17 (1881).

sich hieran schliessenden Untersuchung der Spectra des Zinkes und des Aluminiums unterbleiben.

Das Zinkspectrum wirkte in seinem brechbarsten Theile noch schwächer als das Cadmiumspectrum. Beispielsweise war zum Erscheinen der brechbarsten Linie Nr. 29 eine Belichtung von 3 Minuten erforderlich. Ebenso wie die Wirksamkeit wies die Intensität einen weiteren Rückgang auf. Von allen Hauptlinien des Cadmiums und Zinkes trat keine so wenig hervor als die Zinklinie Nr. 29. Dass die Intensität auch mit der Wellenlänge abnahm, zeigte besser als jedes andere das combinirte Spectrum beider Metalle, wie es ein zwischen drei Elektroden überspringender Funken liefert.[1]

Noch besser als im Brechungsspectrum treten Intensitätscontraste benachbarter ultravioletter Linien im Beugungsspectrum zu Tage, weil hier die Ablenkung der Strahlen nicht progressiv mit der Wellenlänge, wie beim Prisma, sondern proportional dazu erfolgt, was zur Folge hat, dass die Linien nach dem brechbareren Ende hin immer mehr zusammengedrängt werden, während sie im Brechungsspectrum weiter auseinanderrücken. Aufnahmen, die ich mit einem Concavgitter ausführte, brachten auch hierbei die Abnahme der Intensität und Wirksamkeit der betreffenden Linien noch besser zum Ausdruck.

Nach Cornu's (C. R., t. 88, p. 1285—1290 [1879]) Annahme genügt zur Absorption der Strahlen von der Wellenlänge 211·84 $\mu\mu$ eine Luftschicht von 10 *m* Dicke.

Die Strahlen Nr. 27, 28, 29, deren Wellenlänge kleiner ist, müssten demnach von solcher Luftschicht in noch stärkerem Masse absorbirt werden. Ich benutzte diesen Umstand, um mir schon vor der Vollendung der genannten neuen Apparate einen sicherern Anhalt für das Mass der Absorption der brechbarsten Strahlen in der Luft zu verschaffen, als ihn die vorhergegangenen Beobachtungen gewährten. Ich führte zu diesem

---

[1] Bei Anwendung von drei Elektroden verbinde ich das Elektrodenpaar mit der Stromleitung, während die Einzelelektrode des anderen Metalles mit ihrem äussersten Ende mitten in die Funkenbahn eingeführt wird, wo sie sich in regelrechter Weise an der Entladung betheiligt. Nur wenige Metalle sind hierzu überhaupt und so gut geeignet wie Zink und Cadmium.

Zwecke mit dem Quarzapparat einige Aufnahmen aus, wobei Funken und photographische Platte, nicht blos 10, sondern sogar 17 *m* gegenseitigen Abstand hatten. Das Licht wurde dabei direct in den Apparat geleitet. Zwei Quarzlinsen, die in der Brennweite der zur Aufnahme gelangenden Strahlen vor Spalt und Funken conaxial mit dem Collimator aufgestellt waren, sammelten diese Strahlen in der Spaltöffnung des Collimators. Nach 15 Minuten Belichtung erschienen wider Erwarten sämmtliche Zinklinien, zwar sehr dünn und ausdruckslos, aber darauf kam es diesmal weniger an. Der belangreichere Theil des Ergebnisses war die Thatsache, dass die atmosphärische Luft der Bromsilbergelatine gegenüber bei weitem lichtdurchlässiger ist, als sich nach den Angaben Cornu's erwarten liess. Dazu kam, dass die Dicke der angewandten Luftschicht keineswegs der Grenze der Durchlässigkeit entsprach. Nach meiner festen Überzeugung würde eine bedeutend dickere Luftschicht zu demselben Ergebniss geführt haben. Wie vertrug sich nun meine Annahme von dem Einfluss der Luft auf die photographische Wirksamkeit der brechbarsten Strahlen mit diesem Ergebniss? So wenig, wie ich sie auch damit in Einklang bringen konnte, boten doch die Cadmiumergebnisse Grund genug, um an ihr unverbrüchlich festzuhalten. Dass ihr auch die Zahlenwerthe, die Cornu für die Luftabsorption aufgestellt hat, nachdem sich diese bei meinen Aufnahmen des Zinkspectrums als wenig zuverlässig erwiesen hatten, nicht mehr als Stütze dienen konnten, darf nicht befremden: Cornu's Angaben basiren auf dem Verhalten der nassen Collodplatte, meine Aufnahmen erfolgten nur mit der Gelatineplatte. Die Empfindlichkeit beider Platten ist aber grundverschieden und in dem Theile des Spectrums, der hier allein interessirt, sogar noch gänzlich unbekannt. Wie die Empfindlichkeit beider Platten im Ultraviolett verläuft, darüber liegen zur Zeit noch keinerlei Beobachtungen vor.

Ich ging nun zur Aufnahme des Aluminiumspectrums über. Die ersten Versuche damit verliefen, wie schon meine früheren, erfolglos. Erst als ich den Spalt auf das ungewöhnliche Mass von $1\frac{1}{2}$ *mm* erweitert und 20 Minuten lang exponirt hatte, gelang es mir zum ersten Male auf der fixirten

Platte wenigstens Spuren der Linie Nr. 30 und der minderbrechbaren Componente der Doppellinie Nr. 31 zu erkennen. Das Linienbild war freilich so blass, dass es unter gewöhnlichen Verhältnissen weder in der Durchsicht noch in der Aufsicht deutlich sichtbar war. Um es sicher zu erkennen, bedurfte es besonderer Vorsichtsmassregeln. In gleicher Weise erlangte ich in der Folge nach 45 Minuten Belichtung auch die übrigen Linien des Aluminiums. Damit hatte ich denn das Gebiet der kleinsten Wellenlängen erreicht, aber noch längst nicht das gesteckte Ziel. Meine Aufnahmen lieferten wohl den Beweis dafür, dass die brechbarsten Aluminiumstrahlen, nachdem sie eine 2 Meter dicke Luftschicht durchsetzt haben, immer noch einen entwicklungsfähigen Eindruck auf Bromsilbergelatine ausüben können, aber an eine Verwendung solcher Aufnahmen in der Spectroskopie, worauf meine Bestrebungen gerichtet waren, war nicht zu denken. Dazu reichte die Klarheit der Linienbilder nicht aus.

Ein Versuch, durch Erhöhung der Energie der Strahlen besseres zu erreichen, schlug gänzlich fehl. Was ich mit einem Inductorium aussergewöhnlicher Grösse (50 *cm* Funkenlänge)[1] erlangte, das ich lediglich zu diesen Aufnahmen hatte bauen lassen, bewies nur, dass selbst auf diesem Wege dem Ziele nicht näher zu kommen sei.

Mehr der Vollständigkeit, als der Aussicht auf Erfolg halber, führte ich die Aluminiumaufnahme auch mit dem vorher erwähnten Gitterapparat aus. Ich habe aber nie auch nur eine Spur von einer Linie erhalten. Zur Aufnahme der Zinklinien war das Gitter noch wohl geeignet, dem Aluminiumlicht kleinster Wellenlänge gegenüber versagte es jedoch gänzlich.

Es blieb mir nun noch die Aufnahme bei dickerer Luftschicht übrig. Nachdem ich das Verhalten meiner Platte im Aluminiumlicht unter normalen Verhältnissen kennen gelernt hatte, schien die Verdickung der Luftschicht ein geeigneteres Mittel zum directen Nachweis des Einflusses der Luft auf die

---

[1] Es wurde von der Firma Keiser & Schmidt in Berlin, von der bereits meine übrigen Inductorien (3) stammen, in solidester Ausführung geliefert.

photographische Wirksamkeit der brechbarsten Strahlen z
sein als vorher. Ich benutzte hierzu dieselbe Versuchsan
ordnung, deren ich mich schon zu den Aufnahmen des Zink
spectrums bedient hatte. Der Weg der Strahlen in der Lu
bis zur photographischen Platte mass sonach wieder 1
Meter.

Keine einzige Belichtung hinterliess jetzt auf der Platt
einen Lichteindruck; nicht einmal, als ich bei sehr energischen
Funken $1^1/_2$ Stunden lang exponirte. Die Verdickung de
Luftschicht hatte demnach bewirkt, dass alle Lichtstrahle
die im vorhergehenden Falle noch einen Eindruck hinterlasse
hatten, diesmal auf ihrem Wege zur Platte bis zur voll
ständigen Unwirksamkeit geschwächt worden waren. Dam
hatte ich endlich auf dem Versuchswege die Bestätigun
meiner Annahme von dem Luftwiderstande im brechbarste
Ultravioletten und zugleich die Gewissheit erlangt, dass, wen
überhaupt mit den Hilfsmitteln der Gegenwart im brechbarste
Ultraviolett mehr als bisher zu erreichen sei, dies nur nac
hinreichender Verminderung des Luftwiderstandes geschehe
könne.

Keiner meiner Apparate liess sich dieser Bedingung an
passen. Die Fortsetzung des Versuches erfolgte daher mi
den beim Cadmium erwähnten, zum grössern Theil neuerwor
benen Instrumenten, deren Einrichtung mit der bei der Auf
nahme der brechbarsten Strahlen gesammelten Erfahrung allent
halben in Einklang gebracht worden war.

B. Mit besonderen Apparaten.

Möglichste Verminderung des Luftwiderstandes war de
leitende Gedanke beim Entwurf des neuen Spectralapparates
dessen meine nächsten Aufnahmen bedurften. Meine Über
legungen hatten zu drei verschiedenen Constructionen geführ
wonach die Luftschicht entweder durch Verkleinerung de
Brennweite, oder, unter Beibehaltung der bisherigen Brenn
weite, durch Evacuirung der Röhren des Collimators und de
Camera, oder auch durch Evacuirung des ganzen Spectral
apparates, vermindert werden sollte.

Die gänzliche Beseitigung der Luft aus dem Strahlengange des Apparates sicherte zweifellos, wenn das gesteckte Ziel auf diesem Wege überhaupt erreichbar war, den denkbar günstigsten Erfolg. Aber die Schwierigkeiten bei der Herstellung eines solchen, nach Art der Geisslerröhren luftentleerten Spectral-Apparates schienen so beträchtlich zu sein, dass ich sogar von dem weniger bedenklichen Project der theilweisen Evacuirung absah und mich für die Verkleinerung der Brennweite entschied.

Sehr kurze Brennweite gibt bei Anwendung eines einzelnen Quarzprismas Spectra von winziger Länge. Linienreiche Spectra, wie beispielsweise das der Sonne, sind dann nicht mehr aufzulösen. Für solche Aufnahmen ist der Apparat fast unbrauchbar. Das gilt für das sichtbare Spectrum mehr als für das Ultraviolett, und im brechbarsten Ultraviolett, wo die Linien ihrer Wellenlänge nach verhältnissmässig viel weiter auseinanderrücken als in dem minderbrechbaren Theil, liegen die Verhältnisse noch ungleich günstiger. Hier lässt sich denn auch, wie ich nachstehend zeigen werde, schon mit sehr kleinem Apparat die Auflösung dichtstehender Linien, die ja allenthalben in solchem Falle den Ausschlag gibt, in mikroskopischer Schärfe ausführen.

Eine Vergrösserung der Dispersion durch Erhöhung der Prismenzahl konnte, des damit verknüpften Lichtverlustes halber, nicht in Betracht kommen. Von der Erhaltung der Energie der Strahlen hing der Ausgang des Versuches in erster Linie ab.

Damit die Aufnahme, ungeachtet ihrer Kleinheit, noch strengeren Anforderungen genügte, geschah beim Bau des Apparates und bei der Wahl und Aufstellung der zur Aufnahme erforderlichen Hilfsapparate alles, was die Schärfe und Klarheit des Bildes fördern konnte.

Über das Mass der Brennweite habe ich lange nicht schlüssig werden können, da mir jeder Anhalt für die Wirkung der grösseren oder kleineren Reduction der Rohrlänge fehlte, denn auch die Zahlenwerthe, die Cornu für die Absorption der brechbarsten Strahlen in der Luft aufgestellt hat, waren, aus dem vorher erörterten Grunde, hierzu nicht geeignet. Es schien nur so viel festzustehen, dass eine mässige Vermin-

derung der Rohrlänge zu einem ausschlaggebenden Resultat kaum verhelfen würde. Indem ich von der Annahme ausging dass die grössere Energie der Strahlen und ebenso die voll endetere Bildschärfe an die kleinere Rohrlänge gebunden seien und dass ein kleines, aber scharfgezeichnetes Bild vor einem grösseren, weniger klaren den Vorzug verdiene, wählte ich Linsen von nur 150 *mm* Brennweite.

Der photographische Spectralapparat.

Sein optischer Theil besteht aus einem Doppelprisma aus Quarz von 60° bei einer quadratischen Öffnung von 30 *mm* und aus 2 planconvexen Quarzlinsen von 150 *mm* Brennweite (D, 589) und 26 *mm* Durchmesser.[1]

Die beiden Hälften des Prismas sind mit Glycerin in sehr dünner Schicht zusammengeklebt.

Der mechanische Theil des Apparates setzt sich zusammen aus einem kräftigen, mit Nivellirschrauben versehenen Dreifuss der auf starker Säule eine um ihr Centrum drehbare Scheibe von 18 *cm* Durchmesser trägt, worauf Collimator, Prisma-stativ und Camera verstellbar befestigt sind. Der Spaltschlitten hat Gussstahlbacken und eine Mikrometerschraube, deren Trommel eine Ablesung bis 0·002 *mm* erlaubt. Mit dem Collimator ist er durch ein sehr exact geführtes Auszugsrohr verbunden, womit auch die Platte focussirt wird. Dass dies nur mit dem Collimator und nicht auch mit der Camera geschieht kommt daher, dass die ganze Camera aus Glas besteht, das sich zu einem Cameraauszug nicht eignet. Das Prismastativ besitzt die zur Aufstellung des Prismas (Gaussocular) und zur Einstellung ins Minimum der Ablenkung nöthige Beweglichkeit An Stelle eines lichtdichten Prismagehäuses dient ein Stück Sammet, der zum Schutz gegen fremdes Licht über das Prisma gehangen wird.

---

[1] Auf die Wahl ihres Materiales und auf ihre Herstellung hat der Optiker, Herr B. Halle, dessen Güte ich diese Linsen verdanke, die grösste Sorgfalt verwandt. Wie sehr dieser Umstand die Schärfe der Aufnahmen begünstigte, wurde ich erst gewahr, als ich Aufnahmen eines anderen Linsenpaares fremden Ursprunges zu einem Vergleich damit heranzog.

Die Camera ist die einzige Eigenthümlichkeit, die der Apparat aufweist. Sie besteht, wie bereits erwähnt, nebst der Cassette, aus Spiegelglas, und mit Ausnahme einer kleinen metallenen Schraubzwinge, die zum Festklemmen der Cassettenbahn dient, kommt an der ganzen Camera nicht eine einzige Verschraubung vor. Dabei ist die Casettenbahn, wie bei dem vorher erwähnten Apparat, um die Mittellinie der photographischen Platte drehbar, so dass die Platte mit der Linsenaxe, innerhalb 20 und 32°, jeden gewünschten Winkel bilden kann. Die Linse ist direct am Glaskörper der Camera befestigt. Zwei Öffnungen, die die Cassettenlaufbahn zu ihren beiden Seiten, infolge ihrer Drehbarkeit, mit dem Camerakörper bildet, sind mit Sammet verschlossen. Glasverschluss, den ich auch hier gern angewandt hätte, war leider nicht ausführbar. Die Schiefstellung der Platte ist an einem mit roher Theilung versehenen Gradbogen ablesbar. Der Hauptkörper der Camera ist von parallelepipedischer Gestalt und wird von einem rechtwinklig zu seiner Langseite verlängerten Arme aus starkem Spiegelglas getragen. Die Verlängerung des Armes vermittelt die Verbindung der Camera mit der genannten drehbaren Scheibe des Apparates wozu diese zwei kräftige Klemmen trägt.

Die Cassette unterscheidet sich in ihrer Form und Einrichtung nach von den gewöhnlichen Holzcassetten in keiner Weise; sie hat ebenso Schieber und Deckel wie diese, und lässt sich ausserdem zur Aufnahme untereinanderstehender Spectra in Richtung der Spectrumlinien nach einem seitlich angebrachten Massstab verschieben, so dass eine Platte, bei hinlänglich kurzer Spaltöffnung, zu einer grossen Anzahl Aufnahmen ausreicht. Die Innenflächen der Camera und der Cassetten haben, da das dazu verwandte Glas durchsichtig ist, einen dünnen Überzug von matter schwarzer Farbe, die Aussenfläche einen solchen von schwarzem Papier und Schellackfirniss. Das Plattenmass beträgt 30 und 65 *mm*.

Ich habe Glas und nicht Holz zur Camera verwendet, weil es den Folgen des Wärme- und Feuchtigkeitswechsels der Luft, ungeachtet des erforderlichen und vielleicht wenig vertrauenerweckenden Papierüberzuges, nur unwesentlich ausgesetzt ist, und weil Casetten für so kleines Plattenformat, wie

das genannte, kaum exacter als aus Glas gefertigt werden können. Während monatelangen Gebrauches hat die Glascamera nie Anlass zu Klagen gegeben.

Die Aufstellung des Spectralapparates und der Nebenapparate.

Der Lichtquell musste diesmal mit Hilfe eines Fernrohres eingestellt werden. Um die hiezu nothwendige Coaxialität des Fernrohres und Collimators auf die Dauer des gesammten Versuches nach Möglichkeit constant zu erhalten, war zur Aufstellung der Apparate ein gegen die atmosphärischen Einflüsse möglichst unempfindliches Fundament erforderlich. Ich habe auch hiezu Glas gewählt. Eine quadratische Scheibe aus Spiegelglas von 1 *m* Seitenlänge und 10 *mm* Dicke wurde auf einem sehr stabilen Holzfundament in der Weise befestigt, dass sie nur in einigen Punkten unterstützt war. Die Lage der Stützpunkte war so gewählt, dass sich die Veränderungen, denen das Holzfundament ausgesetzt war, nur in sehr vermindertem Maasse auf die Richtung der Apparate übertragen konnten.

Auf der Glasscheibe waren die an der Aufnahme direct betheiligten Apparate wie folgt aufgestellt und, wo zulässig, gegen seitliche Verschiebung besonders gesichert.

Dem Spectralapparat gegenüber und coaxial mit dem Collimator stand das Ablesefernrohr (Skalenfernrohr für Spiegelablesung von Hartmann & Braun), zwischen beiden das Funkenstativ und dicht vor dem Spalt ein zweites Stativ mit einer spaltförmigen Blende von verstellbarer Länge. Zwischen Funken und Blende wurde bei einem Theil der Aufnahmen ein Condensator aufgestellt, worüber nachstehend mehr. Die Blende kam zur Anwendung, wenn die Spaltöffnung nur zu einem Theil ihrer Länge den Strahlen geöffnet werden sollte. Sie liess sich mit Trieb und Zahnstange ihres Stativs auch längs dem Spalt verschieben, so dass dieser an jeder Stelle auf gewünschte Länge, und, wenn nöthig, in ununterbrochener Aufeinanderfolge der Durchgangsstrecken geöffnet werden konnte. Die Blende bedurfte, ebenso wie der Funken, zur

sichern Einstellung des Ablesefernrohres. Das wird begreiflicher werden, wenn ich hinzufüge, dass sich die Öffnung der Spaltlänge innerhalb sehr enger Grenzen bewegte und nicht selten das bescheidene Maass von 0·2 *mm* nicht überschritt, und dass andererseits Funken und Blende meist einen Abstand von einigen Centimetern hatten.[1]

---

[1] Der bereits erwähnte Condensator bestand aus 2 rechtwinklig zur optischen Axe geschnittenen Cylinderlinsen aus Quarz. Die eine war biconvex, hatte 30 *mm* Brennweite (D 589), 51 *mm* Cylinderlänge und 36 *mm* Breite, und ihre geometrische Axe war mit dem Spalt des Collimators parallel. Die andere Linse war planconvex, hatte 60 *mm* Brennweite, 51 *mm* Cylinderlänge und 46 *mm* Breite, ihre geometrische Axe bildete mit dem Spalt einen Winkel von 90 Grad. Jede Linse hatte ihr eigenes Stativ, das sich um eine zum Spalt parallele Axe drehen und mit drei Schrauben nivelliren liess. Beide Stative standen auf einer gemeinschaftlichen prismatischen Laufbahn, worauf sie in Richtung der Collimatoraxe verschiebbar waren. Die Laufbahn bildete den obersten Theil eines mit Trieb und Zahnstange und Stellschrauben versehenen Dreifusses, womit sie in Richtung des Spaltes gehoben oder gesenkt werden konnte. Auf diese Weise liessen sich beide Linsen rechtwinklig zur Collimatoraxe leicht aufstellen und hierauf in deren Richtung unabhängig von einander, doch auch gemeinschaftlich, in Richtung des Spaltes jedoch nur gemeinschaftlich verschieben, ohne dass ihre Richtung dabei eine Störung erlitten hätte. Die biconvexe Linse stand dem Funken zunächst. Der gegenseitige Abstand beider war so bemessen, dass das zu einem schmalen Lichtstreifen ausgezogene Funkenbild der zur Aufnahme kommenden Strahlen, im vorliegendem Falle also ein unsichtbares Bild auf den Spalt fiel, und die Öffnung des Strahlenkegels, wenigstens annähernd der Linsenöffnung des Collimators entsprach. Beide Punkte sind wohl zu beachten, wenn nicht ein gar zu grosser Theil der gesammelten Strahlen neben die Spaltöffnung und ein anderer Theil auf die Innenwand des Collimators fallen sollen. Es mag jedoch nicht unerwähnt bleiben, dass auch bei sorgfältigster Einstellung der bei weitem grösste Theil des gesammelten Lichtes verloren geht, weil das Funkenbild der Grösse des Funkens entsprechend, immer zu einem Lichtstreifen von ziemlicher Breite, anstatt zu einer Lichtlinie vereinigt wird. Je umfangreicher der Funken, desto breiter sein Bild und desto grösser verhältnissmässig der Lichtverlust.

Der Lichtstreifen, wie ihn die einzelne Linse liefert, läuft noch weit über die Enden der Spaltöffnung hinaus. Sobald man nun die andere Linse hinter der erstgenannten aufstellt, wird das gesammte Licht des Streifens auf einen Theil seiner ursprünglichen Länge concentrirt, und wenn man sie dann in Richtung der Collimatoraxe verschiebt, kann man leicht die Stellung finden, wobei Streifen und Spalt gleiche Länge haben. Die Länge des Streifens bezieht

Der Lichtquell.

Den Primärstrom lieferte diesmal eine Chromsäurebatterie von 4 grösseren Tauchelementen. Ausser dem früher benutzten

---

sich selbstverständlich, wie schon die Breite, nur auf das Bild, das die zur Aufnahme kommenden Strahlen geben.

Sind die Strahlen unsichtbar, wie dies bei meinen Aufnahmen der Fall war, so bediene ich mich, um den Streifen sichtbar zu machen, des folgenden Verfahrens. Ich bedecke, während der Funken überspringt, den Spalt mit einem dünnen planparallelen Plättchen aus Uranglas und rücke die betreffende Cylinderlinse, wofür ich focussiren will, diesem Plättchen so nahe, dass es reichlich innerhalb der Brennweite der brechbarsten Strahlen liegt, die der Funken aussendet. Schiebe ich dann die Linse wieder langsam zurück, so nimmt das fluorescirende Rechteck, das auf dem Plättchen in maigrüner Farbe leuchtet, an Helligkeit zu und an Breite ab, und geht allmählich in einen ziemlich scharfbegrenzten helleren Streifen über. Dieser Streifen ist das langausgezogene Funkenbild der brechbarsten Strahlen des angewandten Lichtquells. Bei fortgesetzter Verschiebung der Linse verbreitert sich der Streifen wieder und macht einem anderen Platz, dem Bilde der benachbarten minderabgelenkten Strahlen. In gleicher Weise wiederholt sich der Vorgang für alle Strahlen, wofür Uranglas empfänglich ist. Allerdings bekommt man hiebei nur die Bilder der allerhellsten Strahlen. Das genügt aber zur Orientirung, da der Spalt, der chromatischen Abweichung der Cylinderlinse halber, doch immer nur im Focus einer einzigen Wellenlänge der gleichzeitig zur Aufnahme gelangenden Strahlen stehen kann.

Ich habe den Condensator eines besonderen Umstandes halber ausführlicher besprochen. Nimmt man nämlich das Spectrum eines dicht vor der Spaltöffnung überspringenden Flaschenfunkens mit einem Apparat grösserer Apertur auf, so bekommt man bei nahestehenden Elektroden sehr kurze und undeutliche Linien, überhaupt ein Spectrumbild, das an Klarheit viel zu wünschen übrig lässt. Verlängert man den Funken und lässt man ihn, um die Linien ebenfalls zu verlängern, parallel zum Spalt überspringen, so gewinnt das Bild zwar an Schärfe, aber abgesehen von den Linien des Luftspectrums, die alsdann zum Vorschein kommen, macht sich noch ein anderer, und, wie es scheint, bisher unbeachtet gebliebener Übelstand geltend. Ich begegnete ihm zum ersten Male bei den in Rede stehenden Aufnahmen, und seine Beseitigung, die für den Verlauf meiner Untersuchung besondere Bedeutung erlangte, glückte erst, als ich den Condensator zur Hilfe nahm.

Dieser Übelstand besteht in einer Verdopplung der Spectrumlinien. Die Componenten dieser Linienpaare liegen aber nicht nebeneinander, sondern senkrecht übereinander. Sie sind ausserdem viel stärker gekrümmt als die Linien gewöhnlicher Prismenapparate. Diese Erscheinung tritt nicht nur bei ungewöhnlich langem Funken zu Tage, sie lässt sich, sobald man sie nur

Inductorium für 25 *cm* Funkenlänge und den Leydner Flaschen kam diesmal noch ein kleineres Inductorium für nur 8 *cm* lange Funken zur Anwendung. In einigen Fällen wurde das Inductorium mit einer Influenzmaschine (4 Scheibenpaare von 62 und 70 *cm* Durchmesser) vertauscht, die mit einer Flaschenbatterie nach Riess (9 Leydner Flaschen, Aussenbeleg $1^1/_4$ *m*) in Verbindung stand.

Zu Elektroden dienten wieder, jedoch nur vorübergehend, Cadmium und Zink, späterhin andauernd Aluminium, und zuletzt Ag, As, Au, Bi, Ca, Cd, Co, Cr, Cu, Fe, K, Mg, Mo, Na, Ni, Pb, Pd, Pt, Sb, Si, Sn, Tl, W, alle in Form von Draht oder kurzen Stäbchen (Ca, K, Na, W), oder Krystallen (Si), die in kupferne oder platinene Klemmen gefasst waren.[1]

---

einmal kennen gelernt hat, selbst im Spectrum eines Funkens normaler Grösse, gleichviel ob er rechtwinklig oder parallel zum Spalt überspringt, wiederfinden, wenn auch im minder auffälligem Maasse als bei grossem Elektrodenabstand. Die brechbarsten Strahlen zeigen dabei die Verdopplung am markantesten. Macht man eine Reihe von Aufnahmen bei abnehmendem gegenseitigen Abstand der Elektroden, so zeigt sich folgende, auch für die Aufnahme anderer Spectralbezirke beachtenswerthe Erscheinung. Bei hinreichend weitem Abstand (2 bis 3 *mm* bei einem Apparat von Grösse des vorherbeschriebenen) der Elektroden erscheinen senkrecht übereinander zwei vollständig getrennte, mondsichelförmige Linien, die mit gegenseitiger Annäherung der Elektroden mehr und mehr zusammenrücken, füglich übereinandergreifen, und nachdem ihr Schnittpunkt in ihrer Mitte angelangt ist, einander vollständig zu decken scheinen. Verfolgt man aber die allmählige Verschmelzung beider Linien in der Spectralreihe, so findet man, dass die Deckung beider nur auf kurzer Strecke, und zwar in ihrer Mitte vollständig ist, und dass ihre Enden immer noch an merklicher Unklarheit leiden. Die Ursache dieser Erscheinung liegt in dem Umstande, dass die Strahlen das Prisma unter stärkerer Abweichung von der Ebene seines Hauptschnittes durchsetzen, als dies bei grösserem Abstand des Funkens vom Spalt der Fall ist, und dann dass der Funken nicht als einzelner Lichtquell, sondern, den beiden Elektroden entsprechend, wie zwei getrennte Lichtquellen wirkt. Entfernt man den Funken vom Spalt, so verschwindet die Verdopplung der Linien und das Spectrum gewinnt in überraschendem Maasse an Klarheit. Damit unzertrennlich verbunden ist aber eine Abnahme der Helligkeit, und ihr, bei Erhaltung der Schönheit der Zeichnung, vorzubeugen, dazu dient der genannte Condensator.

[1] Die Mehrzahl dieser Elektroden überliess mir Herr Prof. E. Zettnow in Berlin, der mehrere davon eigens für meine Aufnahmen in sorgfältigster Weise dargestellt, mich überhaupt bei diesem Theil meiner Untersuchung mit

Das photographische Verfahren.

Auch diesmal kamen, wo es sich um höchste Schärfe der Zeichnung handelte, Platten meiner Präparation zur Anwendung. In der Hauptsache erfolgte aber die Aufnahme auf Platten des Herrn E. Zettnow. Ich zog sie ihrer grossen Empfindlichkeit und Intensität halber den eigenen Platten in allen Fällen vor, wo höchste Schärfe der Spectrumlinien entbehrlich war. Etliche Spectra wurden auch auf Schleussnerplatten photographirt. Die Schleussnerplatte arbeitete bei hoher Empfindlichkeit ebenfalls klar, aber ihre Negative zeigten den schon erwähnten Übelstand aller Handelsplatten: es fehlte ihnen die zu Spectralaufnahmen erwünschte Intensität. Entwickler und Fixirer bestanden wieder wie früher aus Pyro-Soda und unterschwefligsaurem Natron.

Die Anzahl der hiebei erlangten Negative ist verhältnissmässig gross. Über die Umstände, unter denen jede Aufnahme erfolgte, gibt ein Journal gewissenhaft Auskunft. Jede zur Belichtung gelangende Platte, selbst wenn die Aufnahme misslingt, wird darin in chronologischer Folge und mit fortlaufender Nummer angeführt und mit derselben Nummer das betreffende Negativ versehen. Beides ist besonders bei Reihenaufnahmen, wie sie hier vorlagen, unbedingt nöthig, wenn nicht jede spätere Orientirung ausgeschlossen sein soll.[1]

Die photographische Aufnahme.

Der Anfang meiner Aufnahmen entsprach meinen Erwartungen nur in sehr bescheidenem Masse. Mein Apparat erwies

---

Rath und That in reichlichem Masse unterstützt hat, so dass ich den flotten Fortgang meiner Untersuchung nicht zum kleinsten Theile seiner Güte zu verdanken habe. Ich erfülle daher eine angenehme Pflicht, wenn ich Herrn Zettnow für die Förderung meiner Arbeit hiermit meinen tiefgefühlten Dank aussprече.

[1] Die Plattennummer soll, unvertilgbar, am besten photographisch eincopirt sein. Das Aufkleben von Nummerzetteln ist nicht zu empfehlen. Das Aufschreiben der Nummer auf den Plattenüberzug führt, weil es immer im Halblicht der Dunkelkammer geschehen muss, leicht zu Irrthum, ist auch bei raschem Wechsel der Platten viel zu zeitraubend. Folgende Einrichtung beugt

sich wohl, wie nach der Grösse seiner Apertur nicht anders zu erwarten war, als sehr lichtstark, allein die beiden brechbarsten Linien des Cadmiums Nr. 25 und Nr. 26 hatten, entgegen meiner Erwartung, relativ nur wenig an Intensität gewonnen. Nicht viel besser stand es mit den brechbarsten Linien des Zinkes, Nr. 27, 28, 29. Sie erschienen zwar ebenfalls schneller als früher, aber ihre Intensität nahm immer noch beträchtlich mit der Wellenlänge ab. Es gewann hiernach den Anschein, als sei die vermuthete Luftwirkung zum grössten Theil auf eine specifische Eigenschaft der betreffenden Linien zurückzuführen. Mochte dies nun auch, wie sich im Laufe meiner späteren Beobachtungen herausstellte, zu einem kleinen Theile zutreffen, so lag doch in der That das Haupthinderniss bei meinen früheren Aufnahmen der brechbarsten Strahlen in der Lichtundurchlässigkeit der Luft. Das ergab in voller Klarheit die Aufnahme des Aluminiumspectrums, die nunmehr folgte. In Zeit von wenigen Minuten erschienen seine sämmtlichen Hauptlinien, und dabei in grösserer Intensität als früher.

---

beiden Übelständen vor. Ich berühre diesen Gegenstand ausführlicher, weil ich wiederholt von Spectroskopikern um Mittheilung meines Verfahrens der Plattennummerirung ersucht worden bin. Ich habe mich ihrer hiebei, wie schon seit 8 Jahren zu allen Spectralaufnahmen bedient, und kann sie darum angelegentlich überall empfehlen, wo die Registrirung der Negative in chronologischer Reihenfolge Erfordernis ist.

Ein automatisch wirkender Paginirapparat mit Gummiziffern und Farbwerk, wie solche zum Aufdrucken fortlaufender Nummern im Handel zu haben sind, ist auf einem Holzfundament, das zwei, einen rechten Winkel bildende Lineale trägt, derart befestigt, dass die Zifferreihe, die der Apparat beim Niederdrücken seiner Handhabe druckt, dicht am Scheitel des Winkels endet. Schiebt man nun die photographische Platte, was immer kurz vor ihrem Einlegen in die Cassette erfolgen sollte, die lichtempfindliche Schicht nach oben gerichtet, an die beiden Lineale an, so kann man die laufende Ziffer durch kräftigen Schlag auf die Handhabe ohne Bruchgefahr auf die Platte drucken. Um die Ziffer zu fixiren — die farbige Ziffer verschwindet bei der Entwicklung — lege ich die Platte in eine undurchsichtige, buchartig aufklappbare Schale aus glatter Pappe, die mit einem Ausschnitt für die Ziffer versehen ist, und lasse das unverdeckte Licht meiner Dunkelkammerlampe einen Augenblick auf den Ausschnitt wirken. Beim Entwickeln des Spectrums erscheint alsdann die Ziffer in sauberer Zeichnung durchsichtig auf dunkelm Grunde. Das Verfahren erfordert wenig Zeit; ich brauche nur 6 bis 10 Secunden dazu. Grössere Platten versehe ich in gleicher Weise noch mit einem Datumstempel.

Die brechbarste davon, die Doppellinie Nr. 32, wirkte jetzt, im Gegensatz zu früher, stets zuerst, und mit ihren Componenten immer in gleicher Stärke, ein Umstand, den ich nur deshalb betone, weil er für gewisse spätere Aufnahmen besondere Bedeutung erlangte. Nach ihr erschien die mindestabgelenkte, Nr. 30, und erst einige Zeit nachher, die mittelste, Nr. 31, und zwar immer mit ihrer weniger abgelenkten Componente zuerst. Die stärker abgelenkte Componente erschien bei kurzer Exposition gar nicht, und bei anhaltender blieb sie weit hinter allen übrigen Linien zurück.

Dies das Verhalten des Aluminiumspectrums dem neuen Apparat gegenüber, gleichviel ob die Aufnahme mit oder ohne Condensator und mit Platten von hoher oder niedriger Empfindlichkeit erfolgte. Dabei zeigten die Linien, im grellen Gegensatze zu früher, schon nach Belichtung von 3 Minuten eine zu Ausmesszwecken, selbst bei starker Vergrösserung hinreichende Intensität und Schärfe.

Exponirte ich länger, dann wuchsen die wirksameren von ihnen bis zur kräftigsten Intensität an, deren die Gelatineplatte überhaupt fähig ist. Aber auffallenderweise blieb die Lichtwirkung ihres Bezirkes immer nur auf sie allein beschränkt, während das minderabgelenkte Ultraviolett sich durch das gerade Gegentheil, das Hinzutreten neuer Linien und Anwachsen zu einem continuirlichen Bande tiefster Schwärze, auszeichnete. Diesem Umstande zufolge haben diese Aufnahmen ein sonderbares Aussehen; sie machen den Eindruck, als werde die Wirksamkeit ihrer stärker abgelenkten Hälfte auch jetzt noch durch irgend welches Hinderniss gehemmt. Zu solchem Schlusse drängt noch die grosse Intensität der Linien Nr. 32, womit das Wirkungsband des Alumiumfunkens im Ultravioletten plötzlich endet, und wodurch zugleich die Annahme von dessen Fortsetzung nach der brechbareren Seite hin, wo bisher noch keine Lichtwirkung beobachtet worden war, eine gewisse Berechtigung erhält.

Diese Überlegung war es, die meine Arbeit von der Bahn der Reproductivität, worauf sie sich in der Hauptsache bisher bewegt hatte, nunmehr zu neuen Thatsachen führte.

Mein Bestreben war von jetzt an darauf gerichtet, den Bezirk zwischen den Linien Nr. 30 und 32, der mit Ausnahme der Linie Nr. 31, weder bei mir noch bei andern eine Lichtwirkung verrathen hatte, zur photographischen Wirkung, und zunächst ohne Rücksicht auf seine graphische Vollendung, zu bringen, wobei ich allerdings von der Annahme ausging, dass die seitherige Erfolglosigkeit nicht der Abwesenheit aller Strahlung, sondern der Unzulänglichkeit der Beobachtungsmethode beizumessen sei.

Ich verstärkte zunächst die Belichtung.

Bei energischem, kurzen, dicht vor dem weitgeöffneten Spalt überspringenden Funken und bei voller Öffnung der Linsen erlangte ich auf Zettnow'scher Platte, nach Exposition von $^1/_2$ Stunde, zwischen den Componenten der Linie Nr. 32, zuerst zwei markante Linien dann bei verlängerter Belichtungsdauer, zu beiden Seiten derselben Linie, ein aus dichten Gruppen zusammengesetztes Wirkungsband, das sich mit der Zunahme der Belichtung immer weiter ausdehnte. Bei einer Belichtung von $1^1/_2$ Stunden bestand das gesammte Aluminiumspectrum aus einem fast continuirlichen Bande, das erst jenseits der bisherigen Grenze des Ultravioletten, ungefähr bei Wellenlänge 183 $\mu\mu$ endete. Dass es sich hiebei um das Spectrum selbst, und nicht etwa um eine Wirkung diffusen Lichtes handelte, dafür sprachen die Intensitätsschwankungen und die markanten Linien, wodurch sich der neugewonnene Theil auszeichnete. Inwieweit dieser dem Aluminium oder dessen Verunreinigungen oder auch der Luft zuzuzählen ist, das muss ich dahingestellt lassen. Ungleich wichtiger als diese Frage war für mich die damit gewonnene Thatsache, dass der bisher für lichtleer gehaltene Bereich zwischen den Hauptlinien des Aluminiums und sogar eine kleine Strecke darüber hinaus, einen ganz unerwarteten Strahlenreichthum aufwies.

Unter solchen Umständen liess sich erwarten, dass nicht das Aluminium allein, sondern auch noch andere Stoffe Strahlen so starker Brechbarkeit aussenden würden. Und in der That bestätigte sich diese Vermuthung als ich eine Reihe von Elementen daraufhin einer Prüfung unterwarf.

Ich führe diese Spectra nachstehend in chronologischer Folge an. An Stelle einer photographischen Reproduction, die ich mir für später vorbehalte, gebe ich, um für die Energie und die Anzahl der neuen Linien, soweit sie jenseits der Wellenlänge 198·8 $\mu\mu$ liegen, wenigstens einigen Anhalt zu bieten, kurz die Hauptdata der Versuchsanordnung und des photographischen Ergebnisses an. Dass unter den aufgezählten Linien manche Verunreinigung vertreten sein mag, was ich auch vereinzelt an betreffender Stelle angedeutet habe, berührt die hier allein interessirende Thatsache, den Strahlenreichthum des genannten Spectralbezirkes betreffend, nur in verschwindendem Masse.

Die beistehenden Nummern beziehen sich auf die erwähnte Signatur der betreffenden Platten.

Alle Aufnahmen wurden ohne Condensator, bei einer Spaltweite von 0.040 *mm* und auf hochempfindlichen Platten (Zettnow) ausgeführt. Die Belichtungsdauer war verschieden, sie ist darum bei jedem Spectrum besonders angegeben.

Cadmium. Nr. 2039. Belichtung 6 Minuten. 22 neue Linien, 2 davon jenseits 185·2, die wirksamsten (4) in der nächsten Umgebung derselben Wellenlänge, die meisten blass und mässig scharf.

Antimon. Nr. 2040. Belichtung 5 Minuten. 28 neue Linien, 3 davon jenseits 185·2, die wirksamsten (3) in der Nähe der Wellenlänge 192·9. Mit Ausnahme der brechbartsten 3, alle klar gezeichnet, mehrere sehr intensiv.

Wismuth. Nr. 2043. Belichtung 6 Minuten. 20 neue Linien, 3 davon jenseits 185·2, die wirksamste bei $^1/_3$ (Nr. 31 bis 32). Die meisten, besonders die drei brechbarsten, blass und mässig scharf.

Kobalt. Nr. 2044. Belichtung 6 Minuten. 83 neue Linien, 12 davon jenseits 185·2, die wirksamsten (9) nahe bei Nr. 31 nach Nr. 30 hin. Ein grosser Theil der Linien intensiv und scharf, die übrigen, darunter alle jenseits 185·2 liegenden, sehr blass.

Platin. Nr. 2045. Belichtung 6 Minuten. 81 neue Linien, 14 davon jenseits 185·2, die wirksamsten (15) ziemlich gleichmässig über das Spectrum vertheilt und an Schärfe alle vorher genannten Spectra übertreffend.

Kupfer. Nr. 2046. Belichtung 6 Minuten. 6 neue Linien, 1 davon jenseits 185·2, die wirksamsten (2) bei Nr. 30, alle, auch die sehr blassen, scharf gezeichnet.

Blei. Nr. 2047. Belichtung 7 Minuten. 6 neue Linien, 1 davon jenseits 185·2, die wirksamste und schärfste von allen dicht neben der 2. Componente von Nr. 31, alle übrigen sehr blass und unklar.

Eisen. Nr. 2048. Belichtung 10 Minuten. 72 neue Linien. 4 davon jenseits 185·2, die wirksamsten (4) zwischen Nr. 31 und 32, näher an Nr. 31 gelegen. Die brechbarsten vier kaum zu erkennen, die übrigen intensiver, aber die weniger intensiven von ihnen ebenfalls unklar definirt.

Calcium. Nr. 2049. Belichtung 7 Minuten. 7 neue Linien, 4 davon jenseits 185·2. Von den wirksamsten (3), eine mit der stärker abgelenkten Componente von Nr. 31 zusammenfallend, die beiden anderen das Ende des ganzen Spectrums bildend. Die weniger abgelenkte dieser beiden übertrifft an Wirksamkeit alle jenseits 185·2 liegenden Linien sämmtlicher Spectra, von welchen hier die Rede ist.

Arsen. Nr. 2065. Versuchsanordnung wahrscheinlich wie bei den vorhergehenden Aufnahmen. Belichtung muthmasslich 8 Minuten. 20 neue Linien, 6 davon jenseits 185·2. Mit Ausnahme dieser 6, alle kräftig, aber nicht scharf gezeichnet.

Natrium. Nr. 2103. Belichtung 20 Minuten. Eine einzige neue Linie, kaum merklich von der 2. Componente der Nr. 31 abweichend, mässig klar und wenig intensiv.

Silber. Nr. 2107. Belichtung 3 Minuten. 28 neue Linien, 6 davon jenseits 185·2. Alle Linien, mit Ausnahme einer einzigen, die auf der brechbareren Seite von Nr. 31 und nahe dabei liegt, sehr blass und zum grössten Theil von geringer Schärfe.

Gold. Auf derselben Platte. (Nr. 2107.) Belichtung 7 Minuten. 12 neue Linien, 3 davon jenseits 185·2, von den wirksamsten (5) drei neben Nr. 30 und eine kräftige Doppellinie neben Nr. 31, in beiden Fällen auf der brechbareren Seite liegend; alle übrigen sehr unklar, mehr noch als beim Silber.

Nickel. Nr. 2108. Belichtung $7^1/_2$ Minuten. 26 neue Linien, 7 davon jenseits 185·2, von den wirksamsten (3) zwei

neben Nr. 30 und eine um ein weniges brechbarer als Nr. 32. Der ganze Bezirk sehr blass, aber gut definirt.

Zinn. Nr. 2111. Belichtung 10 Minuten. 18 neue Linien, 3 davon jenseits 185·2. Mit Ausnahme einer einzigen Linie, die zwischen Nr. 31 und 32 mitten darin liegt und eine enorme Energie entwickelt, sind alle Linien verschwommen, blass und darum sehr undeutlich.

Kalium. Nr. 2112. Belichtung 5 Minuten. Eine einzige Linie von tadelloser Zeichnung und grosser Intensität; sie coincidirt exact mit der brechbarern Componente von Nr. 31.

Wolfram. Nr. 2113. Belichtung 10 Minuten. 75 neue Linien, 21 davon jenseits 185·2, alle ziemlich gleichmässig vertheilt, dabei aber doch gut unterschiedene Gruppen mit einzelnen markanten Linien bildend. Die Intensität des sehr linienreichen Bandes nimmt nach dem brechbarern Ende hin gleichmässig ab. Die Zeichnung der Linien ist durchgängig klar.

Silicium. Nr. 2114. Belichtung 10 Minuten. 11 neue Linien, 5 davon jenseits 185·2, nur eine einzige intensiv und scharf, sie coincidirt abermals exact mit der brechbarern Componente von Nr. 31.

Chrom. Nr. 2132. Belichtung 7 Minuten. 11 neue Linien, jenseits 185·2 nur Spuren solcher, von allen nur eine markant und diese mit der brechbarern Componente von Nr. 31 coincidirend, alle übrigen sehr blass und die Mehrzahl davon nur mit Mühe wahrnehmbar.

Thallium. Nr. 2133. Belichtung 8 Minuten. 8 neue Linien. 3 davon jenseits 185·2, die wirksamsten (4), zwischen den Linien Nr. 31 und Nr 32 eine ins Auge fallende Gruppe bildend, deren Componenten an Intensität und gegenseitigem Abstand mit der Wellenlänge abnehmen. Auch hier fällt wieder eine Linie mit der wiederholt genannten Componente von Nr. 31 zusammen, diesmal ist sie jedoch sehr blass, kaum mehr als eine Spur. Die Zeichnung der ganzen Aufnahme ist durchgängig sehr klar, sogar bei den brechbarsten Linien.

Molybdän. Nr. 2136. Belichtung 8 Minuten. 40 neue Linien, 4 davon jenseits 185·2, die wirksamsten (6) zwischen Nr. 30 und Nr. 31, alle sehr blass, die brechbarsten nur als Spur erschienen. Zeichnung aller mässig klar.

Quecksilber. Nr. 2139. Belichtung 7 Minuten. 26 neue Linien, 9 davon jenseits 185·2, die wirksamste von allen, dicht vor Nr. 31, zwei andere, ebenfalls energische Linien, nahe Nr. 30 und Nr. 32. Die Linien jenseits 185·2 reihen sich zu einer Liniengruppe aneinander, die ihrer Intensität nach rasch ansteigt und bei wachsender Zunahme ihres Abstandes allmählich abnimmt. Schärfe der Linien mässig.

Magnesium. Nr. 2143. Belichtung 7 Minuten. (Spaltweite ausnahmsweise nur 0·030 *mm*). 3 neue Linien, wovon nur eine deutlich zu erkennen ist; sie fällt mit der brechbarern Componente von Nr. 31 zusammen. Jenseits 185·2 nichts erschienen.

Zink. Nr. 2144. Belichtung 32 Minuten. 17 neue Linien, 1 davon jenseits 185·2. Eine der beiden wirksamsten Linien abermals mit der brechbarern Componente von Nr. 31 coincidirend, die andere stärker abgelenkte, dicht bei derselben Componente liegend. Ungeachtet der sehr langen Belichtung ist der ganze Bezirk ungemein blass erschienen.

Kohlenwasserstoff. Nr. 2152. In einer mit Quarz verschlossenen elektrischen Entladungsröhre leuchtend, Druck 3 *mm* Quecksilbersäule. Belichtung 25 Minuten. 10 neue Banden, die mit ihren Wellenlängen an Wirkung und Intensität sehr gleichmässig abnehmen, und deren letzte zwischen den beiden Componenten der Linie Nr. 32 als schwacher Schatten erscheint.

Eine andere Aufnahme mit derselben Röhre (Nr. 2153) gab bei doppelter Spaltweite (0·080 *mm*) und $2^1/_2$ stündiger Belichtung das ganze Spectrum kräftiger, doch immer noch sehr klar, und jenseits 185·2 auch Spuren von zwei neuen Banden.

Alle diese Spectra haben, wie ich hinzufügen muss, gleich dem Aluminiumspectrum, auf ihrer brechbarern Hälfte bedeutend schwächer als im übrigen Ultraviolett gewirkt. Bis in die Gegend der brechbarsten Cadmiumstrahlen bestehen sie aus einem tiefschwarzen Bande, das höchstens von vereinzelten, aber nur solarisirten Linien, die übrigens glasblank hervortreten, unterbrochen wird. Im anderen Theile habe ich, selbst bei den längsten Belichtungen, nie ein derartiges Zusammenfliessen der Linien, noch weniger aber Solarisation wahrnehmen können

Wie sich aus der vorstehenden Zusammenstellung ergibt, ist allen Aufnahmen gemein, dass sie im brechbarsten Theile des Spectrums, wo bisher nur die wenigen Linien des Aluminiums bekannt waren, einen mehr oder weniger grossen Strahlenreichthum entwickeln, dass die meisten von ihnen die bisherige Grenze des Ultravioletten sogar überschreiten und ausserdem, wie ich ergänzend hinzufügen will, nahezu mit derselben Wellenlänge abschliessen.

Ich hoffte nun durch verlängerte Belichtung und durch Funken von noch grösserer Energie mehr zu erreichen. Ich vermehrte die Anzahl meiner Tauchelemente, ebenso die Zahl der Flaschen, vertauschte das Inductorium mit der Influenzmaschine, die in Verbindung mit der Riessbatterie sehr energische Funken gab, änderte die Zusammensetzung meines Plattenüberzuges, indem ich dessen Jodgehalt zur Vergrösserung der Empfindlichkeit erhöhte, sensibilisirte meine Platten durch Ammoniakräucherung, kurz ich suchte auf alle Weise im brechbarsten Ultraviolett weiter vorzudringen, aber was ich dabei gewann, war kaum nennenswerth: bei einigen Spectren ein kleiner Längenzuwachs, aber jenseits Wellenlänge 182 $\mu\mu$ nicht die Spur einer Linie.

Es ist eine allenthalben in der Spectrumphotographie zu beobachtende Erscheinung, dass die Aufnahme sehr geschwächter Strahlen mit ungewöhnlichen Schwierigkeiten verknüpft ist, und dass auch noch so lange Belichtung hiebei nie zu klaren Bildern führt. So bin ich diesem Übelstande regelmässig an der Grenze der Lichtdurchlässigkeit des Prismenmateriales begegnet: bei schwerem Flintglas bereits am Anfange des Ultravioletten, bei leichterem Flintglas in der Gegend der Fraunhoferlinie *O*, bei Crownglas nahe bei *R*; ebenso an der Grenze der Lichtdurchlässigkeit der Luft, deren Lage, wie aus Vorstehendem hinreichend hervorgeht, von der Dicke der Luftschicht abhängig ist.[1]

---

[1] Dass der Erfolg hiebei, wenn auch nur zu einem kleinen Theile, zugleich von dem Empfindlichkeitsgrade der photographischen Platte abhängt, beweist unter andern die Thatsache, dass ich das Spectrum der Junisonne von meinem Laboratorium aus circa 120 *m* über dem Spiegel der Ostsee), mit

Gleichwohl würde der photographische Erfolg im brechbarsten Ultraviolett weit besser ausfallen, wenn nicht das Licht, das an den brechenden Flächen und im Innern der Prismen und Linsen (v. Helmholtz, Physiol. Optik, 2. Aufl., S. 303) entsteht, das Sehfeld regelmässig so kräftig erhellte, dass es bei anhaltender Belichtung die ganze Platte stärker als das Spectrum selbst färbte. Man kann nun zwar, wie ich bereits 1888 mit dem photographischen Spectralapparat des Herrn Oskar Simony in Wien (Anzeiger der k. Akademie der Wissenschaften in Wien; mathem. naturw. Classe, S. 37, 1889) gefunden habe, das diffuse Licht bedeutend mindern, indem man die Spaltlänge auf ein möglichst kleines Mass (0·2 *mm*) verkürzt, allein auch hier überwuchert es bei längerer Belichtungsdauer den zarten Eindruck der brechbarsten Strahlen bis zur gänzlichen Unsichtbarkeit.

Die Verkürzung des Spalts war das letzte Mittel, das mir so lange ich auf die angewandten Apparate angewiesen war, noch Aussicht auf bessere Erfolge eröffnet hatte.

Fasst man die Ergebnisse der mit der kurzen Brennweite erlangten Aufnahmen zusammen, so folgt daraus:

1. Dass der Erforschung des Spectralbezirkes zwischen den Wellenlängen 200 $\mu\mu$ und 185 $\mu\mu$, bei hinreichender Verminderung der Absorption der Strahlen durch die Luft, nichts mehr im Wege steht, und dass dazu die vorhandenen Beobachtungsmittel vollständig ausreichen, und

2. dass beinahe alle von mir versuchten Elektroden jenseits der bisher beobachteten Grenze des Ultravioletten noch photographisch wirksames Licht aussenden.

Das Erscheinen von Strahlen jenseits der Wellenlänge 185·2 $\mu\mu$ gab meiner Arbeit eine veränderte Richtung; anstatt dem bekannten Spectrum wie bisher, galt sie von nun an der Erschliessung des unbekannten Lichtgebietes zwischen den Wellenlängen 185·2 $\mu\mu$ und Null.

Von den Mitteln hiezu und dem gegenwärtigen Stand der Lösung dieser Aufgabe handelt der folgende Theil meines Berichtes.

Zettnow's Platten über die Fraunhoferlinie *U* hinaus photographiren konnte, während dieselbe Linie zu gleicher Zeit mit verschiedenen anderen Platten nicht erreichbar war.

Photographische Aufnahme des Spectralgebietes jenseits der Wellenlänge 185·2 μμ.

Die Vorarbeiten.

Die brechbarsten Strahlen des Aluminiums hatten nach den vorhergehenden Aufnahmen ihre Energie in einer Luftschicht von 17 *m* vollständig eingebüsst, bei 2 *m* Luft einen entwicklungsfähigen Eindruck auf der Platte hinterlassen und bei $^1/_3$ *m* Abstand des Funkens von der Platte zu einer guten Aufnahme geführt. Ihre photographische Wirkung und deren Steigerung waren sonach keine Folge einer Intensitätserhöhung des Funkens, sondern eine Folge der Verminderung des Widerstandes, dem die Strahlen auf ihrem Wege zur Platte begegneten. Der Funken genügte vollkommen, nur an der Energie der Strahlen fehlte es. Wenn sie einen langen Weg in der Luft zurückgelegt hatten, war ihre photographische Wirkung bei ihrem Eintritt in das Silberpartikel der Platte nicht mehr stark genug, um dessen Zerfall in hinlänglichem Masse einzuleiten. Die Erhaltung der Energie der Strahlen war es sonach, worauf sich der bessere Erfolg gründete.

Aller Wahrscheinlichkeit nach war auch bei der kleinsten Brennweite, die ich angewandt hatte, der Energieverlust der Strahlen, infolge von mancherlei Hindernissen, denen sie auf ihrem Wege begegneten, noch sehr bedeutend. Konnte ich ihn vermindern, so stand mir weiterer Erfolg in Aussicht. Und dass eine Verminderung möglich war, lag wohl ausser allem Zweifel. Schon die Beseitigung der Luft, die wenn auch nur in mässig dicker Schicht, immer noch zwischen Funken und Platte lag, versprach nennenswerthe Vortheile. Die Luft war aber nicht das einzige hemmende Absorbens, dem die Strahlen begegneten. Quarz absorbirt die brechbarsten Strahlen ebenfalls in merklichem Masse (L. Soret, Archives des Sc. phys. et nat., t. LXI, p. 332—334, 1878), ebenso Glycerin (W. A. Miller, Phil. Transact., Vol. CLII, p. 871 [1862]), womit die Hälften meines Quarzprismas verbunden waren, und auch die Gelatine, sogar in

sehr dünner Schicht hält sie nach Soret, (Archives des Sc. phys. et nat., III. Période, t. X, p. 453—455 [1883]) noch sichtlich zurück.

Bestanden diese Hemmnisse auch der photographischen Platte gegenüber, und gelang es sie zu beseitigen oder auch nur kräftig abzuschwächen, so war mir ein abermaliger Zuwachs an photographischer Energie gesichert.

Der photographische Effect ist nicht allein eine Function der Energie der Strahlen, er hängt vor allem von dem Verhalten der lichtempfindlichen Platte ab. Je lockerer die chemische Verbindung der lichtempfindlichen Bestandtheile des Plattenüberzuges ist, je mehr deren Lockerung, während die Strahlen daraufwirken, unterstützt wird (Sensibilisatoren, H.W. Vogel, Handbch. d. Photographie, IV. Aufl. 1890, S. 172, 193, 208), desto schneller geht ihr entwicklungsfähiger Zerfall bei der Belichtung vor sich. War es möglich, die brechbarsten Strahlen in dieser Weise zu unterstützen, dann gestalteten sich meine Aussichten auf Erfolg abermals günstiger.

Zarte Einzelheiten einer photographischen Aufnahme, schwache Lichteindrücke verlangen eine ganz schleierfreie Platte. Sie werden unklar, zweifelhaft, verschwinden sogar nicht selten wieder, wenn der Plattengrund nicht glasklar, sondern wie mit einer grauen Decke überzogen aus dem Entwicklerbade hervorgeht.

Wie bereits erwähnt, trat dieser Fall bei meinen Aufnahmen regelmässig ein, sobald ich anhaltend belichtete. Das zerstreute Licht aus dem Innern des photographischen Apparates die Ursache dieses Plattenschleiers, setzte sich aus Strahlen aller Brechbarkeit zusammen; allein verschleiernd wirkten nur die, wofür die Platte am empfänglichsten war. Bei Gelatineplatten und Funkenlicht sind das die Strahlen des weniger abgelenkten Ultraviolett, also Strahlen, deren ich zu meiner Aufnahme nicht bedurfte. Konnte ich sie fernhalten vom Apparat, dann gewann meine Aufnahme von neuem. Nicht nur, dass dadurch den zarteren Lichteindrücken grössere Klarheit gesichert wurde, die Zeichnung der ganzen Aufnahme gewann dadurch.

Diese Überlegung veranlasste eine Reihe von Untersuchungen, die der Wiederaufnahme meiner ursprünglichen Arbeit voranzugehen hatten. Die Aufgabe dieser Vorarbeiten bestand:

1. In der Ermittlung des Einflusses aller bei der photographischenWirkung der brechbarstenStrahlen des Funkenlichtes hiebei in Betracht kommenden Absorbentien, und

2. in der Verwerthung der hiebei erlangten Ergebnisse zur Beschaffung verbesserter Beobachtungsmittel für den in Rede stehenden Spectralbezirk.

Eine Ausnahme hiervon machte nur das Glycerin, das unberücksichtigt bleiben konnte, da das Doppelprisma des photographischen Apparates auch unverkittet correct arbeitet. Das Glycerin soll überhaupt nur dem durch Reflexion hervorgerufenen Lichtverlust vorbeugen, der an den sich berührenden Flächen der beiden Einzelprismen entsteht, sobald diese unverkittet bleiben.

Das Absorptionsverhalten des Quarzes und der Gelatine, den brechbarsten Strahlen des Aluminiums gegenüber, ist allerdings schon von Soret, und auch sehr sorgfältig ermittelt worden. Aber Soret hat sich dazu des Oculars bedient. Seine Ergebnisse brauchen darum mit dem Verhalten der photographischen Platte durchaus nicht übereinzustimmen.

Helligkeitsverhältnisse der Wellenlängen, wie sie Soret nach Massgabe der Fluorescenz ermittelte, haben immer einen relativen Werth. Sie sind allenfalls unter sich, nicht aber mit den Empfindlichkeitsverhältnissen der photographischen Platte vergleichbar; sie sind das ebensowenig, wie das Verhalten der einen Plattenart massgebend ist für das Verhalten einer andern Plattenart. Zwischen der ocularen und der photographischen Methode der Helligkeitsbestimmung, besonders der ultravioletten Strahlen besteht zwar ein innerer Zusammenhang, der der Absorption, aber wie wenig massgebend er für vorliegenden Fall ist, beweist am besten die Thatsache, dass jeder Stoff sein eigenes Absorptionsspectrum besitzt. Dass ferner oculare Helligkeitsbestimmungen, selbst wenn sie sich auf

Licht gleicher Qualität beziehen, für die objective Helligkeit auch dann noch einen nur beschränkten Anhalt gewähren, daran soll nur beiläufig erinnert werden.

Es war daher unbedingt nöthig, Quarz und Gelatine in dieser Richtung von Neuem zu untersuchen. In gleicher Weise war ich bei der Ermittlung der Absorptionswirkung der Luft auf mich selbst angewiesen.

Es kam nun noch ein Medium in Betracht, das für meine Aufnahmen als Absorbens von weit grösserer Bedeutung war, als die genannten Stoffe: der lichtempfindliche Bestandtheil der photographischen Platte, das Bromsilber. Von seinem Verhalten hing ja der Erfolg der Aufnahme in erster Linie ab. War es gegen die brechbarsten Strahlen wirklich so wenig empfindlich, wie es nach meinen Aufnahmen schien, dann entstand auch noch die weitere Aufgabe, nach einem zweckentsprechenderen Ersatz für das Bromsilber zu suchen.

Die Empfindlichkeitsbestimmung des Bromsilbers lief nun zunächst ebenfalls auf einen Absorptionsversuch hinaus. Denn nur dann, wenn es, und am besten in der, bei der photographischen Trockenplatte zur Anwendung gelangenden Modification, die Strahlen hinreichend kräftig absorbirte, konnte es noch höhere Empfindlichkeit besitzen. Über die Art der Extinction der Strahlen, ob photochemische oder photothermische, konnte freilich nur das photographische Verhalten eines von allen Beimengungen fremder Bestandtheile freien Bromsilbers entscheiden. Es könnte nun den Anschein haben, als sei zu vorliegendem Zweck die Aufnahme auf reinem Bromsilber allein ausreichend und die Kenntniss der Absorption entbehrlich gewesen. Dem würden jedoch einige Thatsachen jenes Theiles meiner Vorarbeiten widersprechen, der sich mit der Darstellung einer neuen photographischen Platte befasst, wovon späterhin noch die Rede sein wird.

Auf diese Weise durfte ich mir auf dem Gebiete der kleinsten Wellenlängen bessere Erfolge versprechen als bisher, doch immer noch mit der Befürchtung, dass die erhofften Strahlen jenseits der schon erreichten Wirkungsgrenze am Ende ein ganz anderes Verhalten bekunden könnten als die, worauf sich meine Vorversuche gründeten.

Ich begann meine Vorarbeiten mit dem Quarz, dem der Reihe nach die Gelatine, das Bromsilber und die Luft folgten.

Die Absorption der brechbarsten Strahlen des Aluminiums Nr. 30, 31, 32.

A. In Quarz. Die Beobachtung geschah nur auf photographischem Wege. Die Aufnahme der Absorptionsspectra erfolgte mit dem genannten Spectralapparat von 150 *mm* Brennweite auf Platten von hoher Empfindlichkeit (Zettnow). Als Lichtquell wirkte ein zwischen Aluminiumdrähten überspringender Flaschenfunken des schon genannten Inductoriums von 25 *cm* Funkenlänge. Einige Aufnahmen wurden auch beim Licht eines Wolframfunkens gemacht, das sich wegen der Gleichmässigkeit der Vertheilung und Wirksamkeit seiner Strahlen zu Absorptionsversuchen vorzüglich eignet. Die Quarzplatten, deren Absorption bestimmt werden sollte, waren rechtwinklig zur krystallographischen Hauptaxe geschnitten und ihre Dicke mass 3·0, 3·6, 5·2, 20 und 50 *mm*. Ihre Absorption ermittelte ich wie folgt:

Ich bedeckte die Öffnung des Collimatorspaltes mit der betreffenden Platte und machte damit, bei zunehmender Belichtungsdauer, eine Reihe untereinander stehender Aufnahmen des Aluminiumspectrums, dann entfernte ich die Platte vom Spalt und wiederholte die Reihe, entweder bei derselben oder auch bei proportional verkürzter Belichtungsdauer. Der Unterschied beider Reihen stellte dann die Absorption der betreffenden Strahlen in der gewählten Quarzplatte dar. Zum Nachweis sehr kleiner Unterschiede solcher Parallelaufnahmen, auch wo den unvermeidlichen, kleinen Helligkeitsschwankungen des Lichtquells Rechnung getragen werden sollte, wurden beide Spectra gleichzeitig photographirt. Ich bedeckte zu diesem Zwecke den Spalt auf seine halbe Länge mit der Quarzplatte, während die andere Spalthälfte von den Strahlen ungehindert durchsetzt wurde, und bekam dann bei jedesmaliger Belichtung zwei durch einen sehr schmalen Lichtstreifen — er rührt von der Seitenfläche der Quarzplatte her — getrennte Spectra, deren Unterschiede wie vorher der Lichtabsorption in der Quarz-

platte entsprachen. An solchen Aufnahmen treten, weil man beide gleichzeitig überblickt, alle Unterschiede besser zu Tage als dort, wo die Aufnahmen nach einander ins Gesichtsfeld geführt werden müssen. Zu dickern Platten eignet sich dieses Verfahren weniger, weil die Breite des genannten Lichtstreifens mit der Dicke der Platte wächst und schliesslich breiter ausfällt, als es der Zweck der Aufnahmen erlaubt. Der Lichtverlust, den die Strahlen durch Spiegelung an den planparallelen Flächen der Quarzplatte erleiden, war bei meinen Aufnahmen so gering, dass ich ihn unbeschadet der Zuverlässigkeit meines Ergebnisses unberücksichtigt lassen konnte.

Sämmtliche Aufnahmen haben, wie sich wohl von selbst ergibt, nur einen sehr relativen Werth. Denn da Prisma und Linsen des angewandten Spectralapparates ebenfalls aus Quarz bestehen, so stellen die Aufnahmen nicht bloss die Absorption der in den Strahlengang eingeschalteten Quarzplatte dar, sondern die einer bedeutend dickeren Platte. Die mittlere Gesammtdicke des Prismas und der Linsen des Apparates beträgt 21 *mm*. Meine Aufnahmen erfolgten demnach schon bei unbedecktem Spalt unter dem Einfluss einer Quarzschicht von 21 *mm* Dicke, und die Parallelaufnahmen dazu zeigen sonach nur, wie viel die den Spalt bedeckende Quarzplatte mehr Licht verschluckte. Über den wirklichen Widerstand des Quarzes kann keine einzige dieser Aufnahmen Auskunft geben. Dazu würden Prismen und Linsen aus absolut ultraviolett durchlässigem Material erforderlich sein.

Ich gebe nachstehend nur die Ergebnisse der 3, 20 und 50 *mm* dicken Platten, die hinlänglich zeigen, in welchem Masse der Quarz die Wirkung der brechbarsten Strahlen verlangsamt.

3 *mm* dicke Quarzplatte. Aluminiumfunken. Spaltweite 0·080 *mm*. Belichtung $2^1/_2$, 5, 10, 20 Secunden, je 1 Aufnahme mit und je 1 Aufnahme ohne Quarzplatte. Beide Reihen nur sehr wenig von einander verschieden, doch durchgängig die Aufnahmen mit Platte etwas weniger intensiv als die anderen. Dieser Unterschied tritt hauptsächlich an der Linie Nr. 32 hervor und lässt sich, da sie bei allen Belichtungen klar erschienen ist, an ihr besser als an den übrigen Linien verfolgen.

20 *mm* dicke Quarzplatte. Aluminiumfunken. Spaltweite 0·080 *mm*. Belichtung 15, 30, 60, 90, 120, 180, 240, 300 Secunden, je eine Aufnahme mit Platte und 5, 10, 20, 40 Secunden; je eine Aufnahme ohne Platte. Die Quarzplatte hat in allen Aufnahmen sämmtliche Strahlen (Nr. 30, 31, 32) vollständig absorbirt, während ohne Quarzplatte Nr. 32 durchweg, Nr. 30 hingegen nur bei 20 und 30 Secunden, und Nr. 31 mit ihrer minder abgelenkten Componente nur bei 30 Secunden erschienen sind.

50 *mm* dicke Quarzplatte. Aluminiumfunken. Spaltweite 0·080 *mm*. Belichtung 30, 60, 90, 120 Secunden, je eine Aufnahme mit Platte und 5, 10, 20, 40 Secunden; je eine Aufnahme ohne Platte. Genau wie bei der 20 *mm* Platte, nicht eine Spur der betreffenden Linien erschienen.

In demselben Sinne sind auch alle übrigen hier ungenannten Aufnahmen ausgefallen.

Danach ist der Quarz in dickerer Schicht für die brechbarsten Strahlen des Ultravioletten im hohen Grade schwer durchlässig. Meine früheren Aufnahmen vom brechbarsten Ultraviolett hatten demnach zweifellos unter dem hemmenden Einfluss des Materiales der angewandten Prismen und Linsen gestanden. Möglicherweise trug dessen Mangel an Durchlässigkeit die Hauptschuld an der Erfolglosigkeit der Aufnahmen des jenseits 182 $\mu\mu$ liegenden Spectralgebietes. So lange als ich mit Quarz fortarbeitete, durfte ich kaum bessere Ergebnisse erwarten als bisher. Die Beschaffung ultraviolettdurchlässigerer Prismen und Linsen war hierdurch zur unabweisbaren Nothwendigkeit geworden. Wollte ich mich nicht mit der Aufsuchung hierzu geeigneter Stoffe befassen, dann hatte ich keine Wahl, ich war dann, wie aus den vorhergegangenen Erörterungen hervorgeht, auf den Flussspath allein angewiesen. Und in der That sind in der Folge alle Aufnahmen, sogar schon die, wovon sogleich die Rede sein wird, die Absorptionsspectra der Gelatine, mit Prismen und Linsen aus weissem Flussspath ausgeführt worden.[1]

---

[1] Fehlerfreier Flussspath in farblosen Krystallen gehört zu den Seltenheiten. Die farbigen Varietäten, die minder schwer zu erlangen sind, sind

Dass jedoch meine Erwartungen, die sich an die grössere Durchlässigkeit dieses Minerales knüpften, in dem bereits mit Quarz beobachteten Theile des Spectrums nur mässig und jenseits dieses Theiles gar nicht in Erfüllung gingen, sei hier nur vorläufig und deshalb erwähnt, weil die folgenden Aufnahmen andernfalls leicht irrige Schlussfolgerungen veranlassen könnten.

B. In trockener Gelatine. Im Princip und der Anordnung glich der Versuch dem vorhergehenden. Viel Zeit hat die Herstellung der Gelatinehäutchen, deren Absorption bestimmt werden sollte, in Anspruch genommen. Soret hat sich einer wässerigen Gelatinelösung bedient, die er in einer mit parallelen Quarzwänden verschlossenen Cuvette zwischen Spalt und Lichtquell aufstellte. Ein jedenfalls ebenso bequemes als sicheres Mittel, um Gelatinefilter jeder gewünschten Dicke herzustellen, allerdings nur so lange anwendbar, als der Gegenwart des Wassers nichts im Wege steht. Wasser, selbst frisch destillirt, verhält sich aber den brechbarsten Strahlen gegenüber nicht

---

nicht lichtdurchlässig genug, um bei Aufnahme der brechbarsten Strahlen in Betracht kommen zu können. Einigermassen grosse Stücke des weissen Materials sind aber nie optisch rein: Sprünge, Schlieren und andere Fehler kommen allenthalben darin vor und stören die optische Wirkung daraus gefertigter optischer Gegenstände mehr oder weniger, oft, wie ich selbst wiederholt erfahren habe, in so bedenklichem Masse, dass ihre Verwendung, wo es sich um die Erzeugung klarer Bilder handelt, möglich wird. Es ist nicht zu viel behauptet, wenn ich sage, die Beschaffung tadelloser, grösserer Gegenstände aus weissem Flussspath zählt gegenwärtig zu den Unmöglichkeiten. Quarz, sogar Kalkspath, kommen in tadelloser Beschaffenheit immer viel häufiger vor als reiner weisser Flussspath. Unter solchen Umständen wäre die Beschaffung eines Flussspathkörpers für meinen Spectralapparat geradezu aussichtslos gewesen, wenn nicht Herr Carl Zeiss in Jena meiner Arbeit eingehendes Interesse geschenkt und mich in uneigennützigster Weise dabei unterstützt hätte. Herr Zeiss hat mir, obgleich er sich mit der Lieferung von Flussspathgegenständen nicht befasst, ausser einem grossen Prisma (70°) auch die erforderlichen Linsen und planparallele Verschlussplatten, alles aus ungewöhnlich reinem Flussspath und von höchster Vollendung der brechenden Flächen, zur Erweiterung meiner Ultraviolettbeobachtungen bereitwilligst überlassen. Herrn Zeiss ist für diese thatkräftige Unterstützung, zumal sie in der Folge die schönsten Früchte gezeitigt hat, mein Dank dauernd gesichert.

indifferent. Als Soret eine mit destillirtem Wasser gefüllte, 10 *mm* weite Cuvette in den Gang der Strahlen einschaltete, verschwand die Linie Nr. 32 vollständig, während sie nach dem Entleeren der Cuvette, wonach nur die Absorption der beiden Quarzwände übrig blieb, wieder sichtbar war. (Archives des Sc. phys. et nat., t. LXI., pag. 336 [1878].) Für mich war darum die Anwendung der Gelatine in Lösung ausgeschlossen.

Ich habe mich trockener Gelatinhäutchen bedient, die ich aus einer Lösung von Gelatine in Wasser hergestellt hatte. Die stärkeren von 0·1 *mm* Dicke und darüber kamen ohne Unterlage, die schwächeren hingegen auf einer planparallelen Quarzplatte zur Anwendung. Meine Beobachtungen beschränken sich auf Gelatinedicken, wie sie Bromsilbergelatineplatten eigen sind. Doch ist dabei vorzüglich auf solche Dicken Rücksicht genommen, wie sie voraussichtlich zwischen den einzelnen Bromsilbertheilchen des Plattenüberzuges vorkommen.

Man rechnet in der Praxis auf eine Platte von 13 und 18 *cm* Seitenlänge 10 cm^3 giessfertige Emulsion, die auf 100 Gewichtstheile Wasser 5 Gewichtstheile Gelatine enthält. Diesem Verhältnisse entsprechend, begoss ich eine nivellirte, planparallele Quarzplatte, die in der Folge zu allen Häutchen, und ebenso zur Aufnahme der Absorptionsspectra dieser benutzt wurde, mit einer fünfprocentigen Gelatinelösung, trocknete sie sorgfältig und mass danach das Gelatinehäutchen, das ich durch Ablösen der Plattenmitte entnommen hatte, mit einem Glashütter-Mikrometer für 0·01 *mm* Ablesung. Aus einer Anzahl Messungen ergab sich seine Dicke zu 0·020—0·021 *mm*, was mit Messungen, die von anderer Seite an Emulsionsplatten angestellt wurden, gut in Einklang steht. Auf dieses Dickenmass, das ich der Einfachheit halber zu 0·020 *mm* annehmen will, gründet sich die Dicke aller schwächern Häutchen, wovon in der Folge die Rede sein wird. Ich verhehlte mir nicht, dass das Verfahren, wonach ich hier und auch weiterhin die Dicke der Häutchen festgestellt habe, zu mancherlei Bedenken Anlass gäbe, allein ich hielt den damit erreichten Genauigkeitsgrad für den vorliegenden Zweck für vollständig ausreichend. — Dann stellte ich Lösungen her, die auf 100 Gewichtstheile Wasser: 2·5, 1, 0·5, 0·25, 0·125, 0·100, 0·063, 0·004, 0·002 Gewichtstheile

Gelatine (harte Emulsionsgelatine von Heinrichs) enthielten, goss davon mit einer Pipette für 1 cm^3 Inhalt dieselbe Menge wie vorher auf die genannte Quarzplatte und breitete die Lösung, mit einem dünnen Glasstab gleichmässig bis an den Rand der Platte aus. Das Trocknen des Plattenüberzuges geschah in der Wärme und ohne allen Luftzug, der, wie mir Vorversuche gezeigt hatten, bei gelatinearmen Lösungen Schichten gibt, die nach der Mitte der Platte zu dicker werden.

Die begossene, vorher sorgfältig nivellirte Quarzplatte lag auf einer Platte aus Spiegelglas, die wenige Millimeter über dem Wasserspiegel eines Warmwasserbades und auf dessen Gefässrand ruhte. Darüber, auf der Glasplatte, stand ein geräumiges, an beiden Enden offenes Metallrohr von mehreren Centimetern Höhe, das oben mit einer zweiten Glasplatte verschlossen war. Der Überzug der Quarzplatte trocknete sonach in einer Wasserdampfatmosphäre auf. Zum Entweichen des Dampfes genügte der lose Verschluss zwischen Rohr und Deckplatte. Die Dicke der so erlangten Häutchen betrug, auf Grund der vorstehenden Annahme 0·010, 0·004, 0·002, 0·001, 0·0005, 0·0004, 0·00025, 0·00008, 0·00004 *mm*. — Die getrocknete Platte entblösste ich in der Mitte längs eines saubern Schnittes auf einige Millimeter von ihrem Überzug und stellte sie vor dem photographischen Apparat so auf, dass der Spalt auf halber Länge von der überzogenen und auf der anderen Hälfte von der entblössten Platte bedeckt war. Jede Belichtung gab dann zwei Spectra; der Unterschied beider entsprach der Absorption des betreffenden Gelatinehäutchens. Als Lichtquell dienten Flaschenfunken von Cadmium, Zink, Aluminium, Thallium und Wolfram. Die Belichtung begann mit einem einzelnen Funken (Öffnungsfunken) und dauerte nie länger als drei Minuten. Die Platten waren diesmal von Dr. Schleussner in Frankfurt a. M.; die Entwicklung war wie früher. Die Aufnahmen (276) vertheilen sich auf 60 Platten.

Noch stärkere Häutchen stellte ich in ähnlicher Weise, jedoch mit dem Unterschiede her, dass ich sie nach dem Trocknen von der Platte ablöste, und, da sie in sich selbst nicht ganz gleichmässig ausgefallen waren, nach Massgabe des erwähnten Mikrometers in passender Dicke heraussuchte, in

Streifchen von 0·5 *mm* Breite schnitt und diese Streifchen i Reihenfolge ihrer Dicke quer über den 5 *mm* langen und 1 *mm* breiten Spalt eines kleinen, undurchsichtigen Schirmes, in einer gegenseitigen Abstande von 0·1 *mm* befestigte. Auf diese Weis entstand ein rostförmiges Strahlenfilter, dessen Stäbchen ein Dicke von 0·13, 0·07, 0·058, 0·04, 0·03, 0·02, 0·01 *mm* hatten. Bedeckte ich damit den Spalt, so gab jede Belichtung 7 verschiedene Absorptionsspectra, die durch ungeschwächte dem Abstande der benachbarten Streifchen entsprechende linienförmige Spectra von einander getrennt waren, die sich beim Ablesen der Absorptionsdata als zweckmässiges Orienti rungsmittel erwiesen. Drei solcher Aufnahmen, jede von andre Belichtungsdauer, sind immer auf ein Plättchen von 20 *mm* Breite ausgeführt. Solche Spectralreihen gewähren ihre Gedrängtheit halber einen ausgezeichneten Überblick. Selbs bei sechsfacher Vergrösserung kann man noch alle 45 Spectra einer solchen Platte gleichzeitig ins Gesichtsfeld bringen.

0·13 *mm* dicke Gelatineschicht. Cadmiumfunken Spaltweite 0·020 *mm*. Belichtungsdauer: 1, 4, 9 Funken, 1, 4 9, 16....81 Secunden. Die Absorption erstreckt sich auf da ganze Ultraviolett. Sie beginnt in kaum merklichem Masse an der Grenze des sichtbaren Spectrums, nimmt bis zur Lini Nr. 18 allmählich zu, steigt von hier an sehr rasch und erreich zwischen den Linien Nr. 18 und Nr. 23 dicht bei der Lini 246·93 $\mu\mu$ ihr Maximum. Diese Linie ist bei allen Aufnahmen die über 9 Secunden Belichtung erfordert haben, erschienen, doch durchgängig nur als Spur. Ihre Intensität lässt selbst bei 8 Secunden Belichtung nicht die mindeste Zunahme erkennen

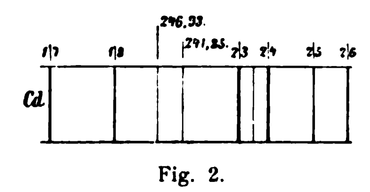


Fig. 2.

0·02 *mm* dicke Gelatineschicht. Versuchsanordnung ganz wie bei 0·13 *mm*. Die Absorption beginnt mit der Lini Nr. 12, wächst sehr allmählich bis zur Cadmiumlinie 241·85 $\mu\mu$

und geht bei schnellerer Zunahme, in der Nähe der Wellenlänge 230·70 μμ, in ein Maximum über. Die Linie Nr. 23 ist bei allen Aufnahmen über 9 Secunden Belichtung von gleicher Intensität, doch überall sehr blass. Die etwas stärker abgelenkte Grenzlinie dieser Aufnahmen, 230·70 μμ, ist nur als Spur zu erkennen.

0·01 *mm* dicke Gelatineschicht. Versuchsanordnung ebenfalls wie bei 0·13 *mm*. Die Durchlässigkeit ist hier schon bedeutend grösser als im vorhergehenden Falle. Die Absorption macht sich erst bei Wellenlänge 288·01 μμ bemerkbar. Anfänglich nimmt sie langsam, von 241·85 μμ aber schnell zu. Besondere Beachtung verdienen die brechbarsten Linien dieser Aufnahmen: bis Nr. 23 sind alle sehr intensiv, jenseits Nr. 23 aber, also auch die Linie 230·70 μμ, wieder auffallend blass und unklar. Die längste Belichtung von 81 Secunden hat diesmal zu einer etwas intensiveren und umfangreicheren Aufnahme geführt; sie läuft in Folge dessen auch etwas weiter ins Ultraviolett hinaus als alle übrigen. Sie endet mit der als Spur erschienenen Linie Nr. 24, Wellenlänge 226·55 μμ.

0·002 *mm* dicke Gelatineschicht. Cadmiumfunken, Spaltweite 0·010 und 0·020 *mm*. Belichtungsdauer 1, 2, 3, 4, 5, 6 Flaschenfunken, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 96 Secunden. Die Absorption beginnt mit der Linie Nr. 17, nimmt bis Nr. 18 kaum merklich, stärker bis Nr. 23 zu — bei sehr kurzer Belichtung erscheint Nr. 23 nur als Spur — und steigt dann so plötzlich, dass alle Linien bis Nr. 24 erst bei längerer Belichtung, dann aber kräftig wirken. Nr. 24 bildet den Schluss des Spectrums, und was ganz ungewöhnlich ist, als sehr intensive Linie. Von den brechbarern Linien Nr. 25 und 26 ist nicht eine Spur vorhanden.

0·001 *mm* dicke Gelatineschicht. Cadmium- und Zinkfunken. Sonst wie bei 0·002 *mm* Dicke. Die Durchlässigkeit weist hier bedeutende Fortschritte auf. Bis Nr. 24 ist das Spectrum fast in voller Kraft erschienen. Nr. 25 und 26, die vorher gänzlich ausgeblieben waren, treten jetzt schon, wenn auch noch sehr geschwächt, bei kurzer Belichtung auf, und selbst die brechbarsten Linien des Zinkes lassen sich bis zu der letzten (Nr. 29), die als Spur vorhanden ist, verfolgen.

0·0004 *mm* dicke Gelatineschicht. Zink-, Aluminium- und Wolframfunken. Im Übrigen wie bei 0·002 *mm* Dicke. Die Absorption verläuft diesmal durchaus gleichmässig. Das zeigt am besten das Wolframspectrum. Sie beginnt mit Nr. 23, ist bei Nr. 27 schon sehr beträchtlich, nimmt von da an progressiv zu und wird vollständig nahe bei der Aluminiumlinie Nr. 30, wovon sich bereits Spuren erkennen lassen.

0·00025 *mm* dicke Gelatineschicht. Zink- und Aluminiumfunken. Spaltweite 0·040 *mm*. Belichtungsdauer wie bei 0·002 *mm* Dicke. Die Durchlässigkeit dehnt sich auffallend weiter nach der brechbareren Seite aus. Alle Linien des Aluminiums kommen als Spuren zum Vorschein, Nr. 32 kräftiger als die übrigen.

0·00008 *mm* dicke Gelatineschicht. Aluminium-, Thallium- und Wolframfunken. Spaltweite 0·020, auch 0·080 *mm*. Belichtungsdauer: 1, 2 Flaschenfunken, 1, 2,. . . . 120 Secunden. Alle Linien des Aluminiums nur blasser als ohne Gelatineschicht erschienen. Gleichwohl lässt sich der Absorptionseinfluss auch noch bei so dünnem Häutchen bis zur Linie Nr. 26 verfolgen.

0·00004 *mm* dicke Gelatineschicht. Aluminium- und Wolframfunken. Spaltweite 0·020 *mm*. Belichtungsdauer: 1, 2 Funken, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 96 Secunden, bei Wolfram 3 Minuten. Auch von diesem ausserordentlich dünnen Häutchen wird das brechbarste Ultraviolett in ganz ungeahntem Masse absorbirt. Schon die brechbarsten Strahlen des Zinks erscheinen etwas geschwächt, weit mehr noch die des Aluminiums, und der ganze jenseits Nr. 32 liegende Theil des Wolframspectrums ist, sogar bei Belichtung von mehreren Minuten, gänzlich ausgeblieben. Nichts kann von dem Widerstand, den die brechbarsten Strahlen selbst in so dünner Schicht noch begegnen, eine bessere Vorstellung geben, als das Verhalten der Linie Nr. 32. Während ohne Gelatinefilter ihre ersten Spuren schon nach einer Secunde Belichtung hervortreten, wird sie mit dem Filter erst nach vier Secunden sichtbar; dieselbe Intensität, die sie nach 8 Secunden erlangt, erfordert beim Gelatinefilter die 3—4fache Belichtungsdauer, und nach 32 Secunden Belichtung ist sie immer noch intensiver, als bei Anwendung eines Filters nach 96 Secunden.

Fasst man diese Ergebnisse zusammen, so sieht man, dass die Gelatine das Ultraviolett bis zur Cadmiumlinie Nr. 18 nur sehr schwach, und erst von hier an kräftiger, jenseits der Linie Nr. 24 aber, in so gesteigertem Masse absorbirt, dass hier schon eine Gelatineschicht, die den zehnten Theil der Dicke des Überzugs einer gewöhnlichen Trockenplatte nicht übersteigt, alle Strahlen gänzlich zurückhält, und dass selbst der fünfzigste Theil dieser Schicht die allerbrechbarsten Strahlen (185·2) immer noch auf ein Drittel ihrer ursprünglichen photographischen Energie abschwächt. Dabei darf nicht ausser Acht gelassen werden, dass dieses Ergebniss mit Gelatineplatten, also unter dem hemmenden Einfluss desselben Absorbentiums gewonnen wurde, dessen Lichtdurchlässigkeit ermittelt werden sollte. Um wieviel grösser würde sich die Absorption nicht ergeben haben, wenn dabei gelatinefreie Platten hätten zur Anwendung kommen können.

Will man sich ein klares Bild von dem Widerstand, den die Gelatine den brechbarsten Strahlen in der photographischen Platte entgegensetzt, verschaffen, so muss man die Grössenverhältnisse zwischen der Dicke des Plattenüberzuges, den Bromsilbertheilchen und den angewandten Gelatinefiltern näher ins Auge fassen.

Das körnige Silberbromid, das in der Hauptsache den lichtempfindlichen Bestandtheil aller Gelatinetrockenplatten bildet, besteht, wie schon der Name besagt, aus kleinen Körnchen von kugeliger Form, die beispielsweise in meinen Emulsionen, auf Grund zahlreicher, jahrelang fortgesetzter Messungen einen Durchmesser von 0·0012 bis 0·0017 *mm* haben. Diese Körnchen sind in dem Plattenüberzug sehr gleichmässig vertheilt. Denkt man sich nun diesen Überzug in Schichten von der Dicke eines solchen Körnchens zerlegt, die mit der Oberfläche der Platte parallel laufen, so reicht schon eine einzige Schichte hin, um beinahe alle Strahlen zu absorbiren, die stärker abgelenkt sind als die Linie Nr. 24. Vorausgesetzt ist hiebei nur, dass die Bromsilberkörnchen nicht lichtdurchlässiger seien als ihr Bindemittel, die Gelatine. Und diese Annahme hat insoferne einige Berechtigung, als sowohl die Entstehungsweise des Bromsilbers in Gelatineemulsion, als auch sein

übriges Verhalten gezeigt hat, dass das Körnchen nicht nur i
Gelatine gebettet, sondern auch von Gelatine durchsetzt ist. Ab
hievon ganz abgesehen, geht aus dieser Erörterung eindeut
hervor, dass der rein photochemische Effect in diesem Thei
des Spectrums nur auf die obersten Schichten des Plattenübe
zuges beschränkt ist, und dass die Zahl dieser Schichten auc
noch mit der Wellenlänge der betreffenden Strahlen abnimm
Wenn dies der Fall ist, dann liegen aber die Verhältnisse hier gena
so, wie bei Platten mit sehr dünnem Emulsionsüberzug: die
geben immer ausdruckslose, blasse und meist ganz unbrauchba
Aufnahmen.

So sprechen denn alle Umstände dafür, dass der Mang
an Intensität und Empfindlichkeit, den die Gelatineplatte b
Aufnahme des brechbarsten Ultraviolett regelmässig zei
ebenso die plötzliche Abnahme beider jenseits der Cadmiur
linie Nr. 24 nicht zum kleinsten Theile auf ungenügende Durc
lässigkeit der Gelatine zurückzuführen sei.

C. In Silberbromid. Setzt man Silberbromid den Lich
strahlen aus, so nimmt es bald eine blaugrauviolette Färbur
an. Dieser Umstand durfte bei der Ermittlung seiner Lichtdurc
lässigkeit nicht unbeachtet bleiben. Ich habe ihm insofer
Rechnung getragen, als ich die Belichtungsdauer bei der Au
nahme auf ein kleinstes Zeitmass einschränkte. Die hier
erforderlichen sehr energischen Funken lieferte die genann
Influenzmaschine in Verbindung mit der Riessbatterie, doc
kam daneben auch ein Inductorium zur Anwendung. Da
meine Bromsilberfilter eine Färbung angenommen haben müsse
obgleich der Augenschein dem regelmässig widersprach, lie
in der Natur der Sache. Ob und inwieweit diese Färbung ab
in den Absorptionsspectren zum Ausdruck gekommen ist, daf
habe ich mir einen sicheren Anhalt nicht verschaffen könne
Aus einem Umstande lässt sich jedoch schliessen, dass i
keine grössere Bedeutung beizulegen ist: die erste und d
letzte Aufnahme desselben Filters sind nicht wesentlich vo
einander verschieden.

Das Silberbromid zu den Filtern wurde, wie das d
Gelatinetrockenplatte, mit überschüssigem Bromalkali darg
stellt, dann gewaschen und damit, in keilförmiger Schicht, d

zu den Gelatineversuchen benutzte Quarzplatte überzogen und getrocknet. Wie bei der Gelatine, so wurde auch hier der Plattenüberzug auf kurzer Strecke, diesmal jedoch an drei Stellen zunehmender Dicke, weggeschabt. Auf diese Weise entstanden drei Strahlenfilter verschiedener Lichtdurchlässigkeit. Die Dicke dieser Filter habe ich nicht ermitteln können. Das zur Gelatine benützte Mikrometer war der Verletzlichkeit des Plattenüberzuges wegen dazu gänzlich unbrauchbar und das Mikroskop nicht sicher genug. Die Anwendung der Filterplatte bei der photographischen Aufnahme war hier wie bei der Gelatine. Die Aufnahmen erstrecken sich diesmal, nicht wie in den vorhergehenden Fällen, bloss auf das brechbarste Ultraviolett, sie umfassen das ganze Gebiet von der Fraunhoferlinie *D* an, bis zu den brechbarsten Strahlen des Aluminiums.

Ich hatte ein grösseres Spectralgebiet als bei den vorhergegangenen Aufnahmen gewählt, um einen besseren Einblick in die Absorptionsverhältnisse des Silberbromids zu erlangen. Die Platten (Zettnow) dazu enthielten Erythrosinsilber, das wie bekannt, der Bromsilbergelatine eine ausgezeichnete Gelbempfindlichkeit bei sehr erhöhter Intensität verleiht. Zu Elektroden dienten bei der Influenzmaschine zwei Messingkugeln; sie lieferten ein sehr wirksames Licht. Bei einer Spaltweite von 0·020 *mm* gab ein einziger Funken das Spectrum in beinahe ununterbrochener Folge seiner Linien von *D* an bis zur Wellenlänge 200 $\mu\mu$. Zu den brechbarsten Strahlen wurden wieder Aluminiumelektroden und das Inductorium benutzt.

Das Gesammtergebniss dieser Aufnahmen lässt sich kurz dahin zusammenfassen, dass das angewandte Silberbromid alle Strahlen des genannten Gebietes, auch die cyanblauen, grünen und gelben, energisch absorbirt. Schon die dünnste der drei Schichten, obgleich sie dem Auge gegenüber stark durchscheinend war, hat das Licht des einzelnen Funkens beinahe vollständig zurückgehalten. Die dickeren Schichten haben selbst bei etwas längerer Belichtung dasselbe gethan. Vergleicht man nun die untereinander photographirten Spectra gleicher Belichtungsdauer, so findet man, dass sich die Absorption im Silberbromid fast gleichmässig über das ganze Spectrum erstreckt, dass jedoch die brechbarsten Strahlen, ungefähr von Wellen-

länge 210 $\mu\mu$ an, davon etwas weniger berührt werden. Diese
Theil des Spectrums ist allenthalben relativ etwas kräftiger al
das andere Spectrum. Danach würde also, wenn das Mass de
Absorption für die Empfindlichkeit einen sicheren Anha
gewährte, die Empfindlichkeit des Silberbromids nach der
brechbareren Ende hin etwas abnehmen. Ich möchte jedoc
solcher Schlussfolgerung keinen zu hohen Werth beigeleg
wissen, weil, wie aus dem vorhergehenden hinlänglich bekann
ist, die Linien dieses Bezirkes im Allgemeinen blasser ausfalle
als die übrigen, und sich in Folge dessen der Intensitätscontras
zwischen den Parallelaufnahmen, worauf es hier ankomm
innerhalb so enger Grenzen bewegt, dass seine Schätzun
immer mit ziemlicher Unsicherheit behaftet ist.

Nach diesen Aufnahmen liess sich annehmen, dass da
Silberbromid zur Aufnahme des unbekannten Ultraviolett hin
länglich empfindlich und der Mangel an Intensität, woran mein
Aufnahmen litten, nur auf die Gegenwart der Gelatine zurück
zuführen sei.

D. In Luft. Bei meinen bisherigen Aufnahmen der brech
barsten Strahlen hatte eine Verkürzung der Brennweite de
Luftwiderstand in gewünschtem Masse abgeschwächt. D
gegenwärtige Zweck verlangte energischere Mittel. Die Lu
musste vollständig oder doch so weit beseitigt werden, da
ihr Widerstand den photographischen Effect nicht nachhalt
schädigte. Die Umstände drängten sonach wieder, doch diesm
in verstärktem Masse zur photographischen Aufnahme im lu
leeren Raume, worauf bereits meine früheren Entwürfe f
einen ultraviolettdurchlässigen Spectralapparat Rücksicht g
nommen hatten.

Der Ausführung eines evacuirten Spectralapparates stand
jetzt noch dieselben Bedenken entgegen wie früher. Und do
war es das einzige, übriggebliebene Mittel, das, so lange i
den Weg der planmässigen Ergründung der Aufnahmehinde
nisse nicht verlassen wollte, noch Aussicht auf Erfolg liess.

Die technischen Schwierigkeiten beim Baue eines solch
Apparates vermehren sich, sobald man ausser Prisma u
Linsen auch Platte und Spalt ins Vacuum verlegt. Bleiben bei
ausserhalb des Vacuums, dann wird nicht nur die Herstellu

wesentlich erleichtert, sondern auch die Bedienung des Apparates vereinfacht. Die Einstellung des Spaltes, die Pflege der Spaltkanten, das Wechseln der Platten und die Verschiebung der Cassette bei Aufnahmereihen, auch die Einrichtung der Cassette selbst, dass alles kann dann genau so wie bei gewöhnlichen photographischen Spectralapparaten bleiben. Auch das Evacuiren gestaltet sich dann einfacher. Es braucht nicht bei jedesmaligem Plattenwechsel zu geschehen. Der einmal evacuirte Apparat ist für lange Zeit und zu beliebig vielen Aufnahmen gleichgut geeignet. Zudem ist ein solches Instrument in seinem evacuirten Theile verhältnissmässig einfach, und ohne Schwierigkeiten kann damit die Luftschicht zwischen Spalt und Platte auf das bescheidene Mass von einem Centimeter Dicke gebracht werden. Eine Luftschichte von dieser Dicke hielt ich aber, nach den Beobachtungen anderer und auch nach meinen eigenen, für vorliegenden Zweck als ganz unbedenklich. War die Luft meinen früheren Aufnahmen mit kurzer Brennweite überhaupt hinderlich gewesen, dann musste, wenn ich die Schichtendicke auf mehr als den dreissigsten Theil verminderte, wie es thatsächlich bei einer einen Centimeter dicken Luftschichte der Fall war, das Spectrum darüber Aufschluss geben.

Diese Idee liegt denn auch dem Apparat zu Grunde, womit ich nunmehr die Absorption der brechbarsten Strahlen in der Luft festzustellen suchte.

Ich brachte Prisma und Linsen des Apparates von kurzer Brennweite, unter genauer Einhaltung ihrer gegenseitigen Stellung, in ein luftdicht verschlossenes Gehäuse aus Messing, das hinter dem Spalt und vor der photographischen Platte zwei Lichtöffnungen hatte, die mit planparallelen Platten aus Flussspath verschlossen waren. Ausserhalb des Vacuums, 2 *mm* senkrecht von der betreffenden Flussspathplatte entfernt, befanden sich die Spaltöffnung und die photographische Platte. Beim Gebrauch war der Apparat durch eine mit Schliffen versehene Rohrleitung aus Glas mit einer Quecksilberluftpumpe (Geissler, Bonn) verbunden, womit er nach Art der Geisslerröhren evacuirt wurde.

Dies in groben Umrissen mein erster evacuirbarer Spectralapparat. Ich unterlasse es hier, auf seine Einrichtung, besonders

die der Objectivbewegung, des Spaltschlittens und der Casse
tenbahn näher einzugehen, da ich ihn einiger wesentlich
Verbesserungen wegen, die er in der Folge erfuhr, erst spät
ausführlicher zu besprechen gedenke. Jedoch will ich zu
besseren Verständniss der nachfolgenden Ergebnisse den W
der Strahlen beschreiben, den sie zwischen Funken u
photographischer Platte bei 4 *mm* Abstand des Funkens vo
Spalt zurücklegten. Die Strahlen durchsetzten, ehe sie d
Vacuum erreichten, eine 6 *mm* dicke Luftschicht und die ers
Verschlussplatte (3 *mm*), im Vacuum die Collimatorlinse, d
Prisma und die Cameralinse, beim Verlassen des Vacuums, u
zwar unter einem Winkel von 26°, die andere, eben so dic
Verschlussplatte und endlich, unter demselben Winkel, d
2 *mm* dicke Luftschicht, die die Verschlussplatte von d
photographischen Platte trennte. Da auch Prisma und Lins
aus Flussspath bestanden, so kamen als Absorbentien, auss
Flussspath, nur noch Luft in Betracht, die bei genanntem A
stand des Funkens vom Spalt, und in Anbetracht des Umsta
des, dass sich der Weg der Strahlen in der geneigten, 2 *m*
dicken Luftschicht vor der photographischen Platte verdoppel
wie eine Schicht von annähernd 10 *mm* Dicke wirkte.

Den Funken lieferten das kleinere Inductorium und ei
Leydner Flasche. Die Elektroden bestanden aus Aluminium u
Wolfram. Die photographischen Platten waren von Schleussn
Ihre Behandlung nach der Aufnahme glich der früheren.

Die photographische Aufnahme des Spectrums war, nac
dem der Apparat evacuirt worden war, ganz wie beim lufterfü
ten Apparat. Zum Evacuiren genügten 10 bis 15 Minuten. D
Druck sank dabei weit unter einen Millimeter Quecksilbersäu
Allerdings trat danach wieder eine kleine Zunahme des Druc
ein, wozu die an der Innenwand und in den Poren des me
singenen Gehäuses haftende Luft Anlass gab. Wo dieser Druc
wechsel störte, dauerte das Evacuiren länger, es erforderte da
Stunden, und ob ich selbst danach vor aller Druckschwanku
während der Aufnahme sicher war, darüber habe ich mir e
lange nachher Gewissheit verschaffen können. Ich meine hi
Veränderungen der Barometerprobe der Luftpumpe, den
gegenüber das Kathetometer ohnmächtig ist, die aber gleic

wohl in den Schichtungen der Geisslerröhre noch in sinnfälligster Weise zum Ausdruck kommen. So kleine Schwankungen waren bei den gegenwärtigen Aufnahmen, so weit sie die Absorption betrafen, bedeutungslos. Anders konnte es sich mit ihrem Einfluss auf das optische Vermögen des Apparates verhalten, eine Frage, die, wie ich gleich zeigen werde, für die Aufnahmen Bedeutung erlangen sollte.

Schon die erste Aufnahme mit evacuirtem Apparat zeigte, wie günstig die Verminderung der Luftschichte wirkte. Das Spectrum des Wolframs lief jetzt jenseits Wellenlänge 185·2 $\mu\mu$ um die Hälfte weiter ins Ultraviolett hinaus als vorher. In einer Minute erreichte ich mehr, als vorher in 15 Minuten. Die beiden Componenten der Aluminiumlinie Nr. 32 stehen in diesen Aufnahmen 0·5 *mm* von einander ab. Bei $^1/_3$ *m* Luft und 15 Minuten Belichtung lässt sich das Wolframspectrum 2·5 *mm*, bei 1 *cm* Luft und 1$^1/_2$ Minuten Belichtung hingegen 4 *mm* weit nach der brechbareren Seite verfolgen. Die Luft hatte demnach bei meinen früheren Aufnahmen noch als sehr beträchtliches Hinderniss gewirkt. Noch besser trat die Undurchlässigkeit der dickeren Luftschichte bei Aufnahme des Aluminiumspectrums hervor. Schon bei 30 Secunden kamen, 6 *mm* von Nr. 32 entfernt, also dort, wo vorher nie eine Lichtwirkung zu beobachten gewesen war, die ersten Spuren einer Liniengruppe zum Vorscheine, der sich bei allerdings sehr mässiger Zunahme ihrer Intensität, nach 15 Minuten noch drei stärker abgelenkte Linien zugesellten. Die brechbarste dieser Linien liegt 9 *mm* von Nr. 32 entfernt. Alle Versuche, noch brechbarere Linien nachzuweisen, verliefen erfolglos.

Das war das Ergebniss, so weit es sich auf den ursprünglichen Zweck der Vacuumaufnahmen, die Absorption der Strahlen in der Luft, bezog.

Anders stand es mit der Verwendbarkeit des Apparates für den Endzweck meiner Arbeit, die Erschliessung des Gebietes der kleinsten Wellenlängen. Denn dass der lufterfüllte Apparat hiebei jetzt nicht mehr in Frage kommen konnte, ging aus allen Vacuumaufnahmen klar hervor. Ohne das Vacuum musste selbst jede weitere Verbesserung meiner Beobachtungsmittel wirkungslos bleiben.

Aber das Vacuum allein genügte noch nicht. Ohne vo
endete Klarheit waren die Spectra bei ihrer geringen Läng
woran mich constructive Schwierigkeiten des Apparates bande
werthlos. Auf klare Definition hatte ich eben so grossen Wer
zu legen. Und daran fehlte es meinen Vacuumaufnahmen oh
Unterschied. Ihre sämmtlichen Linien erschienen verwasche
nirgends trat die Schärfe hervor, die ich von demselben Prisn
und Linsen von den früheren Aufnahmen her gewohnt w
Ohne die Erkenntniss der Ursache dieser Aberration war jed
fernere Fortschritt meiner Arbeit ausgeschlossen.

Zwei wesentliche Punkte waren es, worin sich der ev
cuirte Apparat von dem lufterfüllten unterschied. Brechung u
Zerstreuung erfolgte im Vacuum durch das Flussspathprisn
allein, im lufterfüllten Apparat dagegen durch dasselbe Prisn
und ausserdem durch zwei Luftprismen, die jenes in umg
kehrter Richtung, nach Art der Rutherfurdprismen, wie nac
stehende Figur zeigt, symmetrisch bekleideten und voraussic

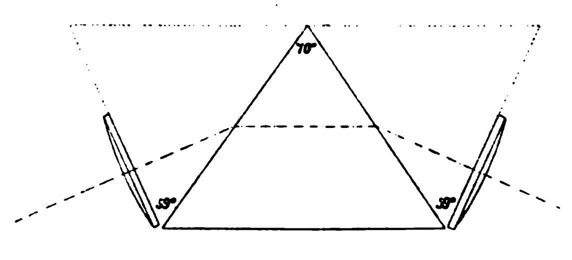


Fig. 3

lich auf die Ablenkung und Länge des Spectrums nicht oh
Einfluss blieben. Der brechende Winkel dieser Luftprism
wurde gebildet von der betreffenden Fläche des Flussspa
prismas und der zunächst liegenden Fläche der benachbar
Linse. Passirten die Strahlen das Flussspathprisma symmetris
dann waren beide Luftprismen gleich gross und ihr brechen
Winkel mass, wenn die Linie Nr. 31 im Minimum der Abl
kung stand, 59°. War nun der Einfluss dieser Luftprism
beträchtlich, dann war es möglich, dass schon kleine Dru
veränderungen im Apparate das Spaltbild in der Längsrichtu

des Spectrums verschoben und in dieser Weise die erwähnte Unklarheit der Linien hervorriefen.

Untereinander stehende Spectra, das eine bei 760 *mm* Druck, das andere nach dem Evacuiren des Apparates, bei unveränderter Stellung der Platte aufgenommen, zeigten in der That eine sehr starke Verschiebung der Linien. Die Componenten der Linie Nr. 31 sind, ihrer Wellenlänge nach, um 0·5 $\mu\mu$ von einander verschieden, und um genau so viel haben die Luftprismen die brechbarere der beiden Componenten und die anderen Linien in wenig davon verschiedenem Masse verschoben.

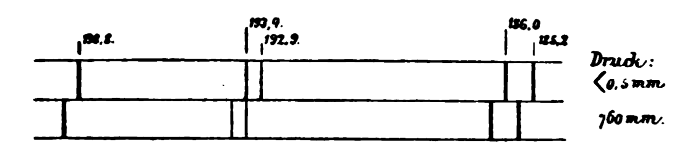


Fig. 4.

Was von dem Prisma gilt, gilt aber auch von den Linsen. Ihre Brennweite ist darum im lufterfüllten Apparate grösser als im evacuirten. Die Abhängigkeit der Brennweite vom Luftdruck habe ich jedoch, vermuthlich weil meinen Aufnahmen die hierzu erforderliche Schärfe fehlte, nicht einmal bei grösserer Druckdifferenz, noch weniger bei den in Betracht kommenden kleinen Schwankungen experimentell nachweisen können.

Aber auch die Linienverschiebung durch die Luftprismen, wie sie voraussichtlich schon den kleinen Druckschwankungen folgten, wovon vorhin die Rede war, reichte, wie sich nach den Aufnahmen von 0 und 760 *mm* Druck wohl ohne weiters ergibt, zur ursachlichen Erklärung der mangelhaften Definition nicht hin. Unter solchen Umständen konnte die Ursache hiervon nur in der anderen Eigenthümlichkeit des Vacuumapparates liegen, den beiden, in die Strahlen eingeschalteten Flussspathplatten. Ihrer technischen Ausführung nach waren die Platten tadellos. Die optischen Flächen waren von vollendeter Planheit. Anders schien es mit dem Material zu stehen. Wie schon bemerkt, ist Flussspath in grösseren Stücken selten ganz homogen. Meine

Platten waren zwar an der Durchgangsstelle der Strahlen kry
stallklar, dem Anscheine nach sogar reiner als das Prisma un
die Linsen; dass sie aber dennoch von Krystallfehlern nicht fr
waren, schliesse ich daraus, dass meine Aufnahmen sichtlic
an Klarheit gewannen, als ich die lichtempfindliche Platte, nicl
wie bisher, hinter der Flussspathplatte, sondern dicht davo
also im Vacuum aufstellte und dass auch die Verlegung d
anderen Platte vor den Spalt, in gleichem Sinne, wenn auch nu
in bescheidenem Masse wirkte.

Diese Thatsache wurde für die Fortsetzung meiner Arbe
folgenschwerer, als sich anfänglich voraussetzen liess: sie fo
derte eine tiefeingreifende Umgestaltung meines Apparates, w
bei gerade seine kostspieligsten Theile, deren Herstellung mic
am längsten in Anspruch genommen hatte, durch andere erset
werden mussten.

Ehe ich mich jedoch hiermit befasste, hielt ich es für rat
sam, vorher die übrigen Absorptionsergebnisse, die der Gelati
und des Bromsilbers, zur Verbesserung des bisher angewandt
photographischen Verfahrens zu verwerthen, um dessen etwai
Änderung erforderlichenfalls beim Umbau des Apparates berüc
sichtigen zu können.

Die neue ultraviolettempfindliche Platte.

Eine Platte mit reinem Bromsilberüberzug würde jede
falls der Aufnahme der Strahlen kleinster Wellenlänge d
besten Dienste leisten. Ich habe hiebei lange an die Verwe
dung der Daguerreplatte gedacht, die sich hierzu, weil frei v
hemmenden Absorbentien, vielleicht nach dem Verfahren sens
bilisirt, das Edmond Becquerel zur Aufnahme des Sonne
spectrums anwandte, besser als die Gelatineplatte zu eign
schien. Dass ich von ihrer Verwendung füglich absah, dar
trugen nur ihre mässige Empfindlichkeit und die Art ihrer En
wicklung schuld.

Versuche, Platten mit gelatinearmer Bromsilberemulsi
zu überziehen, misslangen mir vollständig. Das Bromsilb
lagerte sich auf der Platte vor dem Erstarren des Überzug
ab, und darüber bildete sich eine fast bromsilberfreie Schich

von Gelatine, die den brechbarsten Strahlen gegenüber jeden Erfolg vereitelte. Erst als ich reines Bromsilber, auf einer Spiegelglasplatte ausgebreitet, dem Spectrum exponirte, gewann ich einigen Anhalt für die Darstellung einer Platte, wie ich sie zu meinen Versuchen brauchte.

Das reine Bromsilber gab von dem Spectralbezirk jenseits 185·2 μμ ein höchst intensives Bild, vielmal dichter als irgend eine der vorher exponirten Gelatineplatten. Hier war endlich, wenn auch in höchst unvollkommener Weise, zum ersten Male erreicht, was meinen sämmtlichen Aufnahmen bisher gefehlt hatte: die zu einem klaren Linienbilde erforderliche Intensität. Diese Aufnahme auf reinem Bromsilber, so unvollkommen sie auch sein mochte, erlangte gleichwohl in der Folge für meine Arbeit fundamentale Bedeutung. Sie bildete den Ausgangspunkt einer, auch jetzt noch nicht abgeschlossenen photochemischen Untersuchung, die sich mit dem Verhalten der Silberhaloide, der Gelatine und ihrer in Wasser löslichen Bestandtheile, des Collodium, des Gummi arabicum, des Agar-Agar im ultravioletten Lichte befasst.

Zu den Hauptergebnissen dieser Arbeit zählt eine neue photographische Platte von grosser Ultraviolettempfindlichkeit und eben solcher Intensität. Mit dieser Platte, dem genannten Flussspathkörper und unter Ausschluss der Luft habe ich späterhin vom äussersten Ultraviolett Aufnahmen von tadelloser Schärfe erlangt, und von da an datiren auch meine besseren Ergebnisse mit den noch stärker abgelenkten Strahlen.

Seit 2½ Jahren habe ich alle Strahlen, deren Wellenlänge unter 185·2μμ liegt, nur mit dieser Platte photographirt, da sie vorläufig erst das einzige Mittel ist, das die Beobachtung dieses Spectralbezirkes ermöglicht.

Die neue Platte entwickelt ihre Maximalempfindlichkeit im brechbarsten Ultraviolett. Beispielsweise gibt sie vom Spectrum des Aluminiums immer zuerst die Linie Nr 32 und danach die anderen Linien. Nach Roth hin nimmt ihre Empfindlichkeit allmählich, von Cyanblau an aber rasch ab, so dass sie sich im Grün nur bei sehr energischer Insolation färbt.

Sie ist sonach für das minderabgelenkte Ultraviolett und fü
das sichtbare Spectrum weniger als für das übrige Spectru
empfänglich.

Diese Minderempfindlichkeit macht sie zur Photograph
alles stärker abgelenkten Ultraviolett nur noch geeigneter. Der
gegen das diffuse, aus dem Innern des Prismas und der Linse
des Apparates stammende Licht, das bei Gelatineplatten de
Plattengrund so gern verschleiert und häufig alle zarten Lich
eindrücke verwischt, ist sie so unempfindlich, dass sie stunde
lange Belichtung ohne Gefahr der Verschleierung verträgt. S
bietet hiernach, neben der gewünschten Empfindlichkeit, auc
noch die Vortheile, die sich vorher nur von einem geeignete
Strahlenfilter erwarten liessen.

Die Behandlung der neuen Platte ist von der der Gelatin
platte nicht verschieden. Die Entwicklung erfolgt mit Pyroga
lussäure und Soda und ist gewöhnlich in zwei Minuten beende
Das Fixirbad ist eine Lösung von Fixirnatron in Wasser (1:4
Das Fixiren geht ungemein rasch von statten, meist genüge
wenige Secunden dazu. Das Auswaschen der Fixage dauert ein
Minute und das Trocknen nicht viel länger. Die Prüfung de
trockenen Platte unter dem Mikroskop kann stets schon wenig
Minuten nach beendeter Entwicklung vorgenommen werde
Ein Vortheil, den vielleicht keine andere Platte in gleiche
Masse bietet.

Das Negativbild ist, seiner Intensität und seinem Korn
nach, von der Präparation der Platte abhängig. Es kann ein seh
feines Korn haben, dann ist es aber nie so intensiv als b
gröberem Korn, wo es schnell absolute Undurchsichtigke
erlangt. Zwar lassen sich auch die Platten, die sonst ein fei
körniges Bild geben, durch geeignete Entwicklung zu höchst
Intensität bringen, aber nicht ohne dass zugleich das Korn a
Grösse zunimmt und die Platte weniger brillant wird.

Zu mikroskopischen Messungen, für den Comparato
eignet sich das intensive Bild, also das grobkörnigere, b
weitem besser als das feinkörnige. Diese Thatsache steht i
Widerspruch mit der bisherigen, an anderen Platten gemachte
Erfahrung, wonach das feinkörnigere Bild immer die schärf
gezeichnete Linie gibt.

Das Bild der neuen Platte verträgt noch recht gut hundertfache Vergrösserung, ohne dabei zum Ausmessen untauglich zu werden.[1]

Verzerrungen des Negativbildes, die bei Gelatineplatten recht wohl vorkommen können, halte ich bei dieser Platte für gänzlich ausgeschlossen.

Die Herstellung der neuen Platte bietet zur Zeit noch Schwierigkeiten. Ich habe darum auf die Verbesserung des Präparationsverfahrens, die mit der Ausbildung der Photographie der neuen Strahlen Hand in Hand geht, mein ganzes Augenmerk gerichtet. Das Verfahren, wie ich es jetzt ausübe, halte ich zur Veröffentlichung noch nicht zuverlässig genug. Ausserdem möchte ich damit zugleich eine Reihe zugehöriger neuer Thatsachen in geordnetem Zusammenhange geben. Dazu macht sich aber die Verification einiger dieser Ergebnisse nöthig. Ich ziehe es daher vor, den photochemischen Theil dieser Untersuchung getrennt hiervon zu behandeln und mit seiner Veröffentlichung bis zu seinem endgiltigen Abschluss zu warten.

---

[1] Herr Zettnow hat einige meiner Spectralaufnahmen mit einem Apochromatobjectiv (Zeiss) photographisch bis 325fach vergrössert und gezeigt, dass die Linien, selbst bei so starker Vergrösserung, noch ihren scharf gezeichneten, wenn auch zackigen Umriss behalten, und dass manche Liniengruppe sogar bei 30facher Vergrösserung dem unbewaffneten Auge noch nicht einmal aufgelöst erscheint.

XI. SITZUNG VOM 20. APRIL 1893.

Herr Intendant Hofrath Ritter v. Hauer führt den Vorsi

Der Secretär legt das erschienene Heft III (März 189 des 14. Bandes der Monatshefte für Chemie vor.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. A. Bauer in Wien übermitt für die akademische Bibliothek ein Exemplar des von ih herausgegebenen Werkes: »Die Adelsdocumente öste reichischer Alchemisten und die Abbildungen einig Medaillen alchemistischen Ursprunges«. Wien, 189

Ferner übersendet Herr Hofrath Bauer eine Arbeit a dem Laboratorium für allgemeine und analytische Chemie der k. k. technischen Hochschule in Wien von Prof. Dr. Benedikt und Dr. H. Strache: »Zur Analyse der äthe schen Öle«.

Herr Privatdocent Ing. August Rosiwal in Wien macht ei vorläufige Mittheilung über eine neue Methode der Här bestimmung durch Schleifen, nach dem Principe von Pr fessor F. Toula.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Lang überreicht ei Abhandlung von Herrn Victor Schumann in Leipzig: »Üb die Photographie der Lichtstrahlen kleinster Welle längen«.

Herr Prof. Franz Toula überreicht zwei Abhandlung als die beiden ersten Nummern einer Reihe von Publication

welche er herauszugeben vor hat, unter der Bezeichnung: »Geologische Mittheilungen aus den Balkanländern«.

Die erste dieser Abhandlungen hat Herrn Prof. Dr. A. v. Koenen in Göttingen zum Verfasser und führt den Titel: »Über die unteroligocäne Fauna der Mergel von Burgas«.

Die zweite Arbeit: »Der Jura im Balkan nördlich von Sofia« ist vom Herausgeber und behandelt eine grössere Anzahl von Sammlungsobjecten, welche demselben von Herrn G. N. Zlatarski in Sofia zur Bearbeitung zugegangen sind.



SITZUNGSBERICHTE

DER

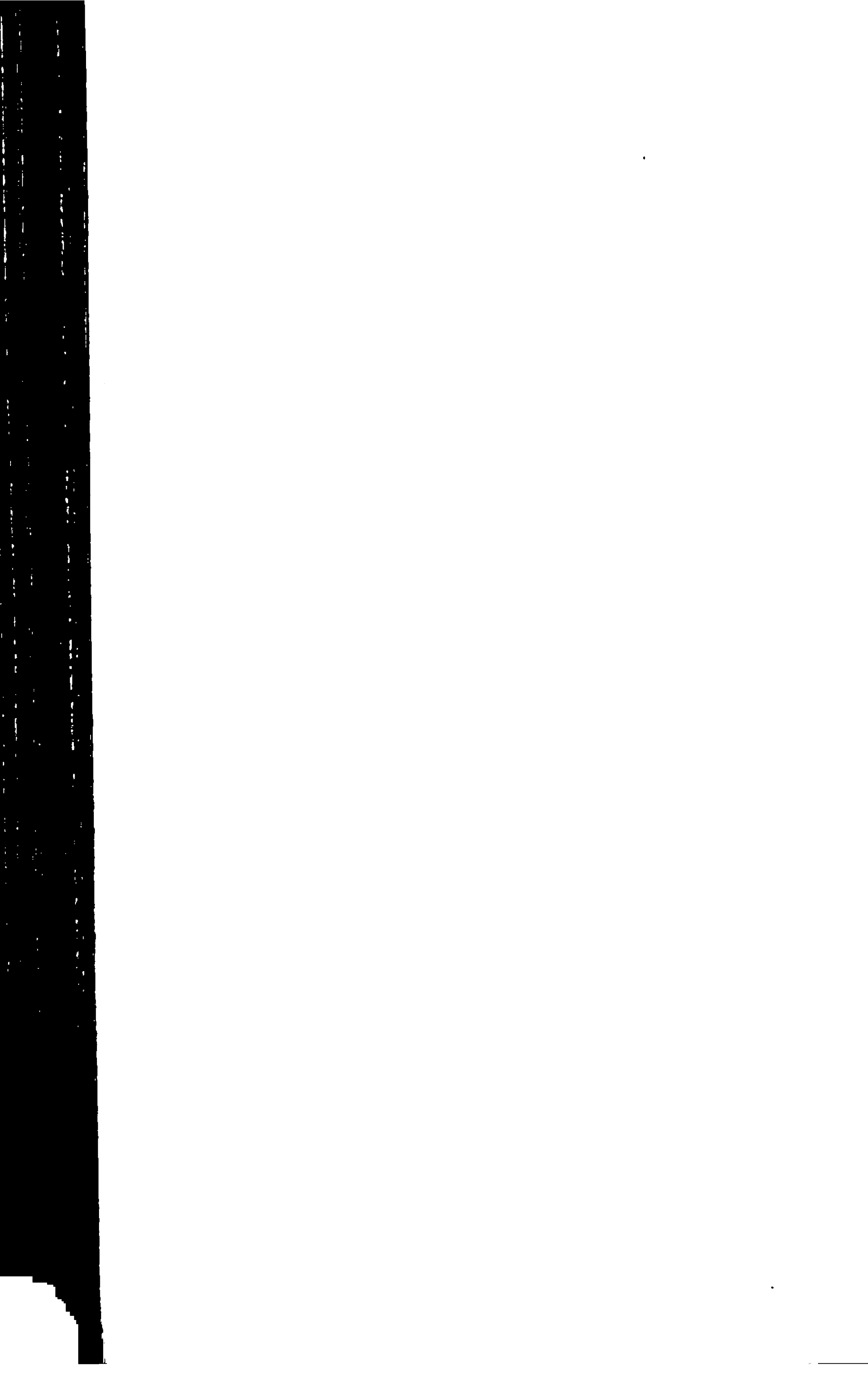
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CII. BAND. V. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



XII. SITZUNG VOM 4. MAI 1893.

Herr Intendant Hofrath Ritter v. Hauer führt den Vorsitz.

Die Nachricht von dem am 19. April l. J. erfolgten Ableben des inländischen correspondirenden Mitgliedes emerit. Prof. Dr. Heinrich Durège in Prag wurde in der Gesammtsitzung der kaiserl. Akademie vom 27. April l. J. zur Kenntniss genommen und das Beileid über diesen Verlust von der Versammlung zum Ausdrucke gebracht.

Se. k. und k. Hoheit der durchlauchtigste Herr Erzherzog Rainer setzt die kaiserl. Akademie in Kenntniss, dass Höchstderselbe die diesjährige feierliche Sitzung am 31. Mai als Curator der Akademie mit einer Ansprache zu eröffnen geruhen werde.

Der Secretär legt das erschienene Heft I und II (Jänner und Februar 1893) des 102. Bandes der Abtheilung III der Sitzungsberichte vor.

Der Naturhistorische Verein der preussischen Rheinlande, Westphalens und des Regierungsbezirkes Osnabrück ladet zur Theilnahme an der Feier seines fünfzigjährigen Bestehens ein, welche derselbe anlässlich der 50. Generalversammlung zu Bonn am 23. und 24. Mai d. J. begehen wird.

Das k. und k. Reichs-Kriegs-Ministerium (Marine-Section) übermittelt die eingelangten Berichte des k. u. k. Linienschiffs-Lieutenant Herrn August Gratzl über seine Mission nach Jan Mayen im Jahre 1892, sowie über die von demselben während dieser Mission ausgeführten physikalischen Beobachtungen.

Das c. M. Prof. E. Ludwig übersendet folgende zw
Arbeiten aus dem chemischen Laboratorium der k. k. tech
nischen Hochschule in Graz:

1. »Zur Kenntniss des Zinns und seines Oxyds« vo
F. Emich.
2. »Zur Chemie des Mangans« von O. Prelinger.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. F. Mertens in Gra
übersendet eine Abhandlung: »Über die Bestimmung eine
Fundamentalsystems für einen gegebenen Gattung
bereich algebraischer Functionen einer Verände
lichen«.

Herr Dr. Alfred Nalepa, Professor an der k. k. Lehre
bildungsanstalt in Linz, übersendet eine vorläufige Mittheilun
über »Neue Gallmilben« (7. Fortsetzung).

Herr Emanuel Puchberger, quiesc. k. k. Bezirkshaup
mann in Wien, übermittelt ein versiegeltes Schreiben behu
Wahrung der Priorität mit der Aufschrift: »Versuch der Au
stellung einer Formel für die allgemeine Integratio
der Differentialgleichungen«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Lang überreicht ein
Abhandlung unter dem Titel: »Versuche mit Wechse
strömen«.

Herr Hofrath v. Lang übergibt ferner eine Arbeit de
Dr. Gustav Jäger in Wien, betitelt: »Die Theorie der Wärm
leitung der Flüssigkeiten«.

Das w. M. Herr Director E. Weiss überreicht eine Abhand
lung: »Über die Bestimmung der Bahn eines Himmel
körpers aus drei Beobachtungen«.

Das c. M. Herr Custos Dr. Emil v. Marenzeller in Wie
überreicht eine Mittheilung: »Über die Identität de
,Cottonspinner' (*Holothuria nigra*) der Engländer m
Holothuria forskalii Chiaje und das Vorkommen vo
Cucumaria koellikeri Semp. im Atlantischen Ocean«.

Die Theorie der Wärmeleitung der Flüssigkeiten

von

Dr. **Gustav Jäger.**

Wie es sich mir bei der kinetischen Theorie der inneren Reibung der Flüssigkeiten[1] darum handelte, die Übertragung von Bewegungsgrösse von den schneller bewegten Schichten auf die benachbarten Schichten von geringerer Geschwindigkeit durch blosse Molecularbewegung zu erklären, so liegt mir im Folgenden daran, auf analoge Weise einen Ausdruck für die Wärmeleitungsfähigkeit der Flüssigkeiten aufzustellen, indem ich die Molecularbewegung als Ursache der Übertragung von lebendiger Kraft von Schichten höherer Temperatur zu jenen tieferer ansehe.

Stellen wir uns vorerst zwei parallele, ebene, horizontale Platten vom Abstande a vor. Zwischen denselben befinde sich eine Kugel vom Radius r, welche eine Bewegungsrichtung senkrecht gegen die beiden Platten besitzt. So oft die Kugel eine der Platten trifft, wird sie reflectirt, so dass sie beständig zwischen den beiden Platten hin und her fliegt. Wir setzen nun voraus, dass, so oft die Kugel die obere Platte verlässt, sie mit einer Geschwindigkeit c_1 nach unten fliegt. Nach der Reflexion an der unteren Platte soll sie jedoch mit der Geschwindigkeit c_2 wieder emporfliegen. Ist die Masse der Kugel m, so folgt daraus, dass durch das Hin- und Herfliegen der Kugel beständig Energie von der oberen Platte an die untere abgegeben werden muss, wenn $c_1 > c_2$ ist. Und zwar ist nach jedem

[1] Diese Ber., CII. S. 253. ff.

Hin- und Hergange der Kugel die übertragene Energi menge $\frac{mc_1^2}{2} - \frac{mc_2^2}{2}$.

Da der Weg, welchen die Kugel von einer Platte bis z andern zurücklegt, gleich $a-2r$ ist, so folgt für die Zeit, welc bei einem Hin- und Hergange verfliesst

$$\frac{a-2r}{c_1} + \frac{a-2r}{c_2} = (a-2r)\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right) = (a-2r)\frac{c_1+c_2}{c_1c_2}.$$

Nehmen wir noch an, dass c_1 von c_2 sehr wenig ve schieden sei, so können wir, da wir es hier nicht mit der Diff renz beider Grössen zu thun haben, die eine mit der ander vertauschen, also

$$\frac{c_1+c_2}{c_1c_2} = \frac{2}{c_1} = \frac{2}{c_2} = \frac{2}{c}$$

setzen, wobei c das Mittel von c_1 und c_2 sein soll. Demna beträgt die Zeit eines Hin- und Herganges $2\frac{a-2r}{c}$, mithin d Zahl der Stösse, welche eine Platte in der Zeiteinheit von d Kugel erfährt

$$Z = \frac{c}{2(a-2r)}.$$

Die Energiemenge, welche demnach durch die Kugel v der oberen Platte auf die untere in der Zeiteinheit übertrag wird, ist $\frac{mc(c_1^2-c_2^2)}{4(a-2r)}$. Sind anstatt einer Kugel deren N v handen, so erhalten wir die Energiemenge

$$E = \frac{Nmc(c_1^2-c_2^2)}{4(a-2r)} = \frac{Nmc(c_1^2-c_2^2)}{4\lambda},$$

wenn wir $a-2r=\lambda$ setzen, wobei, wie schon gesagt, λ d Weglänge ist, welche eine Kugel zwischen zwei aufeinand folgenden Zusammenstössen zurücklegt. Diesen Fall woll wir nun auf die Flüssigkeiten übertragen und damit ei Erklärung für die Wärmeleitungsfähigkeit der Flüssigkeit geben.

Die Übereinstimmung zwischen der Theorie der inneren Reibung und der Wärmeleitungsfähigkeit ist dabei so gross, dass es nichts Anderes hiesse, als sich selbst abschreiben, wollte ich den ganzen Gang der Entwicklung hier ausführlich darlegen. Ich verweise desshalb in dieser Beziehung auf meine bereits angeführte Abhandlung »Über die Theorie der inneren Reibung der Flüssigkeiten«.

Indem wir durch die Flüssigkeit parallele Ebenen vom Abstande des Durchmessers einer Molekel legen, erhalten wir für die Zahl der Stösse, welche die Flächeneinheit einer solchen Ebene in der Zeiteinheit von den Molekeln erhält, $\frac{rNc}{3\lambda}$, wenn N die Zahl der Molekeln in der Volumeinheit ist. Für die entsprechende Energiemenge, welche in der Zeiteinheit übertragen wird, ergibt sich $\frac{rNmc}{6\lambda}(c_1^2-c_2^2)$, wenn c_1 und c_2 jene mittleren Geschwindigkeiten der Molekeln sind, welche den Temperaturen t_1 und t_2 der beiden benachbarten Ebenen entsprechen. Dabei muss noch vorausgesetzt werden, dass die Molekeln jene Geschwindigkeit im Mittel annehmen, welche den Schichten zukommt, in denen die Zusammenstösse stattfinden.

Es ist bekannt, dass sich die Temperatur als eine Function der kinetischen Energie der fortschreitenden Bewegung einer Molekel auffassen und diese wiederum sich durch

$$\frac{mc^2}{2} = \frac{mc_0^2}{2}(1+\gamma t)$$

darstellen lässt, wobei γ eine Constante, t die Temperatur und $\frac{mc_0^2}{2}$ die entsprechende Energie der Molekel bei 0° bedeutet. Nebenbei sei jetzt schon bemerkt, dass für grössere Temperaturintervalle γ nicht mehr als constant, sondern als Function der Temperatur aufgefasst werden muss.

Indem wir als Wärmeleitungsfähigkeit jene Energiemenge verstehen, welche infolge der Molecularbewegung beim Temperaturgefälle Eins in der Zeiteinheit durch die Querschnittseinheit transportirt wird, so erhalten wir für die Wärmeleitungsfähigkeit

$$k = \frac{rNmc}{6\lambda}(c_1^2 - c_2^2) = \frac{rNmc}{6\lambda} c_0^2 \gamma (t_1 - t_2).$$

Da aber der Abstand unserer zwei Ebenen gleich $2r$ is
so ist auch für das Temperaturgefälle Eins

$$t_1 - t_2 = 2r,$$

mithin

$$k = \frac{r^2 Nmc}{3\lambda} c_0^2 \gamma = \frac{r\rho c}{6\left(1 - \sqrt[3]{\frac{b}{v}}\right)} c_0^2 \gamma,$$

da $Nm = \rho$, d. i. die Dichte der Flüssigkeit, und die mittle
Weglänge

$$\lambda = 2r\left(1 - \sqrt[3]{\frac{b}{v}}\right)$$

ist. In der Formel für λ, deren Ableitung ebenfalls in der berei
mehrmals genannten Abhandlung über die innere Reibung z
finden ist, bedeutet v das specifische Volumen der Flüssigke
b jenes entsprechende Volumen, welches die Molekeln wirklic
mit Materie ausfüllen.

So wie wir die Formel für die Wärmeleitung vor u
haben, lässt sich wenig Allgemeines aus ihr herauslese
Höchstens, dass die Wärmeleitung von der Temperatur nic
unabhängig sein wird, da ρ, c und v, vielleicht auch r Function
der Temperatur sind.

Wenn wir überlegen, dass γ den reciproken Werth ein
Temperatur $\left(\frac{1}{T}\right)$ bedeutet, indem ja das Product aus γ u
einer Temperatur eine blosse Zahl ergeben muss, so lässt sic
aus unserer Gleichung für das Product kT die Dimension lmt
finden. Zum selben Ausdruck — wie es ja sein muss, wen
unsere Formel richtig sein soll — gelangen wir aber auc
wenn wir überlegen, dass die Wärmeleitungsfähigkeit, mult
plicirt mit einem Temperaturgefälle $\left(\frac{T}{l}\right)$, eine Wärmemeng
gibt, welche in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit geh

d. h. eine Energie, dividirt durch das Quadrat einer Länge und durch die erste Potenz der Zeit.

Mehr Interesse gewinnt unsere Gleichung für die Wärmeleitungsfähigkeit, wenn wir sie in Beziehung mit der inneren Reibung bringen. Für den Reibungscoëfficienten fanden wir

$$\mu = \frac{r\rho c}{3\left(1-\sqrt[3]{\frac{b}{v}}\right)},$$

woraus folgt

$$\frac{k}{\mu} = \frac{c_0^2\gamma}{2}. \qquad (1)$$

Bedenken wir noch, dass sich sowohl k als μ mit der Temperatur und zwar in verschiedener Weise ändern, so folgt, dass auch, wie wir schon oben bemerkten, γ von der Temperatur abhängig ist.

Zwar liegen für den Temperaturcoëfficienten der Wärmeleitungsfähigkeit noch keine exacten Messungen vor, immerhin ist aber zur Genüge erwiesen, dass derselbe als positiv anzunehmen ist, dass also die Wärmeleitungsfähigkeit mit der Temperatur zunimmt,[1] während bei der inneren Reibung das Gegentheil vorkommt. Daraus ersieht man, dass γ mit der Temperatur sehr rasch wachsen muss, was in vollständiger Übereinstimmung mit bereits früher von mir dargelegten Anschauungen über die Geschwindigkeit der Molekeln im flüssigen Zustande steht. Ich habe damals[2] gezeigt, dass die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsmolekeln bedeutend geringer ist, als die im gasförmigen Zustande. Da sich aber mit wachsender Temperatur die Flüssigkeit immer mehr dem Gaszustande nähert, so muss die Grösse γ im Mittel erheblich grösser ausfallen, als der constante Ausdehnungscoëfficient der Gase. Doch ist bei all dem nie zu vergessen, dass wir es nur mit angenäherten Formeln zu thun haben, die nur dann anwendbar sind, wenn die Temperatur der Flüssigkeit noch weit vom kritischen Punkt entfernt ist.

---

[1] S. Graetz, Wied. Ann., XXV, S. 356.

[2] Diese Sitzungsber., XCIX, S. 860; C, S. 286; CI, S. 920.

Was den Werth von c_0^2 anbelangt, so kann derselbe b den verschiedenen Flüssigkeiten sehr verschieden ausfalle indem ja seine Grenzen zwischen Null und jener Zahl liege die den gasförmigen Molekeln zukommt, welch' letztere etv zwischen 10^8 und 10^{10} sich bewegt. Daraus ersieht man ohn weiters, dass der Quotient $\frac{k}{\mu}$ je nach der Natur der Flüssigk die verschiedensten Werthe annehmen kann, was die Beo achtung ja auch thatsächlich ergeben hat.

Gerade aber dieser Umstand hat Andere bewogen, ei Beziehung zwischen der Wärmeleitungsfähigkeit und d inneren Reibung der Flüssigkeiten zu leugnen. So macht au Graetz den Versuch,[1] zu einer kinetischen Theorie A deutungen zu geben, indem er die Ansicht äussert, dass bei d Wärmeleitung lediglich die Molecularbewegung, bei der inner Reibung hingegen hauptsächlich die gegenseitige Anziehu der Molekeln eine Rolle spiele, woraus sich sofort ergeb »dass Reibung und Wärmeleitung der Flüssigkeiten in kein wesentlichen Beziehung stehen«.

Ich halte es für überflüssig, auf eine Widerlegung c Graetz'schen Ansicht einzugehen, da wir es hier nicht r einer ausgearbeiteten Theorie, sondern nur mit der Andeutu einer solchen zu thun haben. Es würde sich nämlich zeig dass der flüssige Zustand in beiden Fällen verschieden defin wird, was nothwendigerweise zu Inconsequenzen führen mu gerade so, wie van der Waals durch Vermengung der dyr mischen und statischen Theorie der Gase zur Ansicht ka dass zwischen den Gasmolekeln Anziehungskräfte vorhand seien, während man, wie ich in der Abhandlung »Über die der Kräfte, welche Gasmolekeln auf einander ausüben«[2] geze habe, bei consequenter Anwendung der kinetischen Theo zum geraden Gegentheil geführt wird.

Es ist nun nicht zu vergessen, dass sich unsere Theo eigentlich nur auf einatomige Molekeln bezieht, so dass bei c Anwendung derselben auf mehratomige Molekeln man von vo

---

[1] L. c., S. 339.

[2] Diese Sitzungsber., CI, S. 1520 ff.

herein nur angenäherte Resultate erwarten kann. Mehr haben wir aber überhaupt nicht verlangt, indem wir uns immer gegenwärtig halten müssen, dass wir einen wirklichen Einblick in das Wesen des flüssigen Zustandes nur dann erlangen, wenn wir bei der Entwicklung der Theorie alles Nebensächliche unberücksichtigt lassen.

Werfen wir nun einen Blick auf die wirklichen Zahlenverhältnisse. H. F. Weber stellt die Wärmeleitungsfähigkeit des Wassers durch die Formel

$$k = k_0(1 + \alpha t)$$

dar, wobei er für k_0 0·001203, für α 0·00786 findet.[1] Hier ist k_0 in Wärmemass angegeben. Wollen wir absolutes Mass (C. G. S.), so haben wir k_0 mit dem mechanischen Werthe einer Calorie, d. h. $42500.981 = 415.10^5$ zu multipliciren und erhalten

$$k_0 = 499.10^2.$$

Die Grösse der inneren Reibung des Wassers ist nach Poiseuille[2]

$$\mu = \frac{0 \cdot 0178}{1 + 0 \cdot 03368 t + 0 \cdot 000221 t^2}.$$

Daraus folgt

$$\frac{k}{\mu} = \frac{499.10^2(1 + 0 \cdot 00786 t)(1 + 0 \cdot 03368 t + 0 \cdot 000221 t^2)}{0 \cdot 0178} =$$

$$= 280.10^4(1 + 0 \cdot 0425 t + 0 \cdot 000486 t^2),$$

indem wir höhere Potenzen von t vernachlässigen. In meiner Abhandlung über die innere Reibung gab ich für c_0 den Werth 20800 *cm* an. Aus diesen Grössen können wir nun nach Gleichung (1) γ berechnen und erhalten

$$\gamma = 0 \cdot 0129(1 + 0 \cdot 0425 t + 0 \cdot 000486 t^2).$$

Wie zu erwarten stand, ergibt sich für γ thatsächlich ein bei weitem grösserer Werth als für den Ausdehnungscoëfficienten

---

[1] S. Wüllner, Physik, III, S. 325.

[2] Ebenda, I, S. 386.

der Gase. Alles dies ist natürlich mit der nöthigen Vorsic
aufzunehmen, wie schon aus Folgendem hervorgeht.

Wie wir wissen, ist $c^2 = c_0^2(1+\gamma t)$, in unserem speciell
Fall also

$$c^2 = c_0^2[1+0{\cdot}0129t(1+0{\cdot}0425t+0{\cdot}000486t^2)] =$$
$$= c_0^2(1+0{\cdot}0129t+0{\cdot}00055t^2+0{\cdot}0000063t^3$$

Wäre diese Formel für alle Temperaturen giltig, so müss
sie auch noch für den kritischen Punkt gelten. Bei der kritisch
Temperatur muss aber wie alle Eigenschaften, so auch d
Geschwindigkeit der Molekeln des flüssigen und gasförmig
Zustandes identisch werden, d. h. es muss $c = c'$ werden, w
bei $c'^2 = c_0'^2(1+\alpha t)$ ist, wenn c_0' die Geschwindigkeit d
Dampfmolekeln bei 0°, α den Ausdehnungscoëfficienten d
Gase bedeutet. Man hat dann eine Gleichung, welche bloss t a
Unbekannte enthält, da ja die Geschwindigkeit der Gasmoleke
aus dem Mariotte—Gay-Lussac'schen Gesetz leicht
mittelt werden kann.

Dass diese Methode zu einer praktischen Bestimmung d
kritischen Temperatur ungeeignet ist, brauchen wir jedoch nic
erst näher zu erörtern. Dazu würde vor Allem eine gena
Kenntniss der Geschwindigkeit der Flüssigkeitsmolekeln
forderlich sein. Auch müsste die innere Reibung und Wärm
leitung wenigstens bis in die Nähe des kritischen Punkt
untersucht werden, was bisher noch mit grossen experimentell
Schwierigkeiten verbunden ist. Wenn wir jedoch die Sache u
kehren, so bietet sich hier eine Aussicht, mit grosser Annäh
rung die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsmolekeln bestimm
zu können, indem sich ja die kritische Temperatur oh
besondere Schwierigkeit ermitteln lässt. Dies wäre um
wichtiger, weil sich vielleicht gerade hier der Hebel ansetz
liesse, um zu exacteren Anschauungen über den flüssigen Z
stand zu gelangen. Leider ist das vorhandene Beobachtung
material, besonders bezüglich der Wärmeleitung, für and
Flüssigkeiten noch bei Weitem geringer als für Wasser,
dass noch gar keine Möglichkeit vorhanden ist, aus den obig
Formeln Zahlenresultate herzuleiten.

Die Grösse $\frac{mc^2}{2}$ ist die Energie der fortschreitenden Bewegung der Molekel, also ein Theil der Gesammtenergie derselben. $\frac{mc_0^2}{2}\gamma$ ist sodann die Zunahme dieser Theilenergie, wenn die Temperatur der Flüssigkeit um 1° erhöht wird. Beziehen wir dies auf die Masseneinheit der Flüssigkeit, so ist $\frac{c_0^2\gamma}{2}$ ein Theil der specifischen Wärme der Flüssigkeit, da ja die specifische Wärme nichts anderes als die Vermehrung der Gesammtenergie in der Masseneinheit Flüssigkeit bedeutet, wenn die Temperatur derselben um 1° erhöht wird. Nun ist aber

$$\frac{c_0^2\gamma}{2} = \frac{k}{\mu},$$

woraus also folgt, dass

$$\frac{k}{\mu} < C$$

sein muss, wenn wir unter C die specifische Wärme der Flüssigkeit verstehen. Diese Folgerung, für deren Verification hinlänglich Beobachtungsmaterial vorhanden ist, trifft, wie aus der folgenden Tabelle zu ersehen ist, auch in allen Fällen zu.

	k	μ	C	$\frac{k}{\mu}$
Wasser	0·00124	0·013	1·000	0·095
Alkohol	0·000487	0·0153	0·566	0·032
Äther	0·000405	0·0026	0·520	0·156
Chloroform.....	0·000367	0·0065	0·233	0·056

Die innere Reibung, welche nach den Angaben von Handl und Přibram umgerechnet wurde, bezieht sich auf die Temperatur 10°. Die übrigen Zahlen sind Wüllner's Physik entnommen und entsprechen einer etwas niedrigeren Temperatur, was jedoch auf das Gesammtresultat, dass nämlich thatsächlich der Quotient aus der Wärmeleitungsfähigkeit und dem Reibungscoëfficienten nur einen Theil der specifischen Wärme ausmacht, nicht von Einfluss ist.

Eine weitere Stütze für unsere Theorie finden wir in ein
Beziehung, welche zwischen der Wärmeleitungsfähigkeit, de
Reibungscoëfficienten und der Verdampfungswärme bestel
In der Abhandlung »Über die Verdampfungswärme«[1] habe i
gezeigt, dass sich die Verdampfungswärme aus drei Theil
zusammensetzt, so dass wir für dieselbe die Formel erhalten

$$r = a+b+c,$$

wobei a die äussere Arbeit, b die Arbeit, welche zur Üb
windung der Capillarkräfte nothwendig ist, wenn die Masse
einheit Flüssigkeit in Dampf übergeht, und c die Arbeit z
Änderung der Constitution der Molekeln bei diesem Übergan
darstellt. Alle drei Grössen sind Functionen der Temperat
Speciell für den zweiten Theil haben wir

$$b = b_0(1-\varepsilon t),$$

wenn ε der Temperaturcoëfficient der Capillaritätsconstant
ist. Daraus folgt, dass dieser Theil der Verdampfungswär
mit wachsender Temperatur abnimmt und zwar für je 1° Te
peraturerhöhung um den Betrag $b_0\varepsilon$.

In einer anderen Abhandlung »Über die Art der Kräf
welche Gasmolekeln auf einander ausüben«[2] gelangte ich
dem Ergebniss: »Wir können die Capillarität nicht mehr a
der gegenseitigen Anziehung der Molekeln folgern, sondern v
müssen sagen: Weil die kinetische Energie der Molekeln
der Oberfläche einer Flüssigkeit grösser sein muss, als
Inneren derselben, so kann eine Molekel nur mit Aufwand v
Arbeit aus dem Inneren einer Flüssigkeit an die Oberfläc
gebracht werden. Jener Theil der Verdampfungswärme, welc
zur Überwindung der Capillarkräfte nothwendig ist, muss je
als ein Arbeitsaufwand zur Vermehrung der kinetischen Ener
der Molekeln angesehen werden, da ja nach unserer Theo
die Geschwindigkeit der Molekeln im Gase viel grösser s
muss, als in der Flüssigkeit.« Daraus folgt ohneweiters, d
$b_0\varepsilon$ nichts anderes als der Zuwachs der Energie in der fo

[1] Diese Sitzungsber., C, S. 1122 ff.

[2] Ebenda, CI, S. 1520 ff.

schreitenden Bewegung der Molekeln ist, welchen die Masseneinheit Flüssigkeit bei der Temperaturerhöhung von 1° erfährt, indem ja nach dem Gesetz von der Erhaltung der Energie die Gesammtwärme, welche zur Erwärmung der Flüssigkeit und zur Verdampfung verbraucht wird, constant sein muss, bei welcher Temperatur die Verdampfung auch vorgenommen wird, wenn nur die Anfangs- und Endtemperatur des Processes dieselbe bleibt.

Für den bewussten Zuwachs an Energie der fortschreitenden Bewegung haben wir aber auch den Ausdruck $\frac{c_0^2\gamma}{2}$ gefunden. Mithin muss

$$\frac{c_0^2\gamma}{2} = b_0\varepsilon$$

und, da $b_0 < r_0$, so auch

$$\frac{c_0^2\gamma}{2\varepsilon} < r_0$$

oder, was dasselbe ist

$$\frac{k}{\mu\varepsilon} < r$$

sein. Dass diese Forderung vollständig erfüllt ist, zeigt die folgende Tabelle.

	ε	r	$\frac{k}{\mu\varepsilon}$
Wasser	0·00232	606·5	41
Alkohol	0·00351	236·5	9·1
Äther	0·00607	94·0	26
Chloroform	0·00436	67·0	13

Die Werthe für ε sind jene, welche ich in der Abhandlung »Über die Abhängigkeit der Capillaritätsconstanten von der Temperatur und deren Bedeutung für die Theorie der Flüssigkeiten«[1] veröffentlicht habe. Die Verdampfungswärmen beziehen sich auf die Temperatur 0°. Die Angaben stammen von Regnault, wie sie sich in den Tabellen von Landolt und

[1] Ebenda, C, S. 245 ff.

Börnstein vorfinden. Die Werthe von $\frac{k}{\mu\varepsilon}$ wachsen mit de
Temperatur zwar beträchtlich, aber sie bleiben immer kleine
als die entsprechenden Werthe von r.

Da

$$\frac{k}{\mu\varepsilon} = b$$

nach unserer Theorie nichts anderes ist, als jener Theil de
Verdampfungswärme, welcher als Arbeit zur Überwindung de
Capillarkräfte auftritt, so können wir nach dem Vorgange vo
Sir W. Thomson daraus einen Schluss auf die Grösse de
Molekeln ziehen, wenn wir b in entsprechender Weise mit de
Capillaritätsconstanten α combiniren.

In der bereits erwähnten Abhandlung »Über die Ve
dampfungswärme« habe ich gezeigt, dass der Durchmess
einer Molekel

$$\delta = \frac{3\alpha}{b\rho}$$

ist, wenn ρ die Dichte der Flüssigkeit bedeutet. Daraus fol
dass auch

$$\delta = \frac{3\alpha\mu\varepsilon}{k\rho}$$

ist.

Bei der Temperatur 40° ist für Wasser

$$\alpha = 70, \quad \frac{k}{\mu} = 974.10^4 \text{ (C. G. S.)},$$

woraus sich

$$\delta = 50.10^{-9}\, cm$$

berechnet.

Für Äther ist bei der Temperatur 10° die Capillarität
constante

$$\alpha = 17, \quad \frac{k}{\mu} = 647.10^4 \text{ (C. G. S.)}, \quad \rho = 0{\cdot}709.$$

Aus diesen Zahlen finden wir

$$\delta = 68.10^{-9}\, cm.$$

Es stimmen diese Zahlen vollständig mit den Ergebnissen anderer Methoden überein. Für niedrigere Werthe der Temperatur wird δ grösser, für höhere kleiner, doch bewegen sich die Zahlen immer in ein und derselben Grössenordnung.

Dieser Weg, die Grösse der Molekeln zu berechnen, dessen Resultate in ausgezeichneter Übereinstimmung mit den bisherigen Ergehnissen stehen, ist wohl die beste Gewähr für die Berechtigung unseres Vorgehens zur Entwickelung einer kinetischen Theorie der Flüssigkeiten.



Über die Bestimmung eines Fundamentalsystems für einen gegebenen Gattungsbereich algebraischer Functionen einer Veränderlichen x

von

F. Mertens,
c. M. k. Akad.

1.

Es sei eine irreductibele algebraische Gleichung

$$F(y) = y^n + G_1(x)\, y^{n-1} + G_2(x)\, y^{n-2} + \ldots + G_n(x) = 0$$

gegeben, in welcher der Coëfficient der höchsten Potenz der Unbekannten $= 1$ und alle übrigen ganze Functionen einer Veränderlichen x sind. Jede Wurzel dieser Gleichung wird eine algebraische Function von x und die Gesammtheit aller rationalen Functionen von x und einer bestimmten Wurzel y nach Kronecker ein Gattungsbereich algebraischer Functionen von x genannt. Ein solcher Gattungsbereich soll hier mit $\mathfrak{G}$ bezeichnet werden.

Jede Function φ von $\mathfrak{G}$ ist in der Form

$$\varphi = r_0 + r_1 y + r_2 y^2 + \ldots + r_{n-1} y^{n-1}$$

darstellbar, wo $r_0, r_1, \ldots r_{n-1}$ rationale Functionen von x bezeichnen, und genügt einer algebraischen Gleichung

$$t^n + R_1 t^{n-1} + R_2 t^{n-2} + \ldots + R_n = 0,$$

welche durch Nullsetzung der Resultante von $F(y)$ und $t-\varphi$ in Bezug auf y erhalten wird und in welcher die Coëfficienten $R_1, R_2, \ldots R_n$ rationale Functionen von x sind.

Wenn diese Coëfficienten insbesondere ganze Functione
von x sind, so wird φ eine ganze algebraische Function von
genannt. Die Function φ ist immer algebraisch ganz, wenn d
Coëfficienten $r_0, r_1 \ldots r_{n-1}$ in ihrer Darstellung als ganze, de
Grad n nicht erreichende Function von y ganze Function
von x sind. Sie kann aber auch bei gebrochenen Coëfficient
$r_0, r_1, \ldots r_{n-1}$ algebraisch ganz sein, und die Aufstellung all
ganzen algebraischen Functionen des Gattungsbereichs $\mathfrak{G}$ g
hört zu den wichtigsten Aufgaben der Lehre von den Function
dieses Bereichs. Kronecker[1] hat dieselbe zuerst durch Nac
weisung eines sogenannten Fundamentalsystems, d. h. ein
Systems von n ganzen algebraischen Functionen $\omega_1, \omega_2, \ldots$
des Gattungsbereichs $\mathfrak{G}$ gelöst, welche der Bedingung genüge
dass der Ausdruck

$$g_1\omega_1 + g_2\omega_2 + \ldots + g_n\omega_n$$

alle möglichen ganzen algebraischen Functionen von $\mathfrak{G}$ u
nur solche liefert, wenn man für $g_1, g_2, \ldots g_n$ alle möglich
ganzen Functionen von x setzt.

Es soll hier ein Verfahren dargelegt werden, durch welch
man nur mit Hilfe linear-homogener Gleichungen zur Au
stellung eines Fundamentalsystems des Gattungsbereichs
gelangen kann.

2.

Es sei

$$\varphi(y) = r_0 + r_1 y + r_2 y^2 + \ldots + r_{n-1} y^{n-1}$$

irgend eine ganze algebraische Function des Gattungsbereichs
wo y eine Wurzel der Gleichung

$$F(y) = 0$$

und $r_0, r_1, \ldots r_{n-1}$ rationale Functionen von x bezeichnen.

---

[1] Kronecker, Über die Discriminante algebraischer Functionen ei
Variabeln, Crelle's J., Bd. 91; Grundzüge einer arithmetischen Theorie d
algebraischen Grössen, Crelle's J., Bd. 92. — Dedekind-Weber, Theo
der algebraischen Functionen einer Veränderlichen, Crelle's J., Bd. 92.
Hensel, Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen und d
algebraischen Integrale, Crelle's J., Bd. 109.

Man verstehe unter t, z, u Veränderliche, unter $F_1(t)$ den Quotienten

$$F_1(t) = \frac{F(t) - F(z)}{t - z},$$

unter D, D_1 die Discriminanten der Functionen $F(t)$, $F_1(t)$ und bezeichne mit $\Theta(u)$ die Resultante der Functionen

$$F(z), \qquad F'(z) + \varphi(z) F_1(t) u,$$

mit $\Theta_1(u)$ die der Functionen

$$F(z), \qquad 1 - D_1 \varphi^2(z) F_1^2(t) u$$

in Bezug auf z. Da $\varphi(y)$ algebraisch ganz vorausgesetzt wird und die Coëfficienten der einzelnen Potenzen von z in $F(z)$, $F_1(t)$, D_1 ganze Functionen von x und t sind, so haben $\Theta(u)$ und $\Theta_1(u)$ ebensolche Functionen zu Coëfficienten. Da überdies der Coëfficient von u in $\Theta(u)$ nach der Lagrange'schen Interpolationsformel $= D\varphi(t)$ ist, so hat $\Theta(u)$ die Gestalt

$$\Theta(u) = D + D\varphi(t) u + g u^2 + \ldots,$$

wo g eine ganze Function von x und t bezeichnet.

Das Product $\Theta(Du) . \Theta(-Du)$ ist die Resultante der Functionen

$$F(z), \qquad F'(z)^2 - \varphi^2(z) F_1^2(t) D^2 u^2,$$

beachtet man aber, dass die Discriminante D die Gestalt

$$D = D_1 F'(z)^2 + H F(z)$$

hat, wo H eine ganze Function von z bezeichnet, und demzufolge

$$F'(z)^2 - \varphi^2(z) F_1^2(t) D^2 u^2 = F'(z)^2 (1 - D_1 \varphi^2(z) F_1^2(t) D u^2) \\ - H \varphi^2(z) F_1^2(t) D u^2 . F(z)$$

ist, so kann das genannte Product auch als Resultante der Functionen

$$F(z), \qquad F'(z)^2 (1 - D_1 \varphi^2(z) F_1^2(t) D u^2)$$

aufgefasst werden und zerfällt in die Resultante D^2 der Functionen

$$F(z), \qquad F'(z)^2$$

und die Resultante $\Theta_1(Du^2)$ der Functionen

$$F(z), \qquad 1-D_1\varphi^2(z)F_1^2(t).Du^2.$$

Es ist also

$$\Theta(Du)\Theta(-Du) = D^2\Theta_1(Du^2).$$

Die Gleichsetzung der Coëfficienten von u^2 in dies
Identität ergibt, wenn der Coëfficient von u in $\Theta_1(u)$ mit
bezeichnet wird,

$$2D^3g-D^4\varphi^2(t) = D^3g_1$$

oder

$$D\varphi^2(t) = 2g-g_1.$$

Hienach ist $D\varphi^2(t)$ eine ganze Function von x und t. Da
muss aber, wenn Q^2 das in D aufgehende Quadrat höchst
Grades in x bedeutet, $Q^2\varphi^2(t)$ und somit auch $Q\varphi(t)$ eine gan
Function von x und t sein. Die nothwendige Bedingung, da
$\varphi(y)$ algebraisch ganz sei, besteht also darin, dass

$$Qr_0, Qr_1, \ldots Qr_{n-1}$$

ganze Functionen von x sind.

Man kann diese Bedingung anders ausdrücken. Nennt ma
eine ganze algebraische Function ω von x durch eine gan
Function M von x theilbar, wenn $\frac{\omega}{M}$ algebraisch ganz ist,
muss die Function

$$Q\varphi = h_0+h_1y+h_2y^2+\ldots+h_{n-1}y^{n-1}$$

ganze Functionen $h_0, h_1, \ldots h_{n-1}$ von x zu Coëfficienten habe
und durch Q theilbar sein.

Die Aufgabe, alle ganzen algebraischen Functionen d
Gattungsbereichs $\mathfrak{G}$ aufzustellen, ist somit auf die Aufga
zurückgeführt, alle Functionen

$$h_0+h_1y+h_2y^2+\ldots+h_{n-1}y^{n-1}$$

mit in x ganzen Coëfficienten $h_0, h_1, \ldots h_{n-1}$ zu ermitteln, welc
durch eine gegebene ganze Function von x theilbar sind.

3.

Eine linear-homogene Form

$$f = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

der Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_n$ soll hier ganz genannt werden, wenn ihre Coëfficienten $a_1, a_2, \dots a_n$ ganze Functionen von x sind. Eine solche ganze Form f soll durch andere ebensolche Formen $z_1, z_2, \dots z_m$ in ganzer Weise darstellbar heissen, wenn

$$f = g_1 z_1 + g_2 z_2 + \dots + g_m z_m$$

und $g_1, g_2, \dots g_m$ ganze Functionen von x sind. Von einem Systeme von ganzen linear-homogenen Formen der Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_n$ soll gesagt werden, dass es durch ein zweites ebensolches System in ganzer Weise darstellbar ist, wenn alle Formen des ersten Systems durch die Formen des zweiten in ganzer Weise darstellbar sind. Wenn ein Formensystem S durch ein zweites, S', und dieses durch ein drittes, S'', in ganzer Weise darstellbar ist, so ist auch S durch S'' in ganzer Weise darstellbar.

Wenn in einem System

$$f_1, f_2, \dots f_m$$

von m ganzen linear-homogenen Formen der Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_n$ n linear-unabhängige Formen, d. h. n Formen mit nicht identisch verschwindender Determinante vorkommen, so lässt sich ein System von n ganzen linear-homogenen Formen

$$\psi_1, \psi_2, \dots \psi_n$$

der nämlichen Veränderlichen aufstellen, welches folgende Eigenschaften hat:

I. Jedes der beiden Systeme ist durch das andere in ganzer Weise darstellbar.

II. ψ_k enthält nur die Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_k$ und hat demnach die Gestalt

$$\psi_k = c_{k1} x_1 + c_{k2} x_2 + \dots + c_{kk} x_k.$$

Wenn ein solches System existirt, so hat man Identitäten von der Form

$$\begin{aligned}\psi_n &= a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots + a_m f_m\\ f_1 &= A_1 \psi_1 + B_1 \psi_2 + \ldots + L_1 \psi_n\\ f_2 &= A_2 \psi_1 + B_2 \psi_2 + \ldots + L_2 \psi_n\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ f_m &= A_m \psi_1 + B_m \psi_2 + \ldots + L_m \psi_n,\end{aligned}$$

in welchen $a_1, a_2, \ldots A_1, \ldots L_m$ ganze Functionen von x bezeichnen. Greift man die in x_n multiplicirten Glieder heraus und bezeichnet zu diesem Zwecke die Coëfficienten von x_n in $f_1, f_2, \ldots f_m, \psi_n$ mit $l_1, l_2, \ldots l_m, c_{nn}$, so ergibt sich

$$c_{nn} = l_1 a_1 + l_2 a_2 + \ldots + l_m a_m$$
$$l_1 = L_1 c_{nn},\ l_2 = L_2 c_{nn}, \ldots l_m = L_m c_{nn}.$$

Diesen Gleichungen zufolge muss c_{nn} der grösste gemeinschaftliche Theiler der Functionen $l_1, l_2, \ldots l_m$ sein, welche nicht alle identisch verschwinden können, und $a_1, a_2, \ldots a_m$ bilden eine aus ganzen Functionen von x bestehende Lösung der Gleichung

$$l_1 z_1 + l_2 z_2 + \ldots + l_m z_m = c_{nn}. \tag{1}$$

Ist umgekehrt c_{nn} der grösste gemeinschaftliche Theiler der Functionen $l_1, l_2, \ldots l_m$ und $a_1, a_2, \ldots a_m$ irgend eine Lösung der Gleichung (1) in ganzen Functionen von x, so hat das durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}\psi_n &= a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots + a_m f_m\\ f_1' &= f_1 - \frac{l_1}{c_{nn}} \psi_n\\ f_2' &= f_2 - \frac{l_2}{c_{nn}} \psi_n\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ f_m' &= f_m - \frac{l_m}{c_{nn}} \psi_n\end{aligned}$$

definirte Formensystem

$$\psi_n, f_1', f_2', \ldots f_m'$$

ganze Functionen von x zu Coëfficienten, und es ist sowohl dieses System durch das ursprüngliche System $f_1, f_2, \ldots f_m$, als auch dieses durch jenes in ganzer Weise darstellbar.

Ist nun $n = 1$, so verschwinden $f'_1, f'_2, \ldots f'_m$ identisch, und man hat das gewünschte System $\psi_1 = c_{11} x_1$.

Ist hingegen $n > 1$, so müssen unter den Formen $f'_1, f'_2, \ldots f'_m$, welche nur noch die Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ enthalten, $n-1$ linear-unabhängige vorkommen, da andernfalls $f'_1, f'_2, \ldots f'_m$ durch weniger als $n-1$ Formen und daher $f_1, f_2, \ldots f_m$ gegen die Annahme durch weniger als n Formen ausdrückbar wären. Man kann daher wieder, wenn die Coëfficienten von x_{n-1} in $f'_1, f'_2, \ldots f'_m$ mit $k_1, k_2, \ldots k_m$, ihr grösster gemeinschaftlicher Theiler mit $c_{n-1\,n-1}$ und irgend eine Lösung der Gleichung

$$k_1 z_1 + k_2 z_2 + \ldots + k_m z_m = c_{n-1\,n-1}$$

in ganzen Functionen von x mit $b_1, b_2, \ldots b_m$ bezeichnet werden,

$$\psi_{n-1} = b_1 f'_1 + b_2 f'_2 + \ldots + b_m f'_m$$

$$f''_1 = f'_1 - \frac{k_1}{c_{n-1\,n-1}} \psi_{n-1}$$

$$f''_2 = f'_2 - \frac{k_2}{c_{n-1\,n-1}} \psi_{n-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f''_m = f'_m - \frac{k_m}{c_{n-1\,n-1}} \psi_{n-1}$$

setzen und erhält ein System von ganzen Formen

$$\psi_{n-1}, f''_1, f''_2, \ldots f''_m,$$

welches durch die Formen $f'_1, f'_2, \ldots f'_m$ und durch welches umgekehrt diese letzteren Formen in ganzer Weise darstellbar ist. Es sind dann auch die Formensysteme

$$\psi_n, f'_1, f'_2 \ldots f'_m$$

und

$$\psi_n, \psi_{n-1}, f''_1, f''_2 \ldots f''_m$$

durch einander in ganzer Weise darstellbar.

Wendet man dasselbe Verfahren auf die Formen $f_1'', f_2'', ..$
an, wofern $n > 2$ ist, und setzt dasselbe so lange fort, bis
zu identisch verschwindenden Formen $f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \dots f_m^{(n)}$ gela
so ergibt sich ein System von ganzen Formen

$$\psi_n, \psi_{n-1}, \dots \psi_1,$$

welches die gewünschten Eigenschaften I und II besitzt.

Man kann auch noch bewirken, dass die Coëfficienten vo
in $\psi_{k+1}, \psi_{k+2}, \dots \psi_n$ den Grad von c_{kk} nicht erreichen. Genü
die Formen $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_n$ noch nicht dieser Bedingung, so se
die erste unter denselben, deren Coëfficienten eine Ausna
machen, und c_{pk} der erste unter den Coëfficienten von x
$x_{p-2}, \dots x_1$ in ψ_p, dessen Grad den von c_{kk} erreicht oder ü
steigt. Es sei c'_{pk} der Rest, welcher bei der Division von
durch c_{kk} bleibt und den Grad von c_{kk} nicht erreicht, und c_p
$= g c_{kk} + c'_{pk}$. Ersetzt man dann ψ_p durch $\psi_p - g\psi_k$, so sind
neue Formensystem und das ursprüngliche wieder in ga
Weise durch einander darstellbar. Das neue Formensystem
überdies die Eigenschaft II und erfüllt von den $\frac{n(n-1)}{2}$ Be
gungen, dass der Coëfficient von x_k in ψ_i den Grad von c_{kk} n
erreichen darf, wenn $i > k$, eine mehr als die Formen $\psi_1, \psi_2, ..$
Wendet man, wenn es nöthig ist, dasselbe Verfahren auf
erhaltene Formensystem an und wiederholt es nach Be
so gelangt man nach höchstens $\frac{n(n-1)}{2}$ Schritten zu ei
Formensystem mit den gewünschten Eigenschaften.

4.

Aufgabe. Es seien

$$\begin{aligned}
f_1 &= r_{11} + r_{12}\, y + r_{13}\, y^2 + \dots + r_{1n}\, y^{n-1} \\
f_2 &= r_{21} + r_{22}\, y + r_{23}\, y^2 + \dots + r_{2n}\, y^{n-1} \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
f_n &= r_{n1} + r_{n2}\, y + r_{n3}\, y^2 + \dots + r_{nn}\, y^{n-1}
\end{aligned}$$

n gegebene ganze algebraische Functionen des Gattu
bereichs $\mathfrak{G}$, welche linear-unabhängig sind, d. h. der Beding

genügen, dass die aus ihren Coëfficienten gebildete Determinante

$$\Sigma \pm r_{11} r_{22} \ldots r_{nn}$$

nicht identisch verschwindet, und M eine gegebene ganze Function von x, welche zu ihrer Ableitung M' theilerfremd ist; es bezeichne ferner P_s allgemein ein Product von s Functionen der Reihe $f_1, f_2, \ldots f_n$ oder auch eine dieser Functionen selbst oder die Einheit, je nachdem $s > 1$, $s = 1$ oder $s = 0$ ist, und es werde angenommen, dass die Summe ΣP_s der conjugirten Werthe von P_s, welche den n Wurzeln der Gleichung

$$F(y) = 0$$

entsprechen, für alle möglichen Producte P_s von $s = 1$ bis $s = n$ durch M^{μ_s} theilbar ist, wo die Exponenten $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ ganze nicht negative Zahlen sind und für alle genannten Werthe von s der Bedingung

$$\frac{\mu_s}{s} \leqq \frac{\mu_1}{1} \leqq 1$$

genügen; es sollen alle ganzen Functionen $u_1, u_2, \ldots u_n$ von x ermittelt werden, für welche die ganze algebraische Function

$$f = u_1 f_1 + u_2 f_2 + \ldots + u_n f_n$$

durch M theilbar wird.

Sind die Brüche

$$\frac{\mu_1}{1}, \frac{\mu_2}{2}, \ldots \frac{\mu_n}{n}$$

alle $= 1$, so ist der Ausdruck

$$u_1 f_1 + u_2 f_2 + \ldots + u_n f_n$$

für jedes beliebige System von ganzen Functionen $u_1, u_2, \ldots u_n$ von x durch M theilbar und die Functionen $u_1, u_2, \ldots u_n$ bleiben unbestimmt.

Bezeichnen nämlich

$$C_1, C_2, \ldots C_n$$

die elementaren symmetrischen Functionen und

$$S_1, S_2, \dots S_n$$

die n ersten Potenzsummen der n conjugirten Werthe irge
einer der Functionen $f_1, f_2, \dots f_n$, etwa f_i, so ist C_r, du
$S_1, S_2, \dots S_n$ dargestellt, eine Summe von Gliedern von der Fo

$$c S_1^{\alpha_1} S_2^{\alpha_2} \dots S_n^{\alpha_n},$$

in welchen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ ganze, nicht negative, der Gleichung

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n = r$$

genügende Zahlen sind. Ein solches Glied ist durch M in
Potenz

$$\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 + \dots + \alpha_n\mu_n = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n$$
$$= r$$

theilbar, da S_k als Summe ΣP_k nach der Annahme du
$M^{\mu_k} = M^k$ theilbar ist. Da hienach M^r in jedem der genann
Glieder von C_r und daher auch in C_r selbst aufgeht, so ist
für jedes i und demzufolge die Function

$$\frac{f}{M} = u_1 \frac{f_1}{M} + u_2 \frac{f_2}{M} + \dots + u_n \frac{f_n}{M}$$

für jedes beliebige System von ganzen Functionen $u_1, u_2 \dots$
von x algebraisch ganz.

Ist dagegen wenigstens einer der Brüche

$$\frac{\mu_1}{1}, \frac{\mu_2}{2}, \dots \frac{\mu_n}{n}$$

< 1, so sei $\frac{\mu_m}{m}$ bei möglichst grossem m der kleinste derselb

Es ist dann $\frac{\mu_m}{m} < 1$ und $m > 1$, da nach der Annahme

$$\frac{\mu_2}{2} \leqq \frac{\mu_1}{1}, \frac{\mu_3}{3} \leqq \frac{\mu_1}{1}, \dots \frac{\mu_n}{n} \leqq \frac{\mu_1}{1}$$

ist.

Bezeichnen

$$C'_1, C'_2, \dots C'_n$$

die elementaren symmetrischen Functionen der n conjugirten Werthe von f_i^m, und stellt man diese Functionen durch $S_1, S_2, \dots S_n$ dar, so erscheint C'_r als Summe von Gliedern von der Form

$$c S_1^{\alpha_1} S_2^{\alpha_2} \dots S_n^{\alpha_n},$$

in welchen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ ganze, nicht negative, der Gleichung

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n = mr$$

genügende Zahlen sind. Ein solches Glied ist durch M in der Potenz

$$\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2 + \dots + \alpha_n \mu_n$$

theilbar. Da aber

$$\begin{aligned} \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 + \dots + \alpha_n\mu_n &= \frac{\mu_1}{1}\alpha_1 + \frac{\mu_2}{2} \cdot 2\alpha_2 + \dots + \frac{\mu_n}{n} \cdot n\alpha_n \\ &\geqq \frac{\mu_m}{m}(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n) \\ &\geqq r\mu_m \end{aligned}$$

ist, so geht $M^{r\mu_m}$ in jedem der genannten Glieder von C'_r, also auch in C'_r selbst auf. Die Function f_i^m ist demnach für jedes i durch M^{μ_m} und ein Product P_s^m demzufolge durch $M^{s\mu_m}$ theilbar.

Ist nun f irgend eine der gesuchten Functionen, so geht M^m in f^m, also $M^{m+s\mu_m}$ in $f^m P_s^m$ auf. Dann muss aber die Summe S der conjugirten Werthe von fP_s durch M^{q_s} theilbar sein, wo q_s die grösste in $\dfrac{m+s\mu_m+m-1}{m}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet.

Um dies zu zeigen, seien

$$x_1, x_2 \dots x_n, x_{n+1}, \dots x_{mn}$$

mn Unbestimmte,

$$\chi_1, \chi_2, \dots \chi_{mn}$$

ihre elementaren symmetrischen Functionen,

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$$

die elementaren symmetrischen Functionen der n Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots x_n$,

$$\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots \sigma'_{mn-n}$$

die der übrigen Unbestimmten $x_{n+1}, \ldots x_{mn}$ und

$$\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n$$

die von $x_1^m, x_2^m, \ldots x_n^m$. Die Function

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

genügt einer algebraischen Gleichung

$$\sigma_1^N - \Gamma_1 \sigma_1^{N-1} + \Gamma_2 \sigma_1^{N-2} - \ldots \pm \Gamma_N = 0$$

vom Grade

$$N = \frac{mn(mn-1)(mn-2)\ldots(mn-n+1)}{1.2.3\ldots n},$$

in welcher die Coëfficienten $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ ganze Functionen von $\chi_1, \chi_2, \ldots$ sind und Γ_r in $x_1, x_2, \ldots$ homogen und vom Grade r ist. Denkt man sich $\chi_1, \chi_2, \ldots$ durch $\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_n$ und $\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots$ ausgedrückt, so ist die vorstehende Gleichung in den Functionen $\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots \sigma'_{mn-n}$ identisch, und man darf dieselben durch die Coëfficienten des Productes

$$(z^{m-1} + x_1 z^{m-2} + x_1^2 z^{m-3} + \ldots + x_1^{m-1})(z^{m-1} + x_2 z^{m-2} + \ldots$$
$$\ldots + x_2^{m-1}) \ldots (z^{m-1} + x_n z^{m-2} + \ldots + x_n^{m-1})$$

ersetzen. Dies läuft aber darauf hinaus, die Functionen $\chi_1, \chi_2, \ldots \ldots \chi_{mn}$ durch die Coëfficienten des Productes

$$(z^m - x_1^m)(z^m - x_2^m)\ldots(z^m - x_n^m) = z^{mn} - \tau_1 z^{mn-m} + \tau_2 z^{mn-2m} - \ldots \pm \tau_n$$

zu ersetzen. Die Functionen $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ gehen dann in ganze Functionen von $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n$ oder in 0 über, je nachdem ihre Stellenzeiger durch m theilbar sind oder nicht, und man hat identisch

$$\sigma_1^N + H_m \sigma_1^{N-m} + H_{2m} \sigma_1^{N-2m} + \ldots H_N = 0,$$

wo H_{mr} eine ganze Function von $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n$ bezeichnet und aus Gliedern von der Form

$$c\tau_1^{\alpha_1}\tau_2^{\alpha_2}\ldots\tau_n^{\alpha_n}$$

besteht, in welchen

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n = r$$

ist.

Setzt man nun statt $x_1, x_2, \ldots x_n$ die n conjugirten Werthe von fP_s und zur Abkürzung $m + s\mu_m = \lambda$, so werden $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n$ ganze Functionen von x, welche beziehungsweise durch $M^\lambda, M^{2\lambda}, \ldots M^{n\lambda}$ theilbar sind, also H_{mr} eine durch $M^{r\lambda}$ theilbare ganze Function $B_r M^{r\lambda}$ von x, und man hat

$$S^N + B_1 M^\lambda S^{N-m} + B_2 M^{2\lambda} S^{N-2m} + \ldots = 0.$$

Hieraus folgt, wenn p die grösste in $\frac{\lambda}{m}$ enthaltene ganze Zahl, T den grössten gemeinschaftlichen Theiler von S und M^p bezeichnet und

$$S = TS_0 \qquad M^p = TL$$

gesetzt wird,

$$S_0^N + B_1 M^{\lambda - mp} L^m S_0^{N-m} + B_2 M^{\lambda - 2mp} L^{2m} S_0^{N-2m} + \ldots = 0,$$

und es erhellt, dass die Function L 0ten Grades sein muss, da sie andernfalls nicht zu S_0 theilerfremd sein könnte. S ist also durch M^p theilbar. Da ferner M in S_0^N aufgeht, wenn $\lambda > mp$ ist, und die Discriminante von M nicht $= 0$ ist, so geht M auch in S_0 und daher M^{p+1} in S auf.

Dies vorausgeschickt, bezeichne ν jede Zahl der Reihe $0, 1, 2, \ldots n-1$, welche der Bedingung

$$\frac{m-1}{m} + \nu\frac{\mu_m}{m} - \mu_{\nu+1} \geqq 0$$

genügt. Unter diesen Zahlen kommt jedenfalls $m-1$ vor, da

$$\frac{m-1}{m} + (m-1)\cdot\frac{\mu_m}{m} - \mu_m = \frac{m-1-\mu_m}{m} \geqq 0$$

ist. Es ist dann

$$q_\nu - \mu_{\nu+1} \leqq \frac{m+\nu\mu_m+m-1}{m} - \mu_{\nu+1} \leqq \frac{2m-1}{m} + \nu\,\frac{\mu_\nu+1}{\nu+1} - \mu$$

$$< 2$$

$$q_\nu - \mu_{\nu+1} > \frac{m-1+\nu\mu_m}{m} - \mu_{\nu+1},$$

$$> 0,$$

woraus

$$q_\nu = 1 + \mu_{\nu+1}$$

folgt.

Die Summe $\Sigma f P_\nu$ muss also für jede der gesuchten Fu tionen f und alle möglichen Producte P_ν, welche den einzel Zahlen ν entsprechen, durch $M^{1+\mu_{\nu+1}}$ theilbar sein. Da f Gestalt

$$u_1 f_1 + u_2 f_2 + \ldots + u_n f_n$$

hat, so sind die Coëfficienten von $u_1, u_2, \ldots u_n$ in $\Sigma f P_\nu$ Summ $\Sigma P_{\nu+1}$ und somit nach der Annahme durch $M^{\mu_{\nu+1}}$ theil Man kann demnach

$$\frac{1}{M^{\mu_{\nu+1}}} \Sigma f P_\nu = L_1 u_1 + L_2 u_2 + \ldots + L_n u_n$$

setzen, wo $L_1, L_2, \ldots L_n$ bekannte ganze Functionen vo bezeichnen, und es müssen sämmtliche Ausdrücke

$$L_1 u_1 + L_2 u_2 + \ldots + L_n u_n,$$

welche allen möglichen Producten P_ν entsprechen, durch theilbar sein. Bestimmt man also alle ganzen Functio $u_1, u_2, \ldots u_n$ von x, welche dieses bewirken, und bezeichnet diesen Functionen entsprechenden Ausdrücke $u_1 f_1 + u_2 f_2 + \ldots + u_n f_n$ mit $\bar{f}$, so sind jedenfalls alle gesuchten Function unter den Functionen $\bar{f}$ enthalten.

Es sei $u_1, u_2, \ldots u_n$ irgend ein Functionensystem, welches alle Ausdrücke $L_1 u_1 + L_2 u_2 + \ldots + L_n u_n$ durch theilbar sind, und

$$u_1 = s_1 + Q_1 M$$
$$u_2 = s_2 + Q_2 M$$
$$\cdots\cdots$$
$$u_n = s_n + Q_n M,$$

wo $s_1, s_2, \dots s_n$ die den Grad von M nicht erreichenden Reste der Functionen $u_1, u_2, \dots u_n$ in Bezug auf den Theiler M bezeichnen. Es wird dann

$$L_1 u_1 + L_2 u_2 + \dots + L_n u_n = L_1 s_1 + L_2 s_2 + \dots + L_n s_n \\ + M(L_1 Q_1 + L_2 Q_2 + \dots + L_n Q_n)$$

und es müssen demnach auch alle Ausdrücke $L_1 s_1 + L_2 s_2 + \dots$ $\dots + L_n s_n$ durch M theilbar sein. Man braucht daher, um alle Functionen $u_1, u_2 \dots u_n$ zu erhalten, nur alle ganzen Functionen $s_1, s_2, \dots s_n$ zu suchen, welche den Grad von M nicht erreichen und die Ausdrücke $L_1 s_1 + L_2 s_2 + \dots + L_n s_n$ durch M theilbar machen, und zu denselben beliebige, durch M theilbare ganze Functionen von x hinzuzufügen.

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Theilbarkeit der Ausdrücke $L_1 s_1 + L_2 s_2 + \dots + L_n s_n$ durch M bestehen in einem bekannten System von linear-homogenen Gleichungen für die unbekannten Coëfficienten der Functionen $s_1, s_2, \dots s_n$. Diese Gleichungen besitzen entweder nur die eine Lösung

$$s_1 = 0,\ s_2 = 0, \dots s_n = 0$$

oder aber eine oder mehrere linear-unabhängige Lösungen

$$\begin{array}{l} s'_1,\ s'_2, \dots s'_n \\ s''_1,\ s''_2, \dots s''_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ , \end{array}$$

durch welche die allgemeine Lösung in der Form

$$\begin{aligned} s_1 &= p' s'_1 + p'' s''_1 + \dots \\ s_2 &= p' s'_2 + p'' s''_2 + \dots \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ s_n &= p' s'_n + p'' s''_n + \dots \end{aligned}$$

darstellbar ist, wo $p', p'', \dots$ Constanten bezeichnen.

Alle Functionen $u_1, u_2, \dots u_n$, welche die gesuchten Functionen $\overline{f}$ liefern, sind demnach in den Formeln

$$u_i = Q_i M \qquad i = 1, 2, \dots n$$

oder eventuell in den Formeln

$$u_i = Q_i M + p' s'_i + p'' s''_i + \dots \qquad i = 1, 2, \dots n$$

enthalten, wo $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$ beliebige ganze Functionen von
bezeichnen. Setzt man daher

$$Mf_1 = \Phi_1, \; Mf_2 = \Phi_2, \ldots Mf_n = \Phi_n$$

und vorkommendenfalls

$$s'_1 f_1 + s'_2 f_2 + \ldots + s'_n f_n = \Phi_{n+1}$$
$$s''_1 f_1 + s''_2 f_2 + \ldots + s''_n f_n = \Phi_{n+2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

so hat man in allen Fällen eine Reihe von Functionen

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_\mu,$$

durch welche sich sämmtliche Functionen $\bar{f}$ in der Form

$$\bar{f} = g_1 \Phi_1 + g_2 \Phi_2 + \ldots + g_\mu \Phi_\mu$$

so darstellen lassen, dass $g_1, g_2, \ldots g_\mu$ ganze Functionen von
sind. Da die Functionen Φ sich als ganze linear-homoge
Formen von $f_1, f_2, \ldots f_n$ auffassen lassen und $\Phi_1, \Phi_2 \ldots$
linear-unabhängig sind, so kann man nach 3. n linear-una
hängige Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ bestimmen, welche gan
linear-homogene Formen der Φ und daher auch der Function
$f_1, f_2, \ldots f_n$ sind und durch welche sich alle Functionen $\bar{f}$
der Gestalt

$$\bar{f} = v_1 \varphi_1 + v_2 \varphi_2 + \ldots + v_n \varphi_n$$

so darstellen lassen, dass $v_1, v_2, \ldots v_n$ ganze Functionen von
sind.

Definirt man die Zahlen

$$\mu'_1, \mu'_2, \ldots \mu'_n$$

so, dass $\mu'_s = 1 + \mu_s$ oder $= \mu_s$ ist, je nachdem $s-1$ zu d
Zahlen ν gehört oder nicht, und bezeichnet P'_s irgend ein Pr
duct von s gleichen oder verschiedenen Functionen der Rei
$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ oder auch nur eine solche Function oder die Ei
heit, je nachdem $s > 1$, $s = 1$ oder $s = 0$ ist, so ist die Summ
$\Sigma P'_s$ der conjugirten Werthe von P'_s von $s = 1$ bis $s =$
durch M in der Potenz μ'_s theilbar. Denn $\Sigma P'_s$ zerfällt in Glied
von der Form $g \Sigma P_s$, wo g eine ganze Function von x bezeichn

und ist durch $M^{\mu'_s} = M^{\mu_s}$ theilbar, wenn $s-1$ nicht zu den Zahlen ν gehört. Dagegen ist, wenn $s-1$ zu denselben gehört,

$$P'_{\nu+1} = \varphi_i P'_\nu$$

und $\Sigma P'_{\nu+1}$ zerfällt in Glieder von der Form $g\Sigma\varphi_i P_\nu$, wo g eine ganze Function von x und i eine der Zahlen $1, 2, \ldots n$ bezeichnen. Diese Glieder sind alle durch M in der Potenz $1+\mu_{\nu+1} = \mu'_{\nu+1}$ theilbar, weil $\Sigma\varphi_i P_\nu$ nach dem Obigen diese Eigenschaft hat. Überdies ist für alle Stellenzeiger s von 1 bis n

$$\frac{\mu'_s}{s} \leqq \frac{\mu'_1}{1} \leqq 1.$$

Ist nämlich $\mu_1 = 0$, also auch $\mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_n = 0$, so ist $m = n$ und alle Zahlen $0, 1, 2, \ldots n-1$ gehören zu den Zahlen ν, woraus $\mu'_1 = 1$ folgt; ist aber $\mu_1 = 1$, so gehört 0 nicht zu den Zahlen ν, und μ'_1 ist ebenfalls $= 1$. Es genügt also darzuthun, dass $\frac{\mu'_s}{s} \leqq 1$ ist, was nur in dem Falle eines Beweises bedarf, wo $s-1$ zu den Zahlen ν gehört. Aus der Definition der Zahlen ν folgt aber

$$\mu_{\nu+1} \leqq \frac{m-1}{m} + \frac{\nu\,\mu_m}{m} < 1+\nu$$

also auch

$$\mu'_{\nu+1} = 1 + \mu_{\nu+1} \leqq 1+\nu.$$

Man hat also ein Functionensystem

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$$

gefunden, welches ähnliche Eigenschaften wie das System $f_1, f_2, \ldots f_n$, aber vor demselben den Vorzug voraus hat, dass wenigstens einer der Brüche

$$\frac{\mu'_1}{1}, \frac{\mu'_2}{2}, \ldots \frac{\mu'_n}{n}$$

grösser und keiner kleiner als der gleichstellige Bruch der Reihe

$$\frac{\mu_1}{1}, \frac{\mu_2}{2}, \ldots \frac{\mu_n}{n}$$

ist.

Sind nun die Brüche

$$\frac{\mu_1'}{1}, \frac{\mu_2'}{2}, \ldots \frac{\mu_n'}{n}$$

schon alle $= 1$, so bleiben die ganzen Functionen $v_1, v_2 \ldots$ unbestimmt und die Formel

$$f = v_1\varphi_1 + v_2\varphi_2 + \ldots + v_n\varphi_n$$

enthält die vollständige Auflösung der Aufgabe. Sind dagege die genannten Brüche noch nicht alle $= 1$, so sind die Fun tionen f unter den Functionen

$$\overline{f} = v_1\varphi_1 + v_2\varphi_2 + \ldots + v_n\varphi_n$$

zu suchen, und es kann das dargelegte Verfahren wieder a die Bestimmung der ganzen Functionen $v_1, v_2, \ldots v_n$ angewend und überhaupt so oft wiederholt werden, bis man zu eine Functionensystem $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ gelangt, für welches ΣP_s, wer P_s ein Product von s Functionen dieses Systems bezeichne durch M^s theilbar ist. Die Formel

$$f = t_1\omega_1 + t_2\omega_2 + \ldots + t_n\omega_n$$

enthält dann alle gesuchten Functionen und nur diese, wer man für $t_1, t_2, \ldots t_n$ alle möglichen ganzen Functionen von setzt. Die Functionen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ sind ganze linear-homoger Formen von $f_1, f_2, \ldots f_n$.

5.

Mit Hilfe der in dem vorhergehenden Abschnitte gelöste Aufgabe kann man alle Functionen

$$f = h_0 + h_1 y + h_2 y^2 + \ldots + h_{n-1} y^{n-1}$$

aufstellen, deren Coëfficienten $h_0, h_1, \ldots h_{n-1}$ ganze Function von x und welche durch eine beliebig gegebene ganze Fun tion N von x theilbar sind.

Es sei M_1 ein Factor von N, dessen Discriminante nic $= 0$ ist, und man setze in der Aufgabe des vorhergehende Abschnittes

$$f_1 = 1, f_2 = y, f_3 = y^2, \ldots f_n = y^{n-1}$$
$$M = M_1.$$

Man erhält dann für alle durch M_1 theilbaren Functionen f einen Ausdruck

$$t_1\varphi_1 + t_2\varphi_2 + \ldots + t_n\varphi_n,$$

in welchem $t_1, t_2, \ldots t_n$ unbestimmte ganze Functionen von x und $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ bekannte ganze linear-homogene Formen von $1, y, y^2, \ldots y^{n-1}$ bezeichnen.

Fällt nun M_1 mit N zusammen, so hat man die allgemeine Lösung

$$f = t_1\varphi_1 + t_2\varphi_2 + \ldots + t_n\varphi_n.$$

Ist dagegen $G = M_1 G_1$ und G_1 von höherem als dem 0ten Grade, so sei M_2 ein Factor von G_1, dessen Discriminante nicht $= 0$ ist, und man suche alle durch $M_1 M_2$ theilbaren Functionen f. Dieselben fallen mit den durch M_2 theilbaren Functionen zusammen, welche in dem Ausdrucke

$$t_1 \frac{\varphi_1}{M_1} + t_2 \frac{\varphi_2}{M_1} + \ldots + t_n \frac{\varphi_n}{M_1}$$

enthalten sind. Man setze also in der Aufgabe des vorhergehenden Abschnittes

$$f_1 = \frac{\varphi_1}{M_1}, f_2 = \frac{\varphi_2}{M_1}, \ldots f_n = \frac{\varphi_n}{M_1}$$
$$M = M_2.$$

Man erhält dann wieder einen erschöpfenden Ausdruck

$$t_1\psi_1 + t_2\psi_2 + \ldots + t_n\psi_n$$

für alle durch M_2 theilbaren Functionen von obiger Form, in welchem $t_1, t_2, \ldots t_n$ unbestimmte ganze Functionen von x und $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$ ganze linear-homogene Formen von $\frac{\varphi_1}{M_1}, \frac{\varphi_2}{M_1}, \ldots \frac{\varphi_n}{M_1}$ bezeichnen. Wird also

$$M_1\psi_1 = \chi_1, \; M_1\psi_2 = \chi_2, \ldots M_1\psi_n = \chi_n$$

gesetzt, so enthält der Ausdruck

$$t_1\chi_1 + t_2\chi_2 + \ldots + t_n\chi_n$$

alle durch $M_1 M_2$ theilbaren Functionen f.

Fährt man in derselben Weise fort, so ergeben sich a
durch N theilbaren Functionen f in der Gestalt

$$f = t_1\vartheta_1 + t_2\vartheta_2 + \ldots + t_n\vartheta_n$$

wo $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_n$ bekannte ganze linear-homogene Formen v
$1, y, y^2, \ldots y^{n-1}$ und $t_1, t_2, \ldots t_n$ unbestimmte ganze Function
von x bezeichnen.

Setzt man $N = Q$, wo Q^2 das in der Discriminante D a
gehende Quadrat höchsten Grades in x bezeichnet, so st
die Formel

$$f = t_1\vartheta_1 + t_2\vartheta_2 + \ldots + t_n\vartheta_n$$

alle durch Q theilbaren Functionen f dar und die Function

$$\omega_1 = \frac{\vartheta_1}{Q}, \quad \omega_2 = \frac{\vartheta_2}{Q}, \ldots \omega_n = \frac{\vartheta_n}{Q}$$

bilden ein Fundamentalsystem für den durch die Gleichung

$$F(y) = 0$$

festgelegten Gattungsbereich $\mathfrak{G}$.

6.

Setzt man in der Gleichung

$$F(y) = y^n + G_1(x)y^{n-1} + G_2(x)y^{n-2} + \ldots + G_n(x) = 0,$$

welche die algebraische Function y definirt, $x = \frac{1}{\xi}$ und
zeichnet die niedrigste Potenz von ξ, mit welcher $G_k\left(\frac{1}{\xi}\right)$
multipliciren ist, um in eine ganze Function H_k von ξ v
wandelt zu werden, mit ξ^{m_k}, die grösste der ganzen Zahl
welche in den Brüchen

$$\frac{m_1}{1}, \frac{m_2+1}{2}, \frac{m_3+2}{3}, \ldots \frac{m_n+n-1}{n}$$

enthalten sind, mit m, so genügt die Function

$$\eta = \xi^m y$$

der irreductibelen Gleichung

$$G(\eta) = \eta^n + \xi^{m-m_1} H_1 \eta^{n-1} + \xi^{2m-m_2} H_2 \eta^{n-2} + \ldots + \xi^{nm-m_n} H_n = 0$$

und ist demnach eine ganze algebraische Function von ξ.

Jede ganze algebraische Function φ des Gattungsbereichs $\mathfrak{G}$ geht durch die Substitution

$$x = \frac{1}{\xi} \qquad y = \frac{\eta}{\xi^m}$$

in eine rationale Function von ξ und η über, und es gibt einen kleinsten ganzen nicht negativen Exponenten e von der Art, dass $\xi^e \varphi$ algebraisch ganz in ξ wird. Dieser Exponent wird (nach Dedekind-Weber) der Exponent der Function φ genannt. Ein Fundamentalsystem $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ des Gattungsbereichs $\mathfrak{G}$ soll ein Normalfundamentalsystem genannt werden, wenn die Functionen $\frac{\omega_1}{x^{e_1}}, \frac{\omega_2}{x^{e_2}} \ldots \frac{\omega_n}{x^{e_n}}$, in welchen $e_1, e_2 \ldots e_n$ die Exponenten von $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ bezeichnen, durch die Substitution

$$x = \frac{1}{\xi} \qquad y = \frac{\eta}{\xi^m}$$

in Functionen $\omega'_1, \omega'_2 \ldots \omega'_n$ übergehen, welche ein Fundamentalsystem der Gleichung

$$G(\eta) = 0$$

bilden.

Es seien $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ die Functionen eines gegebenen Fundamentalsystems des Gattungsbereichs $\mathfrak{G}$, $e_1, e_2, \ldots e_n$ ihre Exponenten, und es gehe ω_i durch die Substitution $x = \frac{1}{\xi}$, $y = \frac{\eta}{\xi^m}$ in $\frac{\omega'_i}{\xi^{e_i}}$ über. Damit $\omega'_1, \omega'_2, \ldots \omega'_n$ ein Fundamentalsystem der Gleichung

$$G(\eta) = 0$$

bilden, ist es nothwendig und hinreichend, dass alle Functionen $\varphi'_1, \varphi'_2, \ldots \varphi'_n$ eines bestimmten Fundamentalsystems dieser

Gleichung sich als ganze linear-homogene Formen von $\omega'_1, \omega'_2, \ldots \omega'_n$ darstellen lassen.

Es gehe φ'_i für die Substitution

$$\xi = \frac{1}{x} \qquad \eta = \frac{y}{x^m}$$

in $\frac{\varphi_i}{x^e}$ über, wo φ_i algebraisch ganz in x und nicht durch x theilbar ist. Man hat dann

$$\varphi_i = g_1(x)\omega_1 + g_2(x)\omega_2 + \ldots + g_n(x)\omega_n,$$

wo $g_1, g_2, \ldots g_n$ ganze Functionen von x bezeichnen. Setzt man in dieser Gleichung $x = \frac{1}{\xi}$, $y = \frac{\eta}{\xi^m}$ und multiplicirt mit ξ^e, so wird

$$\varphi'_i = \xi^{e-e_1} g_1\left(\frac{1}{\xi}\right)\omega'_1 + \xi^{e-e_2} g_2\left(\frac{1}{\xi}\right)\omega'_2 + \ldots + \xi^{e-e_n} g_n\left(\frac{1}{\xi}\right)\omega'_n$$

Ist daher eine der Functionen $g_1(x), g_2(x), \ldots$, etwa $g_k(x)$ von höherem als dem $(e-e_k)^{\text{ten}}$ Grade, so ist $\xi^{e-e_k} g_k\left(\frac{1}{\xi}\right)$ keine ganze Function von ξ, und φ'_i kann nicht als ganze linear-homogene Form von $\omega'_1, \omega'_2, \ldots \omega'_n$ dargestellt werden. Ist in diesem Falle allgemein ν_h die Gradzahl der Function g_h, wenn letztere nicht identisch verschwindet, d die grösste unter den Differenzen $\nu_h + e_h - e$, und entspricht diese Differenz der Function g_r, so ist der Coëfficient von x^{ν_r} in g_r von Null verschieden und man hat, wenn

$$\xi^{e-e_h+d} g_h\left(\frac{1}{\xi}\right) = a_h + \xi g'_h$$

$$g'_1\omega'_1 + g'_2\omega'_2 + \ldots + g'_n\omega'_n = g'$$

gesetzt wird,

$$\xi^d \varphi'_i - \xi g' = a_1\omega'_1 + a_2\omega'_2 + \ldots + a_n\omega'_n,$$

wo a_r nicht $= 0$ ist. Da φ'_i und g' algebraisch ganz in ξ sind, so ist $\xi^d\varphi'_i - \xi g'$ durch ξ theilbar, und es gibt somit eine durch ξ theilbare Function von der Form

$$a_1\omega'_1 + a_2\omega'_2 \ldots + a_n\omega'_n,$$

in welcher $a_1, a_2, \ldots a_n$ nicht durchweg verschwindende constante Grössen sind. Die Functionen $\omega'_1, \omega'_2, \ldots \omega'_n$ bilden daher ein Fundamentalsystem oder nicht, je nachdem eine durch ξ theilbare Function von vorstehender Form nicht existirt oder existirt.

Um dies zu entscheiden, suche man nach 4. alle durch ξ theilbaren Functionen von der Form

$$f' = u_\alpha \omega'_\alpha + u_\beta \omega'_\beta + \ldots + u_\nu \omega'_\nu,$$

in welchen $u_\alpha, u_\beta, \ldots u_\nu$ ganze Functionen von ξ bezeichnen und die Stellenzeiger $1, 2, \ldots n$ in eine solche Reihenfolge gebracht worden sind, dass

$$e_\alpha \leqq e_\beta \leqq e_\gamma \leqq \ldots \leqq e_\nu$$

ist. Man findet

$$f' = t_1 \psi'_1 + t_2 \psi'_2 + \ldots + t_n \psi'_n,$$

wo $t_1, t_2, \ldots t_n$ unbestimmte ganze Functionen von ξ und $\psi'_1, \psi'_2 \ldots$ $\ldots \psi'_n$ bekannte ganze linear-homogene Formen von $\omega'_1, \omega'_2 \ldots \omega'_n$ bezeichnen. Man darf $\psi'_1, \psi'_2, \ldots$ in der Gestalt

$$\begin{aligned}
\psi'_\alpha &= c_{\alpha\alpha} \omega'_\alpha \\
\psi'_\beta &= c_{\beta\alpha} \omega'_\alpha + c_{\beta\beta} \omega'_\beta \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\psi'_\nu &= c_{\nu\alpha} \omega'_\alpha + c_{\nu\beta} \omega'_\beta + \ldots + c_{\nu\nu} \omega'_\nu
\end{aligned}$$

annehmen, da man nöthigenfalls $\psi'_1, \psi'_2, \ldots$ nach 3. durch ein anderes Functionensystem ersetzen kann, welches die gewünschte Gestalt besitzt.

Die Coëfficienten

$$c_{\alpha\alpha}, c_{\beta\beta}, \ldots c_{\nu\nu}$$

können nur entweder constant, also $= 1$, oder $= \xi$ sein. Da nämlich $\xi \omega'_\varepsilon$ durch ξ theilbar ist, so hat man

$$\xi \omega'_\varepsilon = k_\alpha \psi'_\alpha + k_\beta \psi'_\beta + \ldots + k_\nu \psi'_\nu,$$

wo $k_\alpha, k_\beta, \ldots k_\nu$ ganze Functionen von ξ bezeichnen. Hierin müssen alle etwaigen Coëfficienten k_i, deren Stellenzeiger i in der Reihe $\alpha, \beta, \ldots \nu$ auf ε folgen, $= 0$ sein, und es wird für jeden Stellenzeiger ε

$$\xi = k_\varepsilon c_{\varepsilon\varepsilon}.$$

Ist $c_{\varepsilon\varepsilon} = \xi$, so reducirt sich ψ'_ε auf $\xi\omega'_\varepsilon$. Dies bedarf nur eines Beweises, wenn ε nicht $= \alpha$ ist. Da $\psi_\varepsilon - c_{\varepsilon\varepsilon}\omega'_\varepsilon$ durch ξ theilbar ist, so hat man

$$\psi'_\varepsilon - c_{\varepsilon\varepsilon}\omega'_\varepsilon = l_\alpha\psi'_\alpha + l_\beta\psi'_\beta + \dots + l_\nu\psi'_\nu,$$

wo $l_\alpha, l_\beta, \dots l_\nu$ ganze Functionen von ξ sind. Hierin müssen $l_\varepsilon, \dots l_\nu$ verschwinden, und es ergibt sich

$$c_{\varepsilon\delta} = l_\delta c_{\delta\delta}.$$

Da aber angenommen werden darf, dass $c_{\varepsilon\delta}$ den Grad von $c_{\delta\delta}$ nicht erreicht, so muss $c_{\varepsilon\delta} = 0$ sein. Ebenso ergibt sich

$$c_{\varepsilon\gamma} = 0, \dots c_{\varepsilon\alpha} = 0.$$

Sind nun alle Coëfficienten $c_{\alpha\alpha}, c_{\beta\beta}, \dots c_{\nu\nu} = \xi$, so bilden $\omega'_1, \omega'_2, \dots \omega'_n$ nach dem Vorhergehenden ein Fundamentalsystem der Gleichung

$$G(\eta) = 0$$

und $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n$ ein Normalfundamentalsystem des Gattungsbereichs $\mathfrak{G}$.

Sind dagegen einige der Coëfficienten $c_{\alpha\alpha}, c_{\beta\beta}, \dots c_{\nu\nu} = 1$, so bilden $\omega'_1, \omega'_2 \dots \omega'_n$ kein Fundamentalsystem. Wohl kann man aber in diesem Falle aus $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n$ ein Normalfundamentalsystem in folgender Weise ableiten.

Man setze für jeden Stellenzeiger ε

$$\psi_\varepsilon = c_{\varepsilon\alpha}x^{e_\varepsilon - e_\alpha}\omega_\alpha + c_{\varepsilon\beta}x^{e_\varepsilon - e_\beta}\omega_\beta + \dots + \omega_\varepsilon$$

oder

$$\psi_\varepsilon = \omega_\varepsilon,$$

je nachdem $c_{\varepsilon\varepsilon} = 1$ oder $= \xi$ ist. Da die Functionen $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n$ sich als ganze linear-homogene Formen der Functionen $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_n$ darstellen lassen, so bilden letztere ebenfalls ein Fundamentalsystem von $\mathfrak{G}$. Da ferner ψ_ε für die Substitution $x = \frac{1}{\xi}$, $y = \frac{\eta}{\xi^m}$ in $\frac{\psi'_\varepsilon}{\xi^{e_\varepsilon}}$ oder $\frac{\omega'_\varepsilon}{\xi^{e_\varepsilon}}$ übergeht, je nachdem $c_{\varepsilon\varepsilon} = 1$ oder $= \xi$ ist, so ist der Exponent von ψ_ε im ersten Falle $< e_\varepsilon$ und im zweiten $= e_\varepsilon$. Sind daher $e'_1, e'_2, \dots e'_n$ die Exponenten von $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_n$, so hat man

$$e'_1 + e'_2 + \dots + e'_n < e_1 + e_2 + \dots + e_n.$$

Wendet man auf das Fundamentalsystem $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$ wieder dasselbe Verfahren wie auf $\omega_1, \omega_2, \ldots$ an, so erweist sich dasselbe entweder schon als ein Normalfundamentalsystem oder aber erhält man ein neues Fundamentalsystem $\chi_1, \chi_2, \ldots \chi_n$, in welchem die Summe der Exponenten seiner Functionen

$$< e'_1 + e'_2 + \ldots + e'_n$$

ist. So kann fortgefahren werden, und es lässt sich für die Anzahl der Schritte, die man machen muss, um auf ein Normalfundamentalsystem zu stossen, eine Grenze angeben.

Setzt man für irgend ein Fundamentalsystem $f_1, f_2, \ldots f_n$ des Gattungsbereichs $\mathfrak{G}$, über alle conjugirten Werthe von y erstreckt,

$$\Sigma f_i f_k = a_{ik}(x),$$

so bleibt die Determinante

$$\Delta(x) = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$$

bekanntlich bis auf einen constanten Factor dieselbe für alle Fundamentalsysteme von $\mathfrak{G}$ und wird die Discriminante des Gattungsbereichs $\mathfrak{G}$ genannt. Da nämlich für irgend ein zweites Fundamentalsystem $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_n$ n Gleichungen von der Form

$$\vartheta_i = g_{i1} f_1 + g_{i2} f_2 + \ldots + g_{in} f_n \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

bestehen, wo $g_{i1}, g_{i2}, \ldots$ ganze Functionen von x bezeichnen, so ist die Determinante der n^2 Elemente $\Sigma \vartheta_i \vartheta_k$ durch Δ theilbar. Da aber auch das Umgekehrte statthat, so können sich die beiden Determinanten nur durch einen constanten Factor unterscheiden.

Sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ die Exponenten von $f_1, f_2, \ldots f_n$ und gehen die Functionen $x^{\alpha_1} f_1, x^{\alpha_2} f_2, \ldots x^{\alpha_n} f_n$ für die Substitution $x = \frac{1}{\xi}$, $y = \frac{\eta}{\xi^m}$ in $f'_1, f'_2, \ldots f'_n$ über, so hat man, über alle conjugirten Werthe von η erstreckt,

$$\sum \frac{f'_i f'_k}{\xi^{\alpha_i + \alpha_k}} = a_{ik}\left(\frac{1}{\xi}\right)$$

oder

$$\Sigma f_i' f_k' = \xi^{\alpha_i + \alpha_k} a_{ik}\left(\frac{1}{\xi}\right).$$

Die Determinante der n^2 Elemente $\Sigma f_i' f_k'$ ist daher $\xi^{2(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n)} \Delta\left(\frac{1}{\xi}\right)$ und da dieselbe eine ganze Function v sein muss, so ist

$$2(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \geqq \sigma,$$

wenn σ den Grad von $\Delta(x)$ bezeichnet.

Ist also τ die grösste in $\frac{\sigma}{2}$ enthaltene ganze Zahl, so brau man das oben dargelegte Verfahren höchstens $e_1 + e_2 + \dots + e$ mal anzuwenden, um auf ein Normalfundamentalsystem stossen.



Versuche mit Wechselströmen

von

Viktor v. Lang,

w. M. k. Akad.

(Mit 2 Textfiguren.)

I.

Professor Elihu Thomson hat vor nicht langer Zeit in einer populären Schrift[1] interessante Versuche über Abstossungen beschrieben, die durch Wechselströme hervorgerufen werden. Diese Versuche, welche zum Theil auch schon auf der Pariser Weltausstellung vom Jahre 1889 zu sehen waren, erfordern aber einen ziemlichen Aufwand von Hilfsmitteln, wie sie nicht leicht Jemandem zu Gebote stehen. Es lassen sich aber Prof. Thomson's Versuche in eine Form bringen, wo sie mit Wechselströmen von viel geringerer Frequenz und Intensität auszuführen sind und dabei manche neue Wahrnehmung zu machen gestatten.

Die Hauptsache bei der von mir gewählten Anordnung besteht darin, dass der Eisenkern der angewandten Drahtspule auf der einen Seite weit herausragt. Dieser Kern besteht natürlich aus dünnen Drähten. Legt man über das herausragende Stück desselben gut leitende Ringe und sendet durch die Spule mässige Wechselströme, so werden diese Ringe von der Spule in erstaunlichem Masse abgestossen.

Die Dimensionen meines in Fig. 1 abgebildeten Apparates sind folgende. Die Spule ist aus doppelt mit Seide übersponnenem Kupferdraht von 1·5 *mm* Durchmesser hergestellt und enthält 6 Lagen, jede zu 26 Windungen; ihr Gewicht ist ungefähr

[1] Elihu Thomson: Was ist Elektricität? Übersetzt von H. Discher. Leipzig und Wien 1890.

$^3/_4$ Kilo, ihr Widerstand 0·53 Ohm. Sie wurde auf einen H
cylinder von 35 *mm* Durchmesser mit zwei abnehmba
Scheiben gewickelt, dann mit untergelegten Bindfaden zusamm
gebunden und stellenweise noch mit Siegellack gefestigt. M
erhielt so eine Spule, die blos aus Draht bestand, und deren
nung nun ganz mit Eisendrähten ausgefüllt wurde. Der du
diese Drähte gebildete Eisenkern hat eine Länge von 240 *cm* u
wird an dem unteren Ende durch die Spule, an dem obe
durch einen Ring zusammengehalten, der von einem dü
wandigen Messingrohr ab
schnitten ist. Ein ähnlicher R
befindet sich noch in der M
des Bündels.

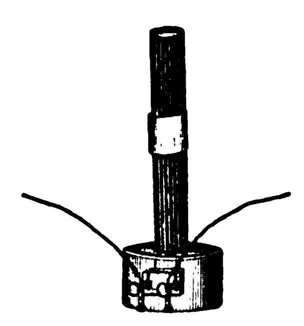


Fig. 1.

Um diese Vorrichtung au
in umgekehrter Lage benütz
zu können, ist die Spule in e
einerseits offene cylindrisc
Holzbüchse mit Gyps eingekit
Der sehr dünne Boden die
Büchse hat natürlich ein Lo
durch welches der Eisenkern hindurchgeht, während an d
offenen Ende der Büchse der Holzrand mit den Enden
Spule und des Eisenkernes in einer Ebene liegt. Auf der Man
fläche der Büchse ist an einer Stelle noch ein Holzklotz auf
leimt für die Doppelklemmen, in welche der Spulendraht
seinen beiden Enden ausläuft.

Die Versuche selbst wurden mit dem Wechselstrom a
geführt, welcher auch zur Beleuchtung eines Theiles des phy
kalischen Cabinetes dient. Eine eigene „Versuchsleitung" fü
nämlich vom Laboratorium zu dem im Keller befindlich
Transformator, der von der Centralstation der hiesigen in
nationalen Elektricitäts-Gesellschaft mit Strom versorgt wird.
wurde gewöhnlich nur die Hälfte der secundären Wickelu
des Transformators benützt, wobei die Spannung an den En
der Versuchleitung etwa 50 Volt beträgt. Die Periodenzahl
Wechselstromes ist ebenfalls sehr niedrig und variirt zwisch
42 und $43^1/_2$ in der Secunde. Bringt man durch vorgeschalte
Widerstand den Strom in der Spule auf 5 A. (effectiv), so

die Spannung an den Enden der Spule, wie ein in das zweite Paar der Endklemmen geschaltetes Voltmeter zeigt, ungefähr 24 V. (effectiv). Hieraus folgt für den Inductions-Coëfficienten der Spule bei der angegebenen Stromstärke ungefähr 0·018.

Gibt man nun, während dieser Strom durch die Spule fliesst und die Spule sich in der ersten Lage mit dem Eisenkern nach oben befindet, über diesen Kern einen Aluminiumring (Gewicht 17 *g*, Höhe 4 *cm*, Durchmesser 4·7 *cm*), wie er jetzt überall als Serviettenband verkauft wird, so wird derselbe kräftig von der Spule abgestossen und schwebt mit seinem unteren Rande 10·5 *cm* über der obersten Fläche der Holzbüchse, Fig. 1.

Ein etwas kürzerer, sonst gleicher Aluminiumring (Höhe 2·4 *cm*) zeigt eine nur wenig schwächere Abstossung. Sehr wirksam erwies sich auch ein Ring, der aus nicht ganz vier Windungen eines 4 *mm* dicken Kupferdrahtes bestand, wobei aber die einzelnen Windungen durch Zinnloth verbunden waren, so dass sie einen soliden Ring von 67 *g* Gewicht mit einem mittleren Durchmesser von 4·8 *cm* bildeten. Dieser Ring wurde bei der angegebenen Stromstärke um 5 *cm* gehoben.

Aus diesen Zahlen sieht man, dass man auch schon bei viel geringeren Stromstärken deutlich wahrnehmbare Abstossungen besonders mit Aluminiumringen erhält. Man kann mit noch schwächeren Stromstärken auskommen, wenn der Eisenkern nach beiden Seiten der Spule verlängert ist. Will man dies nicht ausführen, um die Spule auch für die später zu beschreibenden Versuche benützen zu können, so braucht man nur ein zweites Bündel Eisendrähte in einem Gestelle, etwa wie das in Fig. 2 gezeichnete, vertical zu befestigen und auf dieses Bündel die beschriebene Spule coaxial aufzusetzen. Man kann dann schon mit $1^1/_2$ A. Stromstärke und $12^1/_2$ V. Spannung ein Schweben des kürzeren Aluminiumringes in 1 *cm* Höhe beobachten; bei 2 A. Stromstärke und $18^1/_2$ V. Spannung wird dieser Ring schon 5 *cm* hoch gehoben.

Treibt man, wieder ohne den unteren Eisenkern, die Stromstärke auf 10 A., wodurch die Spannung an den Spulenklammern auf $46^1/_2$ V. steigt, so ist der Aluminiumring schon fast an das Ende des Eisenkernes gelangt, während der Kupferring in der Höhe von 14 *cm* schwebt. Legt man bei offenem Stromkreis

den Aluminiumring über den Eisenkern auf die Holzbüch
und schliesst dann den Strom, so wird der Ring über den K
hinaus in die Luft geschleudert.

Beim Schweben des Kupferringes kann man beobacht
dass die Stromstärke von 10 *A*. auf $10^1/_2$ *A*. steigt, während
Spannung auf 46 *V*. sinkt. Diese Differenzen wären natürl
viel beträchtlicher, wenn man den Ring von der Stelle, wo
schwebt, zur Spule hinunterdrückt, was aber einen Gesam
druck von 0·6 *kg* erfordert.

Ein Kupferring, der nur aus einer Windung 4 *mm* dick
Drahtes besteht, schwebt bei der Stromstärke von 10 *A*. in ei
Höhe von 4·5 *cm*. Bringt man dann noch über den Eisenk
von oben den früher benützten Aluminium- oder Kupferring u
nähert denselben dem einfachen Ringe, so wird letzterer an
zogen und kann auf diese Weise bis zu einer Höhe von 13
gehoben werden.

Das letzte Experiment ist eine natürliche Folge dav
dass die in den beiden Ringen inducirten Wechselströme glei
Phase haben und sich somit anziehen. Die Abstossung ab
die ein Ring durch die Spule erfährt, muss als Folge betrach
werden, dass erstens die Phase des primären Stromes in
Spule und des secundären im Ringe nahezu um 180° verschied
sind und dass zweitens die Stromstärke im Ringe ruhig anwäch
Hiemit stimmt auch die Rechnung, welche sich in diesem Fa
freilich nur in ganz grober Annäherung ausführen lässt.

Ein Umstand complicirt ferner noch die Erscheinung
dass schon durch die secundären Wechselströme allein
Ring gegen die Mitte des Eisenbündels getrieben wird; hiedu
wird das Schweben theils unterstützt, theils gehemmt, je na
dem der Ring tief oder hoch schwebt.[1]

[1] Interessant ist in dieser Hinsicht eine Bestimmung, welche Prof.
Lecher ausführte und mir mitzutheilen die Güte hatte. Derselbe benützte
Wechselstrom der Innsbrucker Centrale und eine Spule von 8×59 Windun
eines beiläufig 2·2 *mm* dicken Kupferdrahtes. Der Durchmesser des Eisenker
war 4 *cm*, über denselben wurde der Kupferring, 32 *g* schwer, von 25 mm^2 Q
schnitt gelegt. Ging nun durch die Spule ein Strom von 11 *A*., so wu
der Kupferring 19 *cm* hoch gehoben und erhitzte sich in einer Minute so w
dass er in Calorimeter 345 *g* Calorien abgab. Dies entspricht einer Stromstä
von beiläufig 500 *A*.

Um den Apparat auch als Transformatormodell benützen zu können, wurde eine Spule aus 0·6 *mm* dickem Kupferdraht in 12 Lagen gewickelt, welche ohne Fassung nur durch Bänder und Siegellack zusammengehalten wurde. Ihre Höhe beträgt 4·8 *cm*, ihr Widerstand 12 Ω. Dieselbe ist im Stande, eine Glühlampe von 50 V. und 12 Ω Widerstand (kalt) ins Leuchten zu bringen, wenn durch die primäre Spule ein Strom von 7 A., wobei 32V. Spannung, hindurchgeht. Der innere Durchmesser (4·6 *cm*) der secundären Spule ist so gross gewählt, um zwischen ihr und dem Eisenkern noch einen Kupfercylinder schieben zu können. Dieser ist 7 *cm* lang und 170 *g* schwer und hebt das Leuchten der Glühlampe gänzlich auf, wenn er zwischen die secundäre Spule und den Eisenkern geschoben wird. Die primäre Stromstärke steigt hiebei auf 8 A.; die in den Kupfercylinder inducirten kräftigen Ströme wirken nämlich ebenfalls inducirend auf die secundäre Spule, heben aber wegen ihrer Phasendifferenz die Wirkung der primären Spule auf.

Diese Erscheinung hat man ja schon seit lange zur Schwächung der inducirten Ströme der Inductionsapparate benützt, indem man einen Metallcylinder über die primäre Spule dieser Apparate schiebt.

Schliesst man die beschriebene secundäre Spule kurz, so wird sie von der oberen Fläche der primären Spule abgestossen, und schwebt in 1·5 *cm* Höhe. Ebenso schwebt bei dem früheren Experiment der Kupfercylinder, welcher zum gänzlichen Erlöschen der Glühlampe erst niedergedrückt werden muss.

II.

Figur 2 gibt den Apparat in der zweiten Lage wieder, in welcher der Eisenkern nach unten gerichtet ist und der Apparat oben eine breite Fläche darbietet. Über dieser Fläche befindet sich im Abstande von 4 *mm* eine runde Scheibe aus 1 *mm* dickem Kupferblech, die um ihre Axe sehr leicht beweglich ist. Diese Axe wird in verticaler Stellung von einer Gabel getragen, welche selbst in einem Stativ befestigt ist. Man nähert dieses Stativ so weit dem Apparat, dass die Kupferscheibe von oben gesehen den ganzen Eisenkern bedeckt und ihr Rand mit dem des Kernes zusammenfällt. Hiezu musste bei meinem

Apparate für die untere Zinke der Gabel etwas von dem Hc
der Büchse an der betreffenden Stelle weggenommen werde

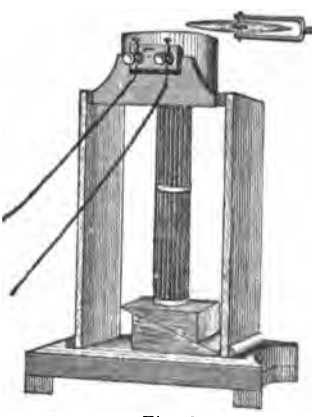


Fig. 2.

Hält man nun, während
mässiger Strom durch die Spule g
über die drehbare Kupferscheibe ei
der früher benützten Aluminiumri
oder den dicken Kupferring, etv
excentrisch zu den Eisenkern,
geräth die Scheibe in Rotation
zwar vom Eisenkern nach den R
zu. Die in der Scheibe und in c
Ringe inducirten Wechselströme
hen sich nämlich wie in dem frühe
Experimente an. Diese Anziehu
würde aber keine Bewegung
Folge haben, wenn die Induction in der Kupferscheibe übe
die gleiche wäre, sie ist aber über dem Eisenkern natürlich
stärker, so dass die Kupferscheibe sich in dem angegebe
Sinne bewegen muss.

Mit gleichem Erfolge kann man auch einen soliden Kup
cylinder über die Scheibe bringen, oder bloss eine etwas dick
Kupferplatte, wenn sie nur excentrisch gegen die Verbindun
linie der Mittelpunkte von Kern und Scheibe gehalten wird.

Auch eine Eisenplatte bewirkt in der angegebenen Stellu
die Rotation der Kupferplatte und zwar im gleichen Sir
An der Stelle wo sich die Eisenplatte befindet ist offenbar
magnetische Feld am stärksten, dort werden in der Kup
scheibe auch die stärksten Ströme inducirt. Diese Ströme lie
nun excentrisch zu dem die Spule durchfliessenden Str
gegen welchen sie nahezu um 180° in der Phase verschie
sind, sie werden dadurch von der Spule in dem früher an
gebenen Sinne abgestossen.

Die vorhergehenden Versuche lassen sich auch alle
zwar in gleichem Sinne durch Kupfer-oder Eisenstücke herv
bringen, die zwischen die obere Fläche der Spule und
Kupferscheibe gebracht werden; nur muss in diesem Falle
Scheibe, um Raum für die Metallplatten zu gewinnen, gehol
werden. Der grössere Abstand der Kupferscheibe bedingt a

auch einen stärkeren Strom in der Spule, während in der ersten Stellung der Scheibe schon eine Stromstärke von 3 A. genügt, welcher eine Spannung von 15 V. an den Enden der Spule entspricht.

Für die Richtigkeit der für die Rotation der Kupferscheibe gegebenen Erklärung spricht auch folgendes Experiment. Man ersetzt die Scheibe durch einen blossen Kupferring, der an einem Stiele in seiner Ebene befestigt und mittelst desselben um eine excentrisch gelegene verticale Axe drehbar ist. Dieser Ring wird coaxial über den Eisenkern gestellt; bringt man nun einen zweiten Ring darüber in excentrischer Stellung, so dreht sich der bewegliche gegen den fixen hin. Die Schwierigkeit besteht in diesem Falle nur darin, den Ring central über den Eisenkern zu bringen, denn bei der geringsten Unsymmetrie wird der Ring schon durch die Spule aus dem Felde hinaus geworfen.

Zum Schlusse noch folgendes Experiment, zu welchem eine kleine Drahtrolle mit Eisenkern dient, die aus 0·4 *mm* dickem Kupferdraht auf Holz gewickelt ist, 48 *mm* Höhe, 23 *mm* äusseren und 9 *mm* inneren Durchmesser hat. Die Enden dieser Spule werden in das zweite Paar Endklemmen der primären Spule geklemmt, so dass die beiden Spulen paralell geschaltet sind. Hält man nun die kleine Spule, wie früher die Ringe, vertikal über die Kupferscheibe, so rotirt diese ebenfalls, die Rotation dreht sich aber um, wenn man die kleine Spule umdreht. Die Rotation erfolgt nämlich gegen die Spule oder von ihr weg, jenachdem ihr Eisenkern das magnetische Feld verstärkt oder schwächt. Statt der kleinen Spule, die 4 Ω Widerstand und als Kern ein Drahtbündel hat, kann man mit gleichem Erfolge die grosse Rolle ohne Eisenkern benützen, welche oben zu dem Experimente mit der Glühlampe diente.

Die zuletzt beschriebene Erscheinung ist dieselbe, welche von Bláthy zur Construction seiner Wechselstrommesser verwendet wurde.

Experimental-Untersuchungen über Dielektrica

von

Dr. **Gustav Benischke.**

(Mit 1 Textfigur.)

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Innsbruck.

(Vorgelegt in der Sitzung am 13. April 1893.)

Die vorliegende Arbeit enthält in ihrem ersten Theile
Bestimmung der Dielektricitätsconstanten einiger fester Kör
in ihrem zweiten Theile die Untersuchung des Einflusses
Wechselströmen auf jene Grössen. Dieser zweite Theil bild
eigentlich den Ausgangspunkt meiner Arbeit. Die Empfindli
keit der dabei verwendeten Methode hat mich dann bewog
die Bestimmung der Dielektricitätsconstanten selbst vor
nehmen. Ich gehe daher zunächst an die Beschreibung
Discussion dieser Methode.

Methode.

Zur vorliegenden Untersuchung wurde die von Lech
abgeänderte Gordon'sche Methode verwendet, die auf der
gleichung zweier Condensatoren — des mit dem betreffen
Dielektricum versehenen mit einem Luftcondensator — mitt
des Quadrantenelektrometers beruht.

Da das hiesige Institut den Wechselstrom des Elektricit
werkes Innsbruck zur Verfügung hat, so wurde auf Anreg
von Herrn Prof. Lecher dieser, statt der Entladungen
Ruhmkorff'schen Inductoriums verwendet. Diese Meth
hat sich dann im Laufe der Untersuchung so vortheilhaft

---

[1] Lecher, diese Berichte, 99 (2a), S. 480, 1890.

staltet, dass ich die dabei gemachten Erfahrungen für mittheilenswerth halte. Da sich die Spannung des Wechselstromes (etwa 105 Volt) zur Erreichung der gewünschten Empfindlichkeit als zu gering erwies, wurde er mit Hilfe eines gewöhnlichen Inductoriums, bei dem Unterbrecher und Condensator ausgeschaltet waren, auf höhere Spannung transformirt.

ab ist die Wechselstromleitung, die durch die primäre Wickelung *cd* geht. *ef* ist die secundäre Wickelung, deren ein Ende zur Erde abgeleitet ist, während sich das andere zu den Collectorplatten der beiden Condensatoren *C* und *C'* hin verzweigt. Die beiden Condensatorplatten sind mit je einem Quadrantenpaar des Elektrometers verbunden; die Nadel desselben ist zur Erde abgeleitet.

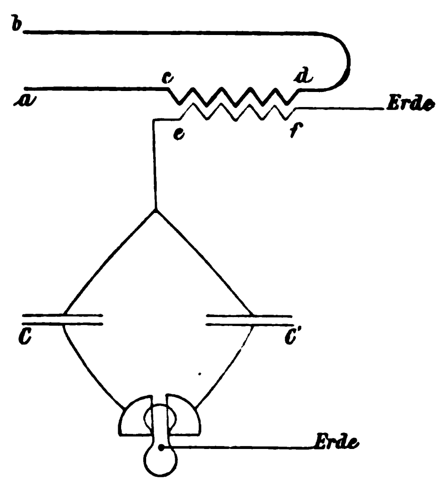


Fig. 1.

Haben die beiden Condensatoren gleiche Capacität, so muss sich die Nadel auf den Nullpunkt einstellen.

Bei allen bisherigen Bestimmungen der Dielektricitätsconstanten ist das Bestreben vorherrschend, die Dauer der Ladung, der das Dielektricum unterworfen wird, möglichst zu verkürzen. Man ging dabei von der Thatsache aus, dass jedes Dielektricum — mit Ausnahme eines idealen — eine mit wachsender Ladungsdauer steigende Ladung annimmt. Dies suchte man durch möglichst rasch aufeinanderfolgende Ladung und Entladung des Condensators zu vermeiden, was aber dadurch nur zum Theile erreicht wird. Denn wenn das Dielektricum überhaupt eine mit der Zeit wachsende Ladung annimmt, so wird eine darauf folgende, kurz dauernde Entladung des Condensators nicht die gesammte Ladung aus dem Dielektricum entfernen. Und je kürzer die Entladungszeiten sind, desto grösser werden die zurückbleiben-

den Reste sein, die sich summiren. Allerdings kann man
einzelnen Summanden durch Verkürzung der Ladungs
immer kleiner machen; dadurch wächst aber gleichzeitig
Zahl der Summanden.

Dieser Übelstand wird auch bei Verwendung der elek
schen Schwingungen eines Inductionsapparates nicht gänzl
beseitigt, da dabei doch auch einseitige Ladung stattfin
Verwendet man hingegen gleichmässig verlaufende Wech
ströme, wie sie eine Wechselstrommaschine liefert, so folgt
jede Ladung eine ganz gleichartig entgegengesetzte. Wenn
her das Dielektricum überhaupt Ladungen aufnimmt, so w
es in diesem Falle gleichartige Schichten positiver und ne
tiver Elektricität enthalten, deren Gesammtwirkung nach aus
Null ist.

Aus demselben Grunde erscheint auch jede Rückstan
bildung vermieden, mag man sie nun als die eben besproche
restlichen Ladungen, oder als »dielektrische Nachwirkung« a
fassen.

Die Richtigkeit dieser Anschauung scheinen mir auch
Messungen an dem im dritten Abschnitte zu beschreiben
künstlichen Dielektricum zu beweisen.

Diesen günstigen Verhältnissen ist es auch zuzuschreib
dass die Dielektricitätsconstanten einer Parafinplatte bei bei
seits angepressten Condensatorplatten und bei Vorhanden
einer Luftschichte sich um nicht mehr als die gewöhnlic
Beobachtungsfehler unterschieden. Jedoch wurden die Be
achtungen immer nach der zweiten Art vorgenommen, weil
vollständige Anliegen der Condensatorplatten nur schwer
erreichen ist, und der Abstand der Platten dann doch nicht
Dicke des Dielektricums gleich ist.

In jüngster Zeit hat man in dem Bestreben, die Ladun
zeiten zu verkürzen, zu Hertz'schen Schwingungen gegrif
Diese Messungen weisen aber so verschiedene Resultate
dass man zu dem Schlusse gelangen muss, dass die Ladun
dauer viel weniger von Bedeutung ist, als andere Fehlerquel
deren Ursachen insbesondere bei diesen Methoden noch gä
lich unbekannt sind. So erhielt Lecher[1] für die Dielektricit

[1] Lecher, l. c.

constante des Glases Werthe von 6 bis 7 bei 3.10^{-7} Secunden Schwingungsdauer, dagegen einen Werth von 5 bei Anwendung eines Ruhmkorff'schen Inductoriums mit $5 \cdot 10^{-4}$ Sec. Schwingungsdauer. Perot[1] erhielt bei Schwingungsdauern von etwa 9.10^{-8} Sec. einen Werth von 6·1, während er bei Ladungsdauern von 0·02—0·004 Sec. den Werth 5·8 — gemessen mittelst des ballistischen Galvanometers — bekam. Anderseits erhielt Perot bei fortgesetzter Verkleinerung der Schwingungsdauer bis etwa 7.10^{-9} auch eine Verkleinerung der Dielektricitätsconstante bis zum Werthe 2·7. Denselben Werth erhielten J. J. Thomson[2] und Blondlot[3] schon bei einer Schwingungsdauer von etwa 2.10^{-7} Sec. Endlich haben schon frühere Beobachter[4] und jetzt auch ich für verschiedene Glassorten Werthe von 3 und 4 gefunden bei Ladungsdauern, die viele tausendmal grösser sind als jene, bei denen Lecher und Perot Werthe von 6 bis 7 und 6 erhielten.

Es ergibt sich daraus, dass bei den Bestimmungen der Dielektricitätsconstanten mittelst Hertz'scher Schwingungen Umstände auftreten, die bis jetzt noch nicht zu übersehen sind, und dass der Ladungsdauer nicht jener Einfluss zuzukommen scheint, der ihr bisher zugeschrieben wurde.

Ich kehre zur Beschreibung meiner Methode zurück.

Die Bestimmung der Dielektricitätsconstante durch Vergleichung zweier Condensatoren hat den Vortheil, dass man von Potentialschwankungen unabhängig ist und dass bei günstig gewählten Verhältnissen die Randcorrectur aus der Messung herausfällt. Um das zu erreichen, dürfen die Abstände der Condensatorplatten nicht zu gross genommen werden und jener Condensator, der das zu untersuchende Dielektricum aufnimmt, wird eine etwas kleinere Fläche erhalten müssen, als der Luftcondensator, damit bei gleicher Capacität die Abstände der Platten beider Condensatoren nahezu gleich sind. Ferner muss die dielektrische Platte genau so gross sein, als die Con-

---

[1] Perot, C. R. 115, S. 166, 1892.

[2] J. J. Thomson, Proc. Roy. Soc. 46, 1889. Physik. Revue 1892, S. 120.

[3] Blondlot, J. de phys. (2), 10, 1891. Physik. Revue 1892, S. 127.

[4] Winkelmann, Handbuch, III, 1, S. 77.

densatorplatten. Wäre sie grösser, so wäre auch die Ra
correctur nicht gleich der des Luftcondensators und müsste
Dielektricitätsconstante so beeinflussen, dass sie bei der Bere
nung aus der Capacität zu gross erscheint. Ich habe m
experimentell davon überzeugt und bei herausragenden Plat
um 1 bis 2 Procente grössere Werthe erhalten. Dieser Einfl
ist öfter übersehen worden; so auch von Gordon und in let
Zeit noch von O. Werner.[1]

Der Durchmesser des Luftcondensators beträgt 179·9 *n*
der des anderen Condensators und der dielektrischen Plat
161·0 *mm*.

Die Entfernung der Condensatorplatten konnte du
Stellschrauben genau regulirt, und durch Einschieben ei
flachen Metallkeiles bestimmt werden. Bei einiger Übung
reicht man damit eine vollständig hinreichende Genauigk
Die Dicke des in diesen Condensator einzuschiebenden
elektricums wurde mittelst einer in einem Metallrahmen befi
lichen Mikrometerschraube an 20 bis 30 Stellen bestimmt u
daraus das Mittel genommen.

Der Luftcondensator besass eine an einer siche
Führung verschiebbare Platte und konnte durch eine Mik
meterschraube, die noch 0·0005 *mm* zu schätzen gestatt
dem anderen Condensator an Capacität genau gleich gema
werden.

Die Ablesung der Stellung der Elektrometernadel gescl
nach einer im hiesigen Institute bereits erprobten objecti
Methode in folgender Weise: Durch den kleinen Hohlspie
des Elektrometers wurde das Bild des glühenden Fadens ei
Glühlampe auf eine etwa 2 *m* entfernte durchsichtige Millime
theilung geworfen und konnte hier mit grosser Genauigkeit u
ohne die Augen zu ermüden, abgelesen werden. Besonders
Nullmethoden leistet diese Art der Ablesung dasselbe, wie
subjective mit dem Fernrohre und hat den Vortheil der Üb
sichtlichkeit und Sichtbarkeit von beliebigen Orten aus.

Da bei der hier verwendeten Schaltung weder Nadel n
Quadranten des Elektrometers eine constante Ladung besass

[1] Werner, Wied. Ann. 47, S. 619, 1892.

war dasselbe für kleine Potentiale sehr unempfindlich. Das hat den Vortheil, dass kleine äussere Ladungen keinen Einfluss haben und die Nadel des Elektrometers keine Schwankungen macht.

Von Wichtigkeit ist eine gute Isolirung aller Drähte und Apparate, insbesondere wegen der höheren Spannungen, die bei den im 3. Abschnitte mitgetheilten Versuchen angewendet wurden.

Ein anderer wohl zu beachtender Umstand ist der, dass sich die Condensatoren nicht in der Nähe guter Leiter befinden dürfen. Darauf wurde ich bei meinen ersten Versuchen aufmerksam, wo ich bemerkte, dass die Hand, die sich der Mikrometerschraube näherte, einen kleinen Ausschlag verursachte. Die Hand kam dabei zu nahe an den Rand des Condensators, und es wurden daher Kraftlinien in die Hand hineingezogen, die sonst zwischen den beiden Condensatorplatten verlaufen. Ich musste daher den Condensator in grösserer Entfernung von der Mikrometerschraube anbringen. Ausserdem arbeitete ich mit möglichst kleinen Abständen der Condensatorplatten (Max. 4 *mm*), so dass jener Einfluss ganz beseitigt wurde.

Auf diesen Umstand hat in letzter Zeit auch Cohn[1] aufmerksam gemacht bei Besprechung der Methoden von Winkelmann[2] und Tschegläjew[3], welch letzterer für die Dielektricitätsconstante des Wassers die merkwürdige Zahl 1·75 gefunden hat. Bei beiden Methoden bestehen die beiden Condensatoren zusammen aus 3 Platten. Bei der ersten wird die mittlere Platte mittelst eines Inductoriums geladen, während die beiden äusseren durch ein Telephon verbunden sind. Bei Gleichheit der Capacitäten ist der Ton im Telephon ein Minimum. Bei der zweiten Methode sind beide äusseren Platten mit dem Inductorium verbunden. Die mittlere Platte ist durch einen an einer Stelle unterbrochenen Kohlenfaden einer Glühlampe mit der Erde verbunden. Sind die Condensatoren ungleich, so treten an der Unterbrechungsstelle des Kohlenfadens Lichterscheinungen auf; bei Gleichheit der Condensatoren nicht mehr. Cohn

[1] Cohn, Wied. Ann., 46, S. 135, 1892.
[2] Winkelmann, Wied. Ann., 38, S. 161, 1890.
[3] Tscheglājeff, Wied. Beibl. 15, S. 651.

glaubt nun darin einen Grund für den auffälligen Werth, d
Tscheglājew für Wasser erhielt, zu finden, dass die mittl
Platte nicht direct zur Erde abgeleitet war, wesshalb die Kr
linien statt zwischen den Platten auch anderseits verlau
können. Aber selbst wenn dieser Umstand ganz übersel
worden wäre, könnte man daraus nicht die grosse Abweichu
von den Werthen anderer Beobachter erklären. Die betreffe
Arbeit selbst ist leider nicht zugänglich.

Donle[1] verwendet ebenfalls einen Ruhmkorff'sch
Inductor zur Ladung des Condensators, verbindet die zw
Platte desselben durch ein Elektrodynamometer mit der E
und vergleicht die Capacität desselben Condensators bei L
und bei einem anderen Dielektricum, indem er durch V
änderung der Plattendistanz gleiche Ausschläge des Dyna
meters herstellt. Abgesehen von den Störungen, denen ein
diesem Zwecke genug empfindliches Dynamometer ausges
ist, ist man dabei von den Potentialschwankungen des Ind
toriums abhängig, weil die Ladung der zu vergleichenden C
densatoren nicht gleichzeitig erfolgt.

Nach alledem scheinen die Methoden von Gord
und Schiller[3] noch immer die zuverlässigsten zu sein,
welch ersterer die hier verwendete Methode nur die Anwendu
des Wechselstromes, vor beiden aber die grössere Einfach
und Bequemlichkeit voraus hat. Mit diesen Messungen stimm
auch die meinen am besten überein.

Was den zur Ladung der Condensatoren verwende
Wechselstrom anbelangt, so macht derselbe 80 Stromwech
in der Secunde, also ebensoviele einander entgegengese
Ladungen. Durch Veränderung der Stromstärke in der primä
Wickelung des Transformators konnte die Spannung
secundären Stromes und damit auch die Stärke des elektrisc
Feldes zwischen den Condensatorplatten und die Empfindli
keit der Methode verändert werden.

Um die Abhängigkeit der mittleren Spannung des sec
dären Stromkreises von der mittleren Stromstärke des primä

[1] Donle, Wied. Ann., 40, S. 307, 1890.
[2] Gordon, Wiedemann, Elektricität, 1883, Bd. II, S. 38.
[3] Schiller, Pogg. Ann., 152, S. 555, 1874.

Stromes kennen zu lernen, wurde der Transformator mittelst eines auf eine Waage montirten Schutzringelektrometers geaicht. Ich hatte also durch das in den primären Strom eingeschaltete Ampèrmeter ein Mass für die zur Ladung verwendete Spannung. Zur Messung der Dielektricitätsconstanten wurde eine mittlere Spannung von 180 Volt verwendet.

Die Möglichkeit, das elektrische Feld, in dem sich das Dielektricum befindet, beliebig verändern zu können, gibt ein Mittel an die Hand einen eventuellen Einfluss der Leitungsfähigkeit zu constatiren. Hätte nämlich die dielektrische Platte ein grösseres Leitungsvermögen als die Luftschichte des Luftcondensators, so würde sich bei einer Änderung der Spannung auch eine Änderung der Capacität ergeben. Ich konnte jedoch niemals einen solchen Einfluss constatiren, auch bei Glas nicht, obwohl ich ihn hier von vornherein erwartete und die Spannung zwischen 150 und 300 Volt veränderte; es hätte sich dann durch Rechnung die Dielektricitätsconstante von diesem Einflusse befreien lassen. Ich hoffe aber demnächst die Flüssigkeiten in dieser Absicht untersuchen zu können.

Schiller[1] hat ebenfalls die Unabhängigkeit der Dielektricitätsconstante von der Stärke des elektrischen Feldes constatirt. Dagegen hat in jüngster Zeit Cardani[2] ein gleichzeitiges Wachsen beider Grössen gefunden. Bei dieser Methode geschieht die Ladung durch Leydnerflaschen, und die Länge der Funkenstrecke bestimmt deren Potential. Nun werden aber die Funkenentladungen ausser von der Potentialdifferenz von so vielen Nebenumständen beeinflusst, dass sich daraus, trotz aller Vorsichtsmassregeln, die bei dieser Methode getroffen sind, keine sicheren Schlüsse ziehen lassen.

Die Berechnung der Dielektricitätsconstanten ergibt sich, wenn die Potentialdifferenzen und Capacitäten der Condensatoren gleich sind, aus der Gleichung:

$$\frac{r^2}{d - \partial + \frac{\partial}{k}} = \frac{R^2}{D},$$

[1] Schiller, l. c.

[2] Cardani, Rend. dei Lincei, (5), 1, 2 Sem., p. 97, 1892.

wobei R den Radius, D die Distanz der Platten des Luftconde
sators, r den Radius, d den Abstand der Platten des ander
Condensators und ∂ die Dicke des Dielektricums von der Co
stante k bedeutet.

Bezüglich der Messung dieser Grössen ist dem früh
Gesagten noch hinzuzufügen, dass zur Bestimmung des D
Nullpunkt für die Mikrometerschraube gefunden werden muss
was ebenso wie die Parallelstellung mittelst eines Metallkei
geschah und sich viel genauer erwies, als das Zusamme
schrauben der Platten bis zur Berührung. Wiederholte derarti
Einstellungen wiesen Unterschiede von nur 0·003 *mm* auf.

Die Werthe der Dielektricitätsconstanten.

Was die Werthe der Dielektricitätsconstanten selbst anl
langt, so ergaben sich dieselben als mittlere Werthe von 8
12 Messungen, die theils bei derselben, theils bei erneuter E
stellung der Condensatoren vorgenommen wurden. Bei erster
deren Fehlerquellen nur im Elektrometer und in der Mik
meterschraube des Luftcondensators liegen, betrugen
grössten Unterschiede in den Abständen der Platten des co
pensirenden Luftcondensators 0·2 Procente, bei letzteren, de
Fehlerquellen im Parallelstellen der Platten und in der Dista
messung mittelst des Keiles liegen, 0·4 Procente. Dies
Fehlerquellen stehen grössere, im Materiale des Dielektricu
liegende, gegenüber. Die Messungen wurden bei möglic
gleicher Zimmertemperatur angestellt.

Paraffin.

Auf die Herstellung der Platten wurde grosse Sorgfalt v
wendet, um dieselben möglichst homogen zu erhalten. Na
dem ich mit dem von Boltzmann[1] angegebenen Verfahr
dieselben zwischen zwei geölten Glasplatten zu giessen, ke
befriedigenden Resultate erhalten hatte, da infolge der Z
sammenziehung beim Erstarren inhomogene Stellen auftrat
griff ich zu folgender Methode, bei der auch die vom G
zurückbleibenden oberflächlichen Ölschichten vermieden wurd

---

[1] Boltzmann, Diese Berichte, 66 (2), 1872; 67 (2), 1873.

Es hat nämlich Arons[1] gezeigt, dass solche Ölschichten die Ursache von Rückstandsbildungen sind. Und obwohl ich bei Anwendung des Wechselstromes eine Rückstandsbildung für ausgeschlossen halte, wollte ich doch, insbesondere wegen der im dritten Abschnitte mitgetheilten Untersuchungen, jeden Anlass dazu vermeiden.

Auf eine horizontale, geölte und mit einem Papierrand versehene Glasplatte wurde das geschmolzene Paraffin ausgegossen. Aus der so erhaltenen Platte wurde dann durch beiderseitiges Abdrehen auf der Drehbank die in den Condensator zu bringende Platte hergestellt. Auf diese Weise erhielt ich gleichmässig dicke, durchsichtige, also vollkommen homogene Platten.

Platte I.

Abstand der Condensatorplatten	$d = 4 \cdot 125$
Dicke der Paraffinplatte	$\partial = 3 \cdot 732$
Plattendistanz des Luftcondensators	$D = 2 \cdot 958$
Dielektricitätsconstante	$k = 1 \cdot 890$

Platte II.

(Durch nochmaliges Abdrehen aus der früheren erhalten.)

$d = 3 \cdot 522$ $\quad D = 2 \cdot 619$

$\partial = 3 \cdot 034$ $\quad k = 1 \cdot 883$

Platte III.

$d = 3 \cdot 522$ $\quad D = 2 \cdot 695$

$\partial = 2 \cdot 866$ $\quad k = 1 \cdot 908$

Mittelwerth $k = 1 \cdot 89$

Zum Vergleiche führe ich die wichtigsten früheren Messungen an:

Boltzmann[2]	2·32	Schiller	1·68
Gordon	1·994	Gibson u. Barclay[3]	1·977
Winkelmann	2·18	Wüllner	1·96

---

[1] Arons, Wied. Ann., 35, S. 291, 1888.

[2] Die Werthe, die Boltzmann erhielt, sind alle beträchtlich grösser als die späterer Beobachter.

[3] Gibson und Barclay, Wied. Electricität, 1883, II, S. 38.

Ebonit.

Die Ebonitplatten wurden ebenfalls auf der Drehbank h gestellt, erstens um sie gleichmässig dick zu erhalten, u zweitens um die Gussoberfläche zu beseitigen.[1]

Platte I.

$d = 4\cdot125$ $D = 3\cdot138$

$\partial = 3\cdot121$ $k = 2\cdot070$

Platte II.

$d = 3\cdot522$ $D = 3\cdot174$

$\partial = 1\cdot948$ $k = 2\cdot009$

Dieselbe Platte.

$d = 3\cdot263$ $D = 2\cdot852$

$k = 2\cdot023$

Mittelwerth $k = 2\cdot023$

Boltzmann...3·15—3·48	Gordon......2·284
Schiller......2·21	Wüllner[2].....2·56
J. J. Thomson.1·9 —2·1	Winkelmann.2·72

Schwefel.

Auch diese Platten wurden auf einer horizontalen Gl platte gegossen. Da aber hier an der freien Oberfläche na dem Erstarren Löcher vorhanden waren, so geschah der Gu schliesslich schichtenweise, wodurch beim Aufgiessen je neuen Schichte die in der vorhergehenden Schichte entstanden Löcher ausgefüllt wurden.

Nach dem Abdrehen auf der Drehbank erhielt ich tad lose Schwefelplatten. Wegen der mühsamen Herstellung die

[1] Die Oberfläche des Ebonits ist namentlich bei längerem Gebrau mannigfachen Veränderungen unterworfen; dass sie leitungsfähig wird, schon mehrfach beobachtet worden. Im hiesigen Institute zeigte ein Ebonits die merkwürdige Erscheinung, dass er beim Reiben mit Fell positiv elektri wurde. Nach Abreiben der Oberfläche mit Schmirgelpapier gab er in gewö licher Weise negative Elektricität.

[2] Wüllner, Physik (4. Aufl.), 4, S. 333, 1886.

Platten wurde nur eine bei zwei verschiedenen Distanzen untersucht.

$d = 3\cdot522$ $D = 2\cdot624$
$\delta = 2\cdot419$ $k = 2\cdot425$

Dieselbe Platte.

$d = 3\cdot26\dot{3}$ $D = 2\cdot307$
$k = 2\cdot412$

Mittelwerth $k = 2\cdot42$

Boltzmann ...2·84—3·90 Gordon .....2·58
J.J.Thomson[1].2·4 u. 2·27 Blondlot[2]...2·94
Cardani[3].....3·5 —3·6

Amorpher Schwefel.

Um zu untersuchen, ob der amorphe Schwefel eine andere Dielektricitätsconstante hat als der gewöhnliche Schwefel, stellte ich eine Platte aus amorphem Schwefel her, indem ich den zähflüssigen, rothbraunen Schwefel auf eine Glasplatte unter Wasser brachte und mit einer zweiten Glasplatte breitquetschte.

Der so erhaltene Kuchen war aber nicht regelmässig genug, um eine Ausmessung zuzulassen. Ich brachte ihn daher von Zeit zu Zeit in den Condensator, um die Änderung der Dielektricitätsconstante zu untersuchen, während der amorphe Schwefel in den gewöhnlichen überging. Ich konnte aber keine wesentliche Änderung constatiren, so dass die Dielektricitätsconstante des amorphen Schwefels der des gewöhnlichen gleichzusetzen ist.

---

[1] J. J. Thomson (l. c.). Der erste Werth ist mittelst Hertz'scher Schwingungen, der zweite mittelst der Stimmgabelmethode bestimmt.

[2] Blondlot (l. c.). Als Hilfsbestimmung mittelst eines piezoelektrischen Quarzes nach Curie, Ann. chim. phys., 18, 1889.

[3] Cardani (l. c.) spricht die Vermuthung aus, dass der von Gordon erhaltene Werth desshalb so klein sei, weil sich wegen der zu kurzen Ladungsdauer die dielektrische Polarisation nicht vollständig herstelle. Dem widerstreiten der zweite Werth von Thomson, der von Blondlot und von mir, die bei grossen Ladungsdauern erhalten wurden.

Gewöhnliches Glas.

Beim Glase ist besonders auf die Möglichkeit einer ol flächlichen Leitung Acht zu haben. Um dieselbe zu beseitig wurden die Platten sorgfältig mit Schwefelsäure und Alko gereinigt, gut getrocknet und am Rande mit einer Schella lösung bestrichen. Dass eine Leitungsfähigkeit nicht zu c statiren war, habe ich bereits erwähnt.

$$d = 3 \cdot 522 \qquad D = 1 \cdot 941$$
$$\partial = 2 \cdot 752 \qquad k = 4 \cdot 174$$

Eine andere Platte.

$$d = 3 \cdot 522 \qquad D = 1 \cdot 682$$
$$\partial = 2 \cdot 792 \qquad k = 4 \cdot 524$$

Gordon ......3·24	Hopkinson[1]...8·45
Schiller......3·3 und 4·1	Wüllner.......6·1
J.J. Thomson .2·7	Blondlot..... 2·8

Spiegelglas.

$$d = 3 \cdot 522 \qquad D = 2 \cdot 214$$
$$\partial = 2 \cdot 362 \qquad k = 3 \cdot 853$$

Schiller......5·8 u. 6·34	Lecher..4·67—7·31
Winkelmann .6·46 u. 7·57	Doule...6·88

Während bei den früheren Messungen die Dielektricitä constante des Spiegelglases im Allgemeinen grösser gefunc wurde, als die des gewöhnlichen Glases, ist bei meinen c Umgekehrte der Fall. Leider ist mir Zusammensetzung u Herkunft meiner Glassorten unbekannt.

Einfluss des Wechselstromes auf die Beschaffenheit d Dielektrica.

Diese Untersuchung wurde unternommen um festzustell ob ein Dielektricum, das dem Einflusse hochgespann

---

[1] Hopkinson, Wiedemann, Elektricität, II, S. 43.

Wechselströme unterworfen wird, eine Änderung seiner dielektrischen Capacität erfährt. Zu diesem Zwecke wurden die vorhin beschriebenen Platten im Condensator verschieden hohen Spannungen von einer Viertelstunde bis zu einer Stunde ausgesetzt, und vorher und nachher die Dielektricitätsconstante mittelst der eingangs beschriebenen Methode untersucht.

Dabei war vor Allem darauf zu achten, dass nicht eventuelle Rückstandsbildungen statt der gesuchten Veränderungen gemessen werden. Obwohl, wie ich schon früher auseinandergesetzt habe, eine Rückstandsbildung durch den Wechselstrom ausgeschlossen erscheint, habe ich dennoch auch den Ergebnissen der Untersuchung von Hertz,[1] Arons[2] und Muraoka,[3] welche gezeigt haben, dass bei reinem Materiale niemals eine Rückstandsbildung auftritt, Rechnung getragen, wie ich schon bei Erwähnung der Herstellung der Platten hervorhob.

Zur Transformation des Wechselstromes wurde jetzt ein anderer grösserer Ruhmkorff benützt, um höhere Spannungen, als zur Messung nothwendig sind, verwenden zu können.

Es hat sich gezeigt, dass eine solche unzweifelhafte Veränderung nicht stattfindet. Denn die Veränderungen, die ich thatsächlich constatiren konnte, verlaufen derartig, dass man ihre Ursache nicht in einer Änderung der Beschaffenheit des Dielektricums, sondern in anderen Nebenumständen suchen muss.

Die folgende Zahlenreihe, enthaltend die Plattendistanzen des compensirenden Luftcondensators, stellt den Verlauf einer solchen Untersuchung an der Paraffin-Platte III dar, auf welche durch 15 Minuten ein Wechselstrom von etwa 1100 Volt mittlerer Spannung derart einwirkte, dass derselbe mit der einen Platte des Condensators verbunden war, während die andere Platte zur Erde abgeleitet wurde.

Links steht die nach der Einwirkung verflossene Zeit, rechts die Plattendistanz des Luftcondensators.

[1] Hertz, Wied. Ann., 20, S. 279, 1883.

[2] Arons, l. c.

[3] Muraoka, Wied. Ann., 40, S. 329, 1890.

Vor der Einwirkung	2·915.
Nach der Einwirkung:	
5 Minuten	2·947
10 »	2·958
15 »	2·963
20 »	2·962
25 »	2·963
30 »	2·959
45 »	2 953
60 »	2·949
90 »	2·946
2 Stunden	2·942
3 »	2·937
4 »	2·934
5 »	2·932
6 »	2·927
7 »	2·922

Die Fehlergrenzen für diese relativen Zahlen sind natürli viel enger als für die absoluten Werthe.

Eigenthümlich an dieser Reihe ist, dass die Capacität zu einem Minimum sinkt, und dann wieder bis nahezu auf d ursprünglichen Werth steigt. Und diesen Gang haben a untersuchten Platten von Paraffin und Ebonit gezeigt, we auch nicht immer mit derselben Regelmässigkeit. Auch hat Steigerung der Spannung des Wechselstromes bis zu 1600 V und der Einwirkungszeit bis zu 50 Minuten keine Proport nalität mit der Capacitätsänderung erkennen lassen. Ich v zichte daher auf die Wiedergabe der übrigen Zahlenreihen. I Abnahme der Capacität betrug immer nur 2 bis 3 Procente u nach längstens 10 Stunden stellte sich der ursprüngliche We wieder her.

Ich habe wiederholt alle Verhältnisse meiner Versuch anordnung untersucht, um darin vielleicht eine Ursache die Erscheinung zu finden. Es hat sich aber bei mannigfach Abänderungen immer dieselbe Erscheinung gezeigt. Auch w es gleichgiltig, ob der Condensator während der Zeit zwisch den einzelnen Messungen beiderseitig zur Erde abgeleitet w

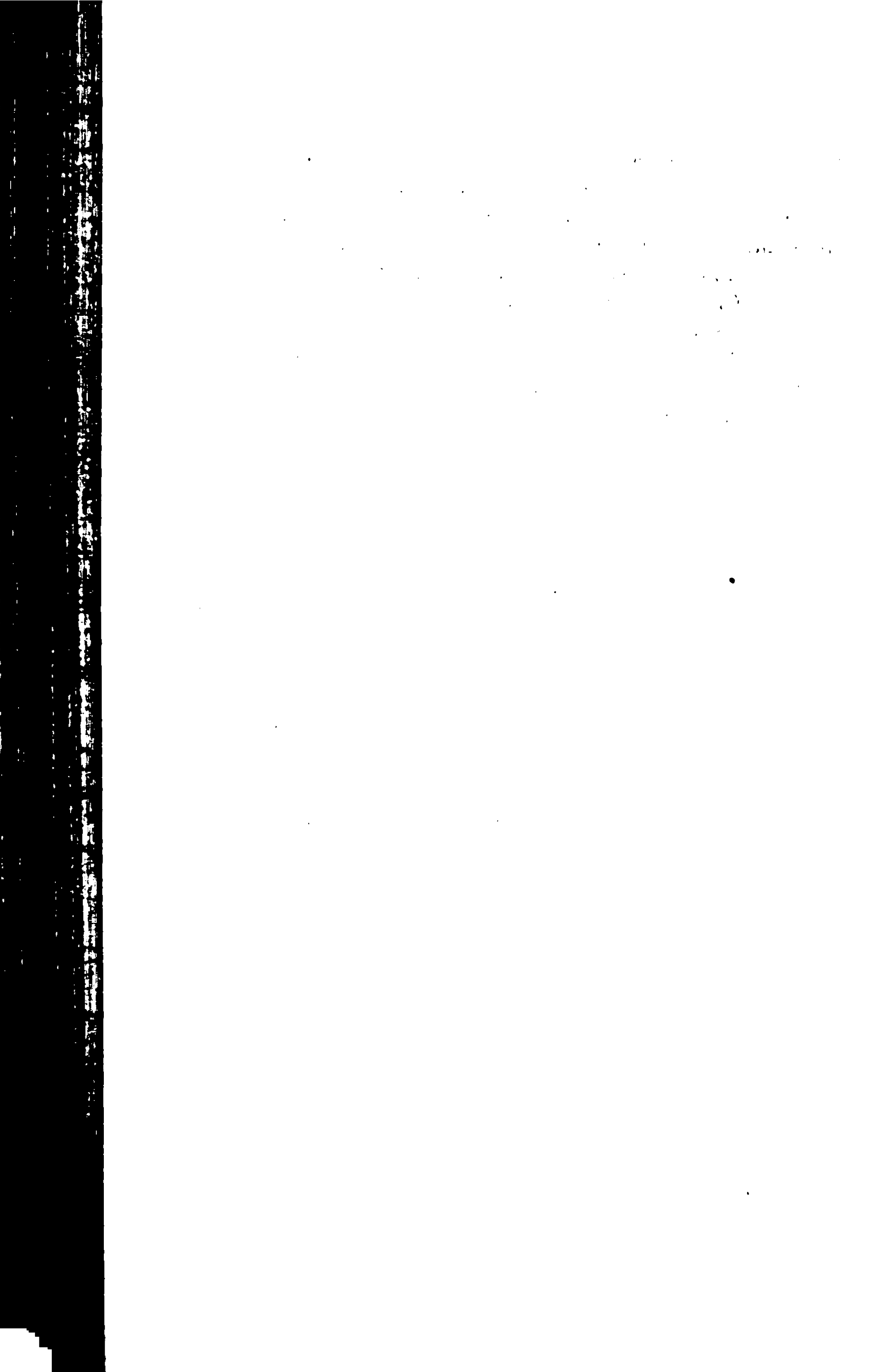
oder nicht. Dieser Umstand gibt auch eine Gewähr dafür, dass man es hier mit keiner Rückstandsbildung im gewöhnlichen Sinne zu thun hat. Um vollständige Sicherheit darüber zu erhalten, stellte ich ein Material mit möglichst günstigen Bedingungen für eine Rückstandsbildung her, indem ich fein geschlemmtes Graphitpulver unter geschmolzenes Paraffin rührte und daraus Platten goss. Das Graphitpulver bleibt in dem flüssigen Paraffin suspendirt, und nach dem Erstarren erhält man eine gleichmässig schwarze Masse. Ich stellte zwei solche Platten her im Verhältnisse 1 zu 100 und 3·33 zu 100. Aber auch bei diesen zeigte sich ein ganz ähnlicher Verlauf der Einwirkung, wie beim reinen Paraffin. Die Dielektricitätsconstante dieses künstlichen Dielektricums ist überraschend wenig von der des reinen Paraffin unterschieden.

Für die erste Platte ist $R = 2 \cdot 072$,
für die zweite $R = 2 \cdot 463$.

Aus allem dem ergibt sich, dass eine dauernde Veränderung der Dielektrica durch den Wechselstrom nicht stattfindet. Das Kleinerwerden und Wiederansteigen der Dielektricitätsconstante dürfte sich vielleicht durch einen vorübergehenden Zwangszustand, in den das Dielektricum versetzt wird, oder durch eine Art von Hysteresis erklären lassen.

Hutin und Leblanc[1] haben die Bemerkung gemacht, dass Condensatoren aus Paraffinpapier nach längerer Einschaltung in Wechselstromkreise ihre Capacität stark vermindern. Ich habe daher einige Lagen Paraffinpapier in meinen Condensator gebracht und in der früheren Weise untersucht. Es zeigte sich auch hier keine wesentliche Änderung, da die Spannung im Condensator nicht so gross war, dass eine merkliche Erwärmung eingetreten wäre, wie es bei Hutin und Leblanc der Fall war. Es bestätigt sich dadurch ihre Vermuthung, dass nur diese Erwärmung, durch welche die organische Beschaffenheit des Papieres verändert wurde, die Ursache jener Capacitätsänderung sei.

[1] Hutin und Leblanc, Zeitschr. f. Elektrotechnik, 9, S. 483.



XIII. SITZUNG VOM 12. MAI 1893.

Herr Intendant Hofrath Ritter v. Hauer führt den Vorsitz.

Der Secretär legt das erschienene Heft I und II (Jänner und Februar 1893) des 102. Bandes der Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte vor.

Das c. M. Herr Prof. H. Weidel übersendet folgende zwei von Herrn Dr. R. Wegscheider ausgeführte Arbeiten:

1. »Über Opiansäureäthylester.«
2. »Bemerkungen zur quantitativen Bestimmung des Kupfers als Sulfür.«

Herr Norbert Lorenz, k. k. Ministerial-Secretär im Ackerbauministerium, übermittelt ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität, unter der Aufschrift: »Neue Multiplications-Methode, deren Werth auf die Verwendung beim Kopfrechnen beschränkt ist, bei diesem aber ausserordentlich grosse Vortheile gewährt, in der Voraussetzung, dass die Quadrate der zweizifferigen Zahlen gut memorirt sind.«

Das w. M. Herr Hofrath Prof. C. Claus überreicht: »Weitere Mittheilungen über die Antennengliederung und über die Gattungen der Cyclopiden.«

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer aus Innsbruck überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Einige mathematische Theoreme.«

Herr Dr. Alfred Burgerstein überreicht eine Arbeit, betitelt: »Vergleichend anatomische Untersuchungen des Fichten- und Lärchenholzes.«

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nic zugekommene Periodica sind eingelangt:

Macfarlane, A.; The Fundamental Theorems of Analy generalized for Space. Austin, Texas, U. S. 1892; 8°.

Monet, E., Principes fondamentaux de la Photogrammét nouvelles solutions du Problème d'Altimétrie au moy des Règles Hypsométriques. Paris, 1893; 8°.

Velenovský, J., Flora Bulgarica. Descriptio et enumera systematica Plantarum vascularium in principatu Bulgar sponte nascentium. (Subventione summi C. R. Minist Cultus et Studiorum nec non Academiae Scientiar Artium et Literarum Imp. Francisci Josephi. Prag 1891; 8°.

Einige mathematische Theoreme

von

Leopold Gegenbauer,

c. M. k. Akad.

Ich werde im ersten Paragraphe der vorliegenden Mittheilung eine Eigenschaft der Systeme von Congruenzen mit einer Unbekannten in Bezug auf einen Primzahlmodul ermitteln, aus welcher sich der bekannte König-Kronecker'sche Satz über die Anzahl der unter einander und von Null verschiedenen Wurzeln einer Congruenz als ganz specieller Fall ergibt, sodann im zweiten eine Integralrelation angeben, welche u. A. zu den interessanten Ausdrücken führt, die Herr E. Beltrami[1] bei verschiedenen Gelegenheiten für eine Reihe von associirten Functionen symmetrischer Massensysteme aufgestellt hat, und im dritten endlich einen neuen äusserst einfachen Beweis des von mir gefundenen Multiplicationstheorems der allgemeinen Determinanten mittheilen.

§. 1. Da nach dem Fermat'schen Satze jede zur Primzahl p theilerfremde ganze Zahl x die Congruenz

$$x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

befriedigt, so genügt jede durch p nicht theilbare Wurzel der Congruenz

---

[1] »Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche.« Memorie dell'Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna. Serie IV, t. II. — »Sulle funzioni associate e specialmente su quella della calotta sferica.« L. c. Serie IV, t. IV. — »Sull'attrazione di un anello circolare od ellittico.« Atti della reale Accademia dei Lincei. Anno 277 (1879—1880), Roma. — »Sulla funzione potenziale della circonferenza.« Rendiconti del circolo matematico di Palermo. T. III. Anno 1889.

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=p-2} a_\lambda x^\lambda \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$$

dem System von ρ Congruenzen

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=p-2} a_{\varkappa+\lambda} x^\lambda \equiv 0 \, (\text{mod. } p) \quad (\varkappa=0,1,2,\ldots,\rho-1;\, 1 \leqq \rho \leqq p-1)$$

und umgekehrt.

Es werden demnach die von Herrn J. König aufgestell von Herrn G. Rados[1] zuerst bewiesenen und von H L. Kronecker[2] in eine ungemein elegante Form gebrach Bedingungen für das Vorhandensein einer bestimmten An von unter einander und von Null verschiedenen Wurzeln e Congruenz in Bezug auf einen Primzahlmodul, welche ich den Sitzungsberichten der mathematisch-naturwissensch lichen Classe der kaiserl. Akademie der Wissenschaften[3] einfacher Weise hergeleitet habe und von denen ich im vie Jahrgange der Monatshefte für Mathematik und Physik G. v. Escherich und Em. Weyr einen neuen Beweis theilen werde, auch in der Theorie der Systeme von C gruenzen mit einer Unbekannten in etwas veränderter F eine Rolle spielen. Dies wird in dem laufenden Paragra gezeigt und führt sodann, wie schon erwähnt, zu einer ne äusserst einfachen Ableitung des König-Kronecker'sc Theorems.

Die $(p-1)\rho$ ganzen Zahlen

$$z_\varkappa^{(\lambda)} \qquad (\lambda = 0,1,2,\ldots,\rho-1;\ \varkappa = 0,1,2,\ldots,p-2),$$

von denen nicht alle zu einem bestimmten Werthe vo gehörigen den Primtheiler p besitzen, seien so beschaffen, d

---

[1] »Zur Theorie der Congruenzen höheren Grades.« Journal für die und angewandte Mathematik von L. Kronecker und K. Weierstrass. 99. S. 258—260.

[2] »Über einige Anwendungen der Modulsysteme auf elementare braische Fragen.« A. e. a. O., S. 329—371.

[3] »Die Bedingungen für die Existenz einer bestimmten Anzahl Wurzeln einer Congruenz.« A. o. g. O., 95. Bd., II. Abth., S. 165—169.

es höchstens $\sigma(<\rho)$ ganzzahlige, nach dem Modul p unter einander und von Null verschiedene Werthe $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{\sigma-1}$ von z gibt, für welche sämmtliche ρ Summen

$$\mu_\lambda(z) = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=p-2} z_\varkappa^{(\lambda)} z^{p-2-\varkappa} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \rho-1)$$

zur Primzahl p theilerfremd sind. Dass es in jedem der ρ Systeme von $p-1$ ganzen Zahlen

$$\mu_\lambda(z) \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \rho-1; z = 1, 2, \ldots, p-1)$$

mindestens eine zu p theilerfremde gibt, ist selbstverständlich, weil eine Congruenz in Bezug auf einen Primzahlmodul, deren Coëfficienten ein zu diesem theilerfremdes Zahlensystem bilden, nicht mehr Wurzeln haben kann, als ihre Gradzahl beträgt.

Man bestimme nun ρ ganze Zahlen $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\rho-1}$, die nicht insgesammt den Factor p besitzen, so dass die Summe

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\rho-1} \nu_\lambda \mu_\lambda(\zeta_\tau)$$

für $\tau = 0, 1, 2, \ldots, \sigma-1$ nach dem Modul p der Null congruent wird, was stets möglich ist, weil die Anzahl der Grössen ν_λ grösser ist als die Anzahl der zu erfüllenden linearen homogenen Congruenzen. Alsdann wird

$$\sum_{\varkappa,\lambda=0}^{\varkappa=p-2, \lambda=\rho-1} \nu_\lambda z_\varkappa^{(\lambda)} z^{p-2-\varkappa} \equiv 0 \pmod{p}$$

für jeden ganzzahligen Werth von z, und dies ist nur möglich, wenn die Coëfficienten der einzelnen Potenzen von z Vielfache von p sind, d. h. wenn die $p-1$ Congruenzen

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\rho-1} z_\varkappa^{(\lambda)} \nu_\lambda \equiv 0 \pmod{p} \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, p-2) \qquad 2)$$

bestehen, was, da nicht alle Zahlen ν_λ der Null congruent si
zur Folge hat, dass alle aus der Matrix

$$\left\| z_\varkappa^{(\lambda)} \right\|_{(\lambda=0,1,2,\ldots,\rho-1;\ \varkappa=0,1,2,\ldots,p-2)}$$

zu bildenden Determinanten der Ordnung ρ den Factor p e
halten. Man hat daher den Satz:

Haben die ρ Congruenzen

$$\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=p-2} z_\varkappa^{(\lambda)} z^{p-2-\varkappa} \equiv 0 \pmod{p}$$

mindestens $p-\rho$ unter einander und von Null verschiede
Wurzeln gemein, so sind alle aus der Matrix

$$\left\| z_\varkappa^{(\lambda)} \right\|_{(\lambda=0,1,2,\ldots,\rho-1;\ \varkappa=0,1,2,\ldots,p-2)}$$

zu bildenden Determinanten ρ^{ter} Ordnung durch die Primzah
theilbar; besteht diese Theilbarkeitseigenschaft aber nicht,
ist die Anzahl der unter einander und von Null verschieden
gemeinsamen Wurzeln derselben kleiner als $p-\rho$.

Da aus dem Bestehen der Congruenzen 2) umgekehrt fol
dass

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\rho-1} \nu_\lambda \mu_\lambda(z)$$

für jeden ganzzahligen Werth von z durch p theilbar ist,
wird die eben ermittelte Bedingung nicht nur nothwend
sondern auch hinreichend für die Existenz von mindeste
$p-\rho$ derartigen gemeinsamen Wurzeln der angeführten Co
gruenzen sein, falls diese Theilbarkeit nur dann stattfind
kann, wenn es höchstens $\rho-1$ verschiedene Werthe von z gi
für welche sämmtliche Functionen $\mu_\lambda(z)$ $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \rho-$
zu p theilerfremd sind. Bestände diese Theilerfremdheit mind
stens für ρ Werthe von z $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{\rho-1}$, so würde das Syste
von ρ linearen homogenen Congruenzen

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\rho-1} \mu_\lambda(\zeta_\tau) x_\lambda \equiv 0 \pmod{p} \qquad (\tau = 0, 1, 2, \ldots, \rho-1)$$

durch das Werthsystem

$$x_\lambda \equiv \nu_\lambda \pmod{p} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \rho - 1)$$

befriedigt, dessen Elemente nicht sämmtlich durch p theilbar sind, und dies könnte nur dann der Fall sein, wenn die Determinante

$$|\mu_\lambda(\zeta_\tau)|_{(\lambda, \tau = 0, 1, 2, \ldots, \rho - 1)}$$

den Factor p enthielte.

Sind nun die ganzen Zahlen $z_\varkappa^{(\lambda)}$ durch die Congruenzen

$$z_\varkappa^{(\lambda)} \equiv \sum_{\mu, \nu} a_\mu \zeta_\nu^{(\lambda)} \pmod{p} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \rho - 1)$$

definirt, in denen die Summation bezüglich μ und ν über alle nicht negativen, $p-2$, beziehungsweise $\rho-1$ nicht überschreitenden ganzen Zahlen auszudehnen ist, für welche

$$\mu - \nu \equiv \varkappa \pmod{p-1}$$

ist, so wird

$$|\mu_\lambda(\zeta_\tau)| = |\zeta_\tau^{-\lambda}|\,|\zeta_\tau^{(\lambda)}| \prod_\tau \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=p-2} a_\varkappa \zeta_\tau^{p-2-\varkappa} \qquad (\lambda, \tau = 0, 1, 2, \ldots, \rho - 1)$$

und ist demnach unter der eben gemachten Voraussetzung zu p theilerfremd, wenn die Determinante

$$|\zeta_\tau^{(\lambda)}|_{(\lambda, \tau = 0, 1, 2, \ldots, \rho - 1)}$$

mit dieser arithmetischen Eigenschaft begabt ist. Man hat daher das Theorem:

Sind die ρ^2 $(\rho \leqq p-1)$ ganzen Zahlen

$$\zeta_\tau^{(\lambda)} \qquad (\lambda, \tau = 0, 1, 2, \ldots, \rho - 1)$$

so beschaffen, dass ihre Determinante zur Primzahl p theilerfremd ist, und werden die $(p-1)\rho$ ganzen Zahlen

$$z_\varkappa^{(\lambda)} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \rho - 1;\ \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, p - 2)$$

durch die Congruenzen

$$z_x^{(\lambda)} \equiv \sum_{\mu,\nu} a_\mu \zeta_\nu^{(\lambda)} \quad (\text{mod. } p)$$

definirt, in denen die Summation bezüglich μ und ν über nicht negativen, $p-2$, beziehungsweise $\rho-1$ nicht ü schreitenden ganzen Zahlen zu erstrecken ist, für welche

$$\mu-\nu \equiv x \quad (\text{mod. } p-1)$$

ist, die Grössen $a_0, a_1, \ldots, a_{p-2}$ ganze Zahlen sind, welche n sämmtlich den Primtheiler p besitzen, und endlich die tretenden Zahlen so gewählt sind, dass für jeden Werth v mindestens ein $z_x^{(\lambda)}$ zu p theilerfremd ist, so ist für die Exis von mindestens $p-\rho$ unter einander und von Null verschied Wurzeln des Systems von ρ Congruenzen

$$\sum_{x=0}^{x=p-2} z_x^{(\lambda)} z^{p-2-x} \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$$

nothwendig und hinreichend, dass alle aus der Matrix

$$\left\| z_x^{(\lambda)} \right\|_{(\lambda=0,1,2,\ldots,\rho-1;\; x=0,1,2,\ldots,p-2)}$$

zu bildenden Determinanten der Ordnung ρ den Primfacto besitzen.

Ist speciell

$$\zeta_\nu^{(\lambda)} = \delta_{\lambda,\nu} \qquad (\delta_{\lambda,\nu} = 0,\ \lambda \gtrless \nu;\ \delta_{\lambda,\lambda} = 1),$$

so wird

$$\left| \zeta_\tau^{(\lambda)} \right|_{(\lambda,\tau=0,1,2,\ldots,\rho-1)} = 1$$

$$z_x^{(\lambda)} = a_{x+\lambda}$$

und demnach geht in diesem Falle das in dem eben a gesprochenen Satze erwähnte Congruenzensystem in System 1) über. Nach dem letzten Satze hat also die C gruenz

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=p-2} a_\lambda x^\lambda \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$$

einerseits mindestens $p-\rho$ unter einander und von Null verschiedene Wurzeln, wenn alle aus der Matrix

$$\|a_{\varkappa+\lambda}\|_{(\lambda=0,1,2,\ldots,\rho-1;\ \varkappa=0,1,2,\ldots,p-2)}$$

zu bildenden Determinanten ρ^{ter} Ordnung durch p theilbar sind, und kann anderseits nicht $p-\rho+1$ solche besitzen, wenn diese Eigenschaft nicht allen aus der Matrix

$$\|a_{\varkappa+\lambda}\|_{(\lambda=0,1,2,\ldots,\rho-2;\ \varkappa=0,1,2,\ldots,p-2)}$$

zu bildenden Determinanten der Ordnung $\rho-1$ zukommt.

Man hat daher unter Benützung des von L. Kronecker eingeführten Begriffes des Ranges eines Zahlensystems in Bezug auf einen Primzahlmodul folgendes elegante Theorem:

Die Summe aus der Anzahl der unter einander und von Null verschiedenen Wurzeln einer Congruenz mit einer Unbekannten in Bezug auf einen Primzahlmodul und dem Range ihres Coëfficientensystems ist um 1 kleiner als der Modul.

Dies ist im Wesentlichen der oben erwähnte König-Kronecker'sche Satz.

§. 2. Im Jahrgange 1893 der Schriften des medicinisch-naturwissenschaftlichen Vereines in Innsbruck werde ich eine Integralrelation mittheilen, aus welcher nicht nur der grösste Theil der bisher bekannten Darstellungen der sogenannten symmetrischen Potentialfunctionen durch Integrale von Ausdrücken, welche Bessel'sche Functionen enthalten, sondern auch verschiedenartige Verallgemeinerungen derselben und von Sätzen, welche aus diesen entspringen, namentlich für den Fall sich ergeben, dass das Wirkungsgesetz nicht das Newton'sche, sondern dass die Wirkung der Kräfte irgend einer Potenz der Entfernung verkehrt proportional ist. Diese Potentialfunctionen beziehen sich, wie schon aus der Benennung ersichtlich ist, auf Systeme von Massen, die symmetrisch um eine Axe gelagert sind, und genügen demnach im ganzen äusseren Raume der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial V}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial V}{\partial z}\right)=0 \qquad (u^2=x^2+y^2),$$

welche bekanntlich durch die zwei simultanen partiellen D
rentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{\partial W}{\partial u} = u \frac{\partial V}{\partial z}; \quad \frac{\partial W}{\partial z} = -u \frac{\partial V}{\partial u}$$

ersetzt werden kann. Aus diesen ergibt sich für die du
sie nach E. Beltrami's Nomenclatur zur Potentialfunctio
associirte Function W die partielle Differentialgleichung zwe
Ordnung

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{u}\frac{\partial W}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{u}\frac{\partial W}{\partial z}\right) = 0.$$

Setzt man W gleich einer Constanten, so hat man,
längst bekannt, die Gleichung der äusseren Kraftlinien für
Meridianebenen des Systems. Für eine Reihe von associi
Functionen hat nun Herr E. Beltrami in den im Anfa
citirten Abhandlungen Ausdrücke angegeben, welche g
analog gebaut sind wie die eben erwähnten Integrale für
zugehörigen Potentialfunctionen. Auch für diese lässt sich
Grund von zwei früher von mir in den Sitzungsberichten
mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserl. A
demie der Wissenschaften bewiesenen Formeln eine Integ
relation aufstellen, aus welcher sie und zahlreiche andere
gemeinere durch Specialisirung abgeleitet werden können; d
selbe wird durch folgendes Theorem gegeben:

Sind die Functionen $\varphi(r)$ und $\psi(r)$ so beschaffen, dass
Integrale

$$F_1(x) = \int_{r_1}^{r_2} e^{-rxi}\varphi(r)\,dr$$

$$F_2(x) = \left\{\tau J^{n+\mu-1}(\tau x) - \frac{2(n+\mu)J^{n+\mu}(\tau x)}{x}\right\}\int_{\rho_1}^{\rho_2} r^{\alpha-\mu}J^{n+\mu}(rx)d$$

$$+ J^{n+\mu}(\tau x)\int_{\rho_1}^{\rho_2} r^{\alpha-\mu+1}J^{n+\mu-1}(rx$$

einen Sinn haben, so besteht die Beziehung

$$\int_0^{\pi}\int_{r_1}^{r_2}\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\rho^\alpha\psi(\rho)\varphi(r)(z+ri)C_n^\mu(\cos\varphi)\sin^{2\mu}\varphi\,d\varphi\,dr\,d\rho}{\{\rho^2+\tau^2-2\rho\tau\cos\varphi+(z+ri)^2\}^{\frac{2\mu+1}{2}}} =$$

$$= \frac{\pi \Pi(n+2\mu-1)}{\Pi(n)\Pi(2\mu-1)\tau^{\mu}} \Big\{ \delta_{0,\,n+\mu} F_1(0) \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^{\alpha} \psi(\rho)\, d\rho -$$

$$- \int_0^{\infty} e^{-zx} F_1(x) F_2(x)\, dx \Big\} \qquad (z \text{ reell und } \geqq 0).$$

Es mögen nun zum Beweise dieser Behauptung einige specielle Fälle der aufgestellten allgemeinen Relation angegeben werden.

Setzt man in derselben speciell

$$n = 0;\ -r_1 = r_2 = 1;\ \varphi(r) = (1-r^2)^{\frac{2\nu-1}{4}} J^{\frac{2\nu-1}{2}}(\sigma\sqrt{1-r^2})$$

$$\left(\nu \geqq \frac{1}{2}\right),$$

differentiirt sodann nach ρ_2, ersetzt z durch $\frac{z}{\gamma}$ und schreibt schliesslich für $\gamma\rho_2$ und $\gamma\tau\,\rho_2$ beziehungsweise τ, so erhält man, da in diesem Falle

$$F_1(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma}} \left(\frac{\sigma}{\sqrt{x^2+\sigma^2}}\right)^{\nu} J^{\nu}(\sqrt{x^2+\sigma^2})$$

wird, die Relation

$$\int_0^{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{(1-r^2)^{\frac{2\nu-1}{4}} J^{\frac{2\nu-1}{2}}(\sigma\sqrt{1-r^2})(z+\gamma r i)\sin^{2\mu}\varphi\, d\varphi\, dr}{(\rho_2^2+\tau^2-2\rho_2\tau\cos\varphi+(z+\gamma r i)^2)^{\frac{2\mu+1}{2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi^3}{\sigma}}\, \frac{1}{\tau^{\mu}} \Big\{ \delta_{0,\,\mu} J^{\nu}(\sigma) -$$

$$- \frac{\sigma^{\nu}}{\rho_2^{\mu}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-zx} J^{\mu-1}(\rho_2 x) J^{\mu}(\tau x) J^{\nu}(\sqrt{\sigma^2+(\gamma x)^2})\, dx}{\{(\gamma x)^2+\sigma^2\}^{\frac{\nu}{2}}} \Big\}$$

$$(z \text{ reell und } \geqq 0),$$

aus welcher sich für $\tau = 0$ die zwei folgenden

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1-r^2)^{\frac{2\nu-1}{4}} J^{\frac{2\nu-1}{2}}(\sigma\sqrt{1-r^2})(z+\gamma r i)\, dr}{(\rho_2^2+(z+\gamma r i)^2)^{\frac{2\mu+1}{2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma}}\, \frac{2^{2\mu}[\Pi(\mu)]^2}{\Pi(2\mu)} \Big\{ \delta_{0,\mu} J^{\nu}(\sigma)$$

$$- \frac{\sigma^{\nu}}{2^{\mu}\Pi(\mu)\rho^{\mu}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-zx} x^{\mu} J^{\mu-1}(\rho_2 x) J^{\nu}(\sqrt{\sigma^2+(\gamma x)^2})\, dx}{\{(\gamma x)^2+\sigma^2\}^{\frac{\nu}{2}}} \Big\}$$

(z reell und $\geqq$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\varphi^{\frac{2\nu+1}{2}} J^{\frac{2\nu-1}{2}}(\sigma \sin\varphi)(z+\gamma i \cos\varphi)\, d\varphi}{(\rho_2^2+(z+\gamma i \cos\varphi)^2)^{\frac{2\mu+1}{2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma}}\, \frac{2^{2\mu}[\Pi(\mu)]^2}{\Pi(2\mu)} \Big\{ \delta_{0,\mu} J^{\nu}(\sigma)$$

$$- \frac{\sigma^{\nu}}{2^{\mu}\Pi(\mu)\rho^{\mu}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-zx} x^{\mu} J^{\mu-1}(\rho_2 x) J^{\nu}(\sqrt{\sigma^2+(\gamma x)^2})\, dx}{\{(\gamma x)^2+\sigma^2\}^{\frac{\nu}{2}}} \Big\}$$

(z reell und $\geqq$

ergeben.

Berücksichtigt man, dass bekanntlich, falls

$$V = \int_{c_0}^{c_1} \frac{f(c)\, dc}{r}$$

ist, wo r den Abstand des potenzirten Punktes vom poten-
zirenden vorstellt, die associirte Function W durch das Integr

$$\int_{c_0}^{c_1} \frac{f(c)(z-c)\, dc}{r}$$

gegeben wird, so ergibt sich aus der ersten von diesen Formel
für $z^2 > \varkappa^2$ $(\mu = 0,\ \gamma = \varkappa i)$

$$\frac{2\pi\rho_2 z}{|z|} \int_0^{\infty} \frac{e^{-|z|x} J^0(\rho_2 x) J^1(\tau x) J^{\nu}(\sqrt{\sigma^2-(\varkappa x)^2})\, dx}{(\sigma^2-(\varkappa x)^2)^{\frac{\nu}{2}}}$$

als die associirte Function für die Mantelfläche eines gerade
Kreiscylinders, dessen Axe die z-Axe ist und welche von zw
in den Ebenen $z = +\varkappa$ und $z = -\varkappa$ gelegenen Kreisen vo
Radius ρ_2 geschlossen wird, wenn dieselbe so mit Masse bele
ist, dass die Dichte in dem Kreise $z = \zeta$ den Werth

$$f(\zeta)=\frac{(\varkappa^2-\zeta^2)^{\frac{2\nu-1}{4}} J^{\frac{2\nu-1}{2}}\left(\frac{\sigma}{\varkappa}\sqrt{\varkappa^2-\zeta^2}\right)}{\sqrt{2\pi}\,\sigma^{\frac{2\nu-1}{4}}\varkappa^{\frac{2\nu+1}{2}}}$$

hat und τ, beziehungsweise z der Abstand der Projection des potenzirten Punktes auf die xy-Ebene vom Ursprunge, beziehungsweise dessen z-Coordinate ist; man erkennt ferner, dass die zweite von ihnen ($\mu=0$; $\gamma=\varkappa i$) einerseits zeigt, dass die associirte Function einer auf der z-Axe von $z=-\varkappa$ bis $z=+\varkappa$ mit der linearen Dichtigkeit $f(\zeta)$ vertheilten Masse den Werth

$$\frac{z}{|z|}\int_0^\infty \frac{e^{-|z|x}J^1(\tau x)J^\nu\left(\sqrt{\sigma^2-(\varkappa x)^2}\right)dx}{(\sigma^2-(\varkappa x)^2)^{\frac{\nu}{2}}} \qquad \text{II)}$$

besitzt, anderseits ($\mu=0$; $\gamma\sigma$ für σ), dass dieselbe für eine concentrisch geschichtete Kreisscheibe vom Radius ρ und der Dichte

$$\frac{(\rho_2^2-\rho_2)^{\frac{\nu-1}{2}} J^{\nu-1}\left(\sigma\sqrt{\rho_2^2-\rho^2}\right)}{2\pi\,\sigma^{\nu-1}\rho_2^\nu}$$

in der Entfernung ρ vom Mittelpunkte durch das Integral

$$\frac{z}{(\rho_2\sigma)^\nu\sqrt{2\pi}\,|z|}\int_0^\infty \frac{e^{-|z|x}J^1(\rho_2 x)J^\nu\left(\tau\sqrt{\sigma^2+x^2}\right)dx}{(\sigma^2+x^2)^{\frac{\nu}{2}}} \qquad \text{III)}$$

ausgedrückt wird.

Von den speciellen Fällen der drei letzten Integrale mögen die folgenden vier besonders hervorgehoben werden:

$$\left(\text{I};\ \sigma=0,\nu=\frac{1}{2}\right)\quad \frac{4\pi\rho_2 z}{|z|}\int_0^\infty e^{-|z|x}J^0(\rho_2 x)J^1(\tau x)\sin\text{hyp}(\varkappa x)\frac{dx}{x}$$

$$(\tau^2=x_1^2+y_1^2)$$

$$\left(\text{II};\ \sigma=0,\nu=\frac{1}{2}\right)\quad \frac{2z}{|z|}\int_0^\infty e^{-|z|x}J^0(\tau x)\sin\text{hyp}(\varkappa x)\frac{dx}{x}$$

$$(\text{III};\ \sigma=0,\nu=1)\quad \frac{2\pi\tau\rho_2 z}{|z|}\int_0^\infty e^{-|z|x}J^1(\tau x)J^1(\rho_2 x)\frac{dx}{x}$$

$$\left(\text{III};\ \sigma=0,\nu=\frac{1}{2}\right)\quad \frac{2\pi\tau V(0)z}{|z|}\int_0^\infty e^{-|z|x}J^1(\tau x)\sin(\rho_2 x)\frac{dx}{x}.$$

welche der Reihe nach die Beltrami'schen Ausdrücke für d
associirte Function der Mantelfläche eines homogenen gerade
Kreiscylinders von der Flächendichtigkeit 1, dessen Axe d
z-Axe ist und welcher von zwei in den Ebenen $z = +\varkappa$ ur
$z = -\varkappa$ gelegenen Kreisen vom Radius ρ_2 geschlossen wir
die associirte Function einer homogenen geraden Linie von d
linearen Dichtigkeit 1 und der Länge $2\varkappa$, einer in der xy-Eber
gelegenen Kreisscheibe vom Radius ρ_2 und der Flächendichti
keit 1, endlich für die auf einer in der xy-Ebene gelegenen Krei
scheibe mit dem Radius ρ_2 vertheilte Elektricität, welche sic
ohne äussere Einflüsse im Gleichgewichte befindet, vorstellt.

Die dritte unter den obigen allgemeinen Formeln ergi
unmittelbar ($\mu = 0$, $\nu = 0$, $\sigma = 0$) den bekannten Beltrami
schen Ausdruck für die associirte Function einer homogene
Kreisperipherie vom Radius ρ und der Masse 1

$$\frac{2\pi\rho_2 z}{|z|}\int_0^\infty e^{-|z|x} J^0(\rho_2 x) J^1(\tau x)\,dx$$

für deren Potentialfunction sich, wie hier hervorgehoben werde
mag, auch der folgende Werth

$$\frac{2\rho_2\pi^{1/2}}{(\rho_2^2+\tau^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} F\left((1/4, 3/4, 1, \frac{4\rho_2^2\tau^2}{(\rho_2^2+\tau^2+z^2)^2}\right)$$

aufstellen lässt.

§. 3. Die Determinante n^{ter} Ordnung vom Range r

$$|a_{i_1, i_2, \ldots, i_r}|\,(i_1, i_2, \ldots, i_r = 1, 2, \ldots, n)$$

der n^r_4 Elemente $a_{i_1, i_2, \ldots, i_r}$ $(i_1, i_2, \ldots, i_r = 1, 2, \ldots, n)$ ist bekann
lich durch die Gleichung

$$|a_{i_1, i_2, \ldots, i_r}|\,(i_1, i_2, \ldots, i_r = 1, 2, \ldots, n) =$$

$$= \sum_{i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \ldots, i_n^{(1)};\, i_1^{(2)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_n^{(2)};\, \ldots,\, i_1^{(r-1)}, i_2^{(r-1)}, \ldots, i_n^{(r-1)}}^{i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \ldots, i_n^{(1)};\, i_1^{(2)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_n^{(2)};\, \ldots,\, i_1^{(r-1)}, i_2^{(r-1)}, \ldots, i_n^{(r-1)}}$$

$$\prod_{\mu=1}^{r-1} (i_1^{(\mu)}, i_2^{(\mu)}, \ldots, i_n^{(\mu)})\, a_{1, i_1^{(1)}, i_1^{(2)}, \ldots, i_1^{(r-1)}}\, a_{2, i_2^{(1)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_2^{(r-1)}} \cdot$$

$$\ldots a_{n, i_n^{(1)}, i_n^{(2)}, \ldots, i_n^{(r-1)}}$$

definirt, in welcher $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ diejenige quadratische Determinante n^{ter} Ordnung vorstellt, welche entsteht, wenn in der Determinante n^{ter} Ordnung

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & 1 \end{vmatrix}$$

an die Stelle der λ^{ten} Horizontalreihe die x_λ^{te} für $\lambda = 1, 2, \ldots, n$ gesetzt wird. Für diese Gebilde habe ich schon im Jahre 1881[1] ein dem für gewöhnliche Determinanten geltenden analoges Multiplicationstheorem aufgestellt, welches in diesem Paragraphe in äusserst einfacher Weise neuerdings begründet werden soll.

Der mitzutheilende Beweis stützt sich auf folgende fünf aus der Definitionsgleichung der allgemeinen Determinanten unmittelbar hervorgehende bekannte Sätze:

1. Eine Determinante geraden Ranges ändert (bloss) das Zeichen, wenn man in allen Gliedern zwei derselben Indexreihe angehörige Stellenzeiger mit einander vertauscht, eine solche von ungeradem Range aber nur dann, wenn eine solche Vertauschung in einer veränderlichen Indexreihe vorgenommen wird.

2. (Corollar von 1.) Eine Determinante geraden Ranges ist gleich Null, wenn für zwei derselben Indexreihe angehörige Stellenzeiger alle entsprechenden Elemente gleich sind, für eine Determinante von ungeradem Range gilt dies nur in Bezug auf die veränderlichen Indexreihen.

3. Eine Determinante wird mit einer Zahl multiplicirt, wenn man alle Elemente, welche an einer beliebig vorgeschriebenen Stelle einen bestimmten Index besitzen, mit derselben multiplicirt.

4. Sind alle Elemente einer Determinante, welche an einer beliebig vorgeschriebenen Stelle einen bestimmten Index haben, Summen von s Gliedern, so ist dieselbe gleich der Summe von s Determinanten desselben Ranges und derselben Ordnung,

---

[1] »Über Determinanten höheren Ranges.« Denkschriften der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, 43. Bd.

welche man aus der ursprünglichen dadurch ableitet, dass man an Stelle der zusammengesetzten Elemente je einen der noch nicht verwendeten Summanden setzt, alle anderen aber ungeändert lässt.

5. (Für $r > 2$.) Eine Determinante r^{ten} Ranges kann als Aggregat von $(n!)^t$ Determinanten vom Range $r-t$ in der durch die Gleichung

$$|a_{i_1, i_2, \ldots, i_r}|_{(i_1, i_2, \ldots, i_r = 1, 2, \ldots, n)} = \sum_{i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \ldots, i_1^{(n)};\, i_1^{(2)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_n^{(2)}; \ldots;\, i_1^{(t)}, i_2^{(t)}, \ldots, i_n^{(t)} = 1}^{i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \ldots, i_n^{(1)};\, i_1^{(2)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_n^{(2)}; \ldots;\, i_1^{(t)}, i_2^{(t)}, \ldots, i_n^{(t)} = n}$$

$$\prod_1^t \mu \,(i_1^{(\mu)}, i_2^{(\mu)}, \ldots, i_n^{(\mu)}) \left| a_{\varkappa, i_\varkappa^{(1)}, i_\varkappa^{(2)}, \ldots, i_\varkappa^{(t)}; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r-t-1}} \right|_{(\varkappa, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r-t-1} = 1, 2, \ldots, n)}$$

angegebenen Weise dargestellt werden.

Multiplicirt man die Gleichung I) mit

$$|b_{j_1, j_2, \ldots, j_s}|_{(j_1, j_2, \ldots, j_s = 1, 2, \ldots, n)}$$

und beachtet, dass nach den Sätzen 1) und 2)

$$(i_1^{(r-1)}, i_2^{(r-1)}, \ldots, i_n^{(r-1)}) \left| b_{j_1, j_2, \ldots, j_s} \right|_{(j_1, j_2, \ldots, j_s = 1, 2, \ldots, n)} = \left| b_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_s} \right|_{(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\tau-1}, \varkappa_{\tau+1}, \varkappa_{\tau+2}, \ldots, \varkappa_s = 1, 2, n;}$$

ist, falls bei ungeradem s die τ^{te} Indexreihe eine veränderliche ist, so erhält man die Relation

$$|a_{i_1, i_2, \ldots, i_r}|\,|b_{j_1, j_2, \ldots, j_s}|_{(i_1, i_2, \ldots, i_r;\ j_1, j_2, \ldots j_s = 1, 2, \ldots, n)} = \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n;\ i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \ldots, i_n^{(1)};\ i_1^{(2)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_n^{(2)}; \ldots;\ i_1^{(r-2)}, i_2^{(r-2)}, \ldots, i_n^{(r-2)} = 1}^{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n;\ i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \ldots, i_n^{(1)};\ i_1^{(2)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_n^{(2)}; \ldots;\ i_1^{(r-2)}, i_2^{(r-2)}, \ldots, i_n^{(r-2)} = n}$$

$$\prod_1^{r-2}|\mu|\,(i_1^{(\mu)}, i_2^{(\mu)}, \ldots, i_n^{(\mu)})\,|b_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_s}|\,a_{1, i_1^{(1)}, i_1^{(2)}, \ldots, i_1^{(r-1)}}\, a_{2, i_2^{(1)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_2^{(r-1)}} \ldots a_{n, i_n^{(1)}, i_n^{(2)}, \ldots, i_n^{(r-1)}}$$

$$(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\tau-1}, \varkappa_{\tau+1}, \varkappa_{\tau+2}, \ldots, \varkappa_s = 1, 2, \ldots, n;\ \varkappa_\tau = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Nach 3) und 4) ist aber

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n = 1}^{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n = n} |b_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_s}|\, a_{1, i_1^{(1)}, i_1^{(2)}, \ldots, i_1^{(r-1)}}\, a_{2, i_2^{(1)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_2^{(r-1)}} \ldots a_{n, i_n^{(1)}, i_n^{(2)}, \ldots, i_n^{(r-1)}} =$$

$$= \left| \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} a_{\varkappa, i_\varkappa^{(1)}, i_\varkappa^{(2)}, \ldots, i_\varkappa^{(r-2)}, \lambda}\, b_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\tau-1}, \lambda, \varkappa_{\tau+1}, \varkappa_{\tau+2}, \ldots, \varkappa_s} \right|_{(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\tau-1}, \varkappa_{\tau+1}, \varkappa_{\tau+2}, \ldots, \varkappa_s, \varkappa = 1, 2, \ldots, n;\ \varkappa_\tau = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)}$$

und daher

$$|a_{i_1, i_2, \ldots, i_r}|\,|b_{j_1, j_2, \ldots, j_s}|_{(i_1, i_2, \ldots, i_r;\ j_1, j_2, \ldots, j_s = 1, 2, \ldots, n)} = \sum_{i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \ldots, i_n^{(1)};\ i_1^{(2)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_n^{(2)}; \ldots;\ i_1^{(r-2)}, i_2^{(r-2)}, \ldots, i_n^{(r-2)} = 1}^{i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \ldots, i_n^{(1)};\ i_1^{(2)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_n^{(2)}; \ldots;\ i_1^{(r-2)}, i_2^{(r-2)}, \ldots, i_n^{(r-2)} = n}$$

$$\prod_1^{r-2} \left| \mu \right| (i_1^{(\mu)}, i_2^{(\mu)}, \ldots, i_n^{(\mu)}) \left| \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} a_{\varkappa, i_\varkappa^{(1)}, i_\varkappa^{(2)}, \ldots, i_\varkappa^{(r-2)}, \lambda} \, b_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\tau-1}, \lambda, \varkappa_{\tau+1}, \varkappa_{\tau+2}, \ldots, \varkappa_s} \right|_{(\varkappa, \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\tau-1}, \varkappa_{\tau+1}, \varkappa_{\tau+2}, \ldots, \varkappa_s = 1, 2, \ldots, n)} .$$

Diese Gleichung geht aber nach 5) sofort in die Relation

$$a_{i_1, i_2, \ldots, i_r} \left| \left| b_{j_1, j_2, \ldots, j_s} \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_r;\, j_1, j_2, \ldots, j_s = 1, 2, \ldots, n)} = \left| \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} a_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-1}, \lambda} \, b_{\varkappa_r, \varkappa_{r+1}, \ldots, \varkappa_{r+\tau-1}, \varkappa_{r+\tau}, \ldots, \varkappa_{r+s-2}} \right|_{(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r+s-2} = 1, 2, \ldots, n)}\right.$$

über, durch welche das oben erwähnte Multiplicationstheorem der allgemeinen Determinanten ausgesprochen wird. Es dürfte kaum möglich sein, diesen Satz auf einem gedanklich einfacheren Wege zu beweisen.

XIV. SITZUNG VOM 18. MAI 1893.

Herr Intendant Hofrath Ritter v. Hauer führt den Vorsitz.

Die Niederrheinische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde zu Bonn ladet die kaiserl. Akademie zur Theilnahme an der Feier ihres fünfundsiebzigjährigen Bestehens am 2. Juli d. J. ein.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. A. Bauer übersendet eine Arbeit aus dem Laboratorium für allgemeine und analytische Chemie an der k. k. technischen Hochschule in Wien, betitelt: »Zur Kenntniss der Xanthorrhoeaharze« von Dr. Max Bamberger.

Der Secretär legt eine von Herrn Carl Eberl, k. k. Post-Official in Marburg, eingesendete Abhandlung vor, betitelt: »Theorie der solaren Revolutionen«.

Das w. M. Herr k. u. k. Hofrath Director F. Steindachner überreicht eine ichthyologische Abhandlung unter dem Titel: »Ichthyologische Beiträge« (XVI).

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Lang überreicht eine von Herrn Johann Zuchristian im physikalischen Institute der k. k. Universität in Innsbruck ausgeführte Arbeit: »Über den Einfluss der Temperatur auf die Potentialdifferenzen des Wechselstrom-Lichtbogens«.

Das w. M. Herr Prof. Dr. Ad. Lieben überreicht eine von Herrn Prof. Dr. Guido Goldschmiedt übersendete Arbeit aus dem chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag: »Über die Einwirkung von Natrium auf Ortho-Dibrombenzol« von Wilhelm Hosaeus.

Das w. M. Herr Hofrath Professor J. Wiesner überreic eine Abhandlung: »Photometrische Untersuchunge auf pflanzenphysiologischem Gebiete.« I. Orient rende Versuche über den Einfluss der sogenannte chemischen Lichtintensität auf den Gestaltungspr cess der Pflanzen.«

Herr Prof. Dr. Jos. Finger macht eine vorläufige Mittheilu über die Ergebnisse seiner theoretischen Untersuchungen üb die Beziehung zwischen den Spannungen und de Deformationselementen bei einem elastisch isotrope Körper.

Herr Prof. Dr. Ed. Lippmann in Wien überreicht eine v ihm in Gemeinschaft mit Herrn F. Fleissner ausgeführte Arbe »Über das Pseudocinchonin«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nic zugekommene Periodica sind eingelangt:

Bulletin of the Geological Institution of the Unive sity of Upsala. Vol. I, No. 1, 1892. Upsala, 1893; 8°.

Über den Einfluss der Temperatur auf die Potentialdifferenzen des Wechselstromlichtbogens

von

Joh. Zuchristian.

(Mit 8 Textfiguren.)

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität Innsbruck.

Während bei Gleichstrom zwischen Metallelektroden ohne Schwierigkeit ein Volta'scher Lichtbogen erzeugt werden kann, gelingt dies bei Wechselstrom nicht. Prof. Lecher, der seinerzeit[1] eine Abhängigkeit der Potentialdifferenzen von der Temperatur bei einem Gleichstrom-Lichtbogen nachgewiesen hat, veranlasste mich nun, den Einfluss der in obiger Arbeit geschilderten Methoden auf den Wechselstrom-Lichtbogen zu untersuchen.

Bei Anwendung von Wechselstrom spielt nämlich die Wärmeleitungsfähigkeit der Elektroden sicher eine grosse Rolle, da bei 80 Stromwechseln in der Secunde die erhitzten Stäbe zwischen den einzelnen Strommaximis gewiss bedeutend abkühlen werden. Es war also von vornherein als wahrscheinlich vorauszusehen, dass die Unmöglichkeit eines Wechselstromlichtbogens zwischen gut leitenden Elektroden in eben dieser Leitungsfähigkeit gegeben sei, und dass alle Massnahmen, welche dieselbe herunterdrücken, ein Zustandekommen des Lichtbogens erleichtern werden. Diese Vermuthung wird durch die folgenden Versuche bestätigt.

Im Verlaufe der Versuche wurden nun zunächst die Potentialdifferenzen zwischen langen Kohlenstäben untersucht

[1] Wied. Ann., 33, S. 609, 1888.

dann aber möglichst kurze Kohlenspitzen in Metallfassung befestigt, so dass der Lichtbogen zwischen den Kohlenelektroc entstand, durch die Metallstäbe die erzeugte Wärme aber sof abgeführt werden konnte.

Die Anordnung bei Ausführung dieser Messungen, wo ich als Stromquelle den Wechselstrom vom Innsbrucker Elek citätswerke benützte, war folgende: Der Strom S (Fig. 1) wu direct zur ersten Elektrode E_1 geführt, von da durch den Lic bogen zur zweiten E_2, durch den Rheostaten R und ein Ammete

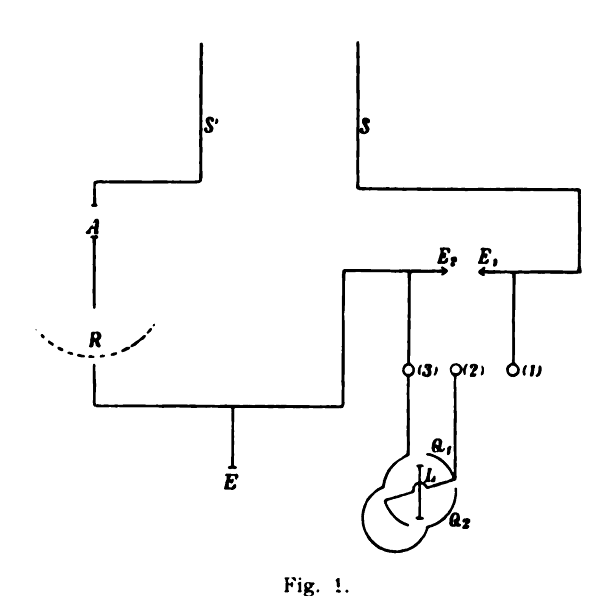


Fig. 1.

zurück in die Hauptleitung S'. E_1 war dann mit einem Que silbernapf (1) und nach Überbrückung der beiden Quecksilb schalen (1) und (2) mit der Lemniscate L und einem Quadrant paare Q_1 eines Thomson'schen Quadrantenelektromet verbunden. Vom zweiten Quadrantenpaare Q_2 ging eine Leitu durch den Quecksilbernapf (3) zur zweiten Elektrode E_2 u zur Erde E. Durch diese Aufstellung war es ermöglicht, c Elektrometer rasch mit den beiden Elektroden zu verbind und zwar durch Überbrückung von (1) und (2), oder durch V bindung von (2) und (3) zur Erde abzuleiten.

Geaicht wurde das Elektrometer mit 60 kleinen Zn/Cu Wasserelementen, welche wieder ihrerseits mit einem Flemming'schen Normaldaniell verglichen im Mittel 0·91 Volt hatten. Darnach ergaben 10 Volt bei obiger Schaltungsweise einen Ausschlag von 6·2 *mm*. Die übrigen Ausschläge verhielten sich wie die Quadrate der Potentialdifferenzen, was eine Durchprüfung mit den kleinen Elementen auch ganz genau bestätigte.

Die beiden Kohlen lagen horizontal in einer Vorrichtung, in der mit Hilfe einer Mikrometerschraube die Kohlendistanzen beliebig geändert werden konnten. Die Messung der Kohlendistanzen erfolgte in der Weise, dass man unmittelbar nach Ablesung der Potentialdifferenzen den Strom unterbrach und dann mit Hilfe eines langen Metallkeiles diese Distanzen bestimmte. Es ist diese Bestimmung der schwächste Theil der Arbeit, da besonders bei kleinen Distanzen das Abbrennen oft sehr ungleichmässig erfolgte.

I.

Die ersten Versuche machte ich mit zwei 8 *mm* starken Dochtkohlen, und zwar bei den Stromstärken 6·8, 8·6 und 10·5 Ampère und bei Kohlendistanzen bis zu 4 *mm*. (Grössere Distanzen untersuchte ich nicht mehr aus dem einen Grunde, weil ich diese Beobachtungen nur zum Vergleiche mit den späteren Versuchen, bei welchen Metallelektroden mit Kohlenspitzen verwendet wurden, anstellte. Ausführlichere Versuche wurden darüber von J. Heubach[1] ausgeführt.)

War die Stromstärke 6·8 Ampère, so konnte ich alle meine Versuchsresultate durch die Gleichung

$$V = 24 + 2 \cdot 9\, l \pm 0 \cdot 8$$

ausdrücken, wo V das Potentialgefälle in Volt und l die Elektrodendistanz in Millimeter gemessen ist (Fig. 2, *a*). Wenn die Constanten dieser Gleichung von jenen, die Heubach gefunden, abweichen, so ist das wohl nur dem Umstande zuzuschreiben, dass Heubach bei seinen Versuchen die Kohlen-

[1] Elektrotechn. Zeitschr., 34, S. 460, 1892.

elektroden vertical übereinanderstehen hatte, während ich
selben horizontal gestellt habe, bei mir also die Erwärmung
oberen Elektrode durch die untere wegfiel, was, wie Na
folgendes zeigt, einigen Einfluss ausübt.

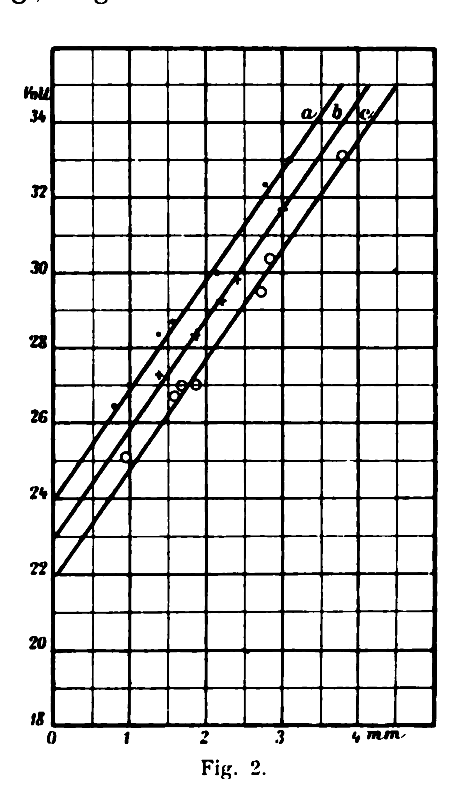


Fig. 2.

Im zweiten Falle, wo die Stromstärke 8·6 Ampère betr
liessen sich die erhaltenen Resultate in die Formel

$$V = 23 + 2 \cdot 9\, l \pm 1 \cdot 2$$

einreihen (Fig. 2, *b*) und für die Stromstärke 10·5 Ampère
hielt ich die Relation

$$V = 22 + 2 \cdot 9\, l \pm 1$$

(Fig. 2, *c*). Es scheint also, dass sich die Neigung der Potent
linie mit der Stromstärke nicht ändere, sondern nur eine Paral
verschiebung eintrete. Es dürfte das aber nur für horizon

gestellte, nicht aber auch für vertical übereinanderstehende Kohlenelektroden gelten, denn bei Heubach's Versuchen variirt auch die Neigung.

II.

Bei den folgenden Versuchen verwendete ich als Elektroden Messingcylinder mit Kohlenspitzen, deren Form aus Fig. 3 ersichtlich ist. *AB* ist ein 10 *mm* starker, schwarzgebrannter Messingstab mit einer ungefähr 17 *mm* langen Kohlenspitze *C*, die 5 *mm* tief unter gutem Contacte im Messingcylinder steckt.

Zuerst untersuchte ich nun mit diesen Messingelektroden den Lichtbogen bei einer Stromstärke von 6·8 Ampère. Es zeigte sich hiebei ein bedeutender Potentialanstieg gegenüber den Versuchen mit reiner Kohle; so war z. B. bei Anwendung von continuirlichen Kohlenelektroden für eine Distanz von

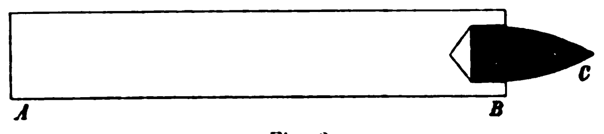


Fig. 3.

2·6 *mm* die Potentialdifferenz 31·5 Volt, bei Benützung von Messing 34·6 Volt.

Während aber mit reinen Kohlenstäben die Messungen bei dieser Stromstärke noch anstandslos von statten gingen, ist mit den obigen Messingelektroden der Lichtbogen sehr schwer herzustellen und erlischt viel zu rasch, als dass ein genaues Ablesen der Potentialdifferenzen möglich wäre; ich machte daher alle meine weiteren Beobachtungen bei einer Stromstärke von ungefähr 10·5 Ampère.

Aus ebendemselben Grunde konnte ich auch nur kleine Elektrodendistanzen nehmen, besonders gegen Ende der einzelnen Versuche, wo die Kohlenspitzen bereits sehr nahe an das Metall hin abgebrannt waren. Da ferner, wie aus den folgenden Versuchen klar hervorgeht, mit dieser Abnahme der Kohlenspitzen ein stetiger Potentialanstieg verbunden ist, war es nicht mehr möglich, alle Beobachtungen durch eine lineare Relation auszudrücken.

Nun habe ich mit den vorerwähnten Messingstäben
einer Stromstärke von 10·6 Ampère eine grössere Anzahl
Versuchen ausgeführt und in drei Gruppen unterschie
(Fig. 4), je nachdem die Kohlenspitzen 11—7, 7—3 c
weniger als 3 *mm* aus der Fassung hervorragten.

Waren die Kohlen ganz bis an das Metall hin abgebra
dann war es nicht mehr möglich, einen Bogen zu erhal

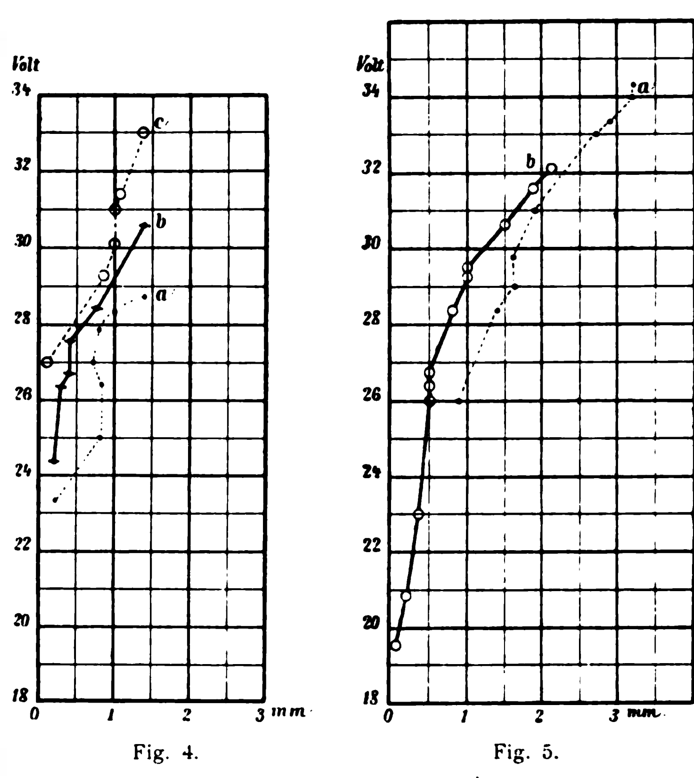


Fig. 4. Fig. 5.

Wie aus der Figur ersichtlich ist, ist vor Allem e
bedeutende Zunahme der Potentialdifferenzen gegenüber
Kohlenelektroden bemerkbar und es lässt sich auch
Potentialanstieg bei der Verkleinerung der Kohlenspitzen n
verkennen.

Zugleich kann man bei diesen Versuchen auch beobach
wie die Kohlenspitzen beim Abbrennen nach und nach s
stumpf werden und sich schliesslich ein Krater herausbil

ähnlich dem der positiven Kohlenelektrode beim Gleichstromlichtbogen.

Um einen besseren Vergleich mit den weiter unten folgenden Versuchen mit Eisen zu haben, nahm ich auch noch zwei Messingstäbe von der Dicke 12 *mm* und machte einige Messungen bei der nämlichen Stromstärke wie vorhin. Hier habe ich meine Beobachtungen in zwei Gruppen getheilt, und zwar je nachdem die Kohlenspitzen 12—6, oder weniger als 6 *mm* weit frei hervorstanden (Fig. 5).

Wenn auch bei diesen Versuchen die Potentialdifferenzen in Vergleich mit jenen in Fig. 4 etwas abgenommen haben, so sind sie doch noch wesentlich verschieden von denen, die bei reinen Kohlenelektroden auftreten; so ist z. B. bei einer Elektrodendistanz von 2·9 *mm* hier das Potentialgefälle 33·4 Volt, während es für Kohlenelektroden unter denselben Umständen bloss 30·4 Volt beträgt.

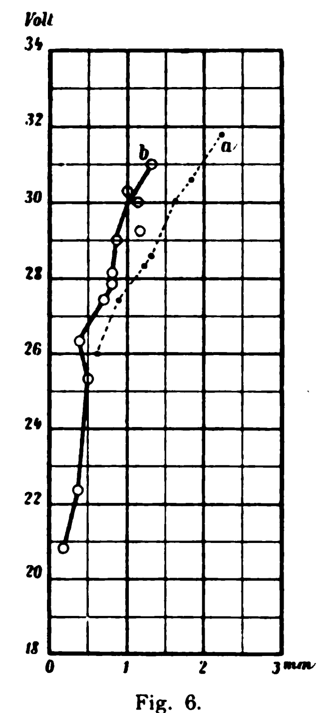


Fig. 6.

III.

Die nämlichen Versuche, die ich unmittelbar vorher mit Messing gemacht habe, wiederholte ich jetzt mit 12 *mm* starkem Eisen und theilte meine Beobachtungsresultate, wie aus Fig. 6 ersichtlich ist, wieder in zwei Gruppen, je nachdem die Länge der vorstehenden Kohlenspitzen 12—3, oder kleiner als 3 *mm* war.

Wie aus der Figur zu entnehmen ist, zeigen die Beobachtungen mit Eisen ein etwas höheres Potential, als die mit Messing, wenn auch der Unterschied nicht bedeutend ist. In allen anderen Beziehungen lehnen sich diese Versuche eng an die mit Messing an.

IV.

Ähnlich wie Lecher es bei seinen Versuchen gethan umwickelte nun auch ich Kohle (8 *mm* stark) mit 1·9 dickem Kupferdraht, und zwar vorne etwa 2 *cm* in dopp Lage. Die Kohlen standen anfangs 12 *mm* vor, und die Str stärke war im Mittel 10·5 Ampère.

Wie Fig. 7 zeigt, ist auch hier ein deutlicher Poten anstieg gegenüber der reinen Kohle vorhanden; doch weic diese Resultate von de der vorhergehenden V suche insofern etwas ab, die Zunahme der Poten differenzen während des brennens der Kohlenspit nicht mehr so scharf au prägt ist. Es dürfte hier Contact für die Wär leitungsfähigkeit ein ge gerer gewesen sein.

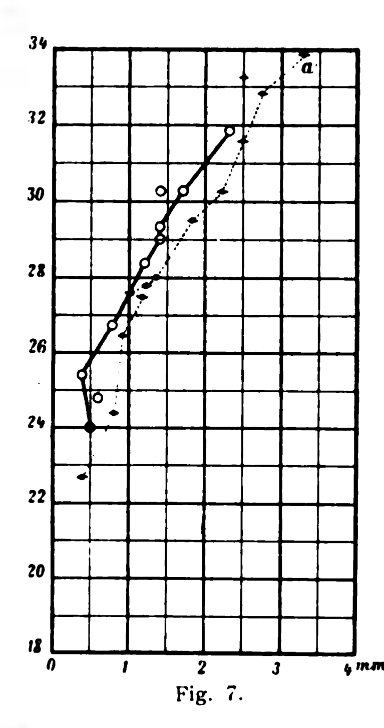


Fig. 7.

V.

Grosse Potentiald renzen erhielt ich auch einem Versuche, wo Kohlenelektrode (und z jene, welche nicht zur E abgeleitet war) in Que silber tauchte. Wie Fig darstellt, wurde einmal einer Kohlendistanz von 4·5 *mm* eine Potentialdifferenz 51 Volt beobachtet, während für reine Kohlenelektroden di Bogenlänge nur 35 Volt entsprechen.

Alle diese Versuche zeigen also, wie sehr der Li bogen abhängig ist von der Temperatur, welche ihrers wieder durch die Wärmeleitungsfähigkeit der Elektro bedingt ist.

VI.

Zum Schlusse versuchte ich noch mit continuirlichen Metallelektroden einen Lichtbogen herzustellen, erhielt aber nur negative Resultate.

Zuerst wurden zwei Messingstäbe (12 *mm* im Durchmesser) mit angedrehten Spitzen eingespannt; bei einer Strom-

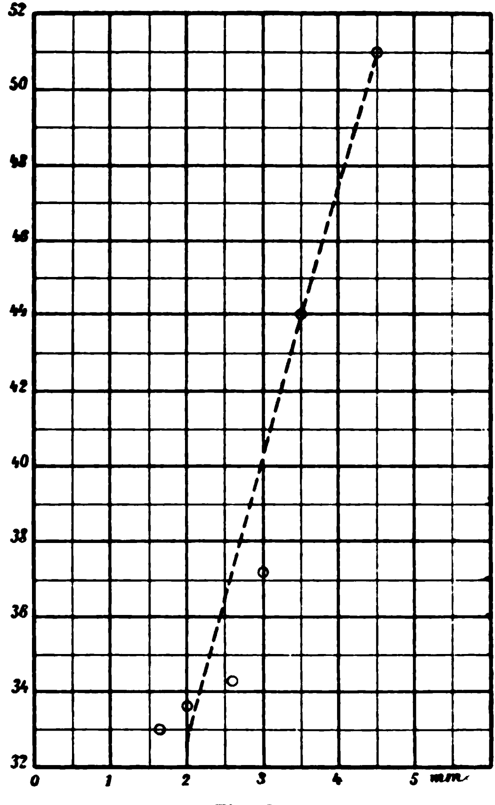


Fig. 8.

stärke von über 12 Ampère konnte ich noch keinen Bogen erhalten, auch nicht während oder nach Erhitzen mit einem Teclu-Spaltbrenner. Desgleichen ist es ganz unmöglich, einen Bogen herzustellen zwischen zwei Elektroden aus Messingdraht von 4 *mm* Dicke oder Kohlenelektroden mit aufgesetzten Messingspitzen.

Doch ist es zeitweise gelungen, zwischen Kohle u
Messing einen Lichtbogen zu erhalten, wenn mit einer zwei
Kohle, welche man unter die wenig von einander entfern
Elektroden hält, ein zweiter Lichtbogen (zwischen Kohle u
Kohle) hergestellt und dadurch das Messing ausserordentl
stark erhitzt wurde. Dabei ist zu bemerken, dass sich die Ko
in das Messing vollständig hineinbrennt. Eine Messung
Potentialdifferenzen war aber nicht möglich, da oftmali
Unterbrechen des Lichtbogens eintrat und dann immer
ganze Potentialdifferenz des verwendeten Stromes das Elekt
meter in starke Schwingungen versetzte.

Ganz dasselbe gilt auch für Eisenelektroden.

Nicht unerwähnt lassen möchte ich aber schliesslich n
die Erscheinung, die sich zwischen zwei Eisendrahtelektro
(6 *mm*) gezeigt hat. Hat man nämlich zwei solche Eisendrä
spitz zugefeilt und mit einem Teclu-Brenner erwärmt,
schmelzen, sobald der Strom eingeleitet ist, diese Spitzen
und es bildet sich eine schöne, hellleuchtende Eisenperle,
sich sehr lange constant erhält. Der Mechanismus des Glüh
ist aber hier derselbe, wie bei einer Glühlampe.

Durch diese Versuche ist nun wenigstens einigermas
gezeigt, dass es unmöglich ist, zwischen zwei Metallelektro
mit Wechselstrom von der angegebenen Frequenz einen Lic
bogen herzustellen, wofür ein Grund gewiss der der stark
Abkühlung durch die grössere Wärmeleitungsfähigkeit geg
über der Kohle ist. Aller Wahrscheinlichkeit nach treten h
auch starke Phasenverschiebungen ein, deren Erforschu
jedoch weiteren Untersuchungen vorbehalten bleibt.

Über die Natur der Kometen

von

C. Puschl.

(Vorgelegt in der Sitzung am 13. April 1893.)

In der ersten Zeit nach Aufstellung der kinetischen Theorie der Wärme konnte die Erklärung, welche sie von der die Körper ausdehnenden Wirkung dieser Kraft gibt, wegen ihrer Einfachheit als sehr überzeugend erscheinen. Eine ernstliche Schwierigkeit erblickte man nur im Verhalten des Wassers; hier kam aber die Thatsache zu Hilfe, dass diese Flüssigkeit gewöhnlich bei 0° zu einem Körper von geringerer Dichte erstarrt, und man konnte daher sagen, es trete in derselben die Tendenz, sich in Eis zu verwandeln, schon ober 0° ein und gebe von 4° abwärts bei der Veränderung des Volumens wirklich den Ausschlag. Diese Auffassung gipfelt in der kürzlich von Röntgen aufgestellten Hypothese, das Wasser enthalte schon ober 63°, d. h. oberhalb der Temperatur des Minimums seiner Zusammendrückbarkeit, eine gewisse Menge Eistheilchen, deren Zahl mit sinkender Temperatur beständig wachse und so den anomalen Gang der thermischen Volumveränderung desselben bedinge. In neuerer Zeit ist jedoch eine derjenigen des Wassers ähnliche Wärmeausdehnung, nämlich ein bei niedriger Temperatur eintretendes Dichtemaximum, auch an einigen festen Körpern entdeckt worden, und dem gegenüber hat sich bisher eine Auskunft nicht finden lassen. Ganz undenkbar aber war es nach der erwähnten Theorie, dass sogar Gase und zwar bei sehr geringer Dichte durch Erhöhung ihrer Temperatur, anstatt sich auszudehnen, sich zusammenziehen könnten. Durch die an Kometen beobachteten Erscheinungen ermuthigt, habe ich schon vor längerer Zeit diese Hypothese gewagt, und ich

glaube jetzt in der gleichen Richtung um einen Schritt weit gehen zu dürfen.

Wenn ein Zustand der Gase möglich ist, wobei sie durc Erwärmung sich zusammenziehen, so wird es auch eine Zustand der Sättigung geben können, wobei der bezüglich Dampf ein demjenigen der gewöhnlichen Dämpfe in thermisch Hinsicht durchaus entgegengesetztes Verhalten zeigt. An d Voraussetzung einer stets ausdehnenden Kraft der Wärme i man dann auch in der Dampftheorie nicht mehr gebunden.

Zwischen der latenten Wärme L eines Dampfes und de Sättigungsdrucke p bei der Temperatur t besteht die allgeme angenommene Beziehung

$$AL = uT\frac{dp}{dt},$$

wo u den Überschuss des specifischen Dampfvolumens üb dasjenige des verdampfenden Körpers, T die absolute Temp ratur und A das Arbeitsäquivalent der Wärmeeinheit bedeut Nach dieser Gleichung verschwindet L im allgemeinsten Fal bei drei verschiedenen Temperaturen: 1. für $u = 0$ oder i kritischen Punkte, 2. für $T = 0$, 3. für eine Temperatur, b welcher $\frac{dp}{dt} = 0$ und somit der Sättigungsdruck p ein Minimu wird. Hier wechselt der genannte Quotient und zugleich L d Vorzeichen.

Nimmt man die Sättigungstemperaturen als Abscissen u die zugehörigen Drucke als Ordinaten, so erhält man ei Curve, welche bei einer gewissen Temperatur einen dem Druc minimum entsprechenden tiefsten Punkt hat, von wo an di selbe in zwei Ästen verläuft; im oberen Aste nimmt der Dru mit sinkender Temperatur ab und ist L positiv, im unteren As nimmt der Druck mit sinkender Temperatur zu und ist L negat Bei Temperaturen zwischen den zwei Ästen der Curve ist d Dampf nicht bestandfähig.

Zwischen dem kritischen Punkte und dem Druckminimu wird die latente Wärme L ein Maximum, zwischen dem letzter Punkte und der absoluten Nulltemperatur wird sie, als negati ein Minimum. Wenn dieselbe nach Überschreitung ihres Ma

mums abnimmt, so wächst der Quotient $\frac{L}{T}$ zunächst noch, wird aber auch selbst ein Maximum und nimmt von da an mit der Temperatur bis zum absoluten Nullpunkte ab.

Man denke sich ein geschlossenes Gefäss von constantem Fassungsraum theils mit Flüssigkeit und theils mit ihrem Dampfe erfüllt. Geht durch Wärmezufuhr Flüssigkeit in Dampf über, wobei L positiv ist, so nimmt die Dichte des letzteren mit der Temperatur zu, und es ist, wenn v dessen specifisches Volumen bedeutet, $\frac{dv}{dt}$ negativ; würde hingegen durch Wärmezufuhr sich Dampf niederschlagen, wobei L negativ wäre, so nähme die Dampfdichte mit steigender Temperatur ab, und es wäre $\frac{dv}{dt}$ positiv. Man sieht also, dass mit L und $\frac{dp}{dt}$ auch $\frac{dv}{dt}$ das Vorzeichen wechselt; das Sättigungsvolumen ist dann ein Maximum.

Es sei $\left(\frac{dp}{dt}\right)$ das Verhältniss der Veränderungen von p und t bei constantem Volumen, so ist für gesättigt bleibenden Dampf:

$$\frac{dp}{dt} = \left(\frac{dp}{dt}\right) + \left(\frac{dp}{dv}\right) \frac{dv}{dt};$$

hieraus folgt, dass mit L, $\frac{dp}{dt}$ und $\frac{dv}{dt}$ auch

$$\left(\frac{dp}{dt}\right) = 0$$

und also zugleich der Ausdehnungscoëfficient bei constantem Drucke:

$$a = \frac{1}{v}\left(\frac{dv}{dt}\right) = 0$$

werden muss. Im Minimum des Druckes wechselt sonach der Ausdehnungscoëfficient a für gesättigt bleibenden Dampf das Vorzeichen und geht mit sinkender Temperatur von positiven zu negativen Werthen über.

Wenn ein Gas mit Abnahme des äusseren Druckes s
Volumen v um dv erweitert, so leistet dessen Wärme eine inn
Arbeit $= idv$, welche für gewöhnlich gegen die äussere Arb
nur klein und positiv ist. In dieser Hinsicht nehme ich a
dass die Grösse i bei einer gewissen Gasdichte wirklich v
schwindet, dabei aber nur das Vorzeichen wechselt und du
weitere Verdünnung negativ wird. Das Verhalten des Wass
stoffes, für welchen i nach den Versuchen von Joule u
Thomson negativ sein muss, unterstützt diese Annahme.

Lässt man also ein Gas von dem Punkte an, wo $i = 0$
sich ausdehnen, so nimmt der Quotient $\frac{i}{p}$, negativ geword
numerisch schnell zu, wodurch er bei einer schon sehr gering
Dichte $= -1$ und daher die Summe $p+i = 0$ wird. Vermö
der Gleichung

$$p+i = T\left(\frac{dp}{dt}\right)$$

wird dann auch $\left(\frac{dp}{dt}\right)$ und zugleich der Ausdehnungscoëffici
bei constantem Drucke:

$$a = \frac{1}{v}\left(\frac{dv}{dt}\right) = 0;$$

die Dichte des Gases ist dabei für constanten Druck ein Mi
mum. Mit Zunahme des Druckes geht dieses Minimum
höhere und mit dessen Abnahme auf tiefere Temperaturen üb

Man denke sich nun ein Gas bei gewöhnlicher Tempera
so stark verdünnt, dass für dasselbe $a = 0$ sei. Lässt m
hierauf den Druck noch weiter abnehmen, indem man zugle
die Temperatur so erniedrigt, dass immer $a = 0$ und somit
Bedingung

$$\left(\frac{da}{dt}\right) + \left(\frac{da}{dp}\right)\frac{dp}{dt} = 0$$

erfüllt bleibt, so muss man endlich zu jenem Punkte komm
wo bei dem Nullwerthe von a das Gas ein gesättigter Da

[1] Diese Berichte, Bd. C, Abth. II. a, S. 994.

und der entsprechende Druck ein Minimum, nämlicn $\frac{dp}{dt} = 0$ ist; nach der vorangehenden Gleichung wird dann

$$\left(\frac{da}{dt}\right) = 0,$$

und es zeigt sich, dass in diesem Falle der Nullwerth von a für constanten Druck ein Maximum ist. Das Minimum der Dichte trifft hier, wie man sieht, auf einen Wendepunkt und ein Maximum derselben, und dementsprechend wird a, wenn der Druck constant bleibt, mit sinkender wie mit steigender Temperatur negativ.

Lassen wir jetzt den Druck von seinem Minimum an um etwas zunehmen, so gibt es nach dem Obigen zwei Temperaturen, wobei Sättigung stattfindet. Gleichzeitig hat sich das Dichteminimum auf eine höhere Temperatur verschoben und tritt vor der oberen Sättigung ein, wodurch a für dieselbe positiv wird, während das Dichtemaximum nun in das Temperaturintervall fällt, innerhalb dessen der Dampf nicht bestandfähig ist, und daher ist a für die untere Sättigung negativ. Je höher der Druck wird, desto mehr gehen die zwei Sättigungstemperaturen auseinander und desto weiter entfernt sich das Dichteminimum von der oberen Sättigung. Hat derselbe endlich die grösste, bei der unteren Sättigung noch mögliche Höhe erreicht, so fällt jene fort, und es bleibt für höhere Drucke nur die obere Sättigung übrig, von welcher dann das Dichteminimum schon weit fortgerückt ist, und bei einem gewöhnlichen Drucke ist die Temperatur, wobei es eintreten würde, schon unerreichbar hoch geworden.

In voriger Darstellung wurde ein Dampf vorausgesetzt, für welchen bei jeder Temperatur zwischen der kritischen und dem absoluten Nullpunkte ein Zustand der Sättigung möglich wäre. Es müsste demselben eine flüssige oder feste Substanz entsprechen, welche bei allen Temperaturen in Dampf überzugehen vermöchte. Ob es aber Substanzen von der dazu nöthigen Beschaffenheit gibt, ist zweifelhaft. Es scheint nämlich, dass die Körper im festen Zustande, den sie durch Erkalten in jedem Falle endlich erreichen, bei Temperaturen weit unterhalb des

Erstarrungspunktes im Allgemeinen absolut keinen Dampf e
wickeln.

Man wird für ein solches Verhalten annehmen müss
dass die erwähnte Curve der Sättigungsdrucke, indem sie r
ihrem oberen Aste bei sinkender Temperatur schnell abfällt,
einem Punkte die Abscissenaxe trifft und schneidet und a
unter dieselbe hinabgeht, wobei der Dampfdruck negativ wür
Jener Schnittpunkt bezeichnet dann die Grenztemperatur, unt
halb welcher die bezügliche Substanz in Dampf- oder Gasfo
nicht mehr vorkommen kann.

Bei dieser Auffassung wäre es als der allgemeinste Fall
betrachten, dass die Curve der Sättigungsdrucke bei einer se
niedrigen Temperatur sich mit dem unteren Aste wieder üb
die Abscissenaxe erhöbe und somit der Dampfdruck wie
positiv würde. Eine Substanz, für welche die gedachte Cu
diesen Verlauf hätte, würde nicht nur bei hoher, sondern au
bei hinreichend niedriger Temperatur verdampfbar, in ein
mittleren Intervalle aber vollkommen unverdampfbar sein, u
der bei niedriger Temperatur entwickelte Dampf müsste
thermisches Verhalten zeigen, welches demjenigen der gewöl
lichen Dämpfe in jeder Hinsicht entgegengesetzt wäre. Zu d
bereits erwähnten Gegensätzen kommt noch ein anderer, d
ich zum vorliegenden Zwecke für besonders beachtenswe
halte.

Es ist bekannt, dass die specifische Wärme jedes di
bezüglich untersuchten Dampfes kleiner ist als jene des flüssig
oder festen Körpers, aus dem er sich bildet. Diese Thatsa
stimmt mit einer Folgerung überein, welche ich für den Zusta
gesättigter Dämpfe schon früher[1] aufgestellt habe. Nimmt m
nämlich an, dass die innere Verdampfungsarbeit keine unmit
bare Function der Temperatur sei, so ergibt sich die Gleichu

$$\frac{dL}{dt}+S-s-\frac{d(pu)}{A\,dt}=\frac{i}{A}\cdot\frac{dv}{dt},$$

wo i die oben angegebene Bedeutung hat, S die specifis
Wärme des verdampfenden Körpers und s diejenige des Damp

[1] Diese Berichte, Bd. C, Abth. II. a, S. 843.

bei constantem Volumen ist. Für die gewöhnlichen Dämpfe kann man mit einiger Annäherung $i = 0$ setzen, wodurch

$$S - s - \frac{d(pu)}{A\,dt} = -\frac{dL}{dt}$$

wird, und da zugleich L mit sinkender Temperatur wächst, so folgt:

$$S > s + \frac{d(pu)}{A\,dt},$$

was die bisherige Erfahrung allgemein bestätigt.

Während im kritischen Punkte, wo Dampf und Flüssigkeit identisch sind, $s = S$ wird, so scheint es demnach, dass bei Verdampfung mit positiven Werthen von L immer nur solche Dämpfe sich bilden können, welche der Bedingung

$$s < S$$

entsprechen. Bei Verdampfung mit negativen Werthen von L verhält es sich aber gerade umgekehrt.

Man kann nämlich der vorhin angeführten Gleichung, einfach $v = u$ setzend, auch die Form geben:

$$S - s - \frac{L}{T} + \frac{dL}{dt} = \frac{T}{A}\left(\frac{dp}{dt}\right)\frac{du}{dt},$$

wo der rechts stehende Ausdruck für beide gedachten Fälle einen negativen Werth hat; es ist daher jedesmal:

$$S - s < \frac{L}{T} - \frac{dL}{dt}.$$

Nach dem oben angegebenen Verlaufe von L ist für negative Werthe dieser Grösse stets

$$\frac{L}{T} - \frac{dL}{dt} < 0$$

oder negativ; hieraus folgt für eine Verdampfung, wobei L negativ wäre:

$$S < s,$$

d. h. die specifische Wärme des verdampfenden Körpers m
kleiner sein als jene des Dampfes. Feste Körper, deren specifis
Wärme durch Erniedrigung der Temperatur, wie es fast o
Ausnahme der Fall ist, sich nur wenig ändert, müssen da
sobald sie durch Erkalten einmal die Grenze ihrer Verdar
barkeit erreicht haben, weiterhin bis $T = 0$ immer unverdar
bar bleiben, was auch keinem Zweifel unterliegt. Für so
Körper wird die Curve der Sättigungsdrucke von dem Pu
an, wo sie die Abscissenaxe schneidet, immer unter dersel
bleibend zu denken sein.

Eine Verdampfbarkeit bei den niedrigsten Temperatu
könnte man nach dem Gesagten nur bei einem Körper erwa
dessen specifische Wärme mit seiner Temperatur schnell
nähme, so dass sie zuletzt viel kleiner wäre als bei ho
Temperaturen und insbesondere auch kleiner als die specifis
Wärme des anzunehmenden Dampfes. Dieser Bedingung
entspricht in ausgezeichneter Weise der Kohlenstoff.

Die specifische Wärme dieses Stoffes nimmt nach der Ur
suchung von H. F. Weber[1] ausserordentlich schnell mit
Temperatur ab; während sie sowohl für Diamant wie für Gra
bei sehr hohen Temperaturen (nahe 1000°) den fast norm
Werth 0·46 erreicht, ist dieselbe bei —50° für Diamant 0·
für Graphit 0·113 und nimmt noch fortwährend ab. Andere M
ficationen verhalten sich wie Graphit. Die specifische Wärme
Dampfes bei constantem Volumen, aus derjenigen des Was
stoffes berechnet, ist 0·20, somit viel grösser als die specifis
Wärme der festen Substanz in jeder Modification bei den nied
sten Temperaturen sein dürfte.

Ich glaube daher es für möglich halten zu können, c
dieser Stoff, wie in sehr hoher Temperatur bei normaler, auc
sehr niedriger Temperatur bei excessiv verminderter specifis
Wärme verdampfbar wird. Insbesondere für Diamant wird
solche Annahme auch dadurch erleichtert, dass derselbe n
Fizeau bei einer Temperatur von etwa —40° durch Erka
sich auszudehnen anfängt, wobei der Elasticitätsmodul (wie
Wasser bei niedriger Temperatur) bedeutend abnehmen m

[1] Poggendorff's Annalen, Bd. CLIV, S. 367.

so dass dieser Körper weiterhin bei seinem Erkalten sich ganz in der Weise verhält, wie andere feste Körper bei ihrer Erwärmung. Ob die Wärmeausdehnung des Graphits und der amorphen Kohle bei sehr niedriger Temperatur sich ebenfalls umkehrt, ist einstweilen noch fraglich.

Die hiermit ausgesprochene Vermuthung als zulässig angenommen, wird ein Komet, dessen Kern auf der Oberfläche nebst anderen Stoffen auch Kohlenstoff (Diamant, Graphit oder amorphe Kohle) enthält, bei der äusserst niedrigen Temperatur, welche eine so geringe Masse fern von der Sonne überhaupt haben muss, in seiner noch kälteren, aus Gasen von äusserster Verdünnung bestehenden Atmosphäre zugleich Kohlenstoffdampf enthalten. Besitzen die Atome dieses Dampfes die Fähigkeit, gewisse Lichtgattungen an ihren Oberflächen stark zu reflectiren [1] und alle übrigen leicht durch ihre Substanz hindurchzulassen, so wird die Atmosphäre des Kometen im reflectirten Sonnenlichte ein Spectrum mit hellen Streifen zeigen, welches, eine gleiche chemische Beschaffenheit des Dampfes wie bei hohen Temperaturen vorausgesetzt, das gewöhnliche Bandenspectrum des Kohlenstoffes sein wird. Die Kometen zeigen in hinreichender Distanz von der Sonne dieses Spectrum, wie es scheint, ohne Ausnahme.

Es mag hier erwähnt sein, dass bisher noch kein Komet das Spectrum des Wasserstoffgases gezeigt hat, obwohl man dessen Anwesenheit auf solchen Weltkörpern für wahrscheinlich halten kann. Da dasselbe bei den für Kometen annehmbaren

[1] Die Absorption des Lichtes in einem Körper hat nach meiner Ansicht ihren Grund darin, dass die bezüglichen Ätherwellen durch Reflexion an den Oberflächen der getroffenen Atome nach allen Richtungen in demselben diffundirt werden; die Erzeugung von Atombewegung ist secundär. Auswählende Absorption ist dann immer mit auswählender Reflexion verbunden und einfach eine Folge derselben. Durchgelassene Strahlen müssen durch die Substanz der getroffenen Atome hindurchgehen, in welcher die Geschwindigkeit der Fortpflanzung eine andere ist als im Äther; dies ist die Ursache der Brechung. Jener Ansicht gemäss ist es die in jedem Körper durch Diffusion angesammelte Strahlenmenge, welche den wesentlichen (seine Temperatur bedingenden) Theil seiner Gesammtwärme ausmacht. In der That scheint es, dass die Nothwendigkeit, auf die »innere Strahlung« der Körper Rücksicht zu nehmen, in der Wärmetheorie mehr und mehr anerkannt wird.

Temperaturen ein auswählendes (Absorptions- und) Reflexi
vermögen, wie es hier für den kalten Kohlenstoffdampf post
wird, nicht besitzt,[1] so erscheint jene Thatsache nach der
zeichneten Anschauung als selbstverständlich. Wenn dage
aus dem entsprechend zusammengesetzten Kerne eines Kom
bei starker Annäherung an die Sonne Natriumdampf sich
wickelt, so wird gemäss dem auswählenden Vermögen di
Dampfes sein Spectrum im reflectirten Lichte erscheinen.
solche Möglichkeit hat auch Kundt[2] vor längerer Zeit a
deutet.

Wenn ein Komet von der vorausgesetzten Beschaffen
aus grosser Ferne sich der Sonne nähert, muss der Kern
(hauptsächlich mittelbar) auch seine Atmosphäre sich erwärn
ist dieselbe so stark verdünnt, dass ihr Ausdehnungscoëffic
durchwegs negativ ist, so wird sie überall, besonders in i
stärker erwärmten inneren Schichten, sich zusammenzieh
und diese Verdichtung kann zugleich allmälig die rela
Menge des reflectirten Lichtes vergrössern. Eine Zusamn
ziehung der Atmosphäre vor oder eine Ausdehnung derse
nach dem Durchgange durch das Perihel ist an Kometen m
fach durch ausgezeichnete Beobachter constatirt worden.
Grund, warum man die betreffenden Angaben oft bezwe
oder nicht für erwähnenswerth hält, ist wohl nur, wie sc
Arago in dieser Hinsicht bemerkt, theoretischer Natur.

Gleichzeitig mit der Verdichtung der Kernatmosphäre
der in ihr enthaltene Kohlenstoffdampf in denjenigen Schich
in welchen er durch genügende Erwärmung seine diesbe
liche Sättigung erreicht und überschreitet, sich zu festen Koh
theilchen condensiren, wobei daselbst das Bandenspect
mehr und mehr einem continuirlichen Platz machend, zur
tritt (Komet Coggia 1874); dasselbe kann in solcher Weise
grosser Sonnennähe sogar völlig verschwinden (Komet W

[1] Der Sauerstoff zeigt ein solches Vermögen von relativ geringer S
bei allen gewöhnlichen Temperaturen und auch bei der niedrigen Tempe
seiner Verflüssigung.

[2] Wiedemann's Annalen, Bd. X, S. 325.

[3] Dass eine solche Contraction auch der eventuellen Schweifbildun
Grunde liegt, findet sich im Schlussabschnitte erörtert.

1882), muss aber umgekehrt bei zunehmender Entfernung von der Sonne vermöge der in hinreichend niedriger Temperatur eintretenden Verdampfung fester Kohle wieder zum Vorschein kommen (grosser Septemberkomet 1882). Jenes Verschwinden des Kohlenspectrums vor und dieses Erscheinen desselben nach dem Periheldurchgange, an zwei der Sonne sehr nahe gekommenen Kometen wirklich beobachtet, sind Thatsachen von eminenter Beweiskraft zu Gunsten meiner obigen Ausführung.

Wenn ein Komet, der zuerst als ein ausgedehnter, das Kohlenspectrum zeigender Nebel ohne sichtbaren Kern erscheint, der Sonne auf seinem Wege hinreichend nahe kommt, so können infolge seiner Zusammenziehung schliesslich die centralen, am stärksten erwärmten und verdichteten Nebelschichten durch die in denselben wegen ihrer höheren Temperatur ausgeschiedenen und suspendirten Theilchen fester Kohle, welche das Licht stark reflectiren, das Aussehen eines schlecht begrenzten sternartigen Kernes erlangen, während der eigentliche Kern wegen seiner Kleinheit sich der Wahrnehmung entziehen mag. Eine mit der Annäherung zur Sonne allmälig fortschreitende Concentration der inneren Nebelschichten bis zur Bildung eines sternartigen Scheibchens ist schon öfter beobachtet und neuestens wieder von Holetschek am Encke'schen Kometen in ihrem Verlaufe verfolgt worden.

Der bei Annäherung eines Kometen sowohl unmittelbar am Kerne, wie in den centralen Schichten der Coma durch Erwärmung sich niederschlagende Kohlenstoffdampf wird umgekehrt bei Entfernung von der Sonne durch Erkalten allmälig wieder zur Dampfform zurückkehren, während gleichzeitig das Gesammtvolumen sich entsprechend vergrössert (Komet Brorsen).

Möglicherweise kann aber auch, wie es beim Sieden gewöhnlicher Flüssigkeiten vorkommt, ein Verzug in jener Verdampfung eintreten, welche dann endlich mit grosser Vehemenz erfolgt. Da ein Dampf der gedachten Art bei der Expansion sich erhitzen muss, so kann es geschehen, dass dabei ein Theil sich wieder zu festen Partikelchen condensirt; ist deren Menge hinreichend gross, so wird vermöge derselben die Coma das Sonnenlicht verhältnissmässig stark reflectiren und zugleich ein con-

tinuirliches Spectrum geben, was aber nur solange dauern k
als jene vorausgesetzte rasche Dampfentwicklung und mit
eine entsprechend rapide Volumzunahme der Coma anhält.
glaube, dass auf solche Weise sich die Erscheinung erk
welche der Komet Holmes im November 1892, nachdem
längst durch sein Perihel gegangen war, dargeboten hat, in
seine Coma, während sie schnell an Volumen zunahm, ein
tinuirliches Spectrum zeigte, wobei das gewöhnliche Kome
spectrum nur schwach angedeutet schien. Die jenes Spect
und die grosse Lichtstärke bedingenden festen Theilchen
Coma, welche in derselben bei der Expansion des bezüglic
Dampfes sich niederschlugen, mussten schliesslich durch
kalten wieder verdampfen, und es ist wahrscheinlich, dass d
bei schnell abnehmender Lichtstärke an Stelle des contin
lichen das gewöhnliche Bandenspectrum hervortrat. Ob
solcher Wechsel wirklich beobachtet wurde, ist mir nicht
kannt. Übrigens erscheint es begreiflich, dass die äuss
Partien der durch den entwickelten Dampf zu enormer Grö
angewachsenen Nebelhülle unaufgehalten, sich bis zur Unsi
barkeit verdünnend, fortflogen [1] und zuletzt nur eine stark re
cirte Coma an dem unbedeutenden Kerne zurückblieb.

---

[1] Nach meiner Hypothese kann der Kohlenstoffdampf eines Kometen
unterhalb einer Temperatur bestehen, bei welcher durch Erkalten der Sättigu
druck wieder positiv wird. Von da an geht mit sinkender Temperatur die B
gung $p = 0$, von der Sättigung sich entfernend, auf immer stärkere Verdünnu
über. Überschreitet der Dampf bei constanter Temperatur eine solche Ve
nung, so wird die Spannung p negativ, d. h. eine das Volumen zusammenzieh
Kraft, welche aber durch Zunahme nothwendig bald ein Maximum erreicht,
für dieses hört die Bestandfähigkeit absolut auf. Man kann sonach erwa
dass der cometarische Kohlenstoffdampf bei zu weit gehender Verdünnung
lich instabil wird, und es scheint, dass er dann durch entsprechende Aggreg
seiner kleinsten Theile vollständig zu nicht verdampfbaren festen Körper
zerfällt, eine Art Wolke bildend, deren durch leere Zwischenräume getre
Componenten, ohne Zusammenhang mit einander und mit dem Kometen,
dem sie herstammmen, als ebenso viele für sich bestehende und nur de
gemeinen Gravitation gehorchende Massen zu betrachten sind. Trotz
extremen Kleinheit mögen diese Körperchen oder doch viele derselben g
genug sein, um bei ihrem Eindringen in die verdünnten oberen Schic
unserer Atmosphäre durch Erglühen und Verbrennen als Sternschnup
zu erscheinen.

Dieser am 12. Jänner 1893 schlecht wahrnehmbare Kern war unerwartet schon vier Tage später auffallend hell. Es hatte sich, wie es scheint, bald nach der Entdeckung (6. November) ein neuer Verdampfungsverzug eingestellt, worauf jetzt wieder eine Eruption folgte; das als heller Kern erscheinende Scheibchen entsprach daher vielleicht einer in der ersten Phase ihrer Entwicklung begriffenen Dampfmasse, welche vermöge ihrer durch plötzliche Expansion erzeugten Erwärmung sich in reichlicher Menge zu festen Partikeln condensirte und so durch starke Reflexion des Sonnenlichtes eine relativ grosse Helligkeit zeigen konnte. In der That nahm die Coma nun wieder rapid an Ausdehnung zu. Die Entfernung von der Sonne betrug bei der zweiten Eruption nach Berberich 53 Millionen Meilen.

Als eine besonders merkwürdige hierher gehörige Erscheinung glaube ich noch, ohne speciell darauf einzugehen, diejenige bezeichnen zu dürfen, welche John Herschel[1] im Jahre 1836 an dem über sein Perihel schon weit hinausgeeilten Kometen Halley verfolgen konnte. Dieselbe ist auch darum beachtenswerth, weil man annehmen darf, dass dieser Komet trotz der von Herschel beobachteten enormen Expansion seiner Kernhülle ohne irgend erheblichen Stoffverlust seinerzeit wieder erscheinen wird.

Schlussfolgerung.

Bei hinreichend grosser Entfernung eines Kometen von der Sonne kann die Temperatur seines kleinen Kernes auf der bestrahlten oder vorderen Seite nur um wenig höher sein als auf der nichtbestrahlten oder hinteren Seite; vom Kerne aus wird dann in seiner Atmosphäre, für welche er ohne Zweifel die Hauptquelle der Erwärmung ist, die Temperatur nach allen Richtungen in fast gleicher Weise abnehmen, überall aber eine sehr niedrige sein. Demgemäss ist in diesem Falle die weitausgedehnte Atmosphäre annähernd kugelförmig und nimmt von aussen gegen die Mitte, in jeder Richtung fast gleich abgestuft, an Dichte und entsprechender Helligkeit zu.

Indem der Komet sich der Sonne nähert, wird der Kern jedenfalls vorne stärker als hinten, folglich mittelbar jede der con-

[1] Outlines of Astronomy, 4. ed., p. 353.

centrischen atmosphärischen Schichten vor dem Kerne stärker als hinter demselben erwärmt, und somit verkürzen sich durch die entsprechende Verdichtung die Radien dieser Schichten am meisten in der Richtung zur Sonne, am wenigsten in entgegengesetzter Richtung; in der so modificirten Gestalt der Atmosphäre nimmt der Kern nicht mehr die Mitte ein, sondern erscheint ihrem vorderen Rande näher, und mit der Dichte ist auch die Helligkeit derselben vor dem Kerne im Ganzen grösser als hinter diesem.

Gleichzeitig ist, dieser Vertheilung ihres Stoffes entsprechend, der Druck der Atmosphäre an der vorderen Seite des Kernes stärker als an der hinteren, und hat, wie die Temperatur an ersterer ein Maximum, an letzterer ein Minimum; eine ähnliche Differenz besteht aus demselben Grunde auch bezüglich der vom Kerne entfernteren Schichten. Eine solche Druckvertheilung bedingt aber nothwendig eine Tendenz der vorderen Gase, um den Kern herum nach rückwärts abzuströmen. Dieser Tendenz folgend, kommen sie in Gegenden niedrigerer Temperatur und schwächeren Druckes; aus beiden Gründen dehnen sie sich aus, und man sieht, dass so der rückwärtige Theil der Atmosphäre, obwohl durch Erwärmung sich zusammenziehend an Gesammtvolumen zunehmen kann. Sobald dieser Fall eintritt, werden die hinteren Gaspartien, durch die mit einer gewissen Geschwindigkeit von vorne hinüberströmenden Gase gedrängt, immer weiter vom Kerne sich entfernen und gleichzeitig, nach den Seiten weniger als nach rückwärts, sich ausdehnen, auf solche Weise mehr und mehr, wenn die Temperaturdifferenz am Kerne hinreichend gross wird, einen von der Sonne abgewendeten und nach hinten an Breite zunehmenden Schweif desselben bildend. Je stärker an grösseren Kernen jene Temperaturdifferenz ansteigt und die Geschwindigkeit der durch sie erzeugten Strömung wächst, desto mehr wird dieser Schweif bei zunehmender Länge mit Verkürzung des Scheitelradius an relativer Breite abnehmen, desto mehr werden die Gase vor demKerne durch ihre Dichte und Helligkeit mit denjenigen auf dessen hinterer Seite contrastiren und die Schweifaxe stoffarm erscheinen. Ein auf der bestrahlten Kernseite durch Erwärmung entwickelter Dampf wird für gewöhnlich sofort

der erwähnten Strömung folgen und umbiegend in den hierdurch rasch anwachsenden Schweif übergehen. Solcher Dampf kann zunächst auch das Volumen der vorderen Kernhülle, anstatt dass es sonst abnehmen würde, vergrössern. Bei eruptiver Entwicklung kann derselbe eine fächerförmige Ausstrahlung oder eine Folge gesonderter Hüllen bilden.

Nach dieser Hypothese wird der Schweif eines Kometen zwar im Allgemeinen von der Sonne abgewendet erscheinen, wobei aber selbst schon dessen Ursprungsrichtung mehr oder weniger von der Verlängerung des Radiusvector abweichen kann, in welcher sie liegen müsste, wenn die Ursache des Schweifes in einer Abstossung durch die Sonne zu suchen wäre. Es dürfte, jene Richtung betreffend, vornehmlich in Betracht kommen, dass nach der Natur der Sache weder das Maximum der Temperatur, noch dasjenige des Druckes genau auf den Punkt der Kernoberfläche fallen wird, welcher die Sonne gerade im Zenith hat; nach der als wahrscheinlich anzunehmenden Vertheilung von Temperatur und Druck aber wird die Anfangsrichtung des Schweifes mit der Verlängerung des Radiusvector einen bezüglich der Bahnbewegung zurückliegenden spitzen Winkel bilden. Dies ist, wie es scheint, in der Regel der Fall; man hat das betreffende Verhalten oft mit der Wirkung verglichen, welche ein widerstehendes Mittel auf die Bewegung des Schweifes ausüben würde.

Über den Hauptpunkt einer beliebigen Axe eines materiellen Punktsystems[1]

von

Dr. **Jos. Finger.**

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 16. Februar 1893.)

Sind $\xi\eta\zeta$ die Coordinaten des Punktes O der Axe a in Bezug auf jenes Axensystem, dessen Anfangspunkt der Schwerpunkt S ist und dessen Axen $\xi\eta\zeta$ zu den Axen xyz parallel sind, so ist in den Gleichungen (33) zu setzen

$$x_s = -\xi, \quad y_s = -\eta, \quad z_s = -\zeta, \quad r_s^2 = \xi^2+\eta^2+\zeta^2,$$

ferner

$$r_s \cos\varphi_s = -(\alpha_\xi\xi+\alpha_\eta\eta+\alpha_\zeta\zeta) = -u,$$

wo u den algebraischen Werth der Entfernung $\overline{NO}$ des Punktes O von der orthogonalen Projection N des Schwerpunktes S auf die Axe a bedeutet, und zwar ist u positiv oder negativ in Rechnung zu ziehen, je nachdem $\overline{NO}$ mit der Richtung $(\alpha_\xi\alpha_\eta\alpha_\zeta)$ der Axe a gleich- oder entgegengesetzt gerichtet ist. Die Gleichungen (33) nehmen demgemäss die Form an

$$\left.\begin{aligned}
M_a^{(O)}.\mu_\xi &= \mathrm{M}_\xi+M[\alpha_\xi(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)-\xi(\alpha_\xi\xi+\alpha_\eta\eta+\alpha_\zeta\zeta)] = \\
&= \mathrm{M}_\xi+M[\alpha_\xi r_s^2-\xi u] \\
M_a^{(O)}.\mu_\eta &= \mathrm{M}_\eta+M[\alpha_\eta(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)-\eta(\alpha_\xi\xi+\alpha_\eta\eta+\alpha_\zeta\zeta)] = \\
&= \mathrm{M}_\eta+M[\alpha_\eta r_s^2-\eta u] \\
M_a^{(O)}.\mu_\zeta &= \mathrm{M}_\zeta+M[\alpha_\zeta(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)-\zeta(\alpha_\xi\xi+\alpha_\eta\eta+\alpha_\zeta\zeta)] = \\
&= \mathrm{M}_\zeta+M[\alpha_\zeta r_s^2-\zeta u].
\end{aligned}\right\} \quad (48)$$

[1] Fortsetzung der Abhandlung: »Über jenes Massenmoment eines materiellen Punktsystems, welches aus dem Trägheitsmomente und dem Deviationsmomente in Bezug auf irgend eine Axe resultirt«. Diese Sitzungsberichte, Bd. CI, Abth. II. a.

Sind nun $\xi_n \eta_n \zeta_n$ die Coordinaten des Punktes N und ist durch n die Entfernung des Schwerpunktes S von der Axe a bezeichnet, so ist

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \xi_n + u \,.\, \alpha_\xi \\ \eta &= \eta_n + u \,.\, \alpha_\eta \\ \zeta &= \zeta_n + u \,.\, \alpha_\zeta \\ r_s^2 &= n^2 + u^2 \\ n^2 &= \xi_n^2 + \eta_n^2 + \zeta_n^2 \\ \alpha_\xi \xi_n + \alpha_\eta \eta_n &+ \alpha_\zeta \zeta_n = 0 \end{aligned}\right\} .$$

Substituirt man diese Werthe in (48), so erhält man

$$\left.\begin{aligned} M_a^{(O)} . \mu_\xi &= \mathrm{M}_\xi + M[\alpha_\xi n^2 - u \,.\, \xi_n] \\ M_a^{(O)} . \mu_\eta &= \mathrm{M}_\eta + M[\alpha_\eta n^2 - u \,.\, \eta_n] \\ M_a^{(O)} . \mu_\zeta &= \mathrm{M}_\zeta + M[\alpha_\zeta n^2 - u \,.\, \zeta_n] \end{aligned}\right\} . \tag{49}$$

Ist die Axe a in Plücker'schen Coordinaten gegeben, so hat man nur, wenn $p_\xi p_\eta p_\zeta$ die Werthe

$$\begin{aligned} p_\xi &= \eta\alpha_\zeta - \zeta\alpha_\eta = \eta_n \alpha_\zeta - \zeta_n \alpha_\eta \\ p_\eta &= \zeta\alpha_\xi - \xi\alpha_\zeta = \zeta_n \alpha_\xi - \xi_n \alpha_\zeta \\ p_\zeta &= \xi\alpha_\eta - \eta\alpha_\xi = \xi_n \alpha_\eta - \eta_n \alpha_\xi \end{aligned}$$

bezeichnen, in die Gleichungen (49) die Werthe

$$\xi_n = \alpha_\eta p_\zeta - \alpha_\zeta p_\eta, \quad \eta_n = \alpha_\zeta p_\xi - \alpha_\xi p_\zeta, \quad \zeta_n = \alpha_\xi p_\eta - \alpha_\eta p_\xi$$

und $n^2 = p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2$ einzusetzen.

Ist die Axe a eine Schwerpunktsaxe, so ist $\xi_n = \eta_n = \zeta_n = n = 0$, daher sind den Gleichungen (49) zufolge für alle Werthe des u, also, wie dies schon früher hervorgehoben wurde, für alle Punkte O derselben Schweraxe die Massenmomente $M_a^{(O)}$ geometrisch gleich.

Enthält aber die Axe a nicht den Schwerpunkt, so ändert sich die Grösse und die Richtung des Massenmomentes $M_a^{(O}$ mit der Lage des Punktes O in dieser Axe, und zwar ergibt sich, wenn M_s das Massenmoment $\mathrm{M}_s = \sqrt{\mathrm{M}_\xi^2 + \mathrm{M}_\eta^2 + \mathrm{M}_\zeta^2}$ für die parallele Schwerpunktsaxe s und J_s das Trägheitsmoment $J_s = \mathrm{M}_\xi \alpha_\xi + \mathrm{M}_\eta \alpha_\eta + \mathrm{M}_\zeta \alpha_\zeta$ für dieselbe Axe s bedeuten, für die Grösse dieses Massenmomentes $M_a^{(O)}$ aus (49) der Werth

$$[M_a^{(O)}]^2 = \mathfrak{M}_s^2 + 2M[J_s n^2 - u(\mathfrak{M}_\xi \xi_n + \mathfrak{M}_\eta \eta_n + \mathfrak{M}_\zeta \zeta_n)] + \\ + M^2 n^2 (n^2 + u^2).$$

Diese Gleichung lehrt, dass es in jeder Axe a, die nich eine Schweraxe ist, einen Punkt O_0 gibt, für welche das Massenmoment $M_a^{(O)}$ ein Minimum ist, also kleine ist, als das irgend einem anderen Punkte O dieser Axe ent sprechende, auf dieselbe Axe bezogene Massenmoment — un dieser Punkt O_0 sei in dieser Abhandlung stets als de Hauptpunkt dieser Axe a bezeichnet. Der Abstand u dieses Punktes O_0 von der Projection N des Schwerpunktes auf die Axe a ist der letzten Gleichung gemäss bestimmt durc

$$\overline{NO_0} = u_0 = \frac{\mathfrak{M}_\xi \xi_n + \mathfrak{M}_\eta \eta_n + \mathfrak{M}_\zeta \zeta_n}{M n^2}. \qquad (50$$

Da das auf dieselbe Axe a bezogene Trägheitsmoment J für alle Punkte derselben Axe dasselbe ist und da das Massen moment $M_a^{(O)}$ die geometrische Summe aus dem mit der Axe gleichgerichteten Trägheitsmomente J_a und dem zu dieser Ax senkrechten Deviationsmomente $D_a^{(O)}$ ist, so ist auch da dem Hauptpunkte O_0 entsprechende, auf die Axe bezogene Deviationsmoment ein Minimum, nämlic kleiner, als das jedem anderen Punkte O der Axe a ent sprechende Deviationsmoment $D_a^{(O)}$ für dieselbe Axe.

Wählt man, um zu einfacheren Gleichungen zu gelange die mit der Axe a gleichgerichtete Schweraxe s zur ζ-Axe ferner die durch die Axe a gelegte Schwerebene zur $\zeta\xi$-Eben und die positive Richtung der η-Axe etwa derart, dass sie mi der Richtung des auf die Axe ζ bezogenen Deviationsmomente $D_\zeta = D_s$ einen spitzen Winkel einschliesst, so ist in de früheren Gleichungen $\alpha_\xi = \alpha_\eta = \eta = \eta_n = \zeta_n = 0$, $\alpha_\zeta = 1$, $\xi = \xi_n$ $u = \zeta$ und $u_0 = \zeta_0$ zu setzen. Die Gleichungen (49) erhalte dann die zweckmässigere Form

$$\left.\begin{aligned} M_a^{(O)} . \mu_\xi &= \mathfrak{M}_\xi - M\zeta\xi \\ M_a^{(O)} . \mu_\eta &= \mathfrak{M}_\eta \\ M_a^{(O)} . \mu_\zeta &= \mathfrak{M}_\zeta + M\xi^2 \end{aligned}\right\} \qquad (51$$

und die für unsere Zwecke wichtige Projection $\overline{NO_0} = u_0 =$ der vom Schwerpunkte S nach dem Hauptpunkte O_0 gezogene

Strecke auf die Axe a ist dann nach (50) ihrem algebraischen Werthe nach bestimmt durch

$$\zeta_0 = \frac{M_\zeta}{M\xi}. \tag{52}$$

Die zur Axe a parallele Componente M_ζ des auf die Schweraxe ζ bezogenen Massenmomentes M_s stellt nunmehr das Trägheitsmoment $J_\zeta = J_s$ bezüglich der Axe ζ und $M_a^{(O)} . \mu_\zeta$ das Trägheitsmoment J_a in Bezug auf die Axe a dar, während M_ξ und M_η die Componenten des auf die Axe ζ bezogenen Deviationsmomentes $D_s = D_\zeta$ bedeuten, und zwar ist — entsprechend der früheren Annahme der positiven Richtung der Axe η — die Componente M_η positiv; ferner sind $M_a^{(O)} \mu_\xi$ und $M_a^{(O)} \mu_\eta$ die Componenten des dem Punkte O entsprechenden, auf die Axe a bezogenen Deviationsmomentes $D_a^{(O)}$. Es ist sonach auch zufolge der Bedeutung von $M_\xi M_\eta M_\zeta$ bei Anwendung der in (29) und (32) gebrauchten Bezeichnungen $M_\xi = \alpha_{31}$, $M_\eta = \alpha_{32}$ und $M_\zeta = \alpha_{33} = J_\zeta$.

Die geometrische Bedeutung der Componenten M_ξ und M_η des Deviationsmomentes D_ζ ergibt sich in einfacher Weise etwa mit Zuhilfenahme des Cauchy-Poinsot'schen Centralellipsoids, dessen Mittelpunkt der Schwerpunkt S ist. Ist nämlich ρ_a der in die Richtung der ζ-Axe fallende, mit der Axe a gleichgerichtete Radius dieses Ellipsoids, ferner ξ_a die Abscisse jenes Punktes, in welchem die Axe ξ die dem Endpunkte des Radius ρ_a zugehörige Berührungsebene an dieses Ellipsoid schneidet und ebenso η_a die Ordinate des Durchschnittspunktes der Axe η mit dieser Berührungsebene, so ist $M_\xi = \dfrac{M}{\rho_a . \xi_a}$ und $M_\eta = \dfrac{M}{\rho_a . \eta_a}$ oder wenn $f_{\zeta\xi} = \dfrac{1}{2} \rho_a \xi_a$, beziehungsweise $f_{\zeta\eta} = \dfrac{1}{2} \rho_a \eta_a$ den Flächeninhalt des rechtwinkeligen Dreiecks bedeutet, dessen Katheten ρ_a und ξ_a, beziehungsweise ρ_a und η_a sind und dessen Qualitätszeichen mit ξ_a, beziehungsweise mit η_a übereinstimmt, so ist $M_\xi = \dfrac{M}{2 f_{\zeta\xi}}$ und $M_\eta = \dfrac{M}{2 f_{\zeta\eta}}$.

In gleicher Weise lässt sich mit Hilfe des Trägheitsellipsoids (11) die geometrische Bedeutung der beiden Cqm-

ponenten $M_a^{(O)}.\mu_\xi$ und $M_a^{(O)}.\mu_\eta$ des Deviationsmomentes $D_a^{($
bestimmen.

Die Lage des Hauptpunktes O_0 der Axe a ist bestimmba
mit Hilfe der Gleichung (52), welcher zufolge die Entfernung ζ
desselben von dem Fusspunkte des vom Schwerpunkte S au
die Axe a gefällten Lothes gleich ist der parallel zur Axe
genommenen Componente des auf die Basis ξ, d. i. auf die Ent
fernung des Schwerpunktes S von der Axe reducirten Radiu
des auf die parallele Schwerpunktsaxe ζ bezogenen Deviations
momentes D_ζ. Dieser Quotient $\frac{\mathrm{M}_\xi}{M\xi}$ hat eine sofort in die Auge
springende Analogie mit dem Quotienten $\frac{\mathrm{M}_\zeta}{M\xi} = \frac{J_\zeta}{M\xi}$, der be
kanntlich in vielen Untersuchungen der Mechanik, z. B. be
der Bestimmung der reducirten Pendellänge, der Ordinate de
Druckmittelpunktes in der Hydrostatik, der Entfernung de
Stossmittelpunktes von der Rotationsaxe u. s. w. eine wichtig
Rolle spielt.

Für den Hauptpunkt O_0 hat die X-Componente des Devia
tionsmomentes $D_a^{(O)}$ zufolge (51) und (52) den Werth $M_a^{(O_0)}.\mu_\xi =$
$= \mathrm{M}_\xi - M.\zeta_0\xi = 0$, und es ist demnach das Deviationsmomen
$D_a^{(O_0)}$ identisch mit seiner Y-Componente $M_a^{(O)}.\mu_\eta = \mathrm{M}_\eta$. De
Hauptpunkt O_0 einer Axe a ist sonach im Gegensatze zu
allen anderen Punkten dieser Axe a durch die weiter
Eigenschaft charakterisirt, dass für denselben, und
zwar nur für diesen das auf die Axe a bezogene Devia
tionsmoment auf der durch diese Axe gelegte
Schwerebene normal ist, und zwar ist dasselbe der zu
dieser Schwerebene normalen Componente M_η des auf die zu
Axe a parallele Schweraxe ζ bezogenen Massenmomentes M
oder Deviationsmomentes D_ζ geometrisch gleich. Mit andere
Worten: Es ist für ein zu $\xi\eta\zeta$ paralleles Axensystem xyz
dessen z-Axe die Axe a, dessen zx-Ebene die durch a
gelegte Schwerebene und dessen Anfangspunkt de
Hauptpunkt ist, stets: $a_{31} = \Sigma(mzx) = O$ und $a_{32} =$
$= -\Sigma(mzy) = \mathrm{M}_\eta = \alpha_{32}$.

Für alle in derselben Schwerebene, d. i. der $\zeta\xi$-
Ebene, gelegenen, zu a parallelen Axen liegen die

Hauptpunkte der Gleichung (52) zufolge in einer gleichseitigen Hyperbel, deren Asymptoten die Schweraxen ξ und ζ sind und deren Gleichung $\mathrm{M}_{\xi} = M\xi\zeta_0$ ist und die diesen Hauptpunkten entsprechenden zu dieser Schwerebene normalen Deviationsmomente sind sämmtlich gleich M_{η}, also untereinander geometrisch gleich.

Der absolute Zahlwerth dieses Deviationsmomentes wird bei der Drehung dieser Schwerebene, d. i. der $\zeta\xi$-Ebene, um die Axe ζ, zu der sämmtliche Axen a als parallel angenommen sind, am kleinsten, nämlich Null, wenn $\mathrm{M}_{\eta} = 0$, also $M_{\xi} = D_s$ ist, d. h. nur dann, wenn diese Schwerebene mit der Ebene des Deviationsmomentes für die Schweraxe ζ zusammenfällt. In dieser Hauptlage der Ebene, und zwar nur in dieser, sind sämmtliche in dieser Ebene gelegenen, zu ζ parallelen Axen, da die Deviationsmomente für den Hauptpunkt dieser Axen den Werth $\mathrm{M}_{\eta} = 0$ haben, Trägheitshauptaxen für ihren Hauptpunkt, und die reelle Halbaxe der oberwähnten gleichseitigen Hyperbel erlangt zufolge (52) ihren grössten Werth. In dieser Hauptlage der Ebene fallen zudem die Richtungen sämmtlicher Deviationsmomente $D_a^{(O)}$ und Massenmomente $M_a^{(O)}$, die den verschiedenen Punkten der zur ζ-Axe parallelen Axen a entsprechen, in diese Schwerebene; es fallen mit anderen Worten die Ebenen der Deviationsmomente für alle diese Punkte zusammen mit der allen diesen Axen gemeinsamen Schwerebene, während, wenn die Axe a nicht eine Hauptaxe für einen ihrer Punkte ist, also nicht in der betrachteten Schwerebene gelegen ist, die Ebene des Deviationsmomentes zufolge früherer Entwicklungen keinesfalls den Schwerpunkt enthalten kann. Nimmt die Schwerebene bei der Drehung um die Axe ζ die zu der betrachteten ersten Hauptlage senkrechte zweite Hauptlage an, so wird der absolute Zahlwerth des den Hauptpunkten zukommenden Deviationsmomentes ein Maximum, nämlich $\mathrm{M}_{\eta} = D_s$, während $\mathrm{M}_{\xi} = 0$, also zufolge (52) $\xi\zeta_0 = 0$ ist, d. h. die Hauptpunkte sind in dieser Lage die einzelnen Punkte der Axen ξ und ζ. Bei der Drehung aus der ersten Hauptlage in die zweite nimmt der Zahlwerth des den Hauptpunkten entsprechenden Deviationsmomentes allmälig von 0

bis D_s zu und bei der weiteren Drehung aus der zweiten Hauptlage in die erste wieder ab von D_s bis Null. Ist die ζ-Axe ein Hauptcentralaxe, so ist $D_s = 0$, also auch für alle Lagen de $\zeta\xi$-Ebene bei der betrachteten Drehung $\mathsf{M}_\xi = \mathsf{M}_\eta = 0$, ferne $\xi\zeta_0 = 0$, d. h. alle Punkte der $\xi\eta$-Ebene und der ζ-Axe sind Hauptpunkte für die durch diese Punkte parallel zu dieser Hauptcentralaxe geführten Axen, die den beiden ersten Gleichunge (51) zufolge Trägheitshauptaxen für diese Hauptpunkte sin

Für alle jene Punkte der zur beliebigen Schwerpunktsaxe ζ parallelen Axen a, die nicht Hauptpunkte sind, gleiche sich zwar gemäss (51) die zu jener Schwerebene, in welche die Axen a liegen, senkrechten Componenten der Deviationsmomente, indem sie sämmtlich M_η gleich sind, jedoch änder sich die in dieser $\zeta\xi$-Ebene fallenden X-Componenten $\mathsf{M}_\xi - M\zeta$ von Punkt zu Punkt, und zwar derart, dass für Punkte derselbe Axe, wie dies die Substitution des Werthes von M_ξ aus (52) i die erste Gleichung (51) sofort lehrt, diese Componenten de Entfernung dieser Punkte von dem Hauptpunkte proportiona und für je zwei beiderseits vom Hauptpunkte gleich weit entfernten Punkte entgegengesetzt gleich sind, während für verschiedene Axen die Punkte des gleichen Deviationsmomente der ersten Gleichung (51) zufolge in gleichseitigen Hyperbeln deren Asymptoten die Axen ξ und ζ sind, gelegen sind. Vo einer Hyperbel der $\zeta\xi$-Ebene zur andern ändern sich die X-Componenten des Deviationsmomentes beiderseits stetig ins Unendliche, und zwar sind dieselben für jene beiden Schaaren vo Hyperbeln, von welchen die eine innerhalb jener Hyperbeläste die der geometrische Ort der Hauptpunkte sind, und die zweit auf der convexen Seite dieser beiden Hyperbeläste gelegen ist entgegengesetzt gerichtet. Dreht man die $\zeta\xi$-Ebene in ihr erste Hauptlage, so dass sie mit der Ebene des auf die ζ-Ax bezogenen Deviationsmomentes D_s zusammenfällt, so reduciren sich sämmtliche Deviationsmomente auf ihre X-Componente so dass sie dann sämmtlich zueinander parallel sind. Ist di Axe ζ eine Hauptcentralaxe, so ist dies in jeder Lage de $\zeta\xi$-Ebene der Fall u. s. w.

Die Coordinaten des Hauptpunktes O der Axe a, die sich auf irgend ein orthogonales Schwerpunktsaxensystem beziehen

und von nun an durch $\xi\eta\zeta$ bezeichnet seien, ergeben sich durch Einsetzung des Werthes (50), der Kürze halber durch u bezeichnet sei, in frühere Gleichungen, nämlich in

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \xi_n + u\,.\,\alpha_\xi \\ \eta &= \eta_n + u\,.\,\alpha_\eta \\ \zeta &= \zeta_n + u\,.\,\alpha_\zeta \\ \text{wo}\quad u &= \frac{M_\xi\xi_n + M_\eta\eta_n + M_\zeta\zeta_n}{M\,.\,n^2} = \frac{M_\xi\xi_n + M_\eta\eta_n + M_\zeta\zeta_n}{M(\xi_n^2+\eta_n^2+\zeta_n^2)} \end{aligned}\right\}. \tag{53}$$

Sind $\alpha_{11} = J_\xi$, $\alpha_{22} = J_\eta$, $\alpha_{33} = J_\zeta$ die Trägheitsmomente des materiellen Punktsystems in Bezug auf die Axen $\xi\eta\zeta$, ferner $(0, \alpha_{12}, \alpha_{13})$, beziehungsweise $(\alpha_{21}, 0, \alpha_{23})$, beziehungsweise $(\alpha_{31}, \alpha_{32}, 0)$ die Componenten des auf die Axe ξ, beziehungsweise η, beziehungsweise ζ bezogenen Deviationsmomentes, so ist den Gleichungen (32) entsprechend in den Gleichungen (53) einzusetzen

$$\left.\begin{aligned} M_\xi &= \alpha_{11}\alpha_\xi + \alpha_{21}\alpha_\eta + \alpha_{31}\alpha_\zeta \\ M_\eta &= \alpha_{12}\alpha_\xi + \alpha_{22}\alpha_\eta + \alpha_{32}\alpha_\zeta \\ M_\zeta &= \alpha_{13}\alpha_\xi + \alpha_{23}\alpha_\eta + \alpha_{33}\alpha_\zeta \end{aligned}\right\}, \tag{54}$$

wo $\alpha_{23} = \alpha_{32}$, $\alpha_{31} = \alpha_{13}$, $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ ist.

Wählt man zu Coordinatenaxen die Hauptcentralaxen, so verschwinden sämmtliche Componenten der auf diese Axen bezogenen Deviationsmomente α_{23}, α_{31} und α_{21}, so dass dann

$$\left.\begin{aligned} M_\xi &= \alpha_{11}\alpha_\xi = J_\xi\alpha_\xi \\ M_\eta &= \alpha_{22}\alpha_\eta = J_\eta\alpha_\eta \\ M_\zeta &= \alpha_{33}\alpha_\zeta = J_\zeta\alpha_\zeta \end{aligned}\right\}. \tag{55}$$

Dies sind die Componenten des auf die zur Axe a parallele Schweraxe s bezogenen Massenmomentes M_s, während die Componenten des auf diese Axe s bezogenen Deviationsmomentes D_s, dessen Richtungscosinus durch $\delta_\xi\delta_\eta\delta_\zeta$ bezeichnet seien, sich ergeben, wenn man von jeder der Componenten (55) die entsprechenden gleich-gerichteten Componenten $J_s\alpha_\xi$, beziehungsweise $J_s\alpha_\eta$, beziehungsweise $J_s\alpha_\xi$ des auf die Axe s bezogenen Trägheitsmomentes J_s, welches, wenn $\xi\eta\zeta$ die Hauptcentralaxen sind, durch

$$J_s = J_\xi\alpha_\xi^2 + J_\eta\alpha_\eta^2 + J_\zeta\alpha_\zeta^2 \tag{56}$$

bestimmt ist, in Abzug bringt. Sonach ist

$$\left.\begin{aligned} D_s . \delta_\xi &= (J_\xi - J_s)\alpha_\xi \\ D_s . \delta_\eta &= (J_\eta - J_s)\alpha_\eta \\ D_s . \delta_\zeta &= (J_\zeta - J_s)\alpha_\zeta \end{aligned}\right\} .$$

Durch Quadrirung und Summirung dieser Gleichun ergibt sich bei Beachtung von (56)

$$\begin{aligned} D_s^2 &= J_\xi^2 \alpha_\xi^2 + J_\eta^2 \alpha_\eta^2 + J_\zeta^2 \alpha_\zeta^2 - J_s^2 = \\ &= (J_\eta - J_\zeta)^2 \alpha_\eta^2 \alpha_\zeta^2 + (J_\zeta - J_\xi)^2 \alpha_\zeta^2 \alpha_\xi^2 + (J_\xi - J_\eta)^2 \alpha_\xi^2 \alpha_\eta^2 . \end{aligned}$$

Um den geometrischen Ort der Hauptpunkte sämmtli Axen a im Raume von einer durch die Richtungscosinus α_ξ gegebenen Richtung zu bestimmen, hat man in den Gleichun (53) $u \xi_n \eta_n \zeta_n$ zu eliminiren, was am einfachsten folgendermas geschehen kann: Da u die Projection der den Schwerpu mit dem Hauptpunkte $(\xi\eta\zeta)$ verbindenden Strecke die Axe a ist, so muss $u = \alpha_\xi \xi + \alpha_\eta \eta + \alpha_\zeta \zeta$ sein. Ferner nach (53)

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \xi_n^2 + \eta_n^2 + \zeta_n^2 + u^2 = n^2 + u^2$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_\xi \xi + \mathrm{M}_\eta \eta + \mathrm{M}_\zeta \zeta &= \mathrm{M}_\xi \xi_n + \mathrm{M}_\eta \eta_n + \mathrm{M}_\zeta \zeta_n + u(\mathrm{M}_\xi \alpha_\xi + \mathrm{M}_\eta \alpha_\eta + \mathrm{M} \\ &= M n^2 u + u(\mathrm{M}_\xi \alpha_\xi + \mathrm{M}_\eta \alpha_\eta + \mathrm{M}_\zeta \alpha_\zeta), \end{aligned}$$

daher, wenn n^2 aus den beiden letzten Gleichungen elim und u aus der drittletzten Gleichung eingesetzt wird,

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_\xi \xi + \mathrm{M}_\eta \eta + \mathrm{M}_\zeta \zeta = (\xi\alpha_\xi + \eta\alpha_\eta + \zeta\alpha_\zeta)[M(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - \\ - M(\xi\alpha_\xi + \eta\alpha_\eta + \zeta\alpha_\zeta)^2 + \mathrm{M}_\xi \alpha_\xi + \mathrm{M}_\eta \alpha_\eta + \mathrm{M}_\zeta \alpha_\zeta]. \end{aligned}$$

Diese Gleichung, in welche für $\mathrm{M}_\xi \mathrm{M}_\eta \mathrm{M}_\zeta$ die Werthe aus oder (55) einzusetzen sind, ist in Bezug auf $\xi\eta\zeta$ eine algebrais Gleichung dritten Grades, welcher auch die Werthe $-\xi$, $-\eta$, und $\frac{\xi}{\alpha_\xi} = \frac{\eta}{\alpha_\eta} = \frac{\zeta}{\alpha_\zeta}$ Genüge leisten. Es ist sonach der g metrische Ort der Hauptpunkte sämmtlicher zu ander parallelen Axen eine algebraische Mittelpunk fläche dritter Ordnung, welche die zu diesen Axen paral Schweraxe enthält, deren Mittelpunkt ferner der Schwerpu und deren Gleichung (59) ist.

Wählt man nunmehr der Einfachheit halber die zu diesen Axen parallele Schweraxe s zur ζ-Axe und die Richtung des auf diese Axe bezogenen, durch (58) bestimmbaren Deviationsmomentes $D_s = D_\zeta$ nunmehr zur ξ-Axe, und bezeichnet man den Radius $\sqrt{\frac{D_s}{M}}$ dieses Deviationsmomentes D_s durch δ, so ist in (59) $\alpha_\xi = \alpha_\eta = M_\eta = 0$, $\alpha_\zeta = 1$ und $M_\xi = D_s = M\delta^2$ zu setzen, daher ist der Gleichung (59) zufolge für den gesuchten geometrischen Ort der Hauptpunkte

$$\zeta(\xi^2 + \eta^2) = \delta^2 \xi. \tag{60}$$

Bei Zugrundelegung eines Polarcoordinatensystems, dessen Pol der Schwerpunkt ist und für welches $\xi = \rho \cos\varphi \cos\vartheta$, $\eta = \rho \cos\varphi \sin\vartheta$, $\zeta = \rho \sin\varphi$ ist, zerfällt die Gleichung (60) in $\rho = 0$, $\cos\varphi = 0$ und

$$\rho^2 = \delta^2 \frac{\cos\vartheta}{\sin\varphi \cos\varphi} = 2\vartheta^2 \frac{\cos\vartheta}{\sin 2\varphi}. \tag{61}$$

Der Gleichung (60) gemäss sind die Schnitte der Fläche parallel zur $\xi\eta$-Ebene im Abstande ζ — also senkrecht zu den parallelen Axen a — Kreise, deren Durchmesser $\frac{\delta^2}{\zeta}$ sind und deren Mittelpunkte die Coordinaten

$$\xi_0 = \frac{\delta^2}{2\zeta}, \quad \eta_0 = 0, \quad \zeta_0 = \zeta \tag{62}$$

haben. Die Kreismittelpunkte liegen sonach in der $\zeta\xi$-Ebene, d. i. in der Ebene des auf die Schweraxe s bezogenen Deviationsmomentes D_s, und zwar den Gleichungen (62) zufolge in der gleichseitigen Hyperbel $\xi_0 \zeta_0 = \frac{\delta^2}{2}$, deren Asymptoten die Axen ξ und ζ sind. Sämmtliche Kreise berühren ferner die Axe ζ.

Die Schnitte der Fläche (60) mit irgend einer durch die Schweraxe ζ gelegten Ebene sind, abgesehen von der Axe ζ, ebenfalls gleichseitige Hyperbeln, deren gemeinsame Asymptote die ζ-Axe ist und die schon früher betrachtet worden sind. Ist ϑ das Azimut einer Schnittebene, welche die $\xi\eta$-Ebene in der Axe ξ' durchschneidet, so nimmt nach (60) die Gleichung der

diesem Azimut entsprechenden hyperbolischen Schnittlinie
$\xi' = \pm\sqrt{\xi^2+\eta^2} = \rho\cos\varphi$ und $\xi = \rho\cos\varphi\cos\vartheta = \xi'\cos\vartheta$
die Form $\xi'\zeta = \delta^2\cos\vartheta$ an, so dass, wie dies schon fr
bemerkt wurde, diese Hyperbel in der $\eta\zeta$-Ebene, (d. i.
$\vartheta = \pm\frac{\pi}{2}$) mit den Axen ξ und ζ zusammenfällt, welche b
Axen in der Fläche (60) gelegen sind. Bloss die in der $\zeta\xi$-Eb
gelegenen Axen sind nach Früherem Trägheitshauptaxen
ihre in der Hyperbel $\xi\zeta = \delta^2$ gelegenen Punkte. Für
besonderen Fall, dass die Axe ζ eine Hauptcentralaxe ist
$D_s = 0$, also auch $\delta = 0$, daher reducirt sich dann die Fläche
auf die $\xi\eta$-Ebene und die ζ-Axe; die Ebene des Deviati
momentes D_s wird dann unbestimmt, und alle Axen a
Trägheitshauptaxen für den in der $\xi\eta$-Ebene gelegenen F
punkt derselben.

Während wir uns bisher mit der Aufgabe beschäftigt ha
für die verschiedenen parallelen Axen die Lage der zugehör
Hauptpunkte zu bestimmen, soll nunmehr die Aufgabe behar
werden, für einen gegebenen Punkt O des Punktsystems
geometrischen Ort aller in diesem Punkte O sich schneide
Axen zu bestimmen, deren zugehöriger Hauptpunkt O ist.

Um die Gleichung dieser Kegelfläche zu ermitteln, d
Mittelpunkt O ist, wollen wir die Richtung der von di
Punkte O nach dem Schwerpunkte S des Systems gefüh
Geraden zur positiven Richtung der z-Axe eines orthogon
Axensystems xyz wählen und O zum Anfangspunkte dessel

Es seien nun $\alpha_x \alpha_y \alpha_z$ die Richtungscosinus irgend
Erzeugenden a der gesuchten Kegelfläche in Bezug au
Axen xyz und der Punkt M, dessen Coordinaten xyz sind un
von O die Entfernung $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ hat, sei irgen
Punkt dieser Erzeugenden. Dann ist

$$\frac{\alpha_x}{x} = \frac{\alpha_y}{y} = \frac{\alpha_z}{z} = \pm\frac{1}{R}.$$

Da der Punkt O der Axe a als Hauptpunkt dieser
durch die Eigenschaft charakterisirt ist, dass das Deviati
moment $D_a^{(O)}$ für diesen Punkt O zu der durch die A
gelegten Schwerebene, sonach auch zur z-Axe normal geri

ist, so ist in den Gleichungen (23) $\delta_z = 0$ zu setzen, und es ist somit die z-Componente des Massenmomentes $M_a^{(O)}$ gleich der z-Componente des Trägheitsmomentes J_a, also $M_a^{(O)} . \mu_z = J_a \alpha_z$. Substituirt man die Werthe aus (10) und (7) unter Beachtung der Werthe (9), so findet man

$$a_{13}\alpha_x + a_{23}\alpha_y + a_{33}\alpha_z = (a_{11}\alpha_x^2 + a_{22}\alpha_y^2 + a_{33}\alpha_z^2 + 2a_{23}\alpha_y\alpha_z + \\ + 2a_{31}\alpha_z\alpha_x + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y) . \alpha_z \quad (64)$$

oder nach (63)

$$(x^2+y^2)(a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z) - z(a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{23}yz + \\ + a_{31}zx + 2a_{12}xy) = 0. \quad (65)$$

Dies ist die Gleichung der gesuchten Kegelfläche, die sich übrigens auch leicht aus der Gleichung (49) deduciren lässt. Es ist dies eine Kegelfläche dritter Ordnung, deren Gleichung für $x = y = 0$ verificirt wird, welche Fläche sonach die z-Axe zur Erzeugenden hat, was schon daraus erhellt, dass ein jeder Punkt einer Schwerpunktsaxe als ein Hauptpunkt dieser Axe angesehen werden kann.

Für ein mit dem Axensystem xyz gleichgerichtetes Axensystem $\xi\eta\zeta$, dessen Anfangspunkt der Schwerpunkt S ist, ergibt sich die Gleichung der Kegelfläche (65), wenn man $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta + z_s$, ferner den Gleichungen (31) zufolge, in welchen $x_s = y_s = 0$ zu setzen ist, $a_{11} = \alpha_{11} + M . z_s^2$, $a_{22} = \alpha_{22} + M . z_s^2$, $a_{33} = \alpha_{33}$, $a_{23} = \alpha_{23}$, $a_{31} = \alpha_{31}$ und $a_{12} = \alpha_{12}$ in die Gleichung (65) einsetzt, wo $\alpha_{11}\alpha_{22}\ldots$ die durch (29) bestimmten Werthe bedeuten.

Legt man, um die Leitlinie der Kegelfläche (65) zu bestimmen, senkrecht zur z-Axe eine Ebene, etwa durch den Schwerpunkt S, so dass in den folgenden Gleichungen z constant, etwa $z = z_s$ ist, so ersieht man aus der Form der Gleichung (65), in welcher alle jene Glieder, welche bezüglich der Coordinaten x und y vom dritten Grade sind, in dem Producte $(x^2+y^2)(a_{13}x + a_{23}y)$ zusammenzufassen sind, dass diese zur z-Axe senkrechte ebene Leitlinie eine circulare Curve dritter Ordnung ist, welche[1]

[1] Siehe E. Czuber, »Die Curven dritter und vierter Ordnung, welche durch die unendlich fernen Kreispunkte gehen«. Zeitschrift für Mathem. und Physik, XXXII, S. 257—286. — Eckardt, »Über die Curven dritter Ordnung, welche durch die zwei imaginären unendlich entfernten Kreispunkte gehen«. Zeitschrift für Mathem. und Physik, XIV, S. 368.

»vermöge des Umstandes, dass sie durch die unendlich fe
Kreispunkte geht, unter den Linien gleicher Ordnung
ähnliche Stellung einnimmt wie der Kreis unter den Ke
schnitten«. Diese Curve hat im Allgemeinen eine Asymp
der eine wichtige Rolle zukommt. In der Gleichung $y = Ax$
dieser Asymptote lässt sich der Coëfficient A dadurch bestimr
dass man den zweiten Factor $a_{11}x + a_{23}y$ des obigen Produ
nach der Substitution von $y = Ax$ annullirt, wodurch
$A = -\frac{a_{13}}{a_{23}}$ erhält, während B gefunden wird, indem
$y = Ax + B = -\frac{a_{13}}{a_{23}}x + B$ in die Gleichung (65) substi
und den Coëfficienten von x^2 gleich Null setzt, wonach
Asymptote, wenn kürzehalber

$$u = \frac{a_{11}a_{23}^2 + a_{22}a_{13}^2 - 2a_{12}a_{13}a_{23}}{a_{23}^2 + a_{13}^2}$$

ist, die Gleichung hat:

$$a_{23}y + a_{13}x = (u - a_{33}).z.$$

Führt man Polarcoordinaten ein, für welche

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta, \quad R^2 = r^2 + z^2$$

ist und bei welchen der Einfachheit halber der Polarwink
nur innerhalb der Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$, daher der Rad
vector r sowohl positiv, als auch negativ in Rechnung gezo
ist, so zerfällt durch Einsetzung von (66) in (65) die Gleich
dieser ebenen Leitlinie in zwei Gleichungen, nämlich in
Gleichung $r = 0$, welche der z-Axe entspricht, und in die zw
Gleichung

$$r^2 - rz\frac{a_{11}\cos^2\vartheta + a_{22}\sin^2\vartheta + 2a_{12}\sin\vartheta\cos\vartheta - a_{33}}{a_{13}\cos\vartheta + a_{23}\sin\vartheta} - z^2 = ($$

Massgebend ist in dieser Gleichung der Coëfficient von
Wird nun durch 2γ jener Winkel bezeichnet, des
Cotangente der Hälfte dieses Coëfficienten von rz in (
gleichkommt, so nimmt diese Gleichung die Form an:

$$r^2 + 2rz.\cot 2\gamma - z^2 = 0, \qquad ($$

welche identisch ist mit

$$(r - z \,.\, \mathrm{tg}\,\gamma)(r + z \,.\, \cot\gamma) = 0. \tag{69}$$

Die Leitlinie der Kegelfläche (65), sonach auch diese Kegelfläche selbst, besteht zufolge (69) aus zwei Theilen, I und II, deren Gleichungen $r_1 = z$ tang γ und $r_2 = -z \,.\, \cot\gamma$ sind. Bemerkenswerth ist der Umstand, dass für denselben Werth des Polarwinkels ϑ, wie dies schon die Gleichung (67) lehrt, das Product der zugehörigen Radien vectoren $r_1 r_2 = -z^2$ ist. Sind demnach M_1 und M_2 jene Punkte, in welchen eine beliebige, durch den Schwerpunkt S senkrecht zu OS gelegte Gerade die Fläche (65) — abgesehen von dem in dieser Fläche stets gelegenen Schwerpunkte — durchschneidet, so sind M_1 und M_2 auf entgegengesetzten Seiten des Schwerpunktes gelegen, und es ist OS die mittlere geometrische Proportionale zwischen M_1S und SM_2, woraus gefolgert werden muss, dass je zwei in derselben Schwerebene gelegenen Erzeugenden OM_1 und OM_2 der Kegelfläche (65) aufeinander senkrecht stehen. Diese beiden Leitstrahlen SM_1 und SM_2 sind zudem dann einander gleich, nämlich gleich z, mit anderen Worten: es sind beide Erzeugende OM_1 und OM_2 dann unter demselben Winkel von 45° gegen die z-Axe, d. i. gegen die Schweraxe OS geneigt, wenn die Gleichung (67) eine reine quadratische Gleichung ist, also der Zähler des Coëfficienten von rz verschwindet, was für einen reellen Werth von ϑ nur dann der Fall ist, wenn $a_{12}^2 - (a_{33} - a_{22})(a_{33} - a_{11}) = p^2$ positiv ist, und zwar sind die beiden zugehörigen Werthe des Polarwinkels ϑ_1 und ϑ_2 bestimmt durch $\mathrm{tg}\,\vartheta_1 = \frac{a_{12} + p^2}{a_{33} - a_{22}}$ und $\mathrm{tg}\,\vartheta_2 = \frac{a_{12} - p^2}{a_{33} - a_{22}}$.

Da das Deviationsmoment $D_a^{(O)}$ sowohl zur Axe a, als auch zur z-Axe normal gerichtet ist, so ist dessen Richtung parallel zur xy-Ebene und senkrecht zum Radius vector r, also der Richtungswinkel von $D_a^{(O)}$ in Bezug auf die x-Axe entweder $\vartheta + \frac{\pi}{2}$ oder $\vartheta - \frac{\pi}{2}$. Wird $D_a^{(O)}$ im ersten Falle positiv, im zweiten Falle dagegen negativ in Rechnung gezogen, was im Folgenden vorausgesetzt werden soll, so sind $-\sin\vartheta$, $\cos\vartheta$, O die Richtungscosinus von $D_a^{(O)}$. Da nun das Massenmoment $M_a^{(O)}$

die geometrische Summe aus dem Trägheitsmomente J_a aus $D_a^{(O)}$ ist, so ergeben sich durch Projection auf die Coo natenaxen den Werthen (10) zufolge die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\alpha_x + a_{21}\alpha_y + a_{31}\alpha_z &= J_a . \alpha_x - D_a^{(O)} \sin\vartheta \\ a_{12}\alpha_x + a_{22}\alpha_y + a_{32}\alpha_z &= J_a . \alpha_y + D_a^{(O)} \cos\vartheta \\ a_{13}\alpha_x + a_{23}\alpha_y + a_{33}\alpha_z &= J_a . \alpha_z \end{aligned}\right\}.$$

Der Vereinfachung halber werde nunmehr die bi unbestimmt gelassene Richtung der x-Axe übereinstimm gewählt mit der Richtung des auf die z-Axe bezogenen De tionsmomentes $D_z^{(O)} = D_z^{(S)}$, so dass von den beiden C ponenten a_{31} und a_{32} dieses Deviationsmomentes D_z die letz verschwindet, also $a_{32} = \alpha_{32} = 0$ und $a_{31} = \alpha_{31} = D_z^{(O)} = D_z^{(S}$ ist. Es ist dann die yz-Ebene — der Gleichung des Trägh ellipsoids zufolge — die Ebene jenes elliptischen Schn dieses Ellipsoids, für welche die z-Axe mit einer Axe di elliptischen Schnittes gleichgerichtet ist, so dass die y-Axe Richtung der zweiten Ellipsenaxe hat. Für diesen Fall ist Gleichungen (67) und (68) zufolge

$$\cot 2\gamma =$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{(a_{11}-a_{33})\cos^2\vartheta + (a_{22}-a_{33})\sin^2\vartheta + 2a_{12}\sin\vartheta\cos\vartheta}{a_{13}\cos\vartheta}$$

und die Gleichung (65) nimmt die Form an:

$$(x^2+y^2)(a_{31}x + a_{33}z) - z(a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{31}zx + 2a_{12}xy) = 0.$$

Da diese Gleichung für $x = z = 0$ verificirt wird, s die y-Axe, d. i. die Axe des auf die z-Axe bezogenen De tionsmomentes D_z in der Fläche (65) gelegen; es ist sona ein Hauptpunkt der y-Axe, was übrigens schon daraus her geht, dass von den zu den Axen x und z parallelen Compone a_{21} und a_{23} des auf die y-Axe bezogenen, dem Punkte O sprechenden Deviationsmomentes $D_y^{(O)}$ die letztere Compon verschwindet, sonach das zur x-Axe parallele Deviationsmo $D_y^{(O)}$ zur yz-Ebene, d. i. zu der durch den Punkt O gele Schwerebene normal ist, welcher Umstand für einen Hauptp charakteristisch ist. Es bilden daher die in der Fläche gelegenen drei Axen, nämlich die y-Axe und die in der zx-E

gelegenen Erzeugenden dieser Kegelfläche ein orthogonales Axensystem.

Wählt man, wie schon erwähnt wurde, der Wahl des Doppelzeichens des Radius vectors r entsprechend, den Polarwinkel ϑ nur zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ und den der Gleichung (71) entsprechenden Hilfswinkel 2γ zwischen den Grenzen 0 und π, also $0<\gamma<+\frac{\pi}{2}$, so ist, da z positiv ist, in dem Theile I der Leitlinie (69) $r_1 = z.\operatorname{tg}\gamma$ stets positiv, und zwar bedeutet γ dieser Gleichung zufolge den Winkel, den die nach dem Endpunkte M_1 dieses positiven Radius $r_1 = \overline{SM_1}$ gerichtete Erzeugende OM_1 der Kegelfläche (65) mit der Richtung OS der z-Axe einschliesst, so dass in (64) für den Theil I der Kegelfläche $\alpha_z = \cos\gamma$ ist. Für den Theil II der Leitlinie ist $r_2 = -z\cot\gamma$ stets negativ, und es ist nach Früherem der Winkel SOM_2 complementär zum Winkel γ, also $\alpha_z = \sin\gamma$.

a) Ist nun $a_{22} \gtrless a_{33}$ und $a_{13} = D_z$ von Null verschieden, so besteht diese Leitlinie aus zwei von einander vollständig getrennten Theilen I und II, und zwar nähert sich, wofern $a_{22}>a_{33}$ ist (siehe Fig. 1), der auf der positiven Seite der yz-Ebene gelegene Theil I, dessen Gleichung $r_1 = z.\operatorname{tang}\gamma$ ist, zufolge der Gleichung (72), beziehungsweise (71) beiderseits einer zur y-Axe parallelen Asymptote, deren Entfernung vom Schwerpunkte $\overline{SC} = \frac{a_{22}-a_{33}}{a_{13}}z$ ist, welche Asymptote überdies die Curve in einem Punkte D schneidet, für welchen $y = \frac{1}{2}\frac{(a_{22}-a_{33})(a_{22}-a_{11})-a_{13}^2}{a_{12}a_{13}}z$ ist, zudem enthält dieser unendliche Theil I drei Wendepunkte (ist $a_{12} = 0$, also die y-Axe eine Trägheitshauptaxe für O, so rückt ein Wendepunkt in unendliche Entfernung, so dass die Asymptote zur Inflexionsasymptote wird; ist $a_{12} = 0$ und $a_{13}^2 = (a_{22}-a_{33})(a_{22}-a_{11})$, so dass das Trägheitsellipsoid des Punktes O ein Rotationsellipsoid wird, so geht die Curve I in ihre Asymptote über).

Der auf der entgegengesetzten Seite der y-Axe gelegene Theil II, dessen Gleichung $r_2 = -z\cot\gamma$ ist, bildet eine in sich geschlossene Ovallinie, in welcher der Schwerpunkt S gelegen

ist und welche im Schwerpunkte S von der yz-Ebene ta
wird. (Ist $a_{12} = 0$ und $a_{13}^2 = (a_{22} - a_{33})(a_{22} - a_{11})$, so wird
der Ovalen II ein Kreis.) Ist $a_{22} < a_{33}$, so gilt das von
Curve I Gesagte für die Curve II und umgekehrt.

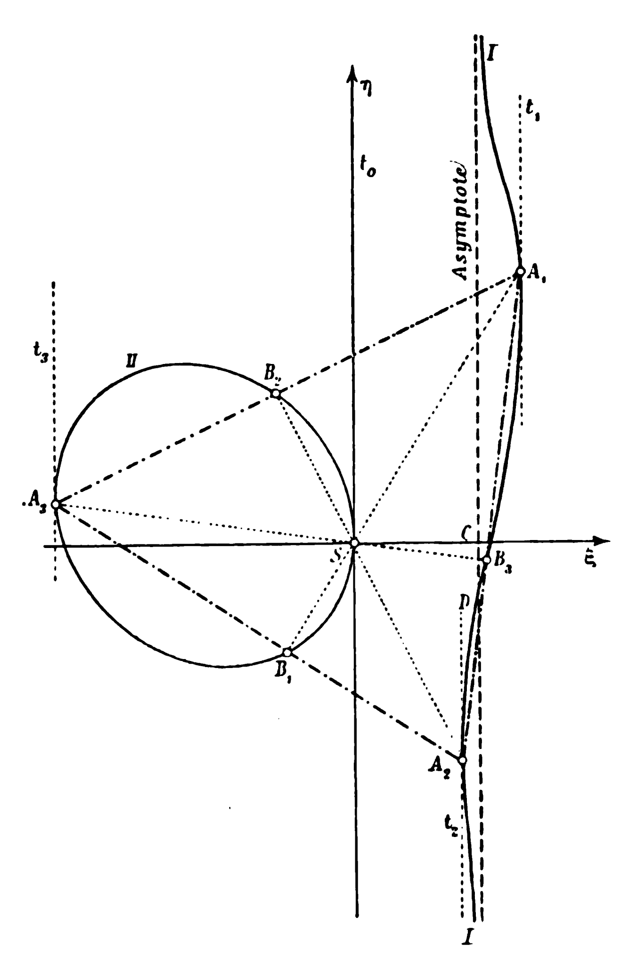


Fig. 1.

b) Ist $a_{22} = a_{33}$, also die yz-Ebene eine Kreisschnittseb
des Trägheitsellipsoids, und ist zudem a_{13} von Null verschie
so lautet die Gleichung (72)

$$x[a_{13}(x^2 + y^2 - z^2) + (a_{33} - a_{11})zx - 2a_{12}yz] = 0.$$

Die Theile der Fläche (65) sind sonach in diesem Falle die yz-Ebene selbst, für welche $x = 0$ ist, und eine elliptische Kegelfläche, deren im Schwerpunkte S zur z-Axe senkrechter Querschnitt ein Kreis ist, innerhalb dessen der Schwerpunkt liegt. Ist zudem $a_{12} = 0$, also die y-Axe eine Trägheitshauptaxe, so liegt die Axe dieser Kegelfläche in der zx-Ebene; ist dagegen $a_{11} = a_{22} = a_{33}$, so ist diese Axe in der yz-Ebene gelegen. Ist sowohl $a_{12} = 0$, als auch $a_{11} = a_{22} = a_{33}$, so ist diese Kegelfläche eine senkrechte Kreiskegelfläche, deren Axe die z-Axe ist und deren Öffnungswinkel ein rechter Winkel ist.

c) Ist $a_{13} = D_z = 0$, also die z-Axe eine Hauptaxe für den Punkt O, sonach auch für den in der z-Axe gelegenen Schwerpunkt, kurz eine Hauptcentralaxe, so lassen sich die beiden anderen Axen x und y so wählen, dass sie mit den beiden anderen Hauptaxen des Punktes O übereinstimmen, dass also auch $a_{12} = 0$ ist. Die Gleichung (65) hat dann die Form

$$z.[(a_{33}-a_{11})x^2+(a_{33}-a_{22})y^2] = 0.$$

Die Theile dieser Fläche sind demnach in diesem Falle die zur Schweraxe z senkrechte xy-Ebene und, wofern $a_{11} \gtrless a_{33} \gtrless a_{22}$ ist, zwei durch diese Axe z gelegte Ebenen, deren Neigungswinkel durch die zx- und yz-Ebene halbirt wird, und deren Gleichungen $y = x.\sqrt{\dfrac{a_{11}-a_{33}}{a_{33}-a_{22}}}$ und $y = -x\sqrt{\dfrac{a_{11}-a_{33}}{a_{33}-a_{22}}}$ sind. Für $a_{11} = a_{33} \gtrless a_{22}$, d. h. für den Fall, dass das Trägheitsellipsoid des Punktes O ein Rotationsellipsoid ist, dessen Rotationsaxe die y-Axe ist, reduciren sie sich auf die zx-Ebene und für $a_{22} = a_{33} \gtrless a_{11}$ auf die yz-Ebene. Ist $a_{33} = \dfrac{a_{11}+a_{22}}{2}$, so halbiren diese Ebenen die entsprechenden Coordinatenwinkel und stehen zueinander senkrecht. Ist $a_{11} = a_{22} = a_{33}$, so ist O der Hauptpunkt für sämmtliche durch O gelegte Axen. Liegt a_{33} nicht zwischen a_{11} und a_{22}, so reducirt sich die Fläche (65) auf die xy-Ebene.

Besonders wichtig unter allen Erzeugenden der Kegelfläche (65) sind die drei Trägheitshauptaxen OA_1, OA_2 und OA_3 des Punktes O, für welche O gleichfalls ein Hauptpunkt ist. Da für diese drei zueinander senkrechten Axen $a_1 a_2 a_3$ das

Deviationsmoment verschwindet, so ist das auf diese Axe bezogene Massenmoment, dessen Componenten durch (1 gegeben sind, mit der betreffenden Trägheitshauptaxe gleic gerichtet, sonach besteht, wenn $\alpha_x \alpha_y \alpha_z$ die Richtungscosinu der letzteren Axe sind, die bekannte Beziehung

$$\frac{a_{11}\alpha_x + a_{21}\alpha_y + a_{31}\alpha_z}{\alpha_x} = \frac{a_{12}\alpha_x + a_{22}\alpha_y + a_{32}\alpha_z}{\alpha_y} =$$

$$= \frac{a_{13}\alpha_x + a_{23}\alpha_y + a_{33}\alpha_z}{\alpha_z}. \quad (7$$

Setzt man in dieser Doppelgleichung für $\alpha_x \alpha_y \alpha_z$ die Werth aus (63) ein, so ergibt sich, dass die Hauptaxen OA_1, OA_2, O folgenden Gleichungen genügen müssen:

$$\left.\begin{array}{l} a_{12}(y^2 - x^2) + (a_{11} - a_{22})xy + (a_{13}y - a_{23}x)z = 0 \\ a_{23}(z^2 - y^2) + (a_{22} - a_{33})yz + (a_{21}z - a_{31}y)x = 0 \\ a_{31}(x^2 - z^2) + (a_{33} - a_{11})zx + (a_{32}x - a_{12}z)y = 0 \end{array}\right\}. \quad (7$$

Jede dieser drei Gleichungen lässt sich aus den beide anderen deduciren. Es sind dies die Gleichungen dreier Kege flächen zweiter Ordnung, deren gemeinsamen Durchdringung linien die drei Hauptaxen sind und deren Wurzeln offenb auch der Gleichung (65) genügen müssen, zumal da (64) auc aus (73) deducirbar ist. Um die charakteristische Eigenscha der Lage dieser Hauptaxen a_1, a_2 und a_3 in der Kegelfläche (6 zu ermitteln, wollen wir an diese Fläche durch die Erzeugende dieser Fläche eine Berührungsebene legen. Sind $\nu_x \nu_y \nu_z$ d Richtungscosinus der Normalen n dieser Ebene und bedeutet die Function der linken Seite der Gleichung (65), so ist de Gleichungen (70) und (63), beziehungsweise (66) zufolge

$$\frac{\partial F}{\partial x} = R^2[a_{13} + 2\,D_a^{(O)}.\alpha_z \sin\vartheta]$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = R^2[a_{23} - 2\,D_a^{(O)}.\alpha_z \cos\vartheta]$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = R^2[a_{33} - J_a] = -R^2.\frac{a_{13}\alpha_x + a_{23}\alpha_y}{\alpha_z} =$$

$$= -R^2\,\frac{r(a_{13}\cos\vartheta + a_{23}\sin\vartheta}{z}$$

demnach

$$\frac{\nu_x}{a_{13}+2\,D_a^{(O)}.\alpha_z \sin\vartheta}=\frac{\nu_y}{a_{23}-2\,D_a^{(O)}.\alpha_z \cos\vartheta}=\frac{\nu_z}{a_{33}-J_a}. \tag{75}$$

Für die Durchschnittslinie t dieser Berührungsebene mit der xy-Ebene, beziehungsweise für die mit t gleichgerichtete Tangente der zur xy-Ebene parallelen Leitlinie der Kegelfläche (65) im Punkte (xyz) ist, da $\cos(z,t)=0$ und $\nu_x \cos(x,t)+$ $+\nu_y \sin(x,t)=0$ ist,

$$\operatorname{tang}(x,t)=-\frac{\nu_x}{\nu_y}=\frac{a_{13}+2\,D_a^{(O)}.\alpha_z \sin\vartheta}{2\,D_a^{(O)}.\alpha_z \cos\vartheta-a_{23}}. \tag{76}$$

Wählt man demnach, wie früher, als Richtung der x-Axe die Richtung des auf die Schwerpunktaxe OS bezogenen Deviationsmomentes, so dass $a_{23}=0$ ist, so ersieht man aus der letzten Gleichung, dass, wenn man von den Werthen $\cos\vartheta=0$ und $\alpha_z=0$, d. i. von der im Schwerpunkte S an die Leitlinie (69) geführten Tangente t_0 und von der Asymptote derselben absieht, die Tangente an die Leitlinie sicher dann und nur dann zur Richtung des auf die Schwerpunktsaxe OS bezogenen Deviationsmomentes a_{13} senkrecht, also zur y-Axe parallel ist, wenn $D_a^{(O)}=0$ ist, d. h. wenn die zu diesen Berührungspunkten von O aus geführten Erzeugenden der Kegelfläche (65) die Trägheitshauptaxen des Punktes O sind. Es gibt sonach — abgesehen von der mit der y-Axe gleichgerichteten Tangente t_0 für den Schwerpunkt S — nur drei Punkte $A_1 A_2 A_3$ der Curve (69), für welche die Tangenten $t_1 t_2 t_3$ zur Asymptote dieser Curve parallel sind und diese drei charakteristischen Punkte $A_1 A_2 A_3$ bestimmen die Lagen der drei Hauptaxen OA_1, OA_2 und OA_3. Zwei von diesen Punkten A_1 und A_2 liegen, wofern $a_{22} \gtreqless a_{33}$ und $a_{13} \gtreqless 0$ ist, in dem unendlichen Theile der Curve, während der dritte Punkt A_3 in dem zweiten geschlossenen ovalen Theile dieser Curve gelegen ist (siehe Fig. 1). Sind $B_1 B_2 B_3$ die dritten Punkte, in welchen die Geraden $A_1 S$, $A_2 S$, $A_3 S$ die Leitlinie durchschneiden, so ist $A_1 B_1 \perp A_2 A_3$, $A_2 B_2 \perp A_3 A_1$, $A_3 B_3 \perp A_1 A_2$, denn, da die Hauptaxe OA_1 auf der Ebene der beiden anderen Hauptaxen OA_2 und OA_3 senkrecht steht, so ist $A_2 A_3 \perp OA_1$, aber auch $A_2 A_3 \perp OS$

also A_2A_3 senkrecht zur Ebene des Dreiecks OA_1B_1 u. s. w
Es ist sonach der Schwerpunkt S der Durchschnittspunkt de
Höhenlothe des Fundamentaldreiecks $A_1A_2A_3$, welches di
Basis jenes Fundamentaltetraëders bildet, dessen zueinande
senkrechte Seitenkanten OA_1, OA_2 und OA_3 in unserem Fall
von den Trägheitshauptaxen des Punktes O gebildet werden.

Während die den Axen OA_1, OA_2, OA_3 entsprechende
Deviationsmomente verschwinden, sind die den Höhen OB_1
OB_2, OB_3 der drei Seitenflächen unseres Fundamentaltetraëder
zugehörigen Deviationsmomente, da ihre Richtungen zu de
entsprechenden Schwerpunktsebenen normal sind, mit de
Seiten A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 des Fundamentaldreiecks gleich
gerichtet.

Für die Normale n irgend einer der drei durch die y-Ax
gelegten Ebenen, welche die Kegelfläche (65) in einer der dre
Trägheitshauptaxen OA_1, OA_2, OA_3 tangiren, ist zufolge (75)
da $a_{23}=0$, $D_a^{(O)}=0$, $\nu_x=\cos(xn)=\sin(zn)$, $\nu_y=0$, $\nu_z=\cos(zn$
ist, $\operatorname{tg}(zn)=\frac{a_{13}}{a_{33}-J_a}$ und da die x-Axe die Richtung des au
die z-Axe bezogenen Deviationsmomentes $D_z^{(O)}=a_{13}$ hat, s
ist a_{13} positiv. Ist sonach der Fig. 1 entsprechend $a_{22}>a_{33}$, s
ist, da für den in der Ovalen II gelegenen Punkt A_3 offenba
$\operatorname{tg}(zn)>0$ ist, $a_{33}>J_{a_3}$, dagegen ist für die in dem unendliche
Theile I der Leitlinie gelegenen Punkte A_2 und A_1, wenn A
jenen der beiden Punkte bedeutet, dessen Tangente t_2 de
Schwerpunkte S näher liegt, $\operatorname{tg}(zn)<0$ und $a_{33}<J_{a_2}<J_{a_1}$. E
ist sonach von den drei Hauptträgheitsmomenten J_{a_1}, J_{a_2} und J_a
das der Axe OA_1 entsprechende ein Maximum und dasjenig
für die Axe OA_3 ein Minimum. OA_1 hat somit die Richtun
der kleinsten, OA_3 jene der grössten Halbaxe des Cauchy
Poinsot'schen Trägheitsellipsoids. Das Umgekehrte finde
statt, wenn $a_{22}<a_{33}$ ist, in welchem Falle man sich etwa di
Fig. 1 um die y-Axe unter Beibehaltung der Richtungen de

---

[1] Es ist dies im Besonderen jenes Fundamentaltetraëder, welches in de
allgemeinen Theorie der bicircularen Curven vierter Ordnung und der circulare
Curven dritter Ordnung von massgebender Bedeutung ist. — Siehe E. Czube
»Die Curven dritter und vierter Ordnung, welche durch die unendlich ferne
Kreispunkte gehen«. Zeitschrift für Mathem. und Physik, XXXII.

Coordinatenaxen um 180° herumgedreht zu denken hat. (Ist $a_{12} = 0$, so rücken die Punkte D und A_2 in unendliche Entfernung.) Ist dagegen $a_{22} = a_{33}$, also die Leitlinie der Kegelfläche (65) ein Kreis, dessen Mittelpunkt C die Coordinaten $x_0 = \frac{a_{11} - a_{33}}{2a_{13}} z$ und $y_0 = \frac{a_{12}}{a_{13}} z$ hat und dessen Radius $\rho = \sqrt{z^2 + x_0^2 + y_0^2}$ der Entfernung des Kreismittelpunktes C vom Punkte O gleich ist, so sind die Punkte A_1 und A_2 die Endpunkte des zur x-Axe parallelen Durchmessers, welcher die zur y-Axe parallele Schwerpunktsaxe im Punkte B_3 schneidet. Verbindet man die Punkte A_1 und A_2 mit dem Schwerpunkte und verlängert diese Gerade $A_1 S$ und $A_2 S$, bis sie die Kreisperipherie in B_1, beziehungsweise B_2 schneiden, so kann man den Punkt A_3 dadurch erhalten, dass man die Geraden $A_2 B_1$ und $A_1 B_2$ bis zu ihrem Durchschnittspunkte A_3 verlängert, welcher auch ein Punkt der Geraden $B_3 S$ ist. Die Coordinaten der drei Eckpunkte des Fundamentaldreiecks $A_1 A_2 A_3$ sind

$$x_1 = \frac{a_{11} - a_{33}}{2a_{13}} z + \rho, \quad x_2 = \frac{a_{11} - a_{33}}{2a_{13}} z - \rho, \quad x_3 = 0$$

$$y_1 = y_2 = \frac{a_{12}}{a_{13}} z, \quad y_3 = -\frac{a_{13}}{a_{12}} z.$$

Während nun bisher die Lage jener durch den Punkt O gelegten Axen in der Kegelfläche (65) untersucht wurde, welche für den Punkt O selbst Trägheitshauptaxen sind, möge jetzt der geometrische Ort jener durch O gelegte Axen a bestimmt werden, die überhaupt für irgend einen ihrer Punkte Trägheitshauptaxen sind. Diese Axen müssen zufolge früherer Erörterungen in der Ebene des auf die parallele Schwerpunktsaxe bezogenen Deviationsmomentes gelegen sein. Eine fernere charakteristische Eigenschaft dieser Axen liegt nach Früherem in dem Umstande, dass die Ebene des Deviationsmomentes für irgend einen ihrer Punkte, also auch für den Punkt O den Schwerpunkt S, sonach auch die Axe OS, d. i. die z-Axe enthalten muss. Da sonach, wenn man die in (43) und (44) angewendeten Zeichen beibehält, in der Gleichung $A_z . \sin(a, M_a^{(O)}) = \alpha_x \mu_y - \alpha_y \mu_x$ der Richtungscosinus A_z der Axe A des Deviationsmomentes $D_a^{(O)}$ verschwinden muss, so besteht für die

gesuchten Trägheitshauptaxen die charakteristische Beziehung $\frac{\mu_x}{\alpha_x} = \frac{\mu_y}{\alpha_y}$ oder zufolge (10)

$$\frac{a_{11}\alpha_x + a_{21}\alpha_y + a_{31}\alpha_z}{\alpha_x} = \frac{a_{12}\alpha_x + a_{22}\alpha_y + a_{32}\alpha_z}{\alpha_y}. \qquad (77)$$

Ersetzt man $\alpha_x \alpha_y \alpha_z$ durch die proportionalen Coordinaten xyz, so gelangt man zu der ersten der drei Gleichungen (74), nämlich zu der Gleichung der Kegelfläche zweiter Ordnung

$$a_{12}(y^2 - x^2) + (a_{11} - a_{22})xy + (a_{13}y - a_{23}x).z = 0. \qquad (78)$$

Diese Kegelfläche ist sonach der geometrische Ort aller jener durch den Anfangspunkt O gelegten Axen, die für irgend einen ihrer Punkte Trägheitshauptaxen sind.

Da für ein mit dem Axensystem xyz gleichgerichtetes Schwerpunktsaxensystem $\xi\eta\zeta$, wie früher, $\alpha_{11} = a_{11} - Mz_s^2$, $\alpha_{22} = a_{22} - Mz_s^2$, $\alpha_{33} = a_{33}$, $\alpha_{12} = a_{12}$, $a_{13} = \alpha_{13}$ und $a_{23} = \alpha_{23}$, ferner $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta + z_s$ ist, so kann die Gleichung der Kegelfläche (78) auch in der Form

$$\alpha_{12}(\eta^2 - \xi^2) + (\alpha_{11} - \alpha_{22})\xi\eta + (\alpha_{13}\eta - \alpha_{23}\xi)(\zeta + z_s) = 0 \qquad (79)$$

aufgestellt werden.

Um schliesslich in aller Kürze den geometrischen Ort der Hauptpunkte sämmtlicher Axen a zu bestimmen, die sich in einem gegebenen Punkte O, dessen Coordinaten in Bezug auf irgend ein orthogonales Schwerpunktsaxensystem $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$ seien, schneiden, empfiehlt es sich, von der die Hauptpunkte charakterisirenden Gleichung (59) auszugehen. Bedeuten xyz die Coordinaten eines Hauptpunktes jener von O ausgehenden Axe, deren Richtungscosinus $\alpha_\xi = \alpha_x$, $\alpha_\eta = \alpha_y$, $\alpha_\zeta = \alpha_z$ sind, in Bezug auf ein mit dem Schwerpunktsaxensystem consentirendes Axensystem, dessen Anfangspunkt O ist, und bezeichnet R die gesuchte Entfernung dieses Hauptpunktes vom Punkte O, so ist in (59) zu setzen

$$\left.\begin{array}{l} \xi = \xi_0 + x = \xi_0 + R\alpha_x \\ \eta = \eta_0 + y = \eta_0 + R\alpha_y \\ \zeta = \zeta_0 + z = \zeta_0 + R\alpha_z \end{array}\right\}. \qquad (80)$$

Sonach ist

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2-(\xi\alpha_x+\eta\alpha_y+\zeta\alpha_z)^2 = (\eta\alpha_z-\zeta\alpha_y)^2+(\zeta\alpha_x-\xi\alpha_z)^2+ \\ +(\xi\alpha_y-\eta\alpha_x)^2 = (\eta_0\alpha_z-\zeta_0\alpha_y)^2+(\zeta_0\alpha_x-\xi_0\alpha_z)^2+ \\ +(\xi_0\alpha_y-\eta_0\alpha_x) = p_\xi^2+p_\eta^2+p_\zeta^2,$$

wofern durch $p_\xi p_\eta p_\zeta$ die Differenzen

$$\left.\begin{aligned} p_\xi &= \eta_0\alpha_z-\zeta_0\alpha_y \\ p_\eta &= \zeta_0\alpha_x-\xi_0\alpha_z \\ p_\zeta &= \xi_0\alpha_y-\eta_0\alpha_x \end{aligned}\right\} \qquad (81)$$

bezeichnet werden.

Substituirt man diese Werthe und jene aus (80) in die Gleichung (59) und bestimmt hierauf den Radius vector R jener Fläche, die der geometrische Ort aller Hauptpunkte der Axen a ist, so findet man, wenn kürzehalber durch $l_1 l_2 l_3$ jene Längen bezeichnet werden, welche, wenn abermals M die Masse des Systems bedeutet, durch die Gleichungen bestimmt sind:

$$\left.\begin{aligned} Ml_1^3 &= \mathrm{M}_\xi\xi_0+\mathrm{M}_\eta\eta_0+\mathrm{M}_\zeta\zeta_0 \\ l_2 &= \xi_0\alpha_x+\eta_0\alpha_y+\zeta_0\alpha_z \\ Ml_3^2 &= \mathrm{M}_\xi\alpha_x+\mathrm{M}_\eta\alpha_y+\mathrm{M}_\zeta\alpha_z \end{aligned}\right\} \qquad (82)$$

als Polargleichung der gesuchten Fläche für den Punkt O als Pol die Gleichung

$$R = \frac{l_1^3-l_2 l_3^2}{p_\xi^2+p_\eta^2+p_\zeta^2} - l_2. \qquad (83)$$

Aus dieser Gleichung lässt sich für jede Lage des durch die Coordinaten $\xi_0\eta_0\zeta_0$ gegebenen Punktes O und für jede Axenrichtung $(\alpha_x\alpha_y\alpha_z)$ bei Berücksichtigung der Gleichungen (54), beziehungsweise (55) und der Gleichungen (81) und (82) in einfacher Weise der Radius vector R bestimmen. Für die entgegengesetzte Richtung $(-\alpha_x, -\alpha_y, -\alpha_z)$ ergibt sich, wie aus (54), (82) und (83) zu ersehen ist, bei demselben Punkte O der entgegengesetzt gleiche Werth von R, so dass demgemäss die gesuchte Fläche eine Mittelpunktsfläche ist, deren Mittelpunkt

O ist. Setzt man in den oberen Gleichungen $\alpha_x = \frac{x}{R}$, $\alpha_y = \frac{y}{R}$, $\alpha_z = \frac{z}{R}$ und $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, so erhält man die Gleichung dieser Fläche in linearen orthogonalen Coordinaten, und zwar, wie leicht zu ersehen ist, eine Gleichung vierten Grades.

Der geometrische Ort jener Hauptpunkte, für welche die zugehörigen Axen Trägheitshauptaxen sind, ist jene Curve, in welcher die Fläche (83) von der Kegelfläche (78), beziehungsweise (79) geschnitten wird.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CII. BAND. VI. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



XV. SITZUNG VOM 8. JUNI 1893.

Herr Intendant Hofrath Ritter v. Hauer führt den Vorsitz.

Über das am 23. Mai l. J. erfolgte Hinscheiden

Seiner Excellenz

des Curator-Stellvertreters der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften Herrn

DR. ANTON RITTER VON SCHMERLING

wurde der tiefen Trauer der kaiserlichen Akademie in ihrer ausserordentlichen Gesammtsitzung vom 30. Mai, sowie in der feierlichen Jahressitzung vom 31. Mai Ausdruck gegeben.

Der Secretär legt das erschienene Heft IV (April 18
des 14. Bandes der Monatshefte für Chemie vor.

Das Secretariat der Smithsonian Institution
Washington übermittelt ein Circular, betreffend die Hodgk
Preisstiftung und die von dieser Stiftung ausgeschriebe
Preise zur Erlangung und Verbreitung genauerer Kenntn
über die Natur der atmosphärischen Luft im Zusammenha
mit dem Wohle der Menschheit.

Das Curatorium der Schwestern Fröhlich-Stiftung
Wien übermittelt die diesjährige Kundmachung über die V
leihung von Stipendien und Pensionen aus dieser Stift
zur Unterstützung bedürftiger und hervorragender schaffen
Talente auf dem Gebiete der Kunst, Literatur und Wissensch

Herr Prof. Dr. M. Holl in Graz übersendet eine Abhandlu
»Über die Reifung der Eizelle bei den Säugethiere

Herr Dr. Martin Kříž, k. k. Notar in Steinitz (Mähr
übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: »Die Fau
der bei Kiritein in Mähren gelegenen Výpustek-Höh
mit osteologischen Bemerkungen«.

Das w. M. Herr Hofrath Director F. Steindachner üb
reicht eine Abhandlung des Herrn Friedrich Siebenro
Assistenten am k. k. naturhistorischen Hofmuseum in W
betitelt: »Zur Osteologie des *Hatteria*-Kopfes.«

Das w. M. Hofrath Director J. Hann überreicht eine
handlung unter dem Titel: »Der tägliche Gang der Tem
ratur auf dem Obirgipfel (2140 *m*) und einige Fol
rungen aus demselben«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. J. Wiesner überreicht e
Arbeit von Prof. Dr. Hans Molisch in Graz, betitelt: »D
Vorkommen und der Nachweis des Indicans in
Pflanze, nebst Beobachtungen über ein neues Chro
gen«.

Titel: »Reste diluvialer Faunen und des Menschen aus dem Waldviertel Niederösterreichs, in den Sammlungen des k. k. naturhistorischen Hofmuseums.«

Das w. M. Herr Hofrath Director J. Hann überreicht eine Abhandlung des Herrn Ed. Mazelle, Adjunct des k. k. astronomisch-meteorologischen Observatoriums in Triest, betitelt: »Der jährliche und tägliche Gang und die Veränderlichkeit der Lufttemperatur in Triest«.

XVI. SITZUNG VOM 15. JUNI 1893.

Herr Intendant Hofrath Ritter v. Hauer führt den Vor

Das k. u. k. Reichs-Finanz-Ministerium übermi
ein Exemplar des von der Landesregierung für Bosnien
die Hercegovina in Sarajevo autographisch hergestellten Wer
»Meteorologische Beobachtungen an den Lanc
stationen in Bosnien und der Hercegovina 1892«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. J. Wiesner überreicht
von Prof. Dr. Hans Molisch in Graz ausgeführte Arl
»Zur Physiologie des Pollens, mit besonderer Rü
sicht auf die chemotropischen Bewegungen
Pollenschläuche«.

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine Ar
betitelt: »Neue Beobachtungen über Bindungswech
bei Phenolen. VIII. Abhandlung. Die Constitution
Teträthylphloroglucins«, von J. Herzig und S. Zei

XVII. SITZUNG VOM 22. JUNI 1893.

Herr Intendant Hofrath Ritter v. Hauer führt den Vorsitz.

Der Secretär legt die erschienenen Hefte, und zwar Heft I—III (Jänner—März 1893), Abtheilung I und Heft III und IV (März und April 1893), Abtheilung II. a des 102. Bandes der Sitzungsberichte, ferner Heft V (Mai 1893) des 14. Bandes der Monatshefte für Chemie, vor.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Lang übersendet eine Abhandlung von Herrn Victor Schumann in Leipzig: »Über die Photographie der Lichtstrahlen kleinster Wellenlängen.« (II. Theil.)

Das c. M. Herr Prof. H. Weidel übersendet zwei im I. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeiten.

1. »Über Protocatechualdehyd und dessen Überführung in Piperonal«, von Dr. R. Wegscheider.
2. »Über Amidoderivate des Phloroglucins«, von Jacques Pollak.

Das c. M. Herr Prof. Zd. H. Skraup in Graz übersendet eine im chemischen Institute der k. k. Universität in Graz von Herrn R. v. Bucher ausgeführte Untersuchung: »Über das Chitenin«.

Herr Intendant Hofrath F. Ritter v. Hauer überreicht eine Abhandlung von Prof. Dr. J. N. Woldřich in Wien unter dem

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher ni zugekommene Periodica sind eingelangt:

Actes de la Société Scientifique du Chile, fondée un groupe de Français. Deuxième année. Tome II (18 3ème Livraison. Santiago, 1893; 8⁰.

Gruson, H., Im Reiche des Lichtes. Sonnen, Zodiakallic Kometen. Dämmerungslicht-Pyramiden nach ältesten äg tischen Quellen. (Mit 9 Tafeln und 26 Textfiguren.) Bra schweig, 1893; 8⁰.

Lutschaunig, V., Die Definitionen und Fundamentalsätze Theorie des Gleichgewichtes schwingender Körper. Tri 1893; 8⁰.

Über die Photographie der Lichtstrahlen kleinster Wellenlängen

von

Victor Schumann in Leipzig.

II. Theil.

(Mit 5 Tafeln und 5 Textfiguren.)

Die Vorarbeiten, wovon der erste Theil dieses Berichtes[1] handelt, bilden die Grundlage meines Verfahrens zur Photographie der Strahlen kleinster Wellenlängen. Alle Wandlungen, die das Verfahren in der Folge erfuhr, sind lediglich Verbesserungen des ursprünglichen, das sich, wie ich wiederholen will, auf die Lichtdurchlässigkeit des weissen Flussspathes, das Fernhalten der atmosphärischen Luft von den wirksamen Strahlen und auf die Ultraviolettempfindlichkeit meiner neuen Platte gründet.

Die genannten Verbesserungen erstrecken sich jedoch nur auf den photographischen Apparat, und zwar allein auf dessen mechanischen Theil, während Prisma und Linsen für alle Aufnahmen jenseits der Wellenlänge 185·2 $\mu\mu$ unverändert dieselben geblieben sind, deren ich mich bereits zu meinen Vorversuchen bedient habe.

Allgemeines über den Bau eines Spectralapparates zur Photographie im luftleeren Raume.

Die Photographie des Spectrums im luftleeren Raume stellt an den photographischen Apparat erhöhte Forderungen. Das

[1] Siehe diese Sitzungsber., Bd. CII, Abth. II. a, April 1893, S. 415—475.

Einstellen des Spaltes, der beiden Linsen und der lichtempf
lichen Platte, das bei gewöhnlichen Instrumenten dieser
keine Schwierigkeiten bietet, gestaltet sich bei der Aufna
im Vacuum weniger einfach. Alles muss von aussen her du
die Wand des evacuirten Gehäuses hindurch, und wenn irg
möglich, ohne Störung des Vacuums geschehen. Schon h
durch wird der Apparat complicirter als ein gewöhnli
Spectralapparat. Es kommt aber ferner hinzu, dass die
kaustik des Flussspathkörpers jenseits der Wellenlänge 185
so stark gekrümmt ist, dass sich nur verhältnissmässig ku
Strecken mit einemmale scharf definirt aufnehmen lassen.[1]
Krümmung der Diakaustik ist für die Construction des Ap
rates von besonderer Bedeutung: nach ihr richtet sich
Schiefstellung der Platte zur Linsenaxe. Da sich die Diakau
des Flussspathkörpers ausserdem mit der Wellenlänge än
so fordert auch jeder Bezirk eine andere Schiefstellung
Platte, wenn er auf möglichst langer Strecke scharf erschei
soll. Der Apparat muss demzufolge so beschaffen sein, d
sich die Platte tangirend an der Diakaustik herumführen
erforderlichenfalls der Tangirungspunkt in die Linsenaxe
schieben lässt.

Es leuchtet ein, dass diesen Forderungen ein in ein
dichtes und evacuirbares Gehäuse eingeschlossener gewö
licher Spectralapparat, wie es beispielsweise der im ersten T
dieses Berichtes erwähnte Vacuumapparat war, nicht n
genügt, dass vielmehr Vorkehrungen getroffen sein müs
um jeden gewünschten Spectralbezirk, unter Wahrung se
Klarheit, mitten ins Seefeld der Camera führen zu können
das womöglich auch nach erfolgtem Evacuiren.

Ein solches Instrument ist weniger einfach. Es ähnel
gewisser Beziehung mehr dem Spectrometer als dem Spec
skop, selbstverständlich mit dem wesentlichen Unterschi
dass an Stelle des Oculars die photographische Camera
die, sobald der Platte die vorgedachte Beweglichkeit gesic

[1] Von einer der Diakaustik entsprechenden Krümmung der Platte
allerdings zu einer in allen Theilen klar gezeichneten Gesammtaufnahme
Spectrums verhelfen würde, habe ich absehen müssen, da die Herstellung
hierzu erforderlichen Cassette zu grosse Schwierigkeiten bot.

sein soll, eines ziemlich complicirten Mechanismus bedarf. Da alle im Vacuum zu bewegenden Theile von aussen her bewegt werden müssen, so ist klar, dass ein solcher Vacuumapparat schon aus diesem Grunde nie so einfach als ein gewöhnlicher Spectrograph ausfallen kann.

Ein Spectralapparat zur Photographie im luftleeren Raume soll so eingerichtet sein, dass er ohne Störung des Druckes zulässt die Änderung 1. der Richtung des Collimatorspaltes (Einstellung des Spaltes parallel zur brechenden Kante des Prismas), 2. der Spaltweite, 3. der Spaltlänge (Minderung der Spectrumbreite bei Aufnahme gliederreicher Spectralreihen, auch zur Minderung des zerstreuten Innenlichtes des Apparates), 4. der Lage der wirksamen Spaltstrecke (Aufnahme untereinanderstehender Spectra ohne Verschiebung der Platte; Wellenlängenbestimmung), 5. des Abstandes der beiden Linsen vom Spalt und von der Platte (Focussirung der Plattenmitte), 6. der Stellung der Prismaflächen zu den Linsenaxen (Minimum der Ablenkung), 7. des Winkels zwischen den beiden optischen Axen des Collimators und der Camera (Wechsel des Aufnahmebezirkes), 8. des Winkels zwischen der optischen Axe der Camera und der photographischen Platte (Focussirung der beiden Seiten der Platte), 9. der Lage der Platte in ihrer Ebene (Aufnahme untereinanderstehender Spectra mit Verschiebung der Platte; Spectralreihen).

Soll der Apparat auch noch zur Wellenlängenbestimmung mit dem Gitter (planem) dienen, dann muss sich die Platte ausserdem in ihrer Ebene und in unveränderter Stellung zur optischen Axe der Camera, um dieselbe Axe drehen lassen.

Zur Vermittlung aller dieser im Vacuum auszuführenden Bewegungen eignet sich, ihres guten und dauernd sicheren Verschlusses halber vortrefflich die conische Axe, die hier, wo immer möglich, aus Stahl bestehen sollte. Nur wo ihr Umfang verhältnissmässig gross ausfällt — an einem meiner Vacuumapparate kommen solche Axen bis zu 8 *cm* Durchmesser vor — macht sich ein Übelstand geltend: solche Axen, wenn sie längere Zeit unter Atmosphärendruck gestanden haben, setzen ihrem Herausnehmen aus dem Apparate, das zu dessen Reinigung, auch zur Erneuerung des Fettüberzuges der Verschlussflächen

nöthig ist, einen ungewöhnlichen und manchmal so gross
Widerstand entgegen, dass die freie Hand hierzu nicht m
ausreicht und dass es dazu einer besonderen Vorrichtung bed
Dieselbe Vorrichtung verlangen auch alle die planen Verschlu
flächen, die eine gegenseitige, seitliche Verschiebung ni
zulassen, und die infolge dessen nur rechtwinklig zu ih
gemeinschaftlichen Verschlussfläche von einander getren
also nur von einander losgerissen werden können. Alle di
Apparattheile müssen darum, insofern ihre Form eine zu ih
Trennung geeignete Handhabe nicht bietet, mit feingewindig
Schrauben und Muttern derart versehen sein, dass sie sich
nach Erforderniss durch Zug oder Druck und ohne die gering
Schädigung ihrer Form leicht auseinandernehmen lassen. Solc
Forderung genügt in vollkommenster Weise der auf der Dr
bank hergestellte Rotationskörper, weil er die Ausübung c
tralen Druckes, wie ihn der vorliegende Zweck fordert, oh
Anwendung complicirter Mechanismen erlaubt.

Das Material zum Gehäuse des Apparates muss vor All
dicht, homogen und womöglich auch chemisch indifferent se
Glas, das wohl den Vorzug verdiente und das ich früher einn
dazu zu verwenden gedachte, ist der Anbringung der za
reichen Mechanismen halber gänzlich ausgeschlossen. Ed
metall ist viel zu kostspielig, nicht widerstandsfähig gen
gegen mechanische Eindrücke und die Dichtigkeit des gee
netsten (Platin) zweifelhaft. Gussstahl, jedoch geschmiedet
gegossener Gussstahl ist selten frei von Löchern — sorgfä
ausgeglüht und langsam abgekühlt, dürfte, was Dichtigk
anbelangt, allen Materialien vorzuziehen sein, zumal er s
gegen Quecksilberdampf, womit die Innenwand des evacuir
Gehäuses beim Gebrauch des Apparates dauernd in Berühru
bleibt, indifferent verhält. Aber seine Verwendung begegnet
vorliegenden Falle so schwerwiegenden technischen Bedenk
dass dem Messing in gegossenen Stücken der Vorzug gebü
Die Legirung des Messings soll dicht und sehr hart sein, di
des hermetischen Verschlusses und hart der exacten Herstellu
der Dichtungsflächen halber. Der Hauptwerth ist auf die Dich
keit der Gussstücke zu legen und hierauf schon bei Construct
der betreffenden Theile Rücksicht zu nehmen. Die Dichtigk

hängt nicht allein von der Geschicklichkeit des Metallgiessers ab, schon beim Entwerfen des Apparates kann darauf hingewirkt werden. Plötzlicher Wechsel der Wanddicke ist vor Allem zu vermeiden, wenn nicht poröser Guss die Folge davon sein soll.

Ein evacuirter Spectralapparat ist durch den Atmosphärendruck stark belastet. Liesse er sich von gleicher Widerstandsfähigkeit herstellen, dann würde er schon bei verhältnissmässig schwacher Wandstärke seinem Zweck entsprechen. Da seine Bestimmung aber anderseits an verschiedenen Stellen der Aussenwände eine Durchbrechung und an andern Stellen wieder eine Verstärkung verlangt, so ist die Biegungsfestigkeit des Gehäuses stellenweise stark vermindert und die Gefahr, dass die gegenseitige Lage von Spalt, Linsen, Prisma und Platte, und sonach auch das Spectrumbild selbst hierdurch gefährdet werden, nicht unbeträchlich. Es ist daher bei der Construction darauf Rücksicht zu nehmen, dass die Durchbiegung des Gehäuses selbst bei den grössten Druckdifferenzen, die darin vorkommen können, im Spectrum noch nicht zum Ausdruck gelange. Diese Vorsicht ist besonders dann geboten, wenn der Apparat nicht zu Vacuumaufnahmen allein, sondern auch zur Ermittlung der optischen Constanten von Gasen Verwendung finden soll, wobei Druckunterschiede bis zu einer vollen Atmosphäre vorkommen.

Der Bau eines solchen Apparates stellt an die mechanische Technik erhöhte Forderungen. Besondere Schwierigkeiten bereitet der luftdichte Verschluss der mit dem Vacuum in Berührung stehenden Theile. Die Gussstücke enthalten nicht selten unsichtbare, die Apparatwände durchsetzende Gussfehler (gröbere Poren, kleinere Löcher), die der Luft den Zutritt zum Vacuum vermitteln. Darum beginnt auch die undankbarste Arbeit bei der Herstellung eines solchen Instrumentes erst mit der Vacuumprobe, wo die Arbeiten in der Werkstatt beendet sind. Denn selbst, wenn die Probe nach dem Barometer günstig ausfällt, braucht der Apparat seiner Bestimmung noch nicht zu entsprechen. Die Barometerprobe ist überhaupt nicht feinfühlig genug, als dass sich nach ihr die Verschlusssicherheit eines weit evacuirten Gefässes ermitteln liesse. Hier kann allein das

Verhalten der elektrischen Entladungsröhre sicheren An
gewähren.

Der luftdichte Verschluss eines mit dem vorgenannten C
fort ausgerüsteten Vacuumapparates kann unsägliche Mü
bereiten. Auf die Ursache, die der von Zeit zu Zeit wie
kehrenden Undichtheit des Apparates zu Grunde liegt, kor
ich später ausführlich zurück.

Mein erster Apparat, womit ich die Aufnahme des Gebi
jenseits der Wellenlänge 185·2 μμ begann, bot nicht ent
den vorgenannten Comfort. Seine Innentheile mussten stets
dem Evacuiren eingestellt werden. Eine Ausnahme hie
machte nur die Collimatorlinse, die auch im Vacuum eins
bar war.

Der Apparat war ursprünglich dem vermutheten Län
zuwachs des Ultravioletten angepasst, und dem entsprach s
Einrichtung vollständig. Dass er schon nach kurzem Gebra
nicht mehr genügte, lag an dem Strahlenreichthum, den
neue Gebiet wider Erwarten entwickelte. Er wurde demzuf
mehrmals umgebaut und jedesmal der Längenzunahme
photographischen Wirkungsbandes angepasst. Das geschal
lange, bis constructive Hindernisse jede weitere Umänder
vereitelten und zum Bau eines verbesserten Apparates dräng
Erst dieser Apparat war es, der sich dem vorstehenden Id
gange anschloss. Von ihm rühren meine besser definirten
nahmen und vor Allem die der brechbarsten Strahlen her.

Unter solchen Umständen könnte es scheinen, als verd
zur Zeit nur noch das verbesserte Instrument eingehende
rücksichtigung. Gleichwohl halte ich es nicht für überflü
auch den älteren Apparat an dieser Stelle ausführliche
besprechen.

Man darf wohl annehmen, dass sich die spectrale Forsch
nach dem Bekanntwerden dieser Ergebnisse, der weiteren
schliessung des Gebietes der kleinsten Lichtwellen anneh
wird. Da wird vielleicht manchem Beobachter mit dem schn
zu beschaffenden, einfacheren Apparat mehr als mit dem
vollkommneten gedient sein, zumal sich auch mit ihm r
schön gezeichnete Spectra erzielen lassen, und die wünsch
werthe Erweiterung seiner Wirkungsgrenze, die zwar n

älteres Instrument nicht zuliess, bei der neuen Herstellung eines solchen Instrumentes ohne allzugrosse Mühe erreichbar ist.

Der photographische Apparat zur Aufnahme des Spectrums im luftleeren Raume.

I. Der erste Apparat.

Der photographische Spetralapparat, womit ich die ersten Aufnahmen im luftleeren Raume ausgeführt habe, ist in Fig. 1 und Fig. 2 auf Taf. I in $^1/_5$ seiner natürlichen Grösse dargestellt. Daran reihen sich auf derselben und der folgenden Tafel die in wahrer Grösse ausgeführten Abbildungen des Spaltes (Fig. 3), der Keilringe zur Änderung des Winkels der Linsenaxen (Fig. 4), des Prismastativs (Fig. 5), der Cassette und der Camera (Fig. 7 und Fig. 6) und der conischen Triebaxe (Fig. 8).

Sämmtliche Abbildungen, sowohl dieses, als auch des später zu erwähnenden Apparates verbesserter Construction sind unter sorgfältiger Berücksichtigung der Apparatmasse, entweder in natürlicher oder in reducirter Grösse ausgeführt. Sie gewähren daher bei Anfertigung des Apparates so sicheren Anhalt, dass sie dem ausführenden Mechaniker als sogenannte Werkstattzeichnung dienen können.

Ich gehe nun zur Besprechung der Einrichtung des Apparates selbst über.

Sein Hauptkörper (Fig. 1 und 2) ist ein cylindrisches, dickwandiges Gehäuse *a*, das auf kräftigem Dreifuss *b* ruht. Fest mit dem Gehäuse verbunden sind der Collimator *c* und das Camerarohr *d*, das an seinem freistehenden Ende die Camera *k* trägt. Im Gehäuse steht das Flussspathprisma *e* (70° br. Wkl., 40 *mm* Höhe und 32 *mm* Länge der brechenden Flächen), das sich um die, zu seiner brechenden Kante parallele Axe seines Stativs *f* und anderseits um die gleichgerichtete geometrische Axe des Gehäuses *a* drehen lässt. Diese Drehung wird vermittelt durch die exact in das Gehäuse eingepasste, starke Scheibe *g*. Das oben offene Gehäuse wird mit einem dicht aufgeschliffenen Deckel *h* verschlossen, in dessen Mitte die nach der Luftpumpe führende, in einen Schliff endende Glasröhre *i* mündet. Beim Gebrauch wird die Röhre, um schädliches Licht vom Prisma

fernzuhalten, mit Zinnfolie umwickelt. Der Collimator ist
einem zwischen die Verschlussflächen eingelegten, mit
getränkten Papierring — die einzige Papierdichtung, die
ganzen Apparat vorkommt — luftdicht in das Gehäuse
geschraubt, wohingegen das Camerarohr einerseits mit
Gehäuse, anderseits mit der Camera *k* zusammengeschli
und durch mehrere Schrauben verbunden ist. Alle Dichtu
flächen sind zum besseren Verschluss mit einer dünnen Sch
von Luftpumpenfett überzogen, von demselben Fett, womit a
die Schliffe und Hähne der zum Evacuiren benützten Qu
silberluftpumpe abgedichtet sind.

l ist die Verschlussplatte der Collimatoröffnung (Flusssp
18 *mm* Durchmesser, 3 *mm* dick), *m* der Spalt, *n* die Collima
linse (Flussspath, 18 *mm* Durchmesser, 3 *mm* dick, 120
Focus der Wellenlänge 589 μμ, planconvex), *o* das Trieb d
p die conische Axe, die die Triebbewegung bei hermetisc
Verschluss durch die Collimatorwand hindurch vermittelt, *q*
Cameralinse, die der Collimatorlinse vollständig gleicht —
kann nur nach dem Öffnen des Apparates verschoben werde
r die photographische Platte in der Stellung, die sie währ
der Belichtung einnimmt, *s* die Öffnung zum Einlegen der C
sette in die Camera, *t* und *u* sind Arreturstifte zur Fixirung
Camerastellung beim Einlegen der Cassette, *v* eine Handh
in Kreuzform, zum Drehen des Kükens *w* der aus einem H
bestehenden Camera *k*. *x*, ein langer Zapfen, ist nur zur
quemeren Bearbeitung und correcten Einhaltung des Neigun
winkels der scheibenförmigen Verschlussfläche des Came
rohres, den diese mit der Linsenaxe bildet, angebracht.

Der Spaltschlitten *m* (Fig. 3) besteht aus einem
feinem Gewinde und vorspringenden Kopf versehenen Cylin
dessen breitere Stirnfläche in prismatischer Bahn dem
freier Hand zu bewegenden Backenpaare parallele Führu
sichert. Für gewöhnlich genügt Einstellung der Spaltweite n
Augenmass. Man verfährt hierbei am besten so, dass man
kleine Lichtöffnung, während man den mit einem kleinen Lo
versehenen Backen bewegt, nach ihrem Aussehen im dur
fallenden Lichte beurtheilt. Die Einstellung der Spaltweite
verlangtes Mass erfordert jedoch stets die Zuhilfenahme

Mikroskopes. Nach dem Einstellen wird der Schlitten in die Stirnfläche des Collimators, doch nur so weit eingeschraubt, dass sein vorspringender Kopf ringsum, auch von der später darüberzudeckenden Flussspathscheibe *l*, noch einen kleinen Abstand behält, damit er beim Einstellen des Spaltes nach der brechenden Kante des Prismas die nöthige Drehung zulässt, ohne sich vorzeitig auf den Collimator festzusetzen oder späterhin dem Auflegen der genannten Scheibe hinderlich zu sein. Die Stirnfläche des Collimators wird schwach mit Luftpumpenfett überzogen, die Scheibe *l* central daraufgelegt und drehend, unter mässigem Druck, aufgerieben.[1] Die Fettschicht ist nicht zu entbehren, wenn man sich nicht den Folgen mangelhaften Verschlusses aussetzen will.

Die conische Axe *p* (Fig. 8) ist in einem seitlich an den Collimator *c* angegossenen, cylinderförmigen Ansatz *A* gelagert. Ihr unteres Ende bildet das Trieb *o*, das in die direct in das dickwandige Rohr *B* gefräste Zahnstange eingreift, die der Linse des Collimators, die in diesem Rohre befestigt ist, eine axiale Verschiebung von 36 *mm* sichert. Die Axe trägt eine Theiltrommel, womit sich der Abstand der Linse vom Spalt

---

[1] Das Aufreiben der Flussspathscheibe *l* erfordert einige Vorsicht. Gar zu leicht wird dabei auch die der Spaltöffnung zunächstliegende Fläche mit Fett verunreinigt und ihre Lichtdurchlässigkeit vermindert. Auch empfiehlt es sich, die Platte nach dem ersten Evacuiren des Apparates nochmals, diesmal jedoch ohne Druck, aufzureiben, da anfänglich gern kleine Luftbläschen in der Fettschicht zurückbleiben, die sich späterhin zuweilen zu einem Canal vereinigen, durch den die Luft in den Apparat einströmt. Die Stirnfläche des Collimators, worauf die genannte Scheibe sitzt, kann kaum sorgfältig genug hergestellt werden. Sie sollte immer nach der Farbenplatte auf Planheit geprüft werden. Zeigt sie hiebei merkliche Unebenheiten, dann darf man dauernden Verschluss von ihr nicht erwarten. Je correcter die Verschlussflächen, desto dünner kann die Fettschicht sein, je dünner aber die Fettschicht, desto grösser die Verschlusssicherheit. Soll die Scheibe wieder abgenommen werden, dann vergewissere man sich vorher, dass die überragende Stirnfläche frei von Staub ist. Andernfalls können beim seitlichen Verschieben der Scheibe — auf andere Weise lässt sie sich nicht abnehmen — in den Dichtungsflächen leicht Risse entstehen. Flussspath ist gegen mechanische Eindrücke nicht sehr widerstandsfähig. Den überstehenden Theil der Stirnfläche tiefer zu legen als die Verschlussfläche, wonach sich die Scheibe gefahrlos ablösen liesse, ist des Planschleifens halber nicht rathsam.

auch nach dem Evacuiren auf gewünschtes Mass bringen lä
Von Zeit zu Zeit muss die Axe frisch geschmiert werden,
das Luftpumpenfett schon nach kürzerem Gebrauch seine
schmeidigkeit einbüsst und alsdann den Gang der Axe erschw
Dicht hinter der genannten Linse, auch im Grunde der Za
stange ist das Rohr B mehrmals durchbohrt, damit die G
füllung des Apparates ungehindert circuliren könne. Das
besonders für den Beginn des Evacuirens wichtig.

Die Axen der Linsen vom Collimator und von
Camera bilden, wenn die Strahlen der Wellenlänge 185·2
(Aluminiumlinie Nr. 32) die Camera conaxial durchsetzen, w
sie, beiläufig bemerkt, auf die Mitte der Platte fallen, mit einar
einen Winkel von 131°. (Er ist in Fig. 2 mit β bezeichnet.)
dieser Stellung der Rohre ist nur die Aufnahme der der genann
Wellenlänge zunächstliegenden und verhältnissmässig w
umfangreichen Region möglich. Das weiter abgelenkte Spect
verlangt zu seiner Aufnahme eine Verminderung dieses Wink
Ich habe diese dadurch erreicht, dass ich zwischen das Gehäu
(Fig. 4) und den Collimator c der Reihe nach vier keilförm
Gewinderinge[1] C_1, C_2, C_3, C_4 einschaltete, wodurch der Wink
wie auch die strichpunktirten Linien der Fig. 4 zeigen, von 1
auf 127°, 123°, 119° und 115° vermindert wurde. Eine n
grössere Annäherung der beiden Rohre, als sie dem Einscha
des vierten Keilringes folgte, und die die Aufnahme des ü
den Rand der Platte hinausfallenden Spectrums verlangte,
bot die starke, auch aus Fig. 4 ersichtliche Verstümmelung,
der Lichtkegel durch die dem Prisma zunächstliegende Inn
wand der Ringe erlitt.

Das Prismastativ f (Fig. 5) gleicht den gewöhnlic
Stativen dieser Art. Es sitzt auf einer conischen Stahlaxe

---

[1] Auf die Herstellung dieser Ringe ist beim Entwerfen des Appa
Rücksicht genommen und zugleich die Drehbank, die zur Bearbeitung di
mit einer Vorrichtung versehen worden, die dem Collimator die vorsch
mässige Stellung zur brechenden Kante des Prismas sichert, sobald die Ä
rung des Axenwinkels vorgenommen wird. Ohne solche Vorrichtung ist
Herstellung dieser Ringe, die die Collimatoraxe um deren ursprünglichen Sch
punkt mit der Cameraaxe und zugleich in der durch diese beiden Axen gele
Ebene zu drehen haben, nicht ausführbar.

die excentrisch in die starke Scheibe *g* eingeschraubt ist. Das Prisma *e* ist mit drei kleinen Wachsplättchen auf den oberen Teller des Stativs aufgeklebt.[1]

Die Justirung der Prismastellung, die mit dem Gauss- oder mit dem Abbe-Ocular zu erfolgen hat, kann im Apparat selbst nicht vorgenommen werden, weil hierin die drei Stellschrauben des Stativtellers nicht mehr zugänglich sind. Ich verwende hierzu einen andern Spectralapparat. Für die Normirung der brechenden Flächen ist die sorgfältig plan geschliffene ringförmige Basis der Scheibe *g* massgebend. *E* ist eine Handhabe, womit das Stativ auf den Boden des Gehäuses niedergelassen und auch beim Einstellen in das Minimum der Ablenkung gedreht wird, was immer nur um die Mitte von *g*, nie um die Axe *D* erfolgen darf. Die Handhabe *E* muss vor dem Aufsetzen des Deckels *h* (Fig. 1) herausgeschraubt werden, jedoch ohne dass dabei die Stellung des Prismas auch nur im geringsten gestört wird.[2]

Die Camera *k* (Fig. 6) ist der wichtigste Theil des ganzen Apparates, weil die Überführung der Platte in das Vacuum nicht unbeträchtliche Schwierigkeiten bietet.

Von jedesmaliger Evacuirung des Apparates nach dem Einlegen einer frischen Platte in das Apparatgehäuse, wobei die Schwierigkeit des Überführens der Platte in das Vacuum ausgeschlossen wäre, ist selbstverständlich abzusehen, wenn nicht die Hilfsoperationen zur Aufnahme übermässig viel Zeit in Anspruch nehmen und sich beim Wechsel der Platte ihrem ganzen Umfang nach wiederholen sollen. Am zweckmässigsten

---

[1] Diese Verbindung ist sehr solid. Ich habe sogar, weil das Prisma, wenn es einmal im Vacuum gewesen war, zu fest auf dem Teller haftete, späterhin die Wachsbefestigung gemieden und dafür eine Schraubenverbindung angewandt.

[2] Das gelingt leicht, wenn man *E* unter kräftigem, in Richtung seiner Axe, mithin auch auf die Basis der Scheibe *g* ausgeübten Druck löst und dann behutsam herausschraubt. Die Reibungswiderstände zwischen *E* und *g* einerseits und zwischen *g* und dem Boden des Gehäuses *a* anderseits sind von so verschiedener Grösse, dass die Operation leichter gelingt, als es vielleicht der Beschreibung nach scheinen mag. Die Handhabe im Gehäuse zu lassen, habe ich nie gewagt, weil sie zu schädlichen Reflexionen der Strahlen hätte Anlass geben können.

wäre es, wenn sich die Platte ohne Störung des Druckes in d
Vacuum befördern liesse. Das ist aber nicht möglich. E
kleine Menge Luft nimmt die Platte stets mit sich, auch we
der unvermeidliche todte Raum, der um sie ringsherum ble
noch so knapp bemessen ist. Je kleiner jedoch die mitgenomme
Luftmenge ist, desto schneller geht ihre Beseitigung von statt

Zuweilen ist eine kleine Menge Luft auch ohne allen sch
lichen Einfluss auf die Aufnahme. Es kann vorkommen, d
sich das Spectrum der hinzugetretenen Luft gegenüber indi
rent verhält, und dabei lassen sich, wie ich wiederholt erfah
habe, auch ohne erneute Evacuirung des Apparates, mehr
Platten hintereinander mit zufriedenstellendem Erfolg belicht

Die Überführung der Platte in den evacuirten Apparat s
schnell, ohne besondere Anstrengung und vor Allem un
Wahrung des luftdichten Verschlusses der Camera vor s
gehen. Diesen Forderungen entspricht die in Fig. 6 abgebild
Camera. Sie hat die Einrichtung eines Hahnes. In das mit d
Camerarohr *d* durch vier Schrauben (Fig. 1) verbundene Ha
gehäuse *k*, das bei *s* und *s'* schlitzförmig und diametral dur
brochen ist, ist das Küken *w* sorgfältig eingeschliffen. Die g
metrische Axe des Kükens schneidet die Axen der beiden Lin
und bildet mit der Axe der Cameralinse einen Winkel von 24°
Unmittelbar hinter dem Schlitz *s* hat das Küken, als exacte F
setzung dieses Schlitzes, eine Nuthe *F* von wenigen Millimet
Tiefe. Die Nuthe hat die Bestimmung, die Cassette *G* a
zunehmen, die beim Einlegen zuerst aus freier Hand unter d
hakenförmigen Vorsprung H_1 geschoben, dann mit einem
gespitzten Holzstäbchen (Pfaffenhütchenholz, *Evonymus eu
paeus*), das in die neben *K* sichtbare Vertiefung eingreift,
Richtung des Pfeils bis auf den Grund der Nuthe *F* nied
gedrückt und durch Verschiebung nach rechts, wobei der kle
Cassettenansatz *K* unter den hakenförmigen Vorsprung H_2 lä
im Küken befestigt wird. Durch Drehung des Kükens um 180
der Index, der hiebei zum Anhalt dient, ist beim Einlegen
Cassette nach unten gekehrt und darum in Fig. 6 nicht si
bar — gelangt die Platte mit der Cassette nach *r'*, wo
Belichtung erfolgt. Mit der Linsenaxe bildet die Platte ei
Winkel von 26° (γ). Dreht man das Küken rückwärts, bis si

und *u* berühren, dann springt die Cassette beim Verschieben nach links, indem sie sich um H_1 dreht und auf der horizontalen Fläche von *s* hingleitet, aus dem Gehäuse heraus, wonach sie — Stellung der Cassette in Fig. 6 — ungehindert erfasst und aus dem Schlitz herausgezogen werden kann.

Die Cassette *G* (Fig. 6 und 7) hat keinen Schieber, sondern nur einen Deckel. Ihr Zweck ist überhaupt nicht, die Platte vor schädlichem Licht, sondern nur die Verschlussfläche vor Glassplittern zu schützen. Da sie ohne Schieber ist, muss das Einlegen in das Küken bei Dunkelkammerlicht geschehen, wenn man nicht, wie ich es thue, alles Licht dabei meiden will.[1]

Die photographische Platte *r* (Fig. 6 und 7) ist 44 *mm* lang und 7 *mm* breit. Dieses Format genügt vollständig. Seine Länge könnte sogar, dem Umfange des scharf definirten Spectrums angemessen, noch kürzer sein. Die Plattenbreite ist von dem Durchmesser des Camerahahnes abhängig, den ich aus technischen Gründen nicht zu vergrössern vermochte.[2]

II. Der verbesserte Apparat.

Der beschriebene Apparat zeichnete den stärker abgelenkten Theil des neuen Spectralbezirkes weniger klar als das übrige Ultraviolett, wofür er ursprünglich construirt war. Die scharfgezeichnete Strecke jeder Aufnahme nahm ausserdem mit der Wellenlänge sichtlich ab und umfasste am Ende nur noch wenige nahe beieinanderstehende Linien. So kam es, dass das Spectrumbild an der Wirkungsgrenze des Apparates, in muthmasslichem Widerspruch mit seiner wahren Gestalt, beinahe nur noch einem Continuum glich. Nicht zum kleinsten

---

[1] Die Platte kann zwar auch ohne Cassette in das Küken eingelegt werden, doch ist dann die Gefahr, dass Glassplitter von ihrem Rande abspringen und zwischen die mit einander correspondirenden Kanten der Hahnöffnungen *s* und *F* gelangen, wodurch den Verschlussflächen empfindliche Verletzungen drohen, so gross, dass ich zum Weglassen der Cassette nicht rathen kann.

[2] Die in Fig. 8 aufgezeichneten Spectrallinien stellen den jenseits der Wellenlänge 198·8 $\mu\mu$ liegenden Bezirk des Aluminiumspectrums dar. Das Spectrum ist eine Copie meiner ersten von Erfolg begleiteten Aufnahme dieses Spectralgebietes. Die fünf Linien rechts von der Plattenmitte bilden den Grenzbezirk des schon von Stokes entdeckten Ultravioletten, die übrigen Linien sind neu und zur Zeit nur mit meiner neuen Platte nachweisbar.

Theile trug allerdings zu dieser Unklarheit der dichte Star
und die kräftige Wirkung der in Betracht kommenden Linie
bei. Doch auch andre Übelstände hatten sich bei fortgesetzte
Gebrauch des Apparates herausgestellt und die Beobachtur
der neuen Strahlen noch in anderer Beziehung erschwert. D
Änderung der Spaltweite war, schon da sie sich ohne Öffne
des Apparates (Abnahme der Flussspathscheibe) nicht ermö
lichen liess, mit empfindlichem Zeitverlust verbunden; das Ei
stellen des Prismas in das Minimum der Ablenkung liess sic
nur durch Probiren bewerkstelligen, wobei der Apparat wiede
holt geöffnet und jedesmal von neuem evacuirt werden musst
die Verschiebung der Cameralinse konnte ebenfalls nur a
geöffneten Apparat vorgenommen werden; die Aufnahme unte
einanderstehender Spectra war, da sich weder die Platte, no
die wirksame Spaltstrecke dem Zweck entsprechend verschieb
liess, gänzlich ausgeschlossen und hiedurch die Focussirun
sowie das Aufsuchen neuer Linien sehr erschwert; die Änderu
des Winkels der beiden Rohraxen nahm noch mehr Zeit
Anspruch und forderte ausserdem besondere Aufmerksamke
wenn die eingeschalteten Keilringe (Fig. 4) nicht zugleich ih
gegenseitige Stellung ändern und den Collimator aus der vo
schriftsmässigen Richtung bringen sollten.

Diese Übelstände haben bei Ausführung des zweiten App
rates, den die Fortsetzung meiner Untersuchung veranlasst hat
eingehende Berücksichtigung gefunden.

Die Einrichtung dieses verbesserten Instrumentes zeig
die Tafeln III und IV. Die Abbildungen sind getreue Copien d
von mir zum Bau des Instrumentes benützten Zeichnungen.

Tafel III zeigt in Fig. 16 das Gehäuse im Horizontalschni
in Fig. 17 die Camera, ebenso durchschnitten, in Fig. 18 d
vollständigen Apparat im Aufriss, in einer Stellung, wobei d
Collimatoraxe eine Normale zur Aufrissebene bildet und G
häuse und Camera halbseitig und senkrecht zur Collimato
axe durchschnitten sind. Der Grundriss dazu befindet sich a
Tafel IV. Alle Zeichnungen sind in halber natürlicher Grös
ausgeführt.

Ein starker ringförmiger, mit 3 Nivellirschrauben versehen
Dreifuss *a* trägt in seiner Mitte das zur Aufnahme des Prism

dienende Gehäuse, den Hauptkörper des ganzen Apparates. Das Gehäuse setzt sich zusammen aus dem dickwandigen Conus *b*, der mit dem Dreifuss *a* fest verbunden ist, dem Deckel *c* und den, den Conus dicht, aber drehbar umschliessenden Mantel *d*. Der Conus trägt den Collimator *e*, der durch den Mantel *d* hindurch geht, dieser das Camerarohr *f*, dessen Auszugsrohr in einzelnen Fällen bis in den Conus hineinragt. Damit sich der Mantel hierbei auf dem Conus drehen könne, was bei Änderung des Winkels, den die Linsenaxen von *e* und *f* (Fig. 19) mit einander einschliessen, nöthig ist, und damit ferner die Strahlen, wenn sie vom Prisma kommen, bei jeder Stellung der beiden Rohre die zu ihrem Eintritt in die Camera erforderliche Öffnung im Conus finden, ist der Mantel für den Collimator von d_1 bis d_2, und umgekehrt der Conus für das Auszugsrohr der Camera von b_1 bis b_2 (Fig. 16) schlitzförmig durchbrochen. Der Winkel der genannten Axen lässt sich auf diese Weise ohne Störung des Vacuums und ohne Zeitaufenthalt von 142° bis 105° stetig ändern.[1]

Der Conus *b* (Fig. 18) ist im Boden conaxial durchbohrt, damit das Prisma von aussen her gedreht werden könne. Diese Drehung vermittelt eine in diese Bohrung eingepasste konische Stahlaxe *g*, die im Innern des Conus, im Vacuum also, die starke Scheibe *h* mit dem daraufsitzenden, drehbaren Prismastativ *i* und dem Flussspathprisma *k* (70° br. Wkl.) und unter dem Conus, also ausserhalb des Vacuums, die Alhydade *l* mit ihrer Klemmvorrichtung *m* trägt. Die Schraube *n* beugt dem Lockern der Axe *g* in ihrer Lage vor, das beim Öffnen des evacuirten Gehäuses, da der Axe in ihrer Längsrichtung eine kleine Beweglichkeit gestattet ist, leicht eintreten könnte. Die Alhydade ist mit einem Nonius versehen, der Ablesung bis zu 6 Minuten gestattet; ihre Beweglichkeit umfasst einen Winkel von 26°. Die Klemmvorrichtung der Alhydade wirkt beim Anziehen der

[1] Da der kleinste Axenwinkel des älteren Apparates 131°—16° = 115° umfasste, so sind die Rohre beim neuen Apparat einander um 10° näher gerückt. Noch grössere Beweglichkeit, die wohl erwünscht gewesen wäre, hätte sich nur auf Kosten der Verschlusssicherheit des Gehäuses erreichen lassen. Massgebend für den Verschluss ist die zwischen d_2 und b_1 (Fig. 16) bei weitestem Abstand der Rohre verbleibende Dichtungsfläche.

Klemmschraube nur auf den untern Theil des sehr kräftige
Theilkreisringes. Auf diese Weise wird die Axe *g* beim Fes
klemmen der Alhydade vor jedem seitlichen Druck bewahr
was zur Erhaltung der Einstellung des Prismas unbeding
nöthig ist.

Die Scheibe *h* wird mit dem senkrecht zu ihrer Basis au
gestellten Prisma ebenso in den Conus eingeführt wie in da
Gehäuse des ersten Apparates. Der Deckel *c* verbindet de
Conus mit der nach der Luftpumpe führenden Glasröhre *o*. De
an seiner unteren Fläche sitzende Gewindering *p* erfüllt eine
dreifachen Zweck: er beugt dem zu plötzlichen Druckwechs
beim Evacuiren oder beim Öffnen des Apparates vor, hält all
schädliche Licht zurück, das durch die Wand der Glasröhre
in den Apparat gelangen könnte und bietet der Schraube, wom
der Deckel von seinem Dichtungssitze beim Öffnen des Conu
losgezogen wird, in seinem Innengewinde den nöthigen Wide
halt.[1]

Am Mantel *d* (Fig. 19) sitzt, diametral zum Cameraroh
der Bleicylinder *q*, der den einseitigen Druck ausgleicht, de
die Camera auf den Conus bei Weglassung des Gegengewicht
ausüben würde. Zur Einstellung des Winkels, den die Axe
der beiden Linsen mit einander bilden, dient der Index *r*, d
sich dicht über dem in ganze Grade getheilten Kreis des Dre
fussringes bewegt. Drehbar auf feinem Gewinde des Conus
sitzt der mit 6 Griffen versehene Ring *s*. Er kommt nur dan
zur Anwendung wenn der Mantel abgenommen werden sol

---

[1] Zum Losziehen des Deckels *c* wird die Glasröhre herausgenomme
über die Horizontalfläche des Mantels eine in der Mitte durchbohrte, v
Deckel etwas abstehende Messingplatte gelegt und eine mit Bundansatz u
Kreuzgriff versehene Schraube durch das Loch der Platte hindurch in d
Innengewinde von *p* gedreht. Sobald sich hiebei der Bund auf die Platte a
setzt, springt der Deckel von seinem Sitz los.

[2] Das Abnehmen des Mantels geschieht wie folgt. Man dreht ihn, ind
man die Camera mit der rechten und das Bleigewicht mit der linken Ha
erfasst, in Richtung des Laufes der Uhrzeiger so weit, als es der Apparat zuläs
schraubt den Ring *s*, wobei er in entgegengesetzter Richtung zu drehen ist, fe
und dreht den Mantel wieder zurück. Hiebei läuft der Mantel, unter Leitung
mit ihm durch Reibung verbundenen Ringes in einer Schraubenbahn am Co
in die Höhe und zerreisst dabei die das Auseinandernehmen hindernde F

t_1 und t_2 sind die Triebaxen der Auszugsrohre der beiden Linsen (120 *mm* Focalweite d. Wellenl. 589 μμ). Die zugehörigen Zahnstangen sind auch hier wieder, wie bei dem ersten Apparat direct in die Auszugsrohre gefräst und zur bessern Gascirculation an mehreren Stellen durchbohrt. Jedes Rohr ist mit einer Millimetertheilung versehen, wonach die Stellung der Linsen, durch die mit durchsichtigen Scheiben verschlossenen Rohransätze u_1 und u_2 nach einem dicht über der Theilung angebrachten Index bequem abgelesen werden kann. Die Auszugsrohre lassen sich umkehren, so dass einmal das mit der Linse verschlossene Ende und dann das andere dem Prisma zugekehrt ist. Auf andere Weise lassen sich die Linsen nicht in dem Masse verschieben, wie es die Focussirung der neuen Strahlen neben der Focussirung der minderabgelenkten verlangt. Zum Umkehren der Auszugsröhre müssen Collimator und Camerarohr vom Gehäuse abgeschraubt werden.[1]

Die Camera hat auch hier wieder die Form eines Hahnes, nur mit dem Unterschied, dass diesmal die Axe des Kückens nicht rechtwinklig, wie bei dem ersten Apparat, sondern parallel[2] zur brechenden Kante des Prismas gerichtet ist.

---

schicht. Der Mantel ruht alsdann nur noch auf dem Ringe und kann, nachdem man zuvor den Collimator herausgeschraubt hat, ohne Mühe vom Conus abgehoben werden. War der Apparat längere Zeit evacuirt und wurde die Stellung der Röhre öfters geändert, dann gelingt die Trennung des Mantels vom Conus nur bei grösserem Kraftaufwand. Dies auch der Grund, wesshalb sich zur Handhabe Camera und Gegengewicht besser als die Griffe des Ringes eignen.

[1] Auf die Herstellung der Auszugsrohre ist grosse Sorgfalt verwendet worden, da andernfalls die Conaxialität der Linsen bei ihrer Verschiebung nicht gewahrt bleibt, ein Umstand, der weniger beim Prisma, als mehr beim Gitter Berücksichtigung verlangt, sobald dies zur Bestimmung der Wellenlängen angewandt werden soll.

[2] Auf diese Weise wird es möglich, der photographischen Platte jede gewünschte Schiefstellung zur Linsenaxe zu geben, eine Forderung, die, wie bereits vorstehend erörtert wurde, durch die eigenthümliche Krümmung der Brennfläche des angewandten Flussspathkörpers entstand. Noch einen andern Vortheil bietet diese Anordnung: sie gewährt den zur Verschiebung der Platte erforderlichen Raum und damit die Möglichkeit der Aufnahme untereinanderstehender Spectra. Diesen beiden Vortheilen steht allerdings der Nachtheil gegenüber, dass der todte Raum, der die Platte im Küken umgibt, und demnach auch die Luftmenge, die die Platte mit in das Vacuum nimmt, verhältnissmässig

Der Mantel a' des Camerahahnes ist mit dem Camerarohr durch Schrauben verbunden. Das exact eingeschliffene Küken trägt in einer geräumigen, einseitig offenen Aussparung (der in Fig. 17 und 18 der Taf. III nicht schraffirte Theil) einen, an der verticalen Fläche c' sehr solid befestigten Verticalschlitten d', dessen Schieber e' (Fig. 19) durch die Mutter f' (Fig. 18) mit der grobgängigen Gewindespindel g' (1 *mm* Ganghöhe) in Verbindung steht und damit auf und ab bewegt werden kann. Mit dem Schieber e' ist ein länglicher Rahmen h' fest verbunden, der die sorgfältig eingepasste Cassette i' aufnimmt, wenn man sie durch die Öffnung k' in die Camera schiebt. Schieber und Platte haben sonach dieselbe Bewegung.

Die Stellung der Platte im Kücken ist so angeordnet, dass die der Plattenkante (kurzen) parallele Mittellinie der lichtempfindlichen Seite mit der geometrischen Axe des Kückens zusammenfällt. Hieraus erwächst der Focussirung, worüber später die Rede sein wird, der wesentliche Vortheil, dass alle auf die Plattenmitte fallenden Strahlen beim Drehen des Kückens ihren Ort beibehalten.

Auf der Gewindespindel g' sitzt eine Theiltrommel l', woran die Verschiebung der Platte abgelesen wird. Zugleich gibt die Trommel Aufschluss über den jeweiligen verticalen Stand (verticaler Abstand der Plattenmitte von der Axe der Cameralinse) der Platte. Zu diesem Zwecke ist sie mit einer doppelwandigen Büchse p' durch Gewinde drehbar verbunden. Die Büchse kann sich, infolge der ihr durch den Stift r' ertheilten Geradführung, nur in verticaler Richtung verschieben. Sie wird sich daher, und weil anderseits die Gewinde von Büchse und Spindel dieselbe Steigung und dieselbe Richtung haben, bei

---

gross ausfällt. Überlegt man aber, dass eine einzige solche Platte bis zu 1[...] Spectren ausreicht, wozu der erste Apparat ebensovieler Platten bedurfte, da[...] wird man zugeben müssen, dass der neuen Camera auch in dieser Hinsicht d[...] Vorzug gebührt. Es sei nicht unerwähnt, dass diese Camera viel jünger[...] Datums ist als der übrige Apparat. Der zur mikrometrischen Bewegung d[...] Platte erforderliche Mechanismus ist das Endergebniss vieler Überlegung[...] und seiner Ausführung, weil deren Gelingen zweifelhaft erschien, bin ich e[...] dann näher getreten, als die Mängel der älteren Camera, die ich anfänglich [...] dem in Rede stehenden, verbesserten Apparat verwendet hatte, unabweisb[...] dazu drängten.

Drehen der Trommel genau so wie die Platte bewegen. Die Aussenwand der Büchse *q'* (Fig. 18) ist schlitzförmig durchbrochen und die eine Seitenwand dieses Schlitzes mit einer Millimetertheilung versehen, woran die ganzen Millimeter abgelesen werden. Den Index dazu trägt die Trommel *p'* in Gestalt einer eingedrehten, ringsumlaufenden Linie. (In Fig. 18 auf Taf. III zeigt diese Linie auf den 6. Millimeterstrich.) Die Trommeltheilung dient zur Ablesung der Zehntelmillimeter, wozu die Büchse *q'*, dicht über dem genannten Schlitz, den Index trägt. Zum schnellen Verschieben der Platte hat der für gewöhnlich zum Einstellen benutzte, ränderirte Knopf *s'* einen Griff *t'*.

Die unter dem Kücken angebrachte Schraube *u'* (Fig. 18) kommt nur beim Auseinandernehmen der Camera, wobei das Kücken mit der Schraube etwas zu lockern ist, zur Anwendung.

Die Cassette in Fig. 9 und 10 (Tafel II) in natürlicher Grösse abgebildet, besteht aus einem messingenen, nur mit Deckel und Feder versehenen Rahmen. Der Rahmen ist aus einem Stück hergestellt. Einen besonderen Verschluss hat der Deckel nicht, da er sich beim Zuklappen hinreichend fest in den Falz der Cassette einklemmt. Zum Öffnen des Deckels dient ein vertieft darin liegendes Knöpfchen. Die Cassette ist auswendig ganz glatt gehalten, um ihr Einschieben in die Camera zu erleichtern.

Die photographische Platte misst 37 und 12·5 *mm* und ihre Verschiebung in der Camera, die in Richtung der Schmalseite erfolgt, 9 *mm*. Fig. 11 zeigt den Schlüssel, womit die Cassette aus der Camera herausgezogen wird.[1]

Dreht man das Küken *b'* (Fig. 19), nachdem man die Cassette hineingeschoben hat, mit der Handhabe *l'* in Richtung des Pfeils, so verschliesst es zuerst die Öffnung *k'* und damit zugleich seinen Innenraum, der von da an mit der äussern Luft nicht mehr in Verbindung steht. Bei fortgesetzter Drehung gelangt

[1] Beim Gebrauch steckt man den Schlüssel in das aus Fig. 9 ersichtliche Schlüsselloch der Cassette, wo er beim Drehen um seine Axe bei einer gewissen Stellung plötzlich um die Höhe seines hakenförmigen Kopfes tiefer in das Loch eindringt und gleich darauf von einem das Schlüsselloch quer durchsetzenden Stiftchen gefasst und mit der Cassette fest verbunden wird.

das Küken *b'* (Fig. 17) mit seiner seitlichen Öffnung an d
Rohrmündung *m'*, gibt durch diese die mitgeführte Luft a
das Vacuum ab und setzt seinen Hohlraum, worin sich d
photographische Platte befindet — die Platte und die inne
Mechanik des Kükens sind der Deutlichkeit halber in Fig. 1
weggelassen — mit dem des evacuirten Apparates in d
zur photographischen Aufnahme erforderliche Verbindung. I
dieser Stellung des Kükens steht die Platte der Mündung *n*
gegenüber, durch die der Strahlenfächer in die Camera eintrit
Die Platte kann hier beliebig gegen die Axe der Cameralins
geneigt und sonach auch mit jedem Punkte der Diakaustik zu
Berührung gebracht werden. Der Neigungswinkel der Plat
wird an dem in ganze Grade getheilten Kreis (Fig. 19) de
Mantels *a'* abgelesen, wozu das Küken den Index trägt. W
man die Cassette aus der Camera herausnehmen, so dreht ma
das Küken zurück, bis sich der Arreturstift *n'* (Fig. 19) an da
Excenter *o'* legt. In dieser Stellung, die durch geeignetes Drehe
des Excenters *o'* adjustirt werden kann, lässt sich die Casset
mit dem Schlüssel ungehindert herausziehen. Das Herausziehe
geschieht, ebenso wie das Hineinschieben, weil die Casset
keinen Schieber hat, bei Dunkelkammerlicht oder im Finstern

Soll die Camera um den Conus *b* gedreht werden, so die
als Handhabe sie selbst und ausserdem das ihr gegenübe
liegende Gegengewicht *q*.[2]

Der Spaltschlitten ist der werthvollste Theil des ganze
Apparates. Er bot nicht von Anfang an den Comfort, der ih
gegenwärtig eigen ist. Erst nach und nach hat er, den Erforde

[1] Der Plattenwechsel lässt sich auch bei Tageslicht ausführen. Hier
wird die Cassette schon in der Dunkelkammer in eine lichtdichte Schei
geschoben — in der Zeichnung ist sie weggelassen — die an den Mante
befestigt, eine Fortsetzung des Schlitzes *k* bildet. Aus der Scheide schiebt m
die Cassette mit dem Schlüssel (Fig. 11) direct in die Camera. Ich benutze di
Vorrichtung nicht, einmal weil ich seit langer Zeit alle Platten im Finsteren e
lege, und dann, weil die feinere Vacuumprobe (nach dem Verhalten der Geissl
röhre) einen mindestens halbdunkeln Arbeitsraum verlangt.

[2] Bei kühler Witterung erfordert das Drehen der Camera ziemlichen Kra
aufwand. Zuweilen habe ich den Apparat vorher erwärmen müssen. Ich ha
hierzu den Mantel mehrmals mit angewärmten Tüchern umhüllt, da ich, um d
Apparat nicht einseitiger Bestrahlung auszusetzen, im Arbeitszimmer nie he

nissen der Aufnahmen entsprechend, die vollständigere Einrichtung erhalten, die Fig. 12, 18 und 19 zeigen. Seine hermetische Verbindung mit dem Collimator vermittelt dessen, mit einer dünnen Fettschicht überzogene plane Stirnfläche, worauf er mit der Rückenfläche seines Gehäuses fest haftet, sobald man ihn unter mässigem Druck einigemal rück- und vorwärts dreht. Seine mit dem Collimator conaxiale Führung übernimmt der Ring *a''* (Fig. 19), der, mit Gewinde versehen, zugleich zum Trennen beider dient, wozu er gegen den benachbarten Ansatz des Collimators zu schrauben ist. Löst man die Schraube *b''* (Fig. 19), dann lässt sich der Schlitten ringsum drehen. Das ist zweckmässig, da die Fettschicht, die den Schlitten mit dem Collimator verbindet, auf diese Weise sehr gleichmässig, wie es guter Verschluss verlangt, vertheilt wird. Es empfiehlt sich, das Drehen des Spaltes nach dem ersten Evacuiren des Apparates noch einigemal zu wiederholen. Die Spaltmechanik, mit Ausnahme der Trommeln, liegt in dem Gehäuse *d''* (Fig. 19), das nach dem Lichtquell hin mit dem conaxial durchbohrten Deckel *e''* luftdicht verschlossen ist. Die Öffnung des Deckels wird mit einer Scheibe aus Flussspath oder mit einer sehr dünnen Quarzscheibe *g''* (0·5 *mm*) verschlossen. *f''* ist ein locker aufgepasster Gewindering, der zum Lösen der Fettverbindung zwischen Deckel und Gehäuse dient. Von den kleinen Schiebern *h''* wird später, bei Besprechung der Entladungsröhren für die Vacuumaufnahmen, die Rede sein.

Der Spaltschlitten (Fig. 12, Taf. II) hat zwei Spalte, einen für die Breite der Linien, den andern für deren Länge. Die beiden Spalte kreuzen sich unter einem Winkel von 90°. Den Breitenspalt bildet das Backenpaar *i''*, den Längenspalt das Backenpaar *k''*. Die Backenpaare laufen mit ihren Spaltseiten so dicht übereinander, dass sämmtliche Spaltränder nahezu in derselben Ebene liegen.[1]

[1] Der senkrechte Abstand der Spaltränder, in Richtung der Linsenaxe gemessen, beträgt ungefähr 0·01 *mm*, eine Differenz, die in der Aufnahme nicht mehr zum Ausdruck gelangt. Das Bild der Spaltöffnung, die Spectrumlinie, wird demnach ringsum, also auch an den Enden, die bei anderen Apparaten an Klarheit oft zu wünschen übrig lassen, gleichmässig scharf erscheinen, ein Vortheil, den man bei Aufnahme untereinanderstehender Spectra, die exacten Anschluss (Wellenlängenbestimmung) haben müssen, besonders schätzt.

Die Bewegung der Spaltbacken erfolgt durch drei Mikro-meterschrauben. Der Breitenspalt hat eine Mikrometerschraube, der Längenspalt zwei. Die eine hiervon steht direct mit dem beweglichen Backen des Längenspaltes in Verbindung, mit ihr wird die Länge der Spaltöffnung eingestellt, mit der andern lässt sich dasselbe Backenpaar längs dem Breitenspalt hinbewegen, mithin der Ort der den Strahlen geöffneten Spaltstrecke nach Erforderniss verändern. Auf diese Weise kann man die Gesammtlänge des Spaltes in beliebig viele Strecken theilen, die bei der Belichtung ebensoviele, sich scharf aneinander schliessende Spectra geben.

Der Breitenspalt hat Backen (i'') aus gehärtetem Stahl. Sie sind zwischen Schienen, auf einer, der lichten Weite des Schlittengehäuses entsprechenden, starken Scheibe, die die Grundplatte für die ganze Spaltmechanik des Vacuums bildet, exact geführt. Diese Scheibe ist durch Schrauben mit dem Boden des Gehäuses verbunden und gegen seitliche Verschiebung durch Pressonstifte gesichert. Die Ränder des Spaltes sind wirkliche Schneiden. Der bewegliche Backen ist durch die Mutter l'' mit der Mikrometerschraube m'' (0·2 *mm* Ganghöhe) verbunden, der todte Gang durch die Feder n'' beseitigt. Die Mikrometerschraube trägt die Theiltrommel o'' (1 Trommeltheil entspricht $1^1/_4$ Mikron), ihr Lager den drehbaren Ring p'' mit dem Index. Dieser Ring hat ausserdem auf der Planseite eine eingedrehte Nuthe, die durch den kleinen Einstecker q'' unterbrochen wird. In dieser Nuthe läuft ein aus dem Trommelrand vorstehender Stift. Verengt man den Spalt, so gelingt das, weil Stift und Einstecker bei einer gewissen Stellung der Schraube zusammenstossen, nur bis zu einer Weite von 0·007 *mm*. Die Schneiden können sich sonach, was der Zweck dieser Vorrichtung ist, niemals berühren. Öffnet man den Spalt, so begegnet man demselben Hinderniss bei 0·2 *mm* Weite. Sollen diese Grenzen der Spaltöffnung erweitert werden, was jedoch nur selten vorkommt, dann braucht man nur den Einstecker heraus-zunehmen. In diesem Falle muss man sich aber beim Öffnen des Spaltes die Umdrehungszahl der Trommel merken, da man andernfalls jeden Anhalt für die Spaltweite verliert.

Den Längenspalt bilden ebenfalls Backen aus gehärtetem Stahl. Der obere ist fest, der untere verschiebbar durch die Mikrometerschraube *r''* (0·2 *mm* Ganghöhe). Diese passt mit ihrem cylindrischen, der Länge nach mit einer Nuthe versehenen Kopf exact in die Bohrung der Trommelaxe *s''*, worin sie sich in axialer Richtung ungehindert bewegen kann, am Drehen jedoch durch ein in die Nuthe eingreifendes Gleitstück verhindert wird, das durch einen angedrehten Zapfen mit der Trommelaxe *s''* in fester Verbindung steht. Dreht man die Theiltrommel *t''* (1 Trommeltheil entspricht 0·01 *mm*), dann nimmt ihre Axe *s''* die Schraube *r''* mit, und diese, ihrem Gewinde folgend, verschiebt den beweglichen Spaltbalken, wozu sie sich mit ihrem, über das Mikrometergewinde vorstehenden Kopfe gegen die mit einem Auge *u''* versehene, dadurch ringförmige Endfläche des Backens legt. Die Feder *v''* drückt das Auge stets gegen den Schraubenkopf. Ohne die Feder würde der Backen am Rückwärtslauf der Schraube nicht theilnehmen, sich der Spalt nicht wieder öffnen.

Das Muttergewinde der Mikrometerschraube *r''*, ebenso das der anderen Mikrometerschraube *w''* (0·5 *mm* Ganghöhe) enthält der, in einer kastenförmigen Bahn, in Richtung der Axen seiner beiden Mikrometer geführte Schieber *x''*, worin auch, in schwalbenschwanzförmiger Führung, die Spaltbacken *(k'')* sitzen. Beim Drehen der Trommel *y''* (1 Trommeltheil entspricht 0·1 *mm*) führt der Schieber *x''* den Längenspalt über den Weitenspalt hinweg. Den todten Gang beseitigt die Feder *z''*. Die Theiltrommeln *t''* und *y''* der beiden Mikrometer sind mit Ablesevorrichtungen versehen, die sich von der der Camera nur dadurch unterscheiden, dass die Trommel beide Theilungen, für grobe und für feine Einstellung, und dass dementsprechend die doppelwandigen Büchsen *a'''* und *b'''* beide Indices tragen. Die Millimeterstriche für die grobe Einstellung sind in die Peripherie der Trommel eingedrehte Kreislinien, die Striche zum Ablesen der Bruchtheile haben die übliche axiale Richtung. Den Index für die ganzen Millimeter bildet die scharfe Kante des abgeschrägten Randes der Büchse *(a''', b''')*, den Index für die Bruchtheile ein auf demselben Rande angebrachter, in der Zeichnung mit einem Ringel versehene Strich.

Die Nullstellung des Längenmikrometers t'' entspricht de
Spaltlänge Null, die Nullstellung des zugehörigen anderen
Mikrometers y'' dem höchsten Stand des oberen Spaltrandes
Die Deutung der Ablesung am Längenmikrometer wird insofern
erleichtert, als der vor der Indexkante der genannten Büchse
liegende, also der sichtbare Theil des Massstabes, genau de
Länge der Spaltöffnung entspricht, was auch aus Fig. 12 hervor
geht, wenn man die Stellung des betreffenden Mikrometers t
mit der Länge des Spaltes k'' vergleicht.

Die Schraube c''' nimmt das Gewicht des ganzen Längen
mikrometers auf. Sie sitzt in einem auf der Rückseite de
Schlittengehäuses befestigten Arme, der zugleich die Gerad
führung der doppelwandigen Büchse a''', die hierzu eine
quadratischen Zapfen (bei s'' sichtbar) trägt, in Gestalt eine
Nuthe enthält.

Das oberste der drei Mikrometer wird, nächst dem de
Camera, am häufigsten gebraucht, die beiden andern nur selten
Da die Lampe, die den Arbeitsraum erhellt, der Wärmestrahlun
halber nicht in nächster Nähe des Apparates aufgestellt werde
darf, lässt sich immer nur ein Mikrometer zweckentsprechen
beleuchten. Diesem Übelstand hilft der kleine Reflector d''' a
womit sich auch das andere gehörig erhellen lässt. Die refle
tirende Fläche bildet ein zwischen die beiden, in der Zeichnun
sichtbaren Schienen eingeschobenes Blatt weissen Papiere
Der Reflector hat ein Universalgelenk, womit er in jede ge
wünschte Stellung zur Trommel gebracht werden kann.

Dies der Apparat, womit ich gegenwärtig im Vacuum
photographire.

Vertauscht man das Flussspathprisma mit einem Plan
gitter — ich benützte bei einem Vorversuche ein ausgezeichnete
Rowlandgitter aus Spiegelmetall —, dann lässt sich auc
hiermit das brechbarste Ultraviolett auf eine grosse Streck
jenseits der Wellenlänge 185·2 μμ verfolgen. Die Aufnahm
der mit dem Prisma erreichten allerbrechbarsten Strahlen i
mir jedoch mit dem Gitter bisher noch nicht möglich geworde

Die Schwärzung der Innenflächen. Es bleibt nu
noch ein Umstand zu erwähnen übrig, der bei einem Spectra
apparat zur Photographie im luftleeren Raume besonder

Beachtung verlangt. Das ist die Schwärzung der glänzenden Innenflächen des Apparates. Ein Lacküberzug, wie er bei optischen Instrumenten üblich ist, liess beim Evacuiren starke und lang anhaltende Ausdünstung befürchten. Der Gasrückstand im Apparat würde alsdann neben atmosphärischer Luft auch noch die flüchtigen Bestandtheile des Lacküberzugs enthalten und voraussichtlich den wirksamen Strahlen gegenüber sich nicht indifferent gezeigt haben. Auch würde die Füllung des Apparates mit reinen Gasen, die in Aussicht genommen war zur Unmöglichkeit geworden sein. Ich habe, da chemische Schwärzung der betreffenden Theile mehrfachem Bedenken begegnete, mir auf die Weise geholfen, dass ich die mit einem schellackarmen Russanstrich — der Russ war anhaltend in einem Tiegel geglüht worden — überzogenen Flächen nach dem Trocknen so lange erhitzte, bis sie keine Dämpfe mehr entwickelten. Die Gasabsonderung dieses Anstriches kann, wenn solche überhaupt auf die Dauer stattgefunden hat, nur geringfügig gewesen sein, denn ich habe bisher nicht finden können, dass sie auf die Aufnahme der betreffenden Spectra irgend welchen Einfluss ausgeübt hätte.

Der Fettüberzug der Verschlussflächen und der laufenden Innentheile. Die Verschlussflächen, gleichviel ob ruhende oder laufende, sind, wie bereits vorstehend bei einigen erwähnt wurde, mit demselben Fett überzogen, dessen die Hähne und Schliffe der benützten Geisslerluftpumpe bedürfen. Die feinere Mechanik des Spaltschlittens und der Camera verlangt aber ein dünnflüssiges Schmiermittel. Ich habe hierzu Chronometeröl bester Qualität (Koch, Hildesheim) verwandt und es in möglichst kleinster Menge aufgetragen.

Die Dicke der Fettschicht übt auf die Dauer des Verschlusses der laufenden Flächen merklichen Einfluss aus. Die conischen Axen der Triebe und Mikrometerschrauben werden allerdings hiervon, wie ich stets beobachtet habe, nicht berührt, wahrscheinlich weil ihr Verschlusskegel relativ von grosser Länge ist, umso empfindlicher aber die grossen Conen. — Laufende Metallflächen verhalten sich dem angewandten Fett gegenüber anders als laufende Glasflächen. Ein Glashahn,

auch wenn er noch so sauber eingeschliffen ist, behält im
eine körnige Schliffläche, ein Metallhahn hingegen verliert
fortgesetztem Einschleifen seine anfängliche Rauheit
nimmt eine glatte Fläche an. Die glatte Metallfläche sch
das Luftpumpenfett weniger gut festzuhalten als die
sprechende Glasfläche. Das Fett schiebt sich auf ihr, wie
wiederholt beobachtet habe, nach einigem Gebrauch des Me
hahnes stellenweise zusammen und gibt zur Bildung fett
blösster Stellen der Verschlussfläche Anlass. Gestützt
besondere Versuche, die ich mit fettüberzogenen, opti
planen Metallplatten angestellt habe, halte ich dieses Verha
des Fettüberzuges für die alleinige Ursache des Undichtwerd
der grossen Conen, das sich, wenn sie anhaltend in Gebra
gewesen waren, hin und wieder fühlbar machte. Das ein
sichere Gegenmittel hierfür, das ich bis jetzt gefunden habe
öftere Erneuerung des Fettüberzuges. Es hat sich nun n
vielen Versuchen herausgestellt, dass dem dünneren Fettü
zug auch bei laufenden Flächen der Vorzug gebührt, d
seltener der Erneuerung bedarf als eine dicke Fettschicht.
darf man das Fett nicht so dünn auftragen, dass sich die
schlussflächen gegenseitig angreifen und die Entstehung ri
umlaufender Riffeln veranlassen.

Ist der Apparat längere Zeit in Gebrauch gewesen, d
setzen alle Conen ihrer Bewegung merklichen Widerstand
gegen. In diesem Falle ist es rathsam den Fettüberzug
erneuern. Eine Ausnahme hiervon macht nur die Mikrome
schraube des Breitenspaltes, sie soll so selten als mög
herausgenommen werden aus folgendem Grunde: Wie gle
mässig und dünn man auch den Conus einfetten und u
wie kräftigem Druck man ihn auch in das Gehäuse einfüh
mag, so ist es doch nicht zu umgehen, dass er am evacui
Apparat noch etwas tiefer in sein Lager hineinläuft, wodu
sich die Spaltbacken, im Widerspruch mit dem Mikrometer
demselben Masse einander näherrücken, wie sich der Co
axial verschiebt. Diese Verschiebung kann bis zu mehr
Mikron betragen. Erst bei fortgesetztem, längeren Gebra
wird die Fettschicht stabil und damit das Mikrometer zu
lässig. Dieser Vorgang wiederholt sich selbstverständlich r

jedem Herausnehmen der Mikrometerschraube. Aus diesem Grunde empfiehlt es sich, den Fettüberzug dieser Mikrometerschraube so selten als möglich zu erneuern. Das Mikrometer des Längenspaltes wird von dieser Veränderung der Fettschicht nicht berührt, weil bei ihm Schraube r'' (Fig. 12) und conische Axe s'' in axialer Richtung unabhängig von einander arbeiten. Für die übrigen Conen ist dieses Verhalten der Fettschicht bedeutungslos.

Es liegt die Frage nahe, ob nicht ein anderes Schmiermaterial dem Zweck des Apparates besser entsprechen könne. Käme der Apparat allein in Betracht, dann würde sich wohl ohne allzugrosse Mühe ein solches beschaffen lassen. Aber die Gefahr, die mit Anwendung einer anderen Fettsubstanz für die Erhaltung der Lichtdurchlässigkeit, sowie auch für die Reinheit der Apparatfüllung verbunden ist, hat mich abgehalten, in dieser Richtung Versuche anzustellen.

Die Aufstellung des Apparates.

Der zeitweilig schwere Gang der grossen Conen einerseits und die Zerbrechlichkeit der nach der Luftpumpe führenden Röhre, auch die Stellung einiger zur Aufnahme erforderlichen Hilfsapparate anderseits, fordern für den Apparat einen so festen Stand, dass er selbst beim Drehen mit Hilfe beider Hände, unter Ausübung voller Armeskraft, gegen seitliche Verschiebung gesichert sei, ohne jedoch der zum Nivelliren nöthigen Beweglichkeit zu entbehren.

Ich habe dies in einfacher Weise dadurch erreicht, dass ich die kräftigen Füsse des Dreifussgestelles, worin die Nivellirschrauben sitzen, derart zwischen kräftigen, auf den Experimentirtisch festgeschraubten Holzlagern festgeklemmt habe, dass dem Apparat nur noch eine kleine verticale Bewegung erlaubt ist, wie solche seine wagerechte Aufstellung verlangt.

Die Hilfsapparate.

1. Die Entladungsröhre zur Photographie der brechbarsten Strahlen.

Ich behandle sie ausführlicher, weil sie in der Gestalt, die ich ihr gegeben habe, für die Erschliessung des neuen Bezirkes besondere Bedeutung erlangte.

Gasspectra verlangen für das Ultraviolett Röhren
besonderer Lichtdurchlässigkeit. Gläserne Röhren sind nur
soweit zulässig, als sie eine mit hinreichend ultraviolett du
lässigem Verschluss versehene Öffnung haben. Ohne solc
Verschluss erreicht man, selbst wenn die Röhre zwisc
Lichtquell und Collimator sehr dünnwandig, vielleicht
wenige Hundertel eines Millimeters dick ist, höchstens
Cadmiumlinie Nr. 18 (257 μμ).

a) Röhre mit ultraviolettdurchlässigem V
schluss. Ich verwende zu diesen Aufnahmen Röhren
Längsdurchsicht, die an einem Ende, wie beistehende Fi
zeigt, mit einem Kegel aus Quarz verschlossen sind. Der K
ist 30 *mm* lang, 8 und 11 *mm* dick, seine Kreisflächen s

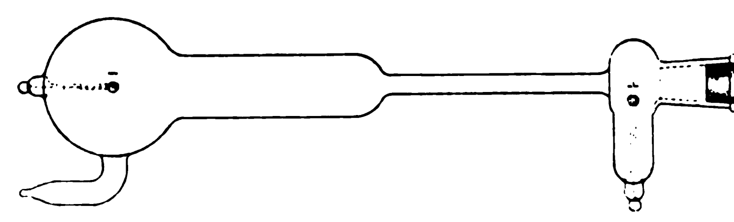


Fig. 1. (1/3 nat. Grösse.)

polirt und rechtwinklig zur optischen Axe geschnitten. Zu
seiner Länge ist er in die Mündung der Röhre eingeschlif
Ihn tiefer einzuschleifen ist nicht rathsam, da er sich s
beim Einschleifen nicht sicher fassen lässt. Ein Drittel der
geschliffenen Fläche, der in der Abbildung markirte Theil, v
dünn mit Luftpumpenfett überzogen und der Kegel unter zi
lichem Druck, drehend in die Mündung der Röhre geste
Hatte die Fettschichte die richtige Dicke, so breitet sie
hiebei nur wenig aus. Es sollte wenigstens die Hälfte de
der Röhre steckenden Kegels, die dem Vacuum zugeke
Seite, nie mit Fett in Berührung kommen. Nur so ist
sicher, dass der Inhalt der gefüllten Röhre nicht durch Fett
unreinigt wird. Ist der Kegel sorgfältig eingeschliffen, d
lässt sich die Röhre beim Füllen ebenso wie jede gewöhnl
Entladungsröhre behandeln und nach erfolgter Füllung
dauerndem Gebrauch auch von der Luftpumpe abschmel

Mit ihr erhält man Gasspectra, die weit jenseits der Wellenlänge 185·2 $\mu\mu$ enden. Leider macht sich die beschränkte Lichtdurchlässigkeit des 30 *mm* langen Quarzkegels empfindlich fühlbar: die Aufnahme gelingt nur bei verhältnissmässig langer Belichtung. Ein Verschlusskegel aus Flussspath würde hier jedenfalls bessere Dienste leisten. Ich habe mir leider keinen verschaffen können.

b) Röhre ohne ultraviolettdurchlässigen Verschluss. Eine Röhre der genannten Art hat den Nachtheil, dass zwischen Apparat und Röhre eine Luftschicht bleibt, worin die brechbarsten Strahlen einen Theil ihrer Energie einbüssen. Ich habe diesen Übelstand dadurch zu umgehen gesucht, dass ich die Röhre direct mit dem Deckel e'' (Fig. 19

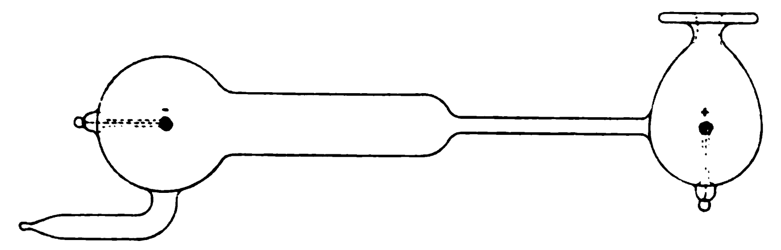


Fig. 2. (1/2 nat. Grösse.)

Taf. IV) des Spaltschlittens verband, so dass sie an Stelle der lichtdurchlässigen Scheibe g'' die Deckelöffnung verschloss. Auf diese Weise ist nicht nur die Luftschicht, sondern auch das andere Hinderniss, der 30 *mm* lange Verschlusskegel aus Quarz, gänzlich beseitigt. Füllt man den Apparat nebst der daransitzenden Röhre mit dem betreffenden Gase, dann lässt sich dessen Spectrum in ausgezeichneter Weise photographiren. Bedingung ist nur, dass sich das Gas dem Apparat, der Platte und den Strahlen gegenüber hinreichend indifferent verhält.

Diese Röhren enthalten einen flachen Rand und geben, je nach dessen Lage und Richtung zum Capillarrohr, das Spectrum des Elektrodenlichtes (beistehende Fig. 2) oder das Spectrum des Capillarlichtes (beistehende Fig. 3). Bei kräftigem Strom erhitzen sich diese Röhren sehr stark. Zuweilen schmilzt sogar die Kathode, und Tröpfchen des geschmolzenen Metalles werden in der Röhre umhergeschleudert. Um die Erhitzung der

Glaswand zu vermindern, ist die Röhre am Kathodenend
einer geräumigen Kugel erweitert und die Elektrode in
Mitte der Kugel angebracht. Dem Fortschleudern des
schmolzenen Metalles ist in der Weise Einhalt gethan, dass
Glasfassung des Platindrahtes in drei kleine Spitzen ausgez
und mit dem Aluminium der Elektrode zu einem kugelförm
Klumpen verschmolzen ist. Metall und Glasspitzen umklam
sich auf diese Weise gegenseitig, und wenn die Elektrode
Gebrauch der Röhre einmal schmilzt, hängt das Alumin
immer noch so fest, dass sich nur kleinere Tröpfchen d
ablösen können. Walzenförmige Elektroden sind bei so star
Strom, wie ihn diese Röhren auszuhalten haben, von
geringerer Dauer.

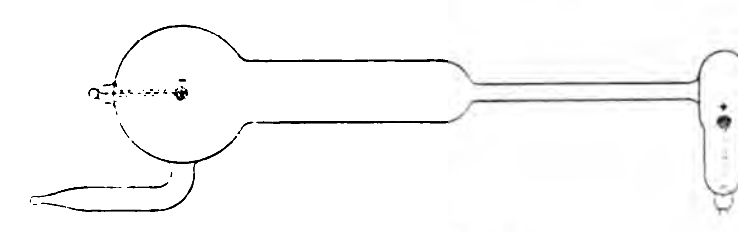


Fig. 3. ($^1/_2$ nat. Grösse.)

Die genannte Glasfassung der Platindrähte meiner Rö
besteht aus goldhaltigem Glas (Rubinglas),[1] das die häuf
Temperaturveränderungen der Entladungen ohne Nach
verträgt. Die Dauer einer Entladungsröhre kann durch ni
so sehr als durch die Haltbarkeit der Fassung des Elektro
drahtes gewinnen.

Der erweiterte, cylindrische Theil der Röhre, der K
und Capillare mit einander verbindet, gewährt durch s
Schichtungen, die er bei der Entladung zeigt, einen au
zeichneten Anhalt für die Beurtheilung des Druckes und
Reinheit der Röhrenfüllung. Sobald der Druck bis auf ei
Millimeter Quecksilbersäule gesunken ist, bieten die Sch
tungen des betreffenden Gases in diesem Theile der Rö

[1] Diese Röhren liefert in ausgezeichneter Beschaffenheit Herr R. G
in Leipzig, Liebigstrasse.

durch ihre Zahl, Form und Farbe ein feinfühliges Mittel, um Änderungen des Druckes und des Röhreninhaltes zu erkennen. Ganz unentbehrlich sind die Schichtungen, wenn der Druck im Apparat verändert worden ist und wieder genau auf seine ursprüngliche Höhe gebracht werden soll. Die Barometerprobe bietet hierzu nur einen ungefähren Anhalt. Die feinere Regulirung des Druckes kann allein nach dem Verhalten der Schichtungen der Entladungsröhre geschehen. Werden mehrere Röhren angewandt, dann sollten sie in Form und Grösse nach Möglichkeit einander gleichen. Sind sie verschieden, so hat jede Röhre für denselben Druck eine andere Anzahl Schichtungen, und das Verhalten der einen gewährt keinen Anhalt für das Verhalten der andern.

Je enger die Capillare einer Entladungsröhre, desto heller ihr Licht, umso energischer auch die Strahlen des neuen Lichtgebietes. Gleichwohl darf die Weite des Capillarrohres nicht gar zu fein sein. Es hat den Anschein, als finde der Strom in sehr feinen Capillaren nicht die zu seiner Leitung erforderliche Gasmenge vor. Andernfalls würde sich das Glas enger Capillaren nicht so oft in Dampf verwandeln, und an Stelle des Spectrums der Röhrenfüllung, das Spectrum des Glasdampfes erscheinen. Die enge Capillare hat aber noch einen andern Nachtheil: sie erschwert das Evacuiren und Füllen der Röhre. Sobald nämlich der Druck beim Füllen der Röhre bis auf wenige Millimeter Quecksilbersäule gesunken ist, zeigt die enge Capillare häufig nur auf der Einströmungsseite das Spectrum der Röhrenfüllung, während die andere Seite und der sich daranschliessende erweiterte Theil der Röhre, das Spectrum des vorhergehenden Röhreninhaltes, also beim ersten Gebrauch der Röhre, das der Luft geben. Man kommt in diesem Falle nur zum Ziele, wenn man die Röhre mit dem zur Füllung dienenden Gase mehrmals bis zum Druck von einigen Decimetern Quecksilbersäule wechselweise füllt und auspumpt. Meine zur Aufnahme des Spectrums im Vacuum benützten Röhren haben Capillaren von $^1/_2$ bis 1 *mm* lichter Weite und 50 bis 60 *mm* Länge.

Der Rand dieser Röhren ist plan geschliffen und schwach mit Fett überzogen. Er haftet an genanntem Deckel so fest, dass

man ein Ablösen nicht zu befürchten hat. Die Röhren, auch für Längsdurchsicht, bedürfen keiner Stütze: sie hängen, mit dem Rande befestigt, frei in der Luft. Nur gegen seitli Verschiebung müssen sie gesichert werden, da sie andernf an der verticalen Klebfläche hinuntergleiten, wodurch Funken seine conaxiale Stellung zum Collimator verliert.

Verbindung der Röhre mit dem Collimator. I Centrum des Lichtquells soll bei jeder Spectralaufnahme in Axe des Collimators liegen. Dementsprechend ist auch im liegenden Falle die Röhre mit dem Collimator zu verbinc Das geschieht bei Capillarenlicht wie folgt. Der Deckel (Fig. 13, Taf. II) des Spaltschlittens wird losgenommen seine Verschlussscheibe g'' (Taf. IV) mit der betreffenden E ladungsröhre vertauscht. Der schwach mit Fett überzog Rand der Röhre haftet nach mehrmaligem Rück- und Vorwä drehen fest am Deckel, lässt sich aber noch bequem da hin- und herschieben. Steckt man jetzt den Stahlbolzen durch die Öffnung des Deckels, worin er exact geführt wird gewährt sein stiftförmiges Ende, das mit einigem Spielraun das Capillarrohr passt, den zur Einstellung der Röhre erfor lichen Anhalt. Capillaren- und Collimatoraxe fallen zusamn wenn das stiftförmige Ende des Bolzens ringsum von der Inn wand der Capillare gleichen Abstand hat. In dieser Stellung die Röhre seitlich zu befestigen. Das geschieht mit Hilfe Schieber h'', die bis an den Röhrenrand geschoben und festgeschraubt werden. Analog verfährt man beim Einste der Röhre für Elektrodenlicht (vorstehende Fig. 3). N erfolgtem Centriren der Röhre wird der Bolzen e''' mit ei innen geschwärzten Messingrohr vertauscht, und der De mit der Röhre wieder mit dem Spaltschlitten verbunden. O dieses Rohr würde die glänzende Deckelöffnung zu stören Reflexion Anlass geben.

Beim Gebrauch der Röhre soll das mit dem Rande sehene Ende nach Möglichkeit vor Erhitzung geschützt werc damit der Verschluss nicht gelockert und der Rand nicht Zerspringen ausgesetzt werde. Darum wähle ich auch Röhren für Längsdurchsicht stets die vom Spalt entfernt Elektrode zur Kathode. Nur wenn ihre Temperatur einmal

hoch steigt, wechsle ich die Pole, doch auch dann nur auf kurze Zeit. Im Übrigen erfordert die Behandlung der Röhre nicht mehr Sorgfalt als die jeder anderen Entladungsröhre.

2. Der elektrische Apparat.

Eine Batterie von 6 Grovebechern erzeugte den Primärstrom, dessen Stärke sich im Durchschnitt auf 12 Ampères bei 9 Volt belief. Bei den späteren Versuchen befanden sich in der Strombahn ein Ampèremeter und ein Voltmeter, beide nach Kohlrausch. Die Entladungen lieferte ein Ruhmkorff'sches Inductorium für 25 *cm* lange Funken, zeitweilig wurde auch ein solches für nur 8 *cm* lange Funken benützt. Wo ein Condensator nöthig war, wurde eine Leydener Flasche von 40 *cm* Höhe und für Funkenstrecken ein Funkenstativ in die Strombahn eingeschaltet. Ein zweites Funkenstativ diente dem Funken, dessen Spectrum zur Aufnahme gelangen sollte.

3. Die Luftpumpe.

Ich habe mich einer Geissler'schen Quecksilberluftpumpe bedient. Sie stand durch zwei Glasröhren mit einem Kipp'schen Gasentwicklungsapparat und mit dem photographischen Spectralapparat in Verbindung. Alle Verbindungen waren durch Schliffe hergestellt. Der Kipp'sche Apparat hatte sein eigenes, durch zwei Hähne abgeschlossenes Trockengefäss, worin das Gas, ehe es in die Luftpumpe eingelassen wurde, stundenlang trocknete. Das Trocknen vor dem Einlassen ist wichtig, da feuchtes Gas in den vom Trockengefäss der Luftpumpe entfernter liegenden Theilen des evacuirten Raumes, im vorliegenden Falle in der Entladungsröhre, seinen Wasserdampf nur sehr langsam abgibt. Feuchtes Gas entwickelt aber bei Wellenlänge 281 $\mu\mu$ eine Anzahl dem Wasserdampf angehörende, energische Banden, gibt sonach nie ein reines Spectrum der nominellen Röhrenfüllung.

Da ich den Kipp'schen Apparat bei meinen Vacuumaufnahmen bisher nur zur Entwicklung von Wasserstoff benützt habe, so sei gleich hier erwähnt, dass dieser aus Zink und Schwefelsäure, beides chemisch rein, dargestellt wurde. Die Quecksilberfüllung der Luftpumpe war ebenfalls chemisch

reine Handelswaare. Getrocknet wurde mit Phosphorsä
anhydrit.

Luftpumpe und Spectralapparat standen neben einar
so dass sich die Röhre, während sie evacuirt wurde, gl
zeitig mit dem Spectroskop beobachten liess.

Der Arbeitsraum für die Aufnahmen.

Die Aufnahmen erfolgten in einem nach Nordwe
gelegenen Zimmer meines Laboratoriums, das durch s
Umgebung, auch weil es nie geheizt wird, gegen einse
Wärmestrahlung hinreichend geschützt ist, und auch den
Plattenwechseln nöthigen lichtdichten Verschluss des Fens
besitzt.

Die photographische Platte und ihre Entwicklung

Zur Aufnahme diente nur die im ersten Theile di
Berichtes besprochene, ultraviolettempfindliche Platte me
Präparation, die einzige, die gegenwärtig für die neuen Stra
Empfindlichkeit zeigt. Der Vollständigkeit halber will
wiederholen, dass die Platten mit Soda und Pyrogallus
wickelt wurden, und dass hierzu durchschnittlich 2 Min
erforderlich waren.

Die Entwicklungsdauer wurde nach dem Secundenschl
eines Metronoms abgemessen, was schon das nachsteh
beschriebene »Entwicklungsverfahren nach Zeit« nothwen
machte.

Das mit Fixirnatron behandelte Negativ liess sich in
von einer Minute gründlich auswaschen und trocknete
rasch, dass es schon 5 bis 6 Minuten nach Beginn des E
wickelns im trockenen Zustande unter dem Mikroskop gep
werden konnte.

Das schnelle Trocknen ist ein Vorzug der neuen Platte,
es auf diese Weise möglich wird, die zwischen aufeinand
folgende Aufnahmen fallende mikroskopische Prüfung o
Zeitverlust an der trockenen Platte vorzunehmen, was
weit sichreres Urtheil ermöglicht, als es beispielsweise
nasse und dann immer hochaufgequollene Bromsilbergelati
schicht gestattet. Bei Spectralaufnahmen, die besonders za

Zeichnung erfordern, insonderheit bei Auflösung dichtstehender Linien, befolge ich seit Kurzem ein etwas verändertes Entwicklungsverfahren. Ich richte mich dabei nicht mehr danach, was auf der Platte erscheint — das würde sich schon deshalb verbieten, weil die Linien, wegen ihrer ungewöhnlichen Feinheit beim Entwickeln nicht zu erkennen sind —, sondern lasse die Platte eine gewisse Zeit, die ich nach Erfahrung abmesse, im Entwicklerbade. Allerdings komme ich dabei nie mit einer einzelnen Aufnahme aus. Gewöhnlich genügt das erste Negativ, das ich auf diese Weise erhalte, noch nicht, da seine Linien meist zu breit und nahestehende Linien noch gar nicht oder nur unvollständig getrennt sind. In solchem Falle wiederhole ich die Aufnahme. Während ich aber dabei an der ursprünglichen Belichtungsdauer unverändert festhalte, kürze ich die Entwicklung um einige Secunden ab. Auf diese Weise erlange ich, manchmal allerdings erst nach einer dritten oder vierten Aufnahme, Linienbilder von einer Feinheit, wie ich sie mit gewöhnlicher Entwicklung nie erhalte. Dieses Verfahren ist etwas zeitraubend, allein die Schönheit der resultirenden Negative lohnt den grösseren Aufwand an Zeit und Mühe in reichlichem Masse.

Man sieht hieraus, dass sich die auflösende Kraft eines photographischen Spectralapparates schon durch die Art der Entwicklung nicht unwesentlich steigern lässt.

Die photographische Aufnahme des neuen Spectralgebietes.

Das neue Gebiet wurde mit Hilfe der beiden Spectralapparate, wovon soeben ausführlich die Rede war, photographirt.

Die grössere Hälfte wurde mit dem ersten Apparat aufgenommen, doch rühren alle feiner detaillirten Aufnahmen hiervon, sowie die andere, stärker abgelenkte Hälfte, die ungefähr bei der Wellenlänge 100 $\mu\mu$ enden dürfte, von dem verbesserten Instrument her. Ich kann daher von einer Besprechung der älteren, übrigens auch minder vollständigen Ergebnisse absehen und ohne Weiteres zu meinen Arbeiten mit dem verbesserten Apparat (Taf. III und IV) übergehen.

Ich beginne mit den ersten photographischen Vorarb
des noch ungeprüften neuen Apparates, die der Aufnahme
genannten Gebietes vorherzugehen hatten.

Die Einstellung des Spectralapparates.

Die ersten Aufnahmen mit einem evacuirten Spe
apparat nehmen, weil im Anfang noch jeder Anhalt für die
stellung der Rohre, Linsen und des Prismas fehlt, längere
in Anspruch. Die Einstellung im neuen Ultraviolett gelingt
gänzlichen Unsichtbarkeit seiner Strahlen halber minder l
als im übrigen Spectrum. Bei jedem anderen Spectralap
ist eine Orientirung leichter als hier, denn das sicht
Spectrum bietet auf matter Scheibe, das Ultraviolett (bis
Wellenlänge 185·2 μμ) auf fluorescirender Scheibe, zur e
ungefähren Einstellung einen schätzenswerthen Anhalt, v
auch nicht ausser Acht gelassen werden darf, dass sc
Focussirung schon hier auf die photographische Aufna
angewiesen ist.

Jenseits der Wellenlänge 185·2 μμ muss man auf
Vortheile des subjectiven Spectrums verzichten. Die Stra
erregen hier, wenn man sie mit Uranglas auffängt, nur
auf kurzer Strecke Fluorescenz, und dabei so schwach,
das Spectrum aus nicht mehr als einem zweifelhaften L
streifen besteht.

Wollte man unter solchen Umständen die photographi
Platte ohne Weiteres dem neuen Spectralgebiet exponiren,
würde man sie nur nach Gutdünken einstellen können
würden aber viele Aufnahmen erforderlich sein, ehe man
brauchbare erlangte.[1] Weit schneller gelangt man zum Z
wenn man das fluorescirende Ultraviolett zu Hilfe nimmt. S
man die Platte zuerst hierfür ein, dann gewinnt man sich

[1] Wie mühevoll solches Beginnen ist, habe ich zu Anfang m
Vacuumaufnahmen, wenn ich einen neuen Keilring (siehe Fig. 4, T
zwischen Collimator und Gehäuse eingeschaltet hatte, erfahren müssen,
es hiernach nicht mehr möglich war, das Fluorescenzspectrum, den ein
Anhalt zur ocularen Orientirung, wieder in das Sehfeld der Camera zu fü
Mehrmals habe ich dann stundenlang arbeiten müssen, ehe ich ein brauch
Resultat erzielte.

Anhalt, um sie Schritt für Schritt weiter an der Diakaustik der neuen Strahlen herumzuführen und für die aufeinanderfolgenden Strecken focussiren zu können. Die Länge dieser Strecken richtet sich nach der Krümmung der Diakaustik; sie soll das mit einem Mal hinreichend scharf einstellbare Spectralgebiet nicht überschreiten.

In der Praxis gestaltet sich jedoch das Focussiren nicht so einfach wie es hiernach scheint. Es dürfte daher nicht überflüssig sein, wenn ich das Verfahren der Einstellung,[1] das für

[1] Es mag an dieser Stelle auf einen Übelstand hingewiesen werden, der sich beim Focussiren der einzelnen Strecken geltend macht. Die Focalweite nimmt, ungeachtet der schwachen Dispersion des Flussspaths, mit der Wellenlänge beträchtlich ab, und das hat zur Folge, dass die Spectrallinien nach dem brechbarern Ende hin immer mehr zusammengedrängt werden, und dass ferner ihr gegenseitiger Abstand ganz von der Einstellung des Apparates abhängig ist. So kann dieselbe Liniengruppe, je nachdem sie auf der brechbarern oder auf der anderen Hälfte der Platte aufgenommen wird, kürzer oder länger ausfallen. Das ist auch dann der Fall, wenn sie mit der Nachbarstrecke nochmals zur Aufnahme gelangt, wie das zur besseren Orientirung mit den am Plattenrande liegenden Linien stets zu geschehen pflegt. Daher kommt es auch, dass die betreffenden Partien des Plattenrandes benachbarter Strecken nie übereinstimmen. Hierdurch wird die Orientirung neuerschlossener Gebiete, besonders wenn ihnen markante Linien fehlen, sehr erschwert.

Es fragt sich nun, ob sich hier nicht durch eine besondere Focussirung Abhilfe schaffen liesse. Nach meiner bisherigen Erfahrung, wenigstens so lange man nicht auf die Schärfe des Bildes verzichten will, schwerlich..

Es hat sich bei meinen Beobachtungen des brechbarsten Ultraviolett herausgestellt, dass dessen Aufnahme an Klarheit verliert, wenn Prisma und Cameralinse weit von einander abstehen. Eine Ausnahme hiervon machte auffallenderweise nur die Anfangsstrecke des neuen Gebietes, von der Wellenlänge 185·2 $\mu\mu$ an, wovon ich in allen Fällen klare Negative erlangte.

Erst nachdem ich die Cameralinse dem Prisma näher gebracht, und die Focussirung mit der Linse des Collimators allein bewirkt hatte, erlangte ich Spectra von gewünschter Schärfe. Die Schönheit der Aufnahme war sonach an dieses eigenthümliche Einstellungsverfahren gebunden. Leider liess sich damit die gewünschte Übereinstimmung benachbarter Spectralstrecken, die andernfalls nicht unerreichbar sein dürfte, nicht ermöglichen, und ich habe, weil ich mein Hauptaugenmerk auf die Klarheit der Aufnahme zu richten hatte, darum auch bei sämmtlichen Aufnahmen darauf verzichten müssen.

Im allerbrechbarsten Ultraviolett habe ich leider diese Verfahren aufgeben müssen, da der für Linse und Spalt geforderte gegenseitige Abstand

alle Strecken dasselbe ist, für einen einzelnen Fall hier dur
führe. Ich wähle dazu die Anfangsstrecke, die zur Hälfte d
schon von Stockes entdeckten Theile des Ultravioletten, d
Ende des noch kräftig fluorescirenden Spectrums, zur ande
Hälfte den neuen Strahlen angehört.

Die grobe Einstellung. Die Aufnahme des fluor
cirenden Ultraviolett, womit die Focussirung des neuen Gebie
zu beginnen hat, geschieht am zweckmässigsten wie folgt.

Die Camera wird von ihrem Rohre abgeschraubt, der Sp
weit geöffnet, mit Lampenlicht beleuchtet, und Camerarohr u
Prisma derart gedreht, dass nur noch das in das Minimum
Ablenkung eingestellte Blau des sichtbaren Spectrums im S
feld der Cameralinse erscheint. Ein Ocular ist hiebei entbehrl
Es genügt, wenn man mit blossem Auge in Richtung
Linsenaxe in das Rohr sieht. Darauf wird das Licht mit ein
nicht zu schwachen Aluminiumfunken vertauscht und des
Spectrum mit einer Uranglasscheibe aufgefangen, die, ur
einem Winkel von 25° bis 35° gegen die Linsenaxe gene
vor der Mündung des Camerarohres aufgestellt ist. Bei h
reichender Verdunklung des Beobachtungsraumes — stört
Funke, dann überdecke man ihn mit einem Tuche, das n
auf den Collimator hängt — erkennt man, wenn man die Ur
glasscheibe in Richtung der Linsenaxe hin- und herschiebt,
brechbarsten Ende des auf ihr erscheinenden maigrün
Streifens eine breite, helle Linie, die Doppellinie Nr. 32, Well
länge 186·0 μμ und 185·2 μμ.[1] Durch Drehen des Came
rohres um die verticale Axe des Gehäuses bringt man die Li

unerlaubt kleine Dimensionen erreicht hätte. Ich habe darum die Einstel
in diesem Theile nur mit der Linse der Camera, die hierzu wieder
Prisma entfernt werden musste, ermöglichen können. Und das mag auch
Grund sein, weshalb diese Aufnahmen, selbst dort, wo die Platte im F
sich befunden hat, viel zu wünschen übrig lassen.

Es ist nicht unwahrscheinlich, dass diese Aberration nur mei
Flussspathkörper eigenthümlich ist. Ich will sie darum auch nur ange
haben, um zu zeigen, dass selbst relativ sehr reiner Flussspath der Spec
photographie im luftleeren Raume grosse Schwierigkeiten bereiten kann.

[1] Die Linie erscheint hier nur des weitgeöffneten Spaltes halber
fach, bei engem Spalt erkennt man auch auf der Uranglasscheibe b
Componenten.

wobei die Scheibe nachzurücken ist, in die Mitte des Sehfeldes — Schätzung genügt — und stellt sie, während man ihren Lauf durch eine gegen die Scheibe stark geneigte Lupe (noch besser durch ein Mikrometerocular von langer Brennweite) verfolgt, in das Minimum der Ablenkung ein, so gut es eben auf diese Weise möglich ist. Genügt zum Index hierzu der Rand des Sehfeldes der Lupe nicht, dann leistet ein Streifchen dünnen, weissen Papieres, das man auf die leuchtende Seite der Uranglasscheibe klebt und am Orte der genannten Linie mit einem kräftigen Strich versieht, gute Dienste. Hat sich die Linie beim Einstellen merklich von der Mitte des Sehfeldes entfernt, dann ist die Stellung des Camerarohres entsprechend zu corrigiren, damit die Linie wieder in die Mitte des Sehfeldes gelange. Damit ist die grobe Einstellung beendet, die, wie sich schon aus dem Vorhergehenden ergibt, nur bei der Anfangsstrecke durchzuführen ist, während alle übrigen Strecken nur auf photographischem Wege eingestellt werden können.

Die feine Einstellung. Sie kann nur mit Hilfe der photographischen Platte geschehen. Sie setzt sich zusammen aus der Focussirung der Plattenmitte, der Focussirung der beiden Enden des Spectrums, der Einstellung auf das Minimum der Ablenkung und der Verbesserung der Bildschärfe.

1. Focussirung der Plattenmitte. Die Camera wird wieder an das Rohr geschraubt, die Cassette mit eingelegter Platte eingeschoben, das Küken auf 30° eingestellt, die Spaltöffnung auf 0·03 bis 0·05 *mm* verengt und auf 0·4 *mm* verkürzt, der Apparat bis auf ungefähr 0·5 *mm* Quecksilbersäule evacuirt, der Aluminiumfunken dicht vor die Verschlussscheibe des Collimators (höchstens 2 *mm* Abstand) gebracht und sein Spectrum bei verändertem Abstand der Collimatorlinse vom Spalt eine Anzahl-mal aufgenommen, wozu die Platte nach jeder Aufnahme mit dem Mikrometer der Camera um 0·5 *mm* zu verschieben ist. Für die erste Aufnahme sind die Linsen des Collimators und der Camera ganz nach dem Prisma hin zu verschieben, und für die folgenden ist die Collimatorlinse von Aufnahme zu Aufnahme dem Spalt um 2 *mm* näher zu rücken. Auf diese Weise lassen sich bis zu 17 Aufnahmen auf einer Platte ausführen. Prüft man die Mitte dieser Aufnahmen mit der

Lupe, so wird man finden, dass sie durchgängig unklar s
dass aber eine alle übrigen an Deutlichkeit übertrifft.
Linsenabstand dieser relativ schärfsten Aufnahme lässt
sich als mittlere Focalweite einer zweiten, ebensolchen Spec
reihe dienen, die sich von der ersten nur durch kleinere
schiebungsintervale der betreffenden Linse (0·5 bis 0·2
unterscheidet. Dem klarsten Spectrum dieser Reihe entspr
die gesuchte Focalweite der Plattenmitte. An ihr hält man
bei der folgenden Einstellung der beiden Enden des Spectru

2. Focussirung der beiden Enden des Spectru
Von der scharf eingestellten Plattenmitte nach den Enden
Aufnahme hin nimmt die Bildschärfe im Allgemeinen merk
ab. Es gibt aber eine Stellung der Platte, wo beide Seiten
Aufnahme beinahe tadellose Definition aufweisen. Man ermi
diese Stellung durch eine dritte Spectralreihe, wobei man
Neigung der Platte zur Linsenaxe durch entsprechende Dreh
des Kükens von Aufnahme zu Aufnahme, mit 40° beginn
um 1° oder 2° abnehmen lässt.[1] Die klarste Aufnahme, die
hiebei erhält, bietet wie bei der Einstellung der Collimatorl
den nöthigen Anhalt zu einer vierten Reihe, die bei ei
Drehungsintervall von 0·5° zu einer Aufnahme führt, die
beiden Seiten gleichmässig klar, wenn auch hier nie gan
scharf als in der Mitte ausfällt. Den Neigungswinkel di
Aufnahme benützt man bei Einstellung auf das Minimum
Ablenkung, die nunmehr zu erfolgen hat.

3. Einstellung auf das Minimum der Ablenku
Man wähle dazu eine der brechbarsten Linien, nicht die M
noch weniger aber Linien des anderen Endes der au
nehmenden Spectralstrecke. Ich habe gefunden, dass die
nahme sichtlich an Klarheit gewinnt, wenn man an dieser R
festhält. Das Aufnahmeverfahren gleicht hier dem vor
gehenden vollständig, nur mit dem Unterschied, dass
Drehungsintervalle (Alhydade des Prismas) bei der let
Spectralreihe, die zur Aufnahme gelangt, entsprechend ih

[1] Die Mitte der Platte bleibt, wie man das Küken auch drehen m
stets im Focus, weil sie, wie bereits bei Besprechung der Einrichtung
Camera hervorgehoben wurde, mit der Axe des Kükens coincidirt.

Zweck kleiner zu wählen sind. Nur selten habe ich aber bis auf 6′ heruntergehen müssen. So exacte Einstellung wie in der Spectrometrie verlangt weder der Zweck der Aufnahme, noch würde sie, in Anbetracht der Kleinheit des Apparates erreichbar sein.

Massgebend für den gesuchten Einstellungswinkel des Prismas ist das Spectrum, dessen brechbarste Linien am weitesten nach Roth verschoben sind.

Gewöhnlich entfernen sich hiebei alle Linien so beträchtlich von ihrem Orte, dass die Focussirung der Platte verloren geht und sich eine nochmalige Einstellung der Mitte und der Seiten des Spectrums in der soeben besprochenen Weise nöthig macht.

4. Verbesserung der Bildschärfe. Wie man aber auch einstellen möge, immer wird die Aufnahme in einem Theile etwas weniger klar ausfallen als in den übrigen. Befolgt man das soeben beschriebene Verfahren, so sind es die Enden der Aufnahme, die von dieser Minderschärfe betroffen werden. Ist auch der Schärfeunterschied zwischen Mitte und Seiten, sobald man die Aufnahmestrecke nicht übermässig lang wählt nicht allzu fühlbar, so kommen doch Fälle vor, wo seine Verminderung erwünscht ist. Man erzielt nun eine gleichmässiger vertheilte Schärfe, wenn man anstatt der Plattenmitte die Mitten der beiden Plattenhälften scharf einstellt, so dass die Aufnahme bei $^1/_4$ und $^3/_4$ ihrer Länge ihre beste Definition zeigt. Dabe verliert zwar die Plattenmitte etwas an Deutlichkeit, dafür treten aber die Enden des Spectrums entsprechend reiner gezeichnet hervor. Diese Einstellung verlangt, wenn sie Erfolg haben soll, eine sehr sorgfältige Behandlung der Platte beim Hervorrufen. Fällt das Negativ nicht ganz klar aus, dann lässt sich nicht ohne Mühe die Aufnahme gleichmässigster Schärfe aus der Spectralreihe, die hierzu aufzunehmen ist, herausfinden. Es gelingt viel leichter eine Platte für die Mitte als für die Mitte ihrer beiden Seiten zu focussiren.

Was für das ganze Spectrum gilt, gilt auch für die einzelne Linie. Die Diakaustik ist nicht nur in Richtung des Spectrumbandes, sondern auch in Richtung der Spectrumlinien gekrümmt. Eine Linie von grösserer Länge lässt sich demzufolge

ebenfalls nur auf kürzerer Strecke scharf abbilden. Bei
hilft man sich in einfachster Weise durch Verkürzung der Sp
länge, wobei nur die rein gezeichnete Strecke, die Mitte,
Wirkung gelangt. Darum auch die von Haus aus mäss
Länge meines Spaltes.[1]

Es kann vorkommen, dass der Rest von Unschärfe,
auch nach dieser Correctur der Einstellung noch übrig ble
stört, und dass seine Beseitigung der Aufnahme zum besonde
Vortheile gereicht. Hier hilft dann, als letztes Mittel der V
feinerung der Bildschärfe, eine Verminderung der Apertur
Collimators. Der Umfang der Zerstreuungskreise, auch
sphärische Aberration fällt, wenn man die Collimatorlinse
blendet, der Verminderung der Blendenöffnung entsprech
kleiner aus, und die Aufnahme gewinnt durchweg, allerdi
auf Kosten der Belichtungsdauer, sichtlich an Deutlichkeit.
Anwendung dieses Hilfsmittels erfordert jedoch Vorsicht. W
nämlich die betreffende Spectralstrecke grosse Energieun
schiede aufweist, treten die wirksamsten Linien, sobald n
die Belichtungsdauer den übrigen Linien anpasst, häufig
Beugungslinien begleitet auf, die der Deutung der Aufnah
verhängnissvoll werden können. Man sollte daher nicht o
Noth zur Blende greifen. Andernfalls, oder wo diese Beugun
fransen nicht stören, kann man die Linsenöffnung ohne
denken auf $^1/_{20}$ der Focalweite vermindern.[2]

Meine früheren Beobachtungen hatten gezeigt, dass
Strahlen jenseits der Wellenlänge 185·2 μμ von der Luft, se
in sehr dünner Schicht, energisch absorbirt werden. Die klei

[1] Bei kurzer Focalweite sollte man längere Spaltöffnungen überh
vermeiden. Einfache Linsen, wie solche die Aufnahme des Ultravioletten
langt, geben bei langem Spalt zuweilen sonderbare Liniengebilde. So kan
um nur ein Beispiel anzuführen, geschehen, dass anstatt der einfachen l
scharf gezeichnete Doppellinien erscheinen, die in Folge ihrer, allen Linien
Brechungsspectrums eigenthümlichen Krümmung, sphärische Zweiecke bi

[2] Versuche, die ich mit einem Prisma und Linsen aus Quarz anst
ergaben, dass das Linienbild eine noch weit stärkere Verminderung der Ap
ohne Nachtheil verträgt. Erst als ich $o:f$ auf 90 reducirte, begannen die Rä
der Linien ihre Schärfe zu verlieren. Abgesehen von der Verlängerung
Belichtungszeit hat aber starke Abblendung so viele Nachtheile im
folge, dass ich sie im Allgemeinen nicht empfehlen kann.

Luftschicht, die ich damals auf ihre Lichtdurchlässigkeit prüfen konnte, war einen Centimeter dick. Mit den vervollkommneten Hilfsmitteln, die mir jetzt zur Verfügung standen, vermochte ich Luftschichten bis zu 1 *mm* abwärts zwischen Lichtquell und Apparat einzuschalten. Es war dazu nur nöthig, dass der Funken der Verschlussscheibe bis auf 1 *mm* genähert wurde. Liess ich diesen Abstand zunehmen, dann war auf diese Weise die Frage nach der Absorption der Lichtstrahlen in sehr dünnen Luftschichten, die aus den im ersten Theile dieses Berichtes erörterten Gründen für den Fortgang meiner Beobachtung von grosser Bedeutung war, durch eine Spectralreihe mit Leichtigkeit zu lösen.

Fig. 14 der Tafel II zeigt eine solche Reihe in vierfacher Vergrösserung des Originales. Die Belichtungsdauer betrug für jede dieser Aufnahmen 30 Secunden, die Spaltweite 0·045 *mm*, die Dicke der Luftschicht, gemessen von der Dicke der 0·6 *mm* dicken Elektrode bis zur Verschlussscheibe des Collimators, 20, 10, 5, 3, 1 *mm*. Die Elektroden bestanden aus Aluminium.

Aus diesen Aufnahmen ergibt sich nun, dass die Luft schon in Schichten von weit unter 1 *cm* Dicke die Strahlen jenseits der Wellenlänge 185·2 $\mu\mu$ hartnäckig zurückhält, und dass sie höchst wahrscheinlich auch jetzt noch das Haupthinderniss bildet, das der Erweiterung dieses Beobachtungsgebietes im Wege steht. Der Einwand, es könne der Abnahme der Wirksamkeit nach dem brechbarern Ende hin, wie sie auch das bei 1 *mm* dicker Schicht aufgenommene Spectrum aufweist, eine specifische Wirkung des angewandten Lichtquells zu Grunde liegen, wird hinfällig durch die Thatsache, dass eine Anzahl Metalle, deren Spectra ich unter ganz denselben Bedingungen photographirte, bei derselben Wellenlänge oder doch nahe dabei endeten, und dass es überhaupt auf keine Weise gelang, jenseits der brechbarsten Linie, die Fig. 14 der Taf. II aufweist — ihre Wellenlänge dürfte nach einer in der Nähe liegenden Wasserstofflinie, deren Wellenlänge ich bestimmt habe, annähernd 170 $\mu\mu$ betragen — Strahlen nachzuweisen, sobald sich zwischen Lichtquell und Apparat eine, und wenn auch nur einen Millimeter dicke Luftschicht befand. Eine noch weitere Verminderung des Luftwiderstandes, wie er

sich durch Näherbringen der Elektroden an den Collimat wohl erreichen liess, scheiterte an dem Dampf des Funkens, d sich auf der Verschlussscheibe des Collimators niederschlu und dadurch ihre Lichtdurchlässigkeit verminderte. Bei se flüchtigen Metallen (Tl, Mg) bildete sich der Beschlag schnell, dass die Aufnahme nur bei vergrössertem Funke abstand möglich war. Bei allen Aufnahmen musste die Schei von Zeit zu Zeit geputzt werden, da sie schon nach kurz Belichtung durch einen, wenn auch nur schwachen Beschl bedenklich getrübt wurde. Dieser Beschlag ist eine der lästigst Beigaben dieser Aufnahmen. Bei kleinem Funkenabstand haf er so ungemein fest, dass er sich nur durch gründliches Nac poliren der Scheibe beseitigen lässt.

Ich habe mich mit der Beobachtung dieser Strecke n vorübergehend beschäftigt. Zu Elektroden dienten Al, Cd, C Cu, Mg, Pb, Pt, W. Alle gaben bis zu der genannten Grenze e linienreiches Spectrum. Nähere Angaben darüber behalte i mir für später vor. Um jedoch ein ungefähres Bild des Linie reichthums zu bieten, den die genannten Metalle in diese Theile des Spectrums entwickeln, habe ich in Fig. 15 auf Taf den jenseits 193·4 $\mu\mu$ wirkenden Theil des Cadmiumspectrur in vierfacher Vergrösserung reproducirt. Das darüberstehen Aluminiumspectrum soll zur Orientirung dienen. Ob alle Lini dieser Aufnahme dem Cadmium angehören, muss ich dah gestellt lassen, umsomehr, als ich mir nur das chemisch rei Metall des Handels zu den Elektroden verschaffen konnte, d ja nie frei von fremden Bestandtheilen ist. Der Werth der A nahme würde jedoch durch die Anwesenheit einiger frem Linien, die ich nicht für ausgeschlossen halte, nur unwesentli berührt werden, da ich die Abbildung weniger des Cadmiun als mehr des Strahlenreichthums halber gebe, den das ne Spectralgebiet entwickelt.

---

[1] Die Aufnahmen des Cadmiums führten noch zu einer anderen Tl sache, die, wenn sie auch mit der Erweiterung meines Beobachtungsgebi nichts zu thun hat, doch deshalb Berücksichtigung verdient, weil sie treffender Weise zeigt, wie sehr der Charakter des Spectrums vom Verha der photographischen Platte abhängig werden kann. Während nämlich auf Gelatineplatte zuerst die minderabgelenkten Linien Nr. 23 und 24 und hie

Wichtiger als die Untersuchung dieses Theils war die Ermittlung und Beseitigung des Aufnahmehindernisses, das der Erweiterung des Wirkungsbereiches meines Apparates im Wege stand. Nachdem alle Versuche, die Schichtendicke der Luft noch weiter zu vermindern, gescheitert waren, brachte ich

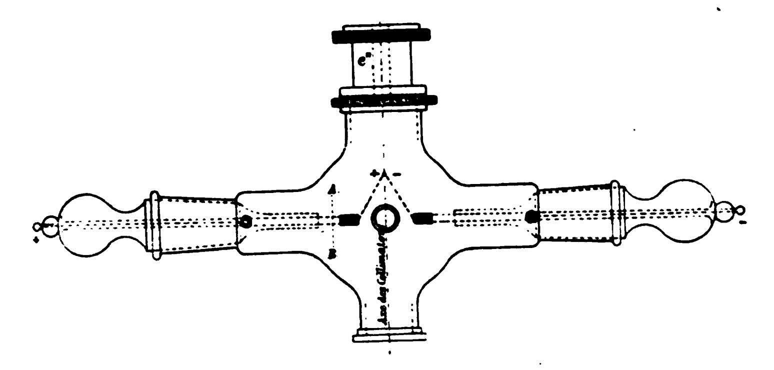


Fig. 4. (1/3 nat. Grösse).

den Funken anstatt in Luft, in Wasserdampf, Wasserstoff, Sauerstoff und Knallgas, alle in verdünntem Zustande. Ich hoffte, dass eines dieser Gase zu besserem Erfolg führen würde.

Nr. 25 und 26 erschienen, wirkte auf meiner Platte zuerst Nr. 26, und dann der Reihe nach Nr. 24, 23, 25. Bei beiden Aufnahmen befand sich ausnahmsweise zwischen Lichtquell und Platte eine 1/3 *m* dicke Luftschicht. Zugleich sei hier noch einer anderen Aufnahme gedacht, die einerseits die Überlegenheit meiner neuen Platte gegenüber der Gelatineplatte documentirt und anderseits von neuem zeigt, wie plötzlich die Absorption der brechbarsten Strahlen durch die Luft zunimmt. Es handelt sich um eine Aufnahme des Aluminiumspectrums, die ich mit dem im ersten Theile meines Berichtes erwähnten Gitter (Concavgitter von Rowland, 1060 *mm* Radius, 14438 Linien auf 1 Zoll engl.) ausführte, und die ungeachtet einer 2 *m* dicken Luftschicht, die die Strahlen auf ihrem Wege zur Platte zu durchsetzen hatten, im Gegensatz zu den früheren, resultatlos verlaufenen Aufnahmen, die brechbarsten Linien des Aluminiums, Nr. 30, 31, 32 in ausgezeichneter Weise gab. Die Absorption durch die Luft machte sich, besonders bei den Componenten von Nr. 32, in fühlbarstem Masse geltend. Obschon sich beide Linien nur um 0·8 μμ in ihrer Wellenlänge von einander unterscheiden, und obschon sie bei allen früheren mit dem Prismenapparat bei minder dicker Luftschicht ausgeführten Aufnahmen ganz gleichmässig gewirkt hatten, blieb jetzt die brechbarere von beiden so weit hinter der anderen zurück, dass sich ihre Intensitäten ungefähr wie 1 : 4 verhielten.

Das Entladungsgefäss hierzu ist in beistehender Fig. 4 abg bildet. Es besteht aus einer mit der Luftpumpe verbunden Glaskugel, die mit zwei conaxialen Schliffen und zwei diam tralen, mit planparallelen Quarzplatten verschlossenen Öffnung versehen ist. Im Innern der Kugel trägt jeder Schliff ein dicken Aluminiumdraht, um den der betreffende, dünne Elektrodendraht festgewickelt und seitlich, wie es die Figuren und 5 zeigen, umgebogen ist. Das Gefäss wurde mit sein grösseren Quarzplatte, nach Abnahme der Verschlussplatte (Taf. IV), direct mit dem Collimator verbunden. Durch Dreh der Schliffe liessen sich die Elektroden, auch nach vollzogen Füllung beliebig von einander entfernen, und der Funken jede zeit conaxial zum Collimator einstellen. Zum Einstellen dien ein vor der kleineren Öffnung der Kugel aufgestelltes Ables fernrohr. Ich habe leider auf diesem Wege, obsch die Versuchsanordnung vielfach abgeändert wurd meinem Ziele nicht näher kommen können. Aller halben resultirte ein nur lichtschwaches Ga spectrum, das der Kugelfüllung, aber von de Spectrum der Elektroden, dem der Versuch ga erschienen höchstens vereinzelte Linien, und diese auch er nach ungewöhnlich langer Belichtung.



Fig. 5.
Schnitt nach *AB*.

Ich würde vielleicht bessere Resultate erzielt haben, wen sich das angewandte Entladungsgefäss und seine Füllung auch zu Entladungen bei höherem Druck geeignet hätten. Na den Beobachtungen W. A. Miller's[1] und nach meinen eigen Aufnahmen lassen sich die Funkenspectra vieler Metalle, au wenn die Entladungen in unter Atmosphärendruck stehende Wasserstoff erfolgen, recht gut photographiren, sobald m nur die Belichtungsdauer der verminderten Energie d Funkens anpasst.

Wenn ich gleichwohl diese Thatsache im vorliegend Falle unbenutzt gelassen habe, so geschah es, weil ich d starken Beschlag fürchtete, der sich auch in Wasserstoffg auf der Verschlussplatte im Innern des Entladungsgefäss bildet. Zwar hätte sich diesem Übelstande durch hinreichen

[1] Phil. Transact. Vol. CLII, S. 884 (1862).

Entfernung des Funkens von der genannten Platte vorbeugen lassen, allein es wäre zweifelhaft gewesen, ob die Gasschicht, die alsdann zwischen Lichtquell und Vacuum entstanden wäre, die nöthige Durchlässigkeit, und ob das in Wasserstoffgas erzeugte Funkenlicht auch hinreichend energische Strahlen der gesuchten Wellenlänge besessen hätte.

Ich habe mich, nachdem alle Aufnahmen der Metallspectra ohne besseren Erfolg verlaufen waren, zu den weiteren Aufnahmen der mit Quarz verschlossenen Entladungsröhre (Textfigur 1) bedient, die mit verschiedenen Gasen gefüllt wurde. Diese Aufnahmen befriedigten aber noch weniger als die vorhergegangenen: sie endeten sämmtlich schon diesseits der mit den Metallelektroden erreichten Wellenlänge. Alle Röhrenfüllungen entwickelten im brechbarsten Ultraviolett sehr mässige Energie. Vor Allem betrifft dies den Wasserstoff, ein Umstand, der mich insofern nicht befremdete, als die Wasserstoffröhre (nach meinen früheren umfangreichen Beobachtungen) jenseits der Wellenlänge 363 $\mu\mu$ entweder gar nicht wirkt, oder wenn sie es thut, nur ein von vereinzelten Linien des Quecksilbers durchsetztes Continuum gibt. Die Ursache dieser beschränkten Wirksamkeit des Röhrenlichtes lag ohne Zweifel in dem nicht unbeträchtlichen Widerstande, dem die Strahlen in dem 30 *mm* langen Quarzkegel der Röhre begegneten. Zu dieser Annahme berechtigten wenigstens meine früheren mit Quarz angestellten Absorptionsversuche.

Dieser Misserfolg führte zur Anwendung der anderen Entladungsröhre (Textfig. 3). Sie wurde an Stelle der Verschlussscheibe direct mit dem Collimator verbunden, wie dies Fig. 13 (Taf. II) zeigt. Das Füllen der Röhre geschah in der üblichen Weise. Da Röhre und Apparat mit einander communicirten, war die Füllung beider dieselbe, und da sich ausserdem der Druck nach dem Maximaleffect der Röhre zu richten hatte und meist nur einer Quecksilbersäule von einigen Millimetern entsprach, hatten die Strahlen diesmal eine dichtere Gasmasse zu durchsetzen als vorher, wo der Apparat unabhängig von der Röhre und beliebig weit evacuirt werden konnte. Der Druck betrug im Mittel 2 *mm* Quecksilbersäule, die Dicke der Gasschicht zwischen Lichtquell und photographischer Platte 37 *cm*.

War die Apparatfüllung in so dicker Schicht nicht lichtdur
lässiger als der vorher angewandte 30 *mm* lange Quarzke
dann war mit der Umgestaltung der Röhre nichts gewonn
Das zu wählende Gas musste sonach hinreichend lichtdu
lässig, ferner bei dem genannten Druck indifferent gegen
Innenwände des Apparates und vor Allem zu einem energisc
an Strahlen kleinster Wellenlänge möglichst reichen Lichtq
geeignet sein. Die Zahl der hier in Betracht kommenden G
ist beschränkt. Über die Wahl der geeignetsten konnten
Versuche entscheiden. Meine hierauf bezüglichen Beoba
tungen erstrecken sich zur Zeit nur auf die atmosphäris
Luft und den Wasserstoff. Das Licht der Wasserstoffrö
brachte mir so unerwartet günstige und reichhaltige Erfo
dass ich vorläufig noch keine Veranlassung gehabt habe, n
nach andern Lichtquellen umzusehen.

Ich begann meine Aufnahmen mit dem Spectrum der L
doch ohne den gewünschten Erfolg: ich erreichte dabei ka
die Wirkungsgrenze der vorher photographirten Metallspe
Eine Verminderung des Druckes in der Röhre von 3 auf 1
wovon ich mir besseren Erfolg versprach, verkürzte zwar
Belichtungsdauer, führte aber ebenfalls nicht zu Stra
kleinerer Wellenlänge, wonach ich suchte.

Ein besseres Resultat gab der Wasserstoff.

Der Charakter des Wasserstoffspectrums ist von der T
peratur und vom Druck abhängig. Ein aus Hunderten von Li
zusammengesetztes Spectrum entsteht, wenn man schwäc
elektrische Entladungen durch eine mit sehr verdünntem Was
stoff gefüllte Röhre sendet. Das andere, das sogenannte elem
tare, nur aus wenigen Linien bestehende Spectrum soll
höchsten Temperatur angehören und soll erhalten werden, w
sehr energische Entladungen in Wasserstoff von höherem D
vor sich gehen. Es soll dieses Spectrum mit den Wassers
linien der weissen Sterne übereinstimmen, die sich in
gezeichneter Weise der Balmer'schen Formel unterordnen.

Die Art der Entladung bestimmt sonach das spectrale
halten des Wasserstoffes. Diese Thatsache durfte im vorlieger
Falle nicht ausser Acht gelassen werden. Temperatur und Br
barkeit gehen allenthalben Hand in Hand. Von der energisch

Entladung liess sich demnach bei meinen Aufnahmen der bessere Erfolg erwarten. Hiebei muss jedoch auf eine bisher unbekannte, oder wenigstens nicht öffentlich ausgesprochene Thatsache hingewiesen werden, die zugleich die Annahme eines elementaren Linienspectrums des Wasserstoffes stark erschüttert.[1]

Wie man auch Druck und Temperatur wählen möge, nie wird mit künstlichem Lichtquell die Darstellung eines Wasserstoffspectrums gelingen, das seinem ganzen Umfange nach den Rhythmus des elementaren Spectrums zeigte, das der Balmer'schen Formel gehorchte. Im günstigsten Falle[2] weist der brechbarere Theil des Ultravioletten immer noch sehr wesentliche Abweichungen davon auf. Die rhythmischen Linien, die allein erscheinen sollten, sind blass, zum Theil kaum wahrnehmbar, und was ausserdem erscheint, darunter, neben einer Anzahl schwächerer Linien, die wirksamsten des ganzen Bezirkes, das gehört nicht dem elementaren Spectrum an, das sind ebenso regelmässige Begleiter des andern, des linienreichen Spectrums des Wasserstoffes. Energievertheilung und Zahl der Linien dieses Theiles sind in den Spectren des künstlichen und des natürlichen Wasserstofflichtes (weisse Sterne) grundverschieden. Doch mehr noch. Den höchsten Hitzegraden der Röhrenentladung entspricht ein Spectrum, das sich von der Balmer'schen Formel noch weiter entfernt als das vorgenannte, und das im brechbarsten Ultraviolett und auf kurzer Strecke des angrenzenden sichtbaren Spectrums bei stark verminderter Energie continuirlich verläuft, eine Thatsache, die mit der zuerst von

---

[1] Ich entnehme diese Thatsache einer noch nicht veröffentlichten Untersuchung des Wasserstoffspectrums der elektrischen Entladungsröhre, womit ich mich seit längerer Zeit beschäftige.

[2] Die Gegenwart anderer Gase begünstigt die Bildung des elementaren Spectrums des Wasserstoffes. Nicht vollständig gereinigte Röhren eignen sich besser dazu als solche mit reiner Füllung. Auch können dasselbe Capillarrohr und derselbe Funken gleichzeitig beide Wasserstoffspectra liefern. Zur Entladung ist nur das Inductorium zu empfehlen. Die Influenzmaschine ist zur Darstellung des rhythmischen Spectrums, insofern man nicht nur das sichtbare Spectrum berücksichtigen will, fast untauglich, wogegen sie das andere, das linienreiche Spectrum, in so ausgeglichener Intensität gibt, wie es mit dem Inductorium nie zu erlangen ist.

Plücker und Hittorf[1] und von Goldstein[2] bei gesteigerter Intensität der Funken beobachteten Verbreiterung der Wasserstofflinien H_α, H_β, H_γ, H_δ gut in Einklang steht. Der höheren Temperatur folgt sonach ein Rückgang der photographischen Wirksamkeit der Wasserstoffstrahlen, wovon, wie ich weiter hinzufügen will, die brechbarsten Strahlen des älteren Spectrumtheiles stets zuerst berührt werden. Ebenso beginnt die Wandlung des Linienspectrums in ein continuirliches im Ultravioletten. Sollte sich das neue Gebiet anders als das ältere verhalten? Ohne Weiteres liesse sich kein Grund dafür finden. Ich habe darum auch alle Aufnahmen mit dem gewöhnlichen Inductionsfunken ausgeführt. Nur einmal, bei Aufnahme der Gegend der Wellenlänge 162 $\mu\mu$, wovon sogleich die Rede sein wird, habe ich zur Steigerung der Entladungstemperatur eine Leydner Flasche und eine möglichst lange Funkenstrecke in die Strombahn eingeschaltet. Auffallenderweise blieb das Spectrum von der Temperaturerhöhung unberührt, sämmtliche Linien erschienen nach wie vor fort, und nirgends machte sich an ihnen eine Verbreiterung, noch weniger ein Übergang in ein Continuum bemerkbar. Ein auffallendes Verhalten, das sich mit der Wirkungsweise der grösseren Wellenlängen des Wasserstoffes nicht in Einklang bringen lässt. Vielleicht war der Hitzegrad der angewandten Funken zur Wandlung des Spectrums nicht ausreichend. Das Verhalten erinnert auch an das des Stickstoffes, dessen brechbarste Strahlen, wie ich photographisch beobachten konnte, durch Flasche und Funkenstrecke, denen im sichtbaren Spectrum die Wandlung des Bandenspectrums in das Linienspectrum willig folgte, in keiner Weise berührt wurden.

Schon die erste Aufnahme, die ich diesmal mit Wasserstoff ausführte, war, sogar in doppelter Hinsicht, belangreich: einmal brachte sie mir die ersten der längst ersehnten Strahlen jenseits der mit den Metallelektroden erreichten Wirkungsgrenze und dann auch die überraschende Thatsache, dass die bisher gekannten Strahlen des Wasserstofflichtes nur einen Theil von

---

[1] Phil. Trans., CLV, p. 21 (1865).

[2] Ber. deutsch. chem. Ges., 7, 593.

dessen Gesammtenergie darstellten, und dass ein anderer Theil davon dem fernsten, bisher unbekannten Ultraviolett angehöre. Das Wirkungsband dieser ersten Aufnahme beginnt auf der minder abgelenkten Hälfte mit dem schon früher genannten Continuum, nimmt von da an nach der Plattenmitte an Intensität ab, verschwindet jenseits der Plattenmitte auf kurzer Strecke, erscheint alsdann als schwach wirkendes Continuum und geht gleich darauf, dicht am andern Plattenrande, ungefähr bei 170 μμ. in ein scharfgezeichnetes Linienspectrum über, das seiner mit der Ablenkung der Strahlen wachsenden Wirksamkeit nach auf das Bestehen eines über den Plattenrand hinausfallenden Strahlenbereiches von noch grösserer Helligkeit schliessen lässt. Die Aufnahme wurde zur Verificirung des Ergebnisses vielmals wiederholt, und stets mit demselben Erfolg. Nur bei verlängerter Belichtung stieg, wie zu erwarten war, die Intensität, ebenso die Zahl der Linien, auch dehnte sich das Continuum des Wirkungsbandes über die unwirksame Stelle aus, die dann auch vereinzelte, doch ausdruckslose Linien gab. Die unwirksame Strecke verschwand regelmässig bei längerer Belichtung: ihre Länge war sonach von der Dauer der Belichtung abhängig. Ob dieses photographische Minimum dem Wasserstoff eigenthümlich ist oder ob meine Versuchsanordnung dazu Anlass gegeben hatte, habe ich nicht feststellen können. Auch ist es nicht ausgeschlossen, dass die Absorbentien, denen die Strahlen auf ihrem Wege zum lichtempfindlichen Bestandtheil der Platte begegneten, an seiner Entstehung betheiligt waren. Auffallend ist es, dass es demselben Gebiet angehört, das schon bei den Metallspectren, selbst nachdem die absorbirende Luftschicht bis auf einen Millimeter vermindert worden war, kaum noch photographisch wirkte. An derselben Stelle, wo die Metallspectra enden, nimmt das Linienspectrum des Wasserstoffes seinen Anfang.

Es folgte hierauf die Aufnahme der angrenzenden Strecke. Das Ergebniss entsprach ganz meinen Erwartungen. Die Platte zeigt ein ungemein linienreiches Band, woraus einige besonders markante Liniengruppen hervortreten. Darunter befinden sich, beiläufig bemerkt, die wirksamsten Strahlen, die ich jenseits der Wellenlänge 185·2 μμ vom Wasserstoff kenne. Von dem

Orte höchster Wirksamkeit, dessen Wellenlänge nach einer vorläufigen Messung 162 μμ beträgt, nimmt die Energie der Strahlen nach der brechbareren Seite stärker ab als nach der entgegengesetzten. Gleichwohl zeigen auch hier wieder die brechbarsten Linien durch ihre kräftige Wirkung, dass das Ende des Spectrums jenseits des Plattenrandes liegt. Zu demselben Resultate führte die Aufnahme der Nachbarstrecke, und in dieser Weise ging es von Aufnahme zu Aufnahme fort bis zu einer Stelle, die von der bisher gekannten Lichtgrenze im Ultravioletten (Wellenlänge 185·2 μμ) mehr als dreimal so weit wegliegt wie diese von der Fraunhoferlinie *F* (Wellenlänge 486 μμ). Hier endete das Wirkungsband nicht wie in allen vorhergehenden Fällen, am Rande der Platte, sondern ein Stück davon entfernt. Es hatte sonach den Anschein, als versagten meine Beobachtungsmittel an dieser Stelle. Dafür sprach auch die durchweg schwache, ausserdem mit der Wellenlänge sehr gleichmässig abnehmende Wirkung der Strahlen, die überhaupt nur bei weitgeöffnetem Spalt und bei lang anhaltender Belichtung einen entwicklungsfähigen Eindruck hinterliess. Unter solchen Umständen war an eine, auch nur leidliche Definition der Linien nicht mehr zu denken. Mein Augenmerk war von jetzt an nur noch auf die Auffindung weiter abgelenkter Strahlen gerichtet, und dazu genügte schon ein breites, streifenförmiges Linienbild, wie es der weitgeöffnete Spalt gab. Ich war jetzt schon zufrieden, wenn ich jenseits der vorher erreichten Wirkungsgrenze im klaren Plattengrunde auch nur einen blassen Schatten anstatt des erwünschteren klaren Linienbildes auftauchen sah.

Auf diese Weise habe ich späterhin das Wirkungsband mit Hilfe einer Platte von ungewöhnlich grosser Empfindlichkeit bei sehr starken Entladungen und lang anhaltender Belichtung nochmals um eine kleine Strecke verlängern können. Das Spectrum dieser Aufnahme läuft bis an den Rand der Platte, und dabei sind seine brechbarsten Linien noch so ausgeprägt, dass ich, wenn es mir einmal möglich werden wird, die Platte auf das stärker abgelenkte Nachbargebiet hinüberzuführen, weitere günstige Erfolge erwarten darf.

Mit dieser Aufnahme hatte ich die Wirkungsgrenze meines Apparates erreicht. Zur Überführung der Platte auf das Nach-

bargebiet fehlte dem Camerarohr die zur Verminderung des Winkels der beiden Linsenaxen erforderliche Drehbarkeit. Ohne Gefährdung der Verschlusssicherheit des Apparates hätte sich solche nicht erreichen lassen, ein Umstand, worauf ich schon bei Beschreibung des Apparates hingewiesen habe. Nun hätte sich zwar die Aufnahme durch Verkleinerung des brechenden Winkels des Flussspathprismas ermöglichen lassen, ich habe aber davon wegen der mit dem Abschleifen verbundenen Gefahr des Zerspringens dieses für mich so überaus kostbaren Prismas absehen zu müssen geglaubt. Auch kam hinzu, dass ich an den optischen Theilen des Apparates, die ja, von Anfang meiner Vacuumaufnahmen an, unverändert dieselben geblieben waren, nicht ohne Noth Änderungen vornehmen wollte, da nur auf diese Weise die Verificirung früherer Ergebnisse, die sich von Zeit zu Zeit nöthig machte, möglich war. Der Erschliessung des übrigen Ultraviolett vermag ich sonach erst nach Beschaffung eines neuen Flussspathprismas näher zu treten.

Bei der Seltenheit des weissen Flussspathes entsteht die Frage, ob nicht das Gitter dem Prisma vorzuziehen sei. Nach zahlreichen von mir mit einem planen Rowlandgitter aus Spiegelmetall angestellten Versuchen ist diese Frage entschieden zu verneinen. Das Gitter eignet sich höchstens zur Aufnahme der minder abgelenkten Hälfte der neuen Wasserstoffstrahlen.

Das neue Spectralgebiet des Wasserstoffes ist von beträchtlichem Umfang. Für seine Wellenlängen fehlt mir, mit Ausnahme des genannten Maximums, zur Zeit noch jeder sichere Anhalt. Ich glaube aber keinesfalls zu hoch zu greifen, wenn ich die kleinste Wellenlänge, die ich mit meinen Aufnahmen erreicht habe, zu 100 $\mu\mu$ annehme. Selbstverständlich kann ich diesen Werth nur mit allem Vorbehalt geben. Ich wage eine numerische Angabe überhaupt nur, um irrigen Vorstellungen von dem Umfange des neuen Gebietes vorzubeugen, wozu das vorgenannte Längenverhältniss der zu beiden Seiten der Wellenlänge 185·2 $\mu\mu$ photographirten Spectralgebiete und vielleicht in noch höherem Masse das auf Taf. V reproducirte Spectrum selbst verleiten könnten.

Das neue Gebiet ist ungemein reich an Strahlen. Es setzt sich zusammen aus 15 ziemlich gleichmässig vertheilten Linien-

gruppen, die an 600 Linien enthalten können. Seine photographische Wirksamkeit nimmt von der Wellenlänge 162 μμ an nach beiden Seiten anfänglich rasch, dann aber sehr allmälig ab. Dementsprechend verhalten sich auch die Belichtungszeiten der einzelnen Aufnahmestrecken zu einander. Wenn zur Aufnahme der Gegend des photographischen Maximums schon wenige Minuten genügten, waren zur Aufnahme der brechbarsten Strahlen des ganzen Gebietes Stunden erforderlich. Bei sehr engem Spalt (0·004 *mm*) und minder empfindlicher Platte habe ich allerdings auch zur Aufnahme des Maximums (162 μμ) bis zu 45 Minuten belichten müssen; bei den soeben genannten brechbarsten Strahlen, die, wie vorher erwähnt wurde, ohnehin nur mit Platten von höchster Empfindlichkeit nachweisbar waren, betrug die Belichtungsdauer bei weit geöffnetem Spalt (0·075 *mm*) und starken Entladungen (Strom 17 Amp.) zwei volle Stunden.

Man sieht hieraus, dass die Belichtungszeiten nach dem brechbareren Ende bedeutend zunehmen. Ich muss aber darauf aufmerksam machen, dass hiervon nicht auf die effective photographische Energie der betreffenden Strahlen oder auf die Empfindlichkeit meiner Platte geschlossen werden darf. Denn es ist zu berücksichtigen, dass der Winkel, unter dem die Strahlen das Prisma treffen, schon von Anfang des neuen Gebietes an verhältnissmässig klein ist und mit der Wellenlänge beträchtlich abnimmt. Je kleiner dieser Winkel, desto grösser der Lichtverlust, den die Strahlen durch Spiegelung an den brechenden Flächen des Prismas und ferner dadurch erleiden, dass ein Theil von ihnen an den verticalen Kanten des Prismas ungenützt vorübergeht, weil dessen Breite von einer gewissen Einstellung des Prismas an nicht mehr ausreicht, um alles vom Collimator kommende Licht aufzunehmen. Der Lichtverlust infolge ungenügender Breite des Prismas macht sich zwar erst in der brechbareren Hälfte des neuen Gebietes geltend, nimmt aber von da an so rasch zu, dass er sich zuletzt auf ein Drittel aller vom Collimator kommenden Strahlen erstreckt.[1]

---

[1] Durch diesen Umstand gestalten sich meine Aussichten auf Erfolg bei der mit einem Prisma von kleinerem brechenden Winkel geplanten Erweiterung des Wasserstoffgebietes erfreulicherweise wesentlich günstiger, als es nach den

Ich habe vorstehend das ganze Gebiet, das ich mit der Wasserstoffröhre photographirt habe, dem Wasserstoff allein zugeschrieben. Ohne Weiteres wäre ich hierzu nicht berechtigt gewesen, da das Wasserstoffgas muthmasslich nur auf kurze Zeit so rein blieb, wie es aus dem Entwicklungsgefäss hervorging. Zwar hatte ich auf Alles Rücksicht genommen, was einen reinen Röhreninhalt gewährleisten konnte: die Röhre war, während ein kräftiger Strom hindurchging, anhaltend mit der Lampe erhitzt, wiederholt mit Wasserstoff ausgewaschen und ihr Inhalt auch später, beim Gebrauch, öfters erneuert worden, allein bei alledem war eine Verunreinigung ihrer Füllung nicht ausgeschlossen. Eine Ausdünstung des Innenapparates, wozu der Inhalt der Poren seiner Wände, deren Anstrich und das Öl der Mikrometerschrauben Anlass geben konnten, war nicht unwahrscheinlich. In solchem Falle konnten an der Entladung der Röhre neben der nominellen Füllung auch die genannten Verunreinigungen, in der Hauptsache Kohleverbindungen, betheiligt sein. Um mir hierüber Gewissheit zu verschaffen, stellte ich folgenden Versuch an. Ich füllte die Röhre mit Luft von weit unter 1 *mm* Druck Quecksilbersäule, nahm damit die Strecke zwischen den Wellenlängen 180 μμ und 162 μμ auf, liess dann eine kleine Menge Wasserstoff hinzu und wiederholte die Aufnahme. Ergaben die Spectra einen Unterschied, so konnte dieser nur vom Wasserstoff herrühren. Und in der That war ein solcher vorhanden. Dem zugelassenen Wasserstoff folgte stets eine Anzahl Liniengruppen, die mir regelmässig auch der reine Wasserstoff gab. Diese Thatsache sehe ich als Beweis für die Echtheit der von mir dem Wasserstoff zugeschriebenen Linien an. Ich habe jedoch in dieser Weise nur die genannte Strecke auf ihre Zugehörigkeit zum Wasserstoffspectrum prüfen können. Für den übrigen Theil des neuen Gebietes war das Verfahren wegen der Lichtundurchlässigkeit der Luft nicht anwendbar. Obgleich nun die Menge der fremden, aus dem Innern des Apparates stammenden Gase im Vergleich zum Inhalt des Apparates nur sehr klein sein konnte,

---

Aufnahmebedingungen der gegenwärtigen Wirkungsgrenze meines Apparates scheinen möchte.

so dass höchstens das Auftreten einiger fremder Strahlen im Spectrum des Wasserstoffes zu befürchten war, habe ich doch versucht, mir hierüber und für die stärker abgelenkten Strahlen noch auf anderem Wege Gewissheit zu verschaffen. Ich vertauschte zu diesem Zweck die Entladungsröhre mit einer andern von enger Capillare, die, nachdem ich sie mit Wasserstoff mehrmals ausgewaschen und bis zur Fluorescenz evacuirt hatte, ein intensives weisses Licht gab, sobald ich eine Leydner Flasche und eine Funkenstrecke in die Strombahn einschaltete. Das Leuchtmaterial hierzu lieferte die sich unter dem Einfluss der Entladung in Dampf verwandelnde Innenwand der Capillare, ausserdem der nach dem Evacuiren zurückgebliebene kleine Gasrückstand des ursprünglichen Röhreninhaltes, und, wenn im Innern des Apparates die vermuthete Ausdünstung stattfand, auch die hiebei frei werdenden Gase, von denen sich annehmen liess, dass sie sich an der Entladung und möglicherweise auch an der photographischen Aufnahme betheiligen würden. Denn wenn die Röhre auch wiederholt gereinigt worden war, konnte dieser Zustand, insofern die Ausdünstung unablässig erfolgte, was der niedrige Druck allerdings begünstigte, nur von kurzer Dauer sein. Unter solchen Umständen barg der Spectralapparat einen dauernden Gasquell, der der Röhre und gerade dem Theile der Capillare,[1] der seine Strahlen zum Spalt sandte, fortgesetzt frisches Leuchtmaterial zuführte. Diese Röhre hat nun ungeachtet des sehr intensiven Lichtes gar keine Wirkung geäussert. Ich ziehe hieraus den Schluss, dass die Verunreinigung meines Wasserstoffröhreninhaltes nur von untergeordneter Bedeutung sei.[2]

---

[1] Sehr enge Capillaren erschweren die Mischung unter niedrigem Druck stehender Gase in ungewöhnlichem Masse.

[2] Es wird befremden, dass ich die Reinheit des Röhreninhaltes nur nach dem Photogramm und nicht auch nach dem Spectroskop beurtheilt habe. Das Spectroskop gibt nur Aufschluss über das sichtbare Spectrum, das für das unsichtbare nie massgebend ist. Ferner verdient die photographische Platte zum Nachweis kleiner Mengen von Verunreinigungen des Röhreninhaltes ausnahmslos den Vorzug. Ich habe immer gefunden, dass Verunreinigungen im Ultravioletten mehr Linien entwickeln, also hier sicherer nachweisbar sind als im sichtbaren Spectrum. Doch verdient die photographische Platte auch im sichtbaren Spectrum den Vorzug. Alle Strahlen, die wegen ungenügender

Zu allen diesen Aufnahmen wurde ausnahmslos Capillarenlicht benützt. Mit dem Licht der Elektroden, wie es die hierzu bestimmte Röhre (Textfig. 2) liefert, habe ich mich nur vorübergehend beschäftigt. Das Ergebniss dieser Versuche besteht nur aus wenigen Wasserstoffaufnahmen, die dem Gebiet der Wellenlängen 162 μμ angehören. Danach entwickeln auch die Elektrodenstrahlen in diesem Theile eine über Erwarten kräftige Wirkung. Beispielsweise habe ich vom Kathodenlicht in einer Zeit von 10 Minuten bei einem Druck von 5 *mm*, einer Spaltweite von 0·015 *mm* und einer Stromstärke von 15 Ampères ein langes, zum Theil sogar überexponirtes Spectrum erhalten, während allerdings die Anode unter denselben Umständen ein minder umfangreiches, aber im wirksamsten Theile doch intensives Spectrum lieferte. Über die Einzelheiten dieser Aufnahmen behalte ich mir ausführliche Mittheilungen für später vor.

Schon zu Anfang dieses Berichtes habe ich etlicher Schwierigkeiten gedacht, denen die Verbesserung des Auflösungsvermögens des Spectralapparates begegnete. Nicht nur dass damals einzelne Bilder mangelhafte Definition besassen, es liessen auch die übrigen Aufnahmen an Klarheit zu wünschen übrig. Erst nach geraumer Zeit hatte ich meinen Apparat so weit verbessert, dass er strengeren Anforderungen zu genügen schien. Dennoch hat sich späterhin, bei Auflösung dichtstehender Wasserstofflinien der anfänglich beobachtete Übelstand nochmals, wenn auch in etwas veränderter Gestalt bemerkbar gemacht. Diesmal berührte er aber nicht nur die photographische Aufnahme schlechthin, sondern auch den Charakter des Spectrums, und zeigte dadurch, wie vorsichtig man bei der Deutung der mit Flussspathprismen aufgenommenen Spectren zu Werke gehen müsse. Ich habe mich mit dieser Aberration längere Zeit beschäftigt, um für sie eine ursächliche Erklärung und ein Mittel zu ihrer Aufhebung zu finden. Die dabei erlangten

---

Helligkeit, auch der Contrastwirkung hellerer Nachbarlinien halber oder aus anderem Grunde dem Auge verloren gehen, ermittelt die photographische Platte in ausgezeichneter Weise, indem sie, dank ihrer gegenwärtig fast unbeschränkten Haltbarkeit, die photochemische Energie bei hinreichend langer Belichtung bis zu der Höhe aufzuspeichern gestattet, wobei das latente Bild Entwicklungsfähigkeit erlangt hat.

Thatsachen sind für die Photographie mit Flussspath so belangreich, dass sie hier folgen mögen.

Nehme ich den brechbarsten Theil des Aluminumspectrums mit evacuirtem Apparat auf, dann sind alle Linien, auch die des neuen Gebietes, tadellos definirt. Drehe ich die Camera auf das Nachbargebiet hinüber und mache eine Aufnahme mit einer direct mit dem Collimator verbundenen Wasserstoffröhre, so erlange ich nie so scharf gezeichnete Linien als vorher beim Aluminium. Bei engerem Spalt bessert sich zwar das Bild etwas, doch nur theilweise. Unter dem Mikroskop gewahrt man, dass jede Linie, bis auf einen kurzen Theil, der klar hervortritt, verwaschen und schräg zu ihrer Richtung gespaltet ist. Dichtstehende Linien gleicher Intensität vereinigen sich dabei zu einer einzigen Linie von entsprechend grösserer Breite. Stelle ich nun den Spalt sehr eng — ich bin bis auf 0·004 *mm* herunter gegangen — und passe die Entwicklungsdauer der Erhaltung der feinsten Details der Aufnahme an, so löst sich der verwaschene Theil jener Linie in zwei, zuweilen auch in drei einander sehr nahe stehende, nach ihren Enden hin allmälig verlaufende Componenten auf, die in ihrer Längsrichtung gegenseitig um so viel verschoben sind, dass die Linien des einen Systems an einer Stelle, deren Länge 0·2—1 *mm* beträgt, von dieser Vervielfachung nicht betroffen werden. Hier sind alle Linien tadellos definirt. Der Kleinheit dieser rein gezeichneten Strecke entsprechend, bildet auch der brauchbare Theil der Aufnahme nur einen 0·2—1 *mm* breiten Streifen. Ebenso verhält sich das weiter abgelenkte Gebiet bis zu den Linien, die, wie bemerkt, eine Vergrösserung des gegenseitigen Abstandes von Cameralinse und Prisma erforderten, wodurch die Definition so bedeutend litt, dass eine Auflösung nahestehender Linien gänzlich ausgeschlossen war. Ich habe mich lange bemüht, dieser Vervielfachung der Linien vorzubeugen, doch nie mit Erfolg. Ebensowenig habe ich über die Ursache dieser Erscheinung Aufklärung erlangen können. Aller Wahrscheinlichkeit nach liegen ihr Krystallfehler des Prismas, vielleicht auch solche der Linsen zu Grunde.

Es könnte hiernach scheinen, als seien die Spectrophotogramme des neuen Spectralgebietes, wie sie mein Apparat

zeichnet, strengeren Anforderungen nicht gewachsen, zumal die Dispersion seines Prismas ungewöhnlich schwach ist. Dem ist jedoch keineswegs so. Dank der Schärfe und Reinheit seiner Spaltkanten, die die Herstellung ungemein feiner Öffnungen ermöglichen, bin ich im Stande, linienreiche Gruppen klar aufzulösen. So bietet beispielsweise die Aufnahme des photographischen Maximums vom Wasserstoffspectrum auf einer Strecke von 11 *mm* an die 90 scharf gezeichnete Linien. So günstige Resultate habe ich vorerst in diesem Theile erhalten, doch hoffe ich das ganze Gebiet nach und nach in gleicher Klarheit photographiren zu können. Berücksichtigt man, dass Spectrallinien niemals gleichmässig vertheilt auftreten, sondern dass allenthalben strahlenleere Strecken mit mehr oder weniger dichten Liniengruppen abwechseln, dass sonach die auflösende Kraft des Apparates ungleich höher steht, als man nach einem Beispiele der vorgenannten Art zu schliessen geneigt ist, so wird man zugeben müssen, dass mein Vacuumapparat, ungeachtet seiner Kleinheit und der ihm anhaftenden Schwächen, zu exacten Arbeiten nicht ungeeignet ist.

Die genannten Streifen sind theilweise sehr zart gezeichnet. Einzelne geben sogar bei fünfzigfacher Vergrösserung noch ziemlich feine Linien. Solche Feinheit lässt sich nur bedingungsweise erreichen. Weist die Spectralstrecke grössere Energiecontraste auf, wobei die wirksameren Linien weit früher als die übrigen entwicklungsfähig werden, dann führt eine einmalige Aufnahme nie zum Ziele. Eine gleichzeitig scharf einstellbare Strecke mit einemmale in vollendeter Schärfe zu photographiren, ist unmöglich, weil sich die energischeren Linien bei verlängerter Belichtung, wie solche die schwächeren Strahlen verlangen, nach beiden Seiten ausbreiten und dadurch ihre Umgebung überwuchern. Durch diese Verbreiterung büsst die Linie an Schärfe ein, und was noch bedenklicher ist, sie ändert zuweilen auch ihren Ort.[1] Es empfiehlt sich in solchem Falle, das Spectrum mehrmals und bei zunehmender Belichtungsdauer dicht unter-

[1] Überexponirte Linienbilder sollten nie zur Ermittlung der Wellenlängen benützt werden. Ihre Mitte coincidirt nicht immer mit der Mitte des Bildes, das nach normaler Belichtung erscheint, und das für die Ausmessung der Linienabstände bei Wellenlängenbestimmungen allein massgebend sein kann.

einander zu photographiren. Eine derartige Aufnahme hat ein terrassenförmiges Aussehen. Sie liefert in ihren Abstufungen die Linien verschiedener Wirksamkeit klarer, gewährt auch einen besseren Einblick in die Energieverhältnisse des Lichtquells als die Aufnahme, die bei einmaliger Belichtung sämmtliche Linien berücksichtigt.

Es ist eine bekannte Thatsache, dass sich ein Spectrum in Worten nie klar wiedergeben lässt. Selbst die sorgfältigste Beschreibung kann nur eine beschränkte Vorstellung davon vermitteln. Weit besser thut dies eine Zeichnung, dem Zweck am besten entspricht immer, sobald, wie im vorliegenden Falle, das Original nicht zugänglich ist, eine photographische Reproduction der Aufnahme. Eine Zeichnung, möge sie dem subjectiven oder dem photographirten Spectrum entlehnt sein, zeigt stets mehr oder weniger grosse Abweichungen vom Original. Ihre Ähnlichkeit leidet unter der persönlichen Auffassung des Zeichners. Bei solcher Übertragung des Bildes gehen die feineren Einzelheiten des Originals verloren, nicht selten sogar dessen Charakter. Die photographische Reproduction ist zwar von diesen Nachtheilen nicht ganz frei, allein sie wahrt doch den Charakter des Spectrums. Der Verlust kleinerer Details, wie er sich auch bei ihr regelmässig fühlbar macht, ist von geringerer Bedeutung, zumal sich in dringenden Fällen das Verlorengegangene durch Partialzeichnungen leicht ersetzen lässt.

Von dieser Erwägung ausgehend, habe ich es vorgezogen, diesem Berichte das Gebiet der kleinsten Wellenlängen, anstatt in Zeichnung, in photographischer Reproduction beizugeben. Taf. V zeigt diese Spectra.

Zu einem Vergleich der Längen des neuen und des älteren Spectralbezirkes, wie ich beide mit meinem Apparat erhalte, ist das Spectrum des Cadmiums beigefügt, das in diesem Falle mit dem Cyanblau beginnt und an der bisher gekannten Grenze des Ultravioletten, dicht bei der Wellenlänge 185·2 $\mu\mu$, abschliesst.

Meine Originalaufnahmen hierzu sind qualitativ sehr verschieden. Das erklärt sich daraus, dass sie unter sehr abweichenden Versuchsbedingungen entstanden sind. Sie waren von Haus aus nicht zur Reproduction bestimmt. Ich beabsichtigte ursprünglich eine Abbildung des neuen Spectral-

bezirkes erst dann zu veröffentlichen, wenn ich eine bis zu den gegenwärtig erreichten, brechbarsten Strahlen gleichmässig klare Aufnahme erlangt hätte, und nur die Erwägung, dass selbst eine minder vollständige Abbildung davon das Verständniss für den vorliegenden Bericht fördern könne, hat mich veranlasst, von meinem ursprünglichen Vorhaben abzusehen. Die zu der Tafel V benutzten Negative gehören verschiedenen Jahrgängen meiner Vacuumversuche an. Meine jüngeren Aufnahmen behandeln nur einen Theil des neuen Gebietes. Die Negative sind darum, wie leicht begreiflich ist, unter von einander sehr abweichenden Bedingungen aufgenommen worden. Beinahe jede Platte dazu war auf andere Weise präparirt, und ebenso war der Apparat nicht unverändert derselbe geblieben. Unter so misslichen Verhältnissen war die Herstellung einer besseren Abbildung diesmal nicht erreichbar. Nicht unerwähnt möge bleiben, dass weder Original noch Vergrösserung[1] dieser Spectra irgend welche Retouche erfahren haben, eine Thatsache, die sich, in Anbetracht der auf der Reproduction sichtbaren, von meinen Originalaufnahmen herrührenden Plattenfehlern, wohl von selbst ergibt.

Ich lasse nun eine kurze Erläuterung der Spectra der Tafel V nebst Angabe der Hauptdata der Aufnahmeanordnung folgen.

1. Cadmium. Dicke der Luftschicht zwischen Funken und Platte 0·3 *m*, Druck 760 *mm*, Belichtung 9 Secunden.

[1] Die Vergrösserung hat Herr Prof. E. Zettnow ausgeführt, und zwar unter erschwerenden Umständen. Die Originalplatten, mit Ausnahme von 11 und 12 der Tafel V, sind zu einem Tableau zusammengestellt, das ich in einer doppelwandigen, fest zusammengekitteten Glaskapsel aufbewahre. (Es ist dies dasselbe Tableau, das ich der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien am 10. November 1892 vorzulegen die Ehre hatte.) Die Vergrösserung musste demnach durch die Wände der Glaskapsel hindurch erfolgen. Dass sie unter so ungünstigen Verhältnissen alle Einzelheiten des Originals wiedergibt, ist das alleinige Verdienst des Herrn Zettnow. Ihm sei für diese abermalige Förderung meiner Arbeiten mein aufrichtiger Dank ausgesprochen. Über die Vergrösserungen selbst, wozu ein grosser mikrophotographischer Apparat von Carl Zeiss in Jena benutzt wurde, schreibt mir Herr Zettnow wörtlich: »Die fünffachen Vergrösserungen geschahen mit Hilfe eines Anastigmaten Zeiss bei Lampenlicht; zur Herstellung der 10fachen habe ich Apochromat Zeiss 70 *mm*, der 50fachen Zeiss 35 *mm* benutzt.«

Spaltweite 0·020 *mm*. Bromsilbergelatineplatte sensibilisirt für das brechbarste Ultraviolett. (Erster Versuch gewöhnliche Gelatineplatte für das Ultraviolett zu sensibilisiren. Daher die zahlreichen Plattenfehler dieser Aufnahme.) — Alles, was jenseits der Linie Nr. 26 liegt, war bisher unbekannt. Beachtenswerth ist die kräftige Wirkung der am weitesten abgelenkten Liniengruppe (4 Linien). Alle weiter abgelenkten Strahlen, die Fig. 15 (Taf. II) zeigt, hat die genannte Luftschicht verschluckt.

2. Aluminium. Druck im Apparat 0·5 *mm*. Belichtung 1 Minute und 3 Minuten (zwei Aufnahmen). Spaltweite 0·038 *mm*. Neue Platte. Dicke der Luftschicht zwischen Funken und Collimator 1 *mm*. — Die rechte Hälfte der Aufnahme, die brechbarere, ist vielmal intensiver als die andere. Das beweist, dass die neue Platte für das brechbarste Ultraviolett empfindlicher ist als für das minder abgelenkte. Sie verhält sich sonach umgekehrt wie die Gelatineplatte.

3. Wasserstoff. Röhre nach Textfigur Nr. 3, auch zu den folgenden Aufnahmen benutzt. Druck 2·5 *mm*. Belichtung 10 Minuten. Spaltweite 0·013 *mm*. Neue Platte. — Der linienreiche Theil gehört dem Wasserstoff an. Er bildet den Anfang des neuen Wasserstoffgebietes. Die intensivste Liniengruppe ist das photographische Maximum des neuen Gebietes (Wellenlänge 162 μμ). Der dicht vor den Wasserstofflinien angebrachte Punkt bezeichnet den Ort kleinster Wirksamkeit, dessen bei Besprechung des Wasserstoffspectrums, ebenso wie des genannten Maximums, gedacht wurde.

4. Wasserstoff. Druck 2·5 *mm*. Belichtung 60 Minuten. Strom ungewöhnlich schwach. (Stromstärke erst in späterer Zeit regelmässig gemessen.) — Das Wirkungsband ist um zwei neue, stärker abgelenkte Liniengruppen verlängert. Der gegenseitige Abstand der Linien ist infolge einer Umänderung des Apparates weit grösser als in der vorhergehenden Aufnahme.

5. Wasserstoff. Druck 2 *mm*. Belichtung 43 Minuten. Spaltweite 0·010 *mm*. Neue Platte. — Das Wirkungsband ist abermals um zwei Gruppen verlängert. Die zwei noch stärker abgelenkten Linien deuten auf eine dritte Gruppe hin.

6. Wasserstoff. Druck 2 *mm*. Belichtung 5 Minuten. Spaltweite 0·050 *mm*. Neue Platte. Die ebengenannte dritte

Gruppe ist hier besser ausgebildet. Noch brechbarere Strahlen sind ungenügender Belichtung halber nicht erschienen. Der gegenseitige Abstand der Linien ist im Vergleich zu der vorhergehenden Aufnahme bedeutend vergrössert. Bessere Definition bietet nur die Mitte, die Seiten sind schon sehr unklar.

7. Wasserstoff. Druck 2 *mm*. Belichtung 12 Minuten. Spaltweite 0·050 *mm*. Neue Platte. — Eine weitere Gruppe erschienen. Definition noch mangelhafter als vorher.

8. Wasserstoff. Druck 2 *mm*. Belichtung 1 Stunde bei kräftigem Strom (20 Amp.). Spaltweite 0·050 *mm*. Neue Platte. — Nur der focussirte Theil weist Linien auf. Die photographische Wirkung hat sichtlich abgenommen, so dass nur mit längerer Belichtung mehr zu erreichen ist.

9. Wasserstoff. Druck 1 *mm*. Belichtung 2 Stunden bei kräftigem Strom (17 Amp.). Spaltweite 0·075 *mm*. Neue Platte. — Hier sind zwar in Folge der längeren Belichtung brechbarere Linien hinzugetreten, doch verläuft das Spectrum schon nahe der Plattenmitte. Für Platten mittlerer Empfindlichkeit liegt hier die Wirkungsgrenze meines Apparates.

10. Wasserstoff. Druck 1·5 *mm*. Belichtung, Strom und Spaltweite wie bei 9. Neue Platte. — Diesmal sind in dem Theile, der vorher nicht gewirkt hatte, mehrere Linien erschienen. Da das Wirkungsband scharf am Plattenrand abbricht, lässt sich annehmen, dass jenseits der Platte noch photographisch wirksame Strahlen existiren. Die Platte enthält die brechbarsten Linien, die jemals beobachtet worden sind.

Die Aufnahme der jenseits des Plattenrandes befindlichen Strahlen ist erst nach Beschaffung des erwähnten Flussspathprismas möglich.

Die beiden folgenden Spectra sind Definitionsproben meines Apparates. Das Aluminiumspectrum ist mit der verbesserten Camera (Fig. 17, Taf. III, Kükenaxe parallel zum Spalt), das Wasserstoffspectrum mit der älteren Camera (Fig. 6, Taf. I) aufgenommen.

11. Aluminium. Druck im Apparat kleiner als 0·5 *mm*. Füllung atmosphärische Luft. Belichtung 20 Secunden. Stromstärke 7 Ampères. Spaltweite 0·025 *mm*. Neue Platte von grösserer Empfindlichkeit und gröberem Korn, daher das

Negativ sehr intensiv. Dicke der Luftschicht zwischen Funken und Collimator 1 *mm*. — Die lichtempfindliche Platte tangirte während der Belichtung die Brennfläche der Cameralinse. Das Spectrum erscheint darum auf verhältnissmässig langer Strecke gleichmässig scharf gezeichnet. Die wirksameren Linien sind im Original vollständig undurchsichtig, ihr Rand erscheint in Folge des gröberen Kornes rauh, zackig. Die Vergrösserung ist zehnfach. Hundertfache Vergrösserung würde ein ebenso klares Bild, freilich auch entsprechend stärker gezackte Linienränder geben.

12. Wasserstoff. Druck 1·5 *mm*. Belichtung 40 Minuten. Stromstärke anfänglich 2·5 Ampères, 10 Minuten später bis zu Ende 1·75 Ampères. Spaltweite 0·004 *mm*. Neue Platte von mässiger Empfindlichkeit und feinem Korn, daher das Negativ wenig intensiv. Gehemmte Entwicklung: Entwicklungsdauer 100 Secunden. — Die Aufnahme stellt das photographische Maximum des neuen Wasserstoffgebietes in 50facher Vergrösserung dar. Die Linien sind ungewöhnlich zart, aber nicht so intensiv wie in dem vorhergehendem Aluminiumspectrum. Zwischen den benachbarten Silberpartikeln dieser Plattensorte geht viel Licht durch, ein Übelstand, den gewisse meiner Präparate mit der Bromsilbergelatine theilen. Im Original sind die Linien mit blossem Auge kaum zu erkennen. Die beiden markantesten Linien haben auf den zugekehrten Seiten lichtschwache Begleiter. Ob diese dem Wasserstoff eigenthümlich sind — ich nehme es an, weil sie auf verschiedenen Seiten der Hauptlinie liegen — oder ob sie von der erwähnten Aberration meines Flussspathkörpers herrühren, hat sich bis jetzt nicht feststellen lassen.

Lichtdurchlässigkeit des Wasserstoffs.

Meine Aufnahmen des Wasserstoffspectrums führten noch zu einer anderen Thatsache. Die Strahlen hatten im Apparat eine Wasserstoffschicht von einigen Decimetern Dicke zu durchsetzen, ehe sie die lichtempfindliche Platte erreichten. Da sie am Ende ihres Weges noch photographisch wirkten, liess sich annehmen, dass der Wasserstoff für die Strahlen kleinster Wellenlängen ziemlich durchlässig sei. In welchem Grade

darüber geben meine Aufnahmen vorläufig keinen bestimmten Aufschluss. In den meisten Fällen stand die absorbirende Gasschicht unter schwachem Druck, und schon aus diesem Grunde könnte sie wenig Strahlen absorbirt haben. Eine Lösung dieser Frage dürfte nur durch Aufnahmen bei höherem Druck, als er gewöhnlich in Entladungsröhren vorkommt, zu erzielen sein. Derartige Aufnahmen liegen mir zur Zeit nur in geringer Anzahl vor, und diese wenigen beschränken sich sämmtlich auf dieselbe Spectralstrecke (185 $\mu\mu$ bis 175 $\mu\mu$), auf Drucke bis zu 100 *mm* aufwärts und auf zwischen dicht vor dem Collimator, also in der Luft erfolgte Entladungen. [1]

Wenn ich das Aluminiumspectrum mit dem bis auf weniger als 0·5 *mm* Druck entleerten Apparat aufnahm, dann so viel Wasserstoff zuströmen liess, dass die Barometerprobe der Luftpumpe bis auf 100 *mm* stieg, und die Aufnahme wiederholte, ergab sich kein wesentlicher Unterschied der beiden Spectra. Der Wasserstoff hatte sich demnach den betreffenden Strahlen gegenüber indifferent verhalten. Hiernach besteht kein Zweifel, dass Wasserstoff für diesen Bezirk lichtdurchlässig ist. Für die stärker abgelenkten Strahlen hat sich leider der gleiche Versuch aus den früher erörterten Gründen nicht ausführen lassen. Jedenfalls darf man annehmen, dass der Verlust an photographischer Energie mit der Dichte der Gasschicht, die die Strahlen zu durchsetzen haben, abnimmt. Ich habe dieser Thatsache insofern Rechnung getragen, als ich bei Aufnahme der kleinsten Wellenlängen den Druck nach Möglichkeit vermindert habe.

Gesammtergebniss.

Die Resultate meiner Untersuchungen des brechbarsten Ultraviolett elektrischer Entladungen lassen sich kurz wie folgt zusammenfassen:

---

[1] Wasserstofflicht war nicht verwendbar, weil der Druck in Röhre und Apparat bei meiner Versuchsanordnung stets derselbe ist. Die photographische Energie der Wasserstoffstrahlen nimmt aber bei Steigerung des Druckes schnell ab. Eine Änderung des photographischen Effectes bei hohem Druck hätte sonach ebenso gut vom Lichtquell wie von der Absorption durch die Wasserstoffschicht herrühren können.

1. *a)* Die Beobachtung des ultravioletten Spectrums mit Hilfe der Fluorescenz ist nur bis zur Wellenlänge 185·2 μμ möglich, da die stärker abgelenkten Strahlen ungenügend fluoresciren. Ihre Ergebnisse sind minder zuverlässig als die der photographischen Beobachtung, weshalb dieser allenthalben der Vorzug gebührt.

b) Die photographische Beobachtung des ultravioletten Spectrums führt bis zur Wellenlänge 100 μμ (schätzungsweise). Der Umfang des Beobachtungsgebietes richtet sich nach dem Masse der Absorption, der die Strahlen auf ihrem Wege zum lichtempfindlichen Bestandtheil der photographischen Platte begegnen. Der schwächeren Absorption folgt das längere Spectrum.

Die in Betracht kommenden Absorbentien sind die atmosphärische Luft, das Bindemittel des lichtempfindlichen Bestandtheiles der photographischen Platte (Gelatine, Collodium) und das Material des Prismas (Gitters) und der Linsen des photographischen Spectralapparates. Die beiden ersten lassen sich vollständig beseitigen, die Luft durch Evacuirung des photographischen Apparates, das Bindemittel durch Präparation besonderer Bromsilberplatten. Das relativ durchlässigste und für Prisma und Linse geeignetste Material ist weisser Flussspath.

Bei Ausschluss der Luft (Vacuum) führen Quarzprismen und Spiegelgitter unter Beibehaltung der Gelatineplatte bis zur Wellenlänge 182 μμ; beseitigt man die Gelatine (neue Platte), dann läuft das Spectrum weit über diese Wellenlänge hinaus. Die brechbarsten Strahlen sind allein mit Vacuum, reinem Silberhaloid und weissem Flussspath erreichbar.

c) Die brechbarste Linie meiner Aufnahmen gehört dem Wasserstoff an. Ich schätze ihre Wellenlänge auf 100 μμ. Dann folgen die Aufnahmen des Al, Cd, Co, Cu, Mg, Pb, Pt, Tl, W; sie enden in der Gegend der Wellenlänge 170 μμ. Eine Anzahl anderer Aufnahmen ist von weit kleinerer Ablenkung, doch muthmasslich nur in Folge der stärkeren Absorption einer in den Strahlengang eingeschalteten dicken Luftschicht. In welchem Masse die vorgenannten Metallspectren unter dem Einfluss der in Betracht kommenden 1 *mm* dicken Luftschicht gestanden haben, dafür fehlt mir jeder Anhalt.

2. Die atmosphärische Luft absorbirt die Strahlen des brechbarsten Ultraviolett in weit höherem Masse als bisher angenommen wurde. Eine Luftschicht von 1 *mm* Dicke und 760 *mm* Druck scheint alles Licht jenseits der Wellenlänge 170 μμ zurückzuhalten.

3. Der Wasserstoff ist für den minderabgelenkten Theil des neuen Gebietes leicht durchlässig, wahrscheinlich auch für den anderen Theil.

4. Trockne Gelatine absorbirt die brechbarsten Strahlen energisch. Daher die verminderte Wirkung der Bromsilbergelatineplatte jenseits der Wellenlänge 227 μμ.

5. Quarz ist zur Beobachtung der kleinsten Wellenlängen nicht geeignet. Ihm fehlt die nöthige Durchlässigkeit.

6. Funkenlicht gegenüber zeigen reines Silberbromid und Bromsilbergelatine verschiedene Empfindlichkeit: Silberbromid ist durchgängig für das brechbarere Ultraviolett am empfindlichsten, Bromsilbergelatine für das minderbrechbare.

Dies der gegenwärtige Stand meiner Untersuchung.

Meine nächste Aufgabe wird die Bestimmung der Wellenlängen der Hauptlinien des neuen Gebietes sein. Ihr soll dessen Gesammtaufnahme in besserer Definition als sie bisher erreichbar war folgen. Nebenher wird die auf eine Steigerung der Empfindlichkeit und auf Minderung der Oberflächenfehler abzielende Verbesserung meiner neuen Platte gehen.

Eine andere, von den vorgenannten Aufgaben kaum zu trennende Frage, die schon von Anfang meiner Untersuchung an immer wieder an mich herantrat, ist die nach der Lichtdurchlässigkeit der Luft; sie dürfte der Gegenstand einer besonderen Arbeit werden, insofern ich mich nicht, um von meiner Hauptarbeit (der weiteren Erschliessung der kleinsten Wellenlängen) nicht unnöthig abgezogen zu werden, auf die Schichtendicken beschränke, die bei dem gegenwärtigen Stand meiner Untersuchung allein noch interessiren, Luftschichten, deren Dicke unter 1 *mm* liegt. Vorbereitungen, die ich hierzu getroffen habe, berechtigen zu der Hoffnung, dass sich Luftschichten in Dicken bis zu einigen Mikron abwärts in ihrem

Verhalten den kleinsten Lichtquellen gegenüber, die ich gefunden habe, werden beobachten lassen. Dieser Versuch soll weniger über den Verlauf der Absorptionscurve der Luft, als darüber entscheiden, ob der geringe Umfang der Metallspectren, die zur Zeit bei der Wellenlänge 170 $\mu\mu$ enden, auf ein specifisches Verhalten der Metalle oder auf die Absorption der 1 *mm* dicken Luftschicht zurückzuführen sei.

Erst nach Erledigung dieser Aufgaben werde ich zu meiner ursprünglichen Arbeit, der Erweiterung des Ultravioletten, zurückkehren können.

Da meine Untersuchungen noch nicht abgeschlossen sind, so wäre es gewagt, an die zur Zeit vorliegenden Resultate Betrachtungen knüpfen zu wollen. Dazu wird man erst dann schreiten dürfen, wenn die Mehrzahl aller Spectren bis in noch grössere Nähe ihres muthmasslichen Ausgangspunktes, der Wellenlänge Null, verfolgt sein wird. Die durch meine Untersuchung erreichte Erweiterung des Ultravioletten ist nur von bescheidenem Umfang, wenn man von dem Wasserstoff absieht. Beim Wasserstoff liegen die Verhältnisse zwar günstiger, doch kann der Vervollkommnung unseres spectralen Wissens aus naheliegenden Gründen, mit der Erweiterung eines einzelnen Spectrums nur wenig gedient sein. Wenn die Spectralanalyse, wie es den Anschein gewinnt, dazu berufen sein sollte, uns Aufschluss über die molecularen Vorgänge zu bringen, wozu nach den Untersuchungen der Herren H. Kayser und C. Runge, die stärker abgelenkten Strahlen vornehmlich geeignet sind, dann dürfte die Entscheidung über diese bedeutsame Frage in erster Linie von dem Gebiete der kleinsten Wellenlängen, wie ich mir den zwischen den Wellenlängen 185 $\mu\mu$ und 0 $\mu\mu$ liegenden Spectrumtheil zu bezeichnen erlaubt habe, zu erwarten sein.

Möchte dieser Bericht die erste Anregung hierzu geben.

Erklärung der Tafeln I bis V.[1]

Tafel I.

Fig. 1 und 2, der erste Spectralapparat zur Photographie im luftleeren Raume. — Fig. 3, sein Spaltschlitten. — Fig. 4, die Keilringe zur Änderung des Winkels, den die beiden Linsenaxen des Collimators und der Camera einschliessen. — Fig. 5, das Prismastativ mit dem Prisma. — Fig. 6 und 7, die Camera mit der Cassette.

Tafel II.

Fig. 8, die conische Triebaxe des Collimators zur Verschiebung der Linse im luftleeren Raume.

Zum verbesserten Spectralapparat gehörig: Fig. 9 und 10, die Cassette. — Fig. 11, der Schlüssel dazu. — Fig. 12, der Spaltschlitten, nach Abnahme seines Verschlussdeckels. — Fig. 13, der Deckel dazu, mit daransitzender Entladungsröhre und dem Stahlbolzen zum Centriren der Röhre.

Fig. 14, das Spectrum des Aluminiums, wenn die lichtabsorbirende Luftschicht zwischen Funken und evacuirtem Apparat 20, 10, 5, 3 und 1 *mm* dick ist. — Fig. 15, das Spectrum des Cadmiums bei 1 *mm* dicker Luftschicht.

Tafel III.

Fig. 16, das Gehäuse, der Hauptkörper des verbesserten Spectralapparates (Horizontalquerschnitt). — Fig. 17, die Camera desselben Apparates, ebenso durchschnitten. — Fig. 18, der verbesserte Apparat selbst (Aufriss).

Tafel IV.

Fig. 19, der Grundriss dazu.

Tafel V.

Einige Spectra des neuen Spectralgebietes, voran, zum Vergleich der Längen des älteren und neuen Spectralgebietes, das Spectrum des Cadmiums.

• 1. Cadmium. Die Wellenlängen der Hauptlinien: (Nr. 5, 479·9), (Nr. 9, 361·17), (Nr. 11, 340·15), (Nr. 17, 274·77), (Nr. 18, 257·23), (Nr. 23, 231·35), (Nr. 24, 226·55), (Nr. 25, 219·45), (Nr. 26, 214·41). Alles was

---

[1] Ausführlich sind diese Tafeln vorstehend bei Beschreibung der beiden Apparate und der betreffenden Spectra besprochen.

jenseits Nr. 26 liegt, war bisher unbekannt. Die vier brechbarsten Linien liegen bei der Wellenlänge 185·2 μμ. Die lichtempfindliche Platte zu dieser Aufnahme ist eine der ersten, die nach dem neuen Verfahren präparirt wurde. Daher der unreine Plattengrund. Gegenwärtig ist das Verfahren verbessert. Die jetzt noch auftretenden Fehler des Plattengrundes sind, wie die nachfolgenden Spectra beweisen, gegenstandslos.

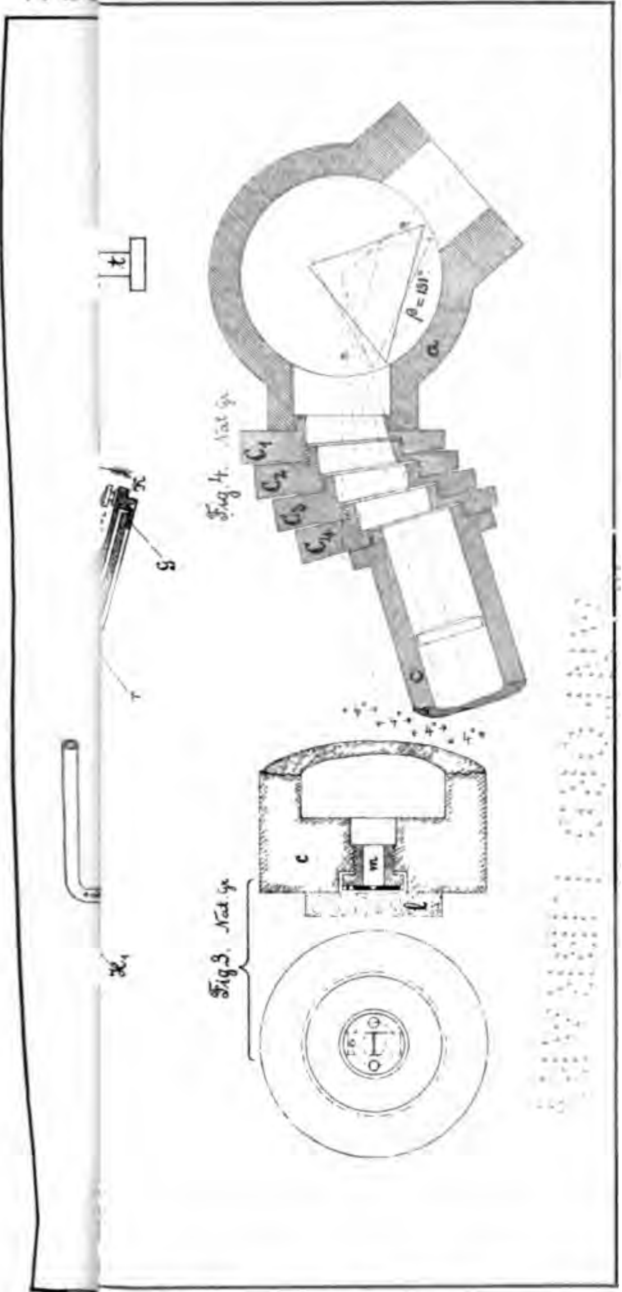
2. Aluminium. Die starkverwaschene Spectrumlinie rechts von der Spectrummitte bildet die von Stockes erreichte Lichtgrenze des Ultravioletten (Wellenlänge 186·0 und 185·2 μμ). Was rechts von ihr liegt, sind neue Linien des Aluminiums.

3. bis 9. Wasserstoff. Diese 7 Spectra stellen in ihrer Aufeinanderfolge das neue Wasserstoffgebiet zwischen den Wellenlängen 170·0 und 100·0 μμ dar.

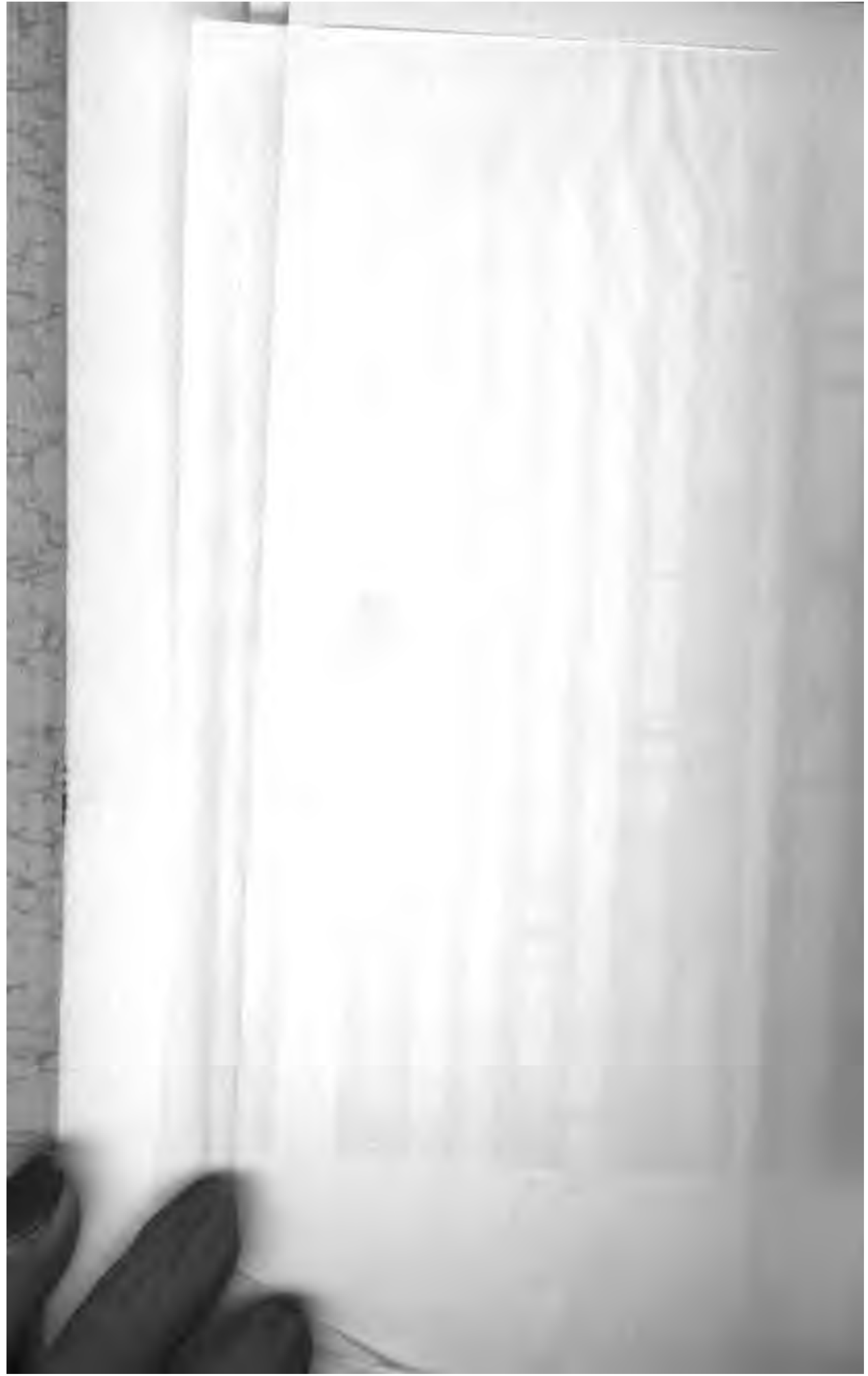
10. Wasserstoff. Eine Wiederholung der Aufnahme 9 auf hochempfindlicher Platte. Dieses Spectrum enthält die brechbarsten Linien, die je beobachtet worden sind.

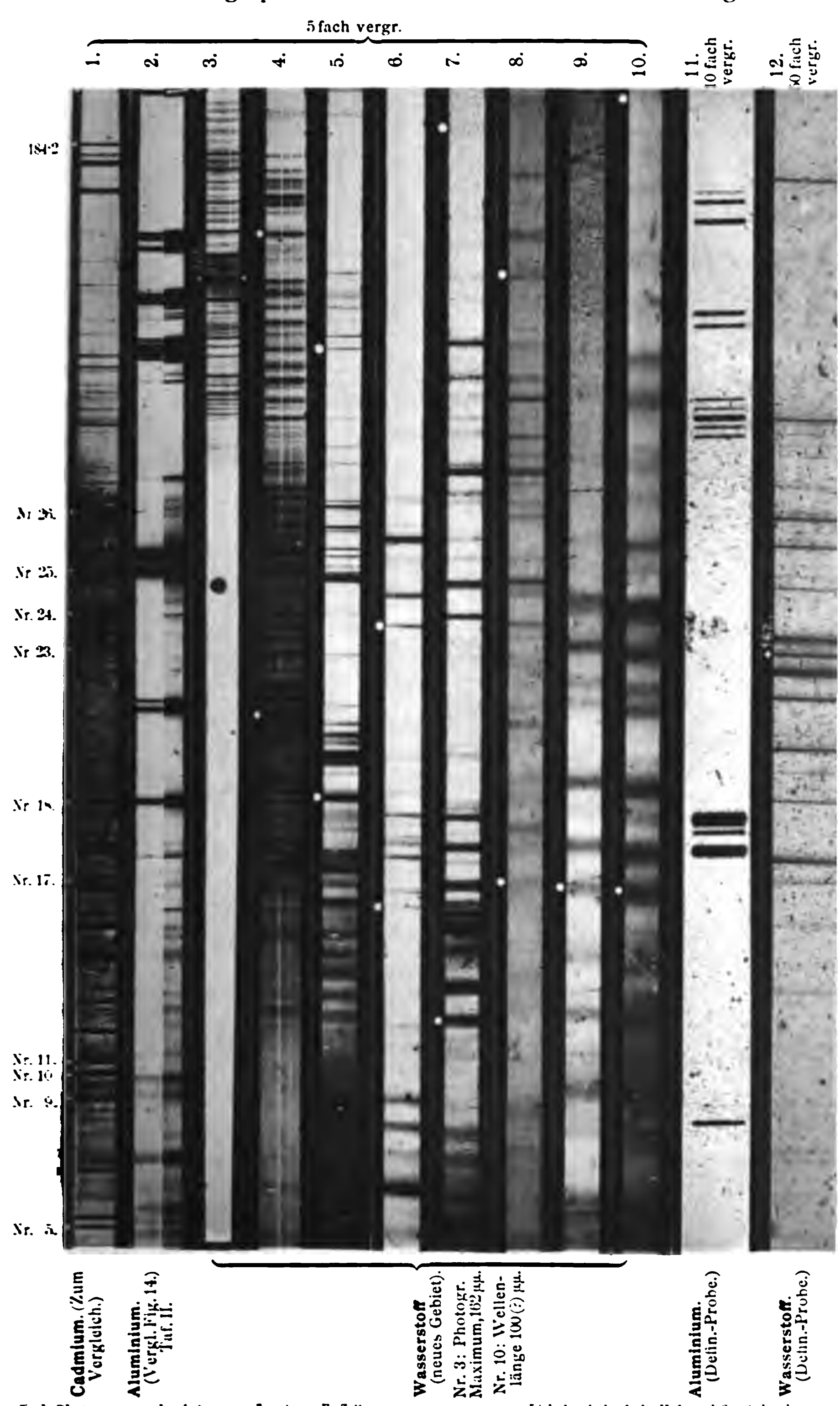
11. Aluminium. Eine zehnfache Vergrösserung der Originalaufnahme.

12. Wasserstoff. Eine fünfzigfache Vergrösserung des Originales. Beide Aufnahmen sind als Definitionsproben anzusehen.

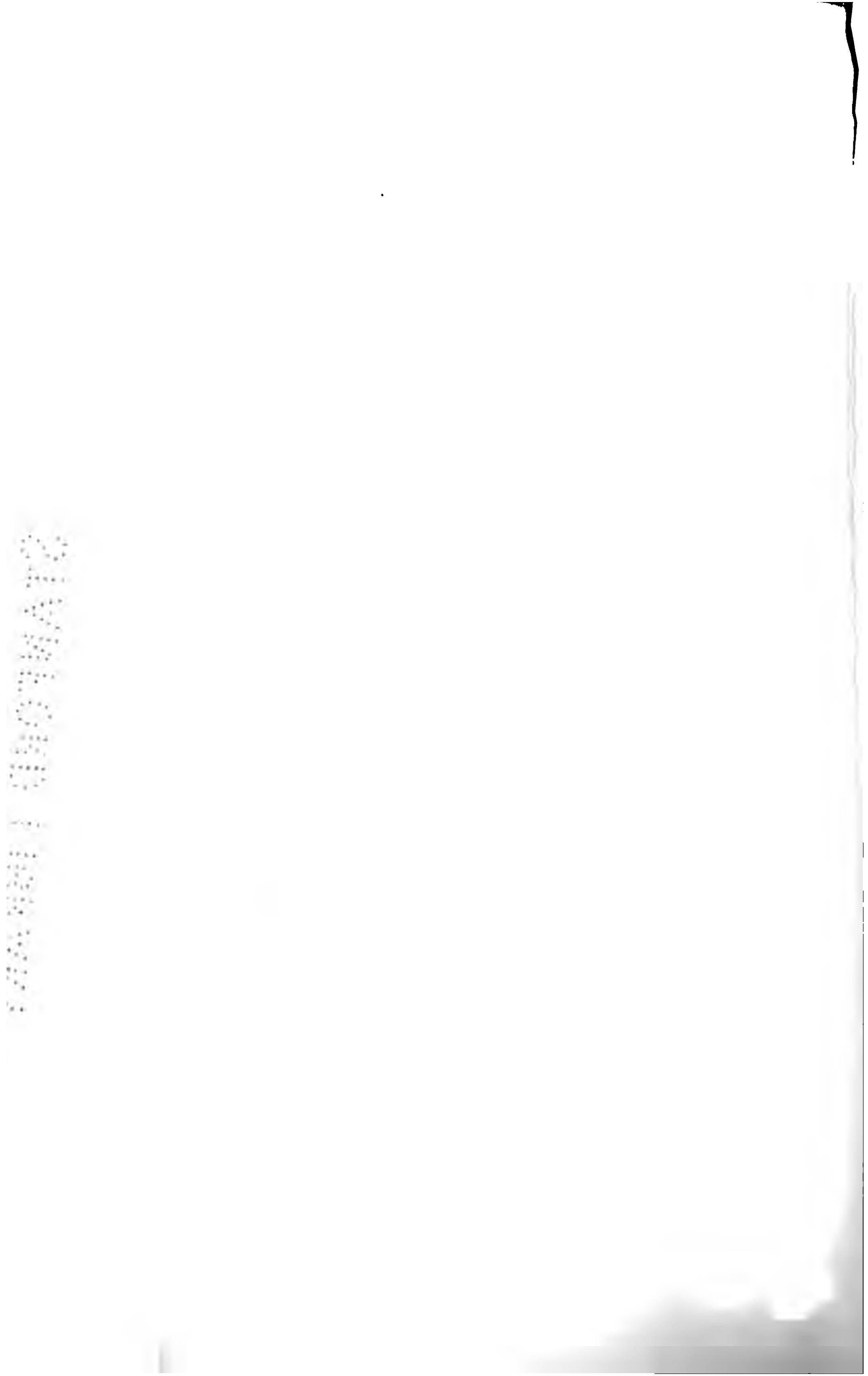


Autor … Photolithographie von C. Angerer & Göschl in Wien.





Nach Photogrammen des Autors vergrössert von E. Zettnow. Lichtdruck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in



SITZUNGSBERICHTE

DER

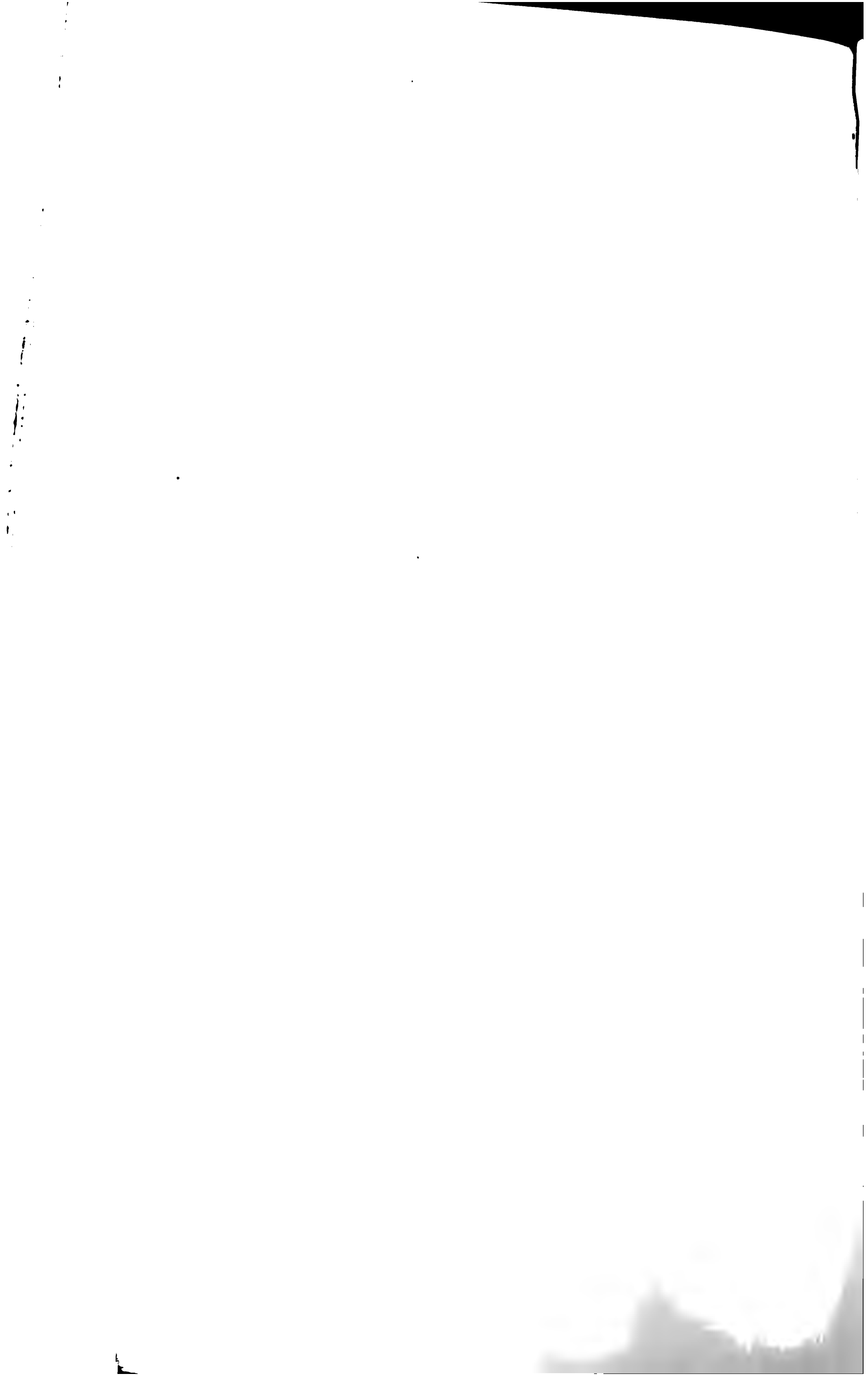
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CII. BAND. VII. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



XVIII. SITZUNG VOM 6. JULI 1893.

Herr Intendant Hofrath Ritter v. Hauer führt den Vorsitz.

Der Secretär legt das erschienene Heft III und IV (März und April 1893) des 102. Bandes der Abtheilung II. b der Sitzungsberichte vor.

Das k. k. Ministerium des Innern übermittelt die von der oberösterreichischen Statthalterei vorgelegten Tabellen und graphischen Darstellungen über die Eisbildung auf der Donau während des Winters 1892/93 in den Pegelstationen Aschach, Linz und Grein.

Ferner übermittelt das k. k. Ministerium des Innern ein Exemplar der Druckschrift: »Die Gebarung und die Ergebnisse der Krankheitsstatistik der nach dem Gesetze vom 30. März 1888, betreffend die Krankenversicherung der Arbeiter, errichteten Krankencassen im Jahre 1890«, II. Theil.

Herr Prof. Dr. L. Weinek, Director der k. k. Sternwarte in Prag, übermittelt als Fortsetzung seiner neuesten Mondarbeiten eine 40-fach vergrösserte Zeichnung der Ringebene Capella und des Wallkraters Taruntius *C* nach photographischen Aufnahmen der Lick-Sternwarte.

Das c. M. Herr Prof. Zd. H. Skraup übersendet eine von ihm ausgeführte Untersuchung aus dem chemischen Institute der k. k. Universität in Graz, betitelt: »Einige Umwandlungen des Chinins«.

Herr Dr. Emil Waelsch, Privatdocent an der k.k. deutschen technischen Hochschule in Prag, übersendet eine Abhandlung: »Über Tangentencongruenzen einer Fläche«.

Die Herren Karl Pompe und Richard Siedek, Ober-Ingenieure im k.k. Ministerium des Innern in Wien, übersenden eine Abhandlung, betitelt: »Bericht, betreffend Versuche über das magnetische Verhalten des Eisens bei verschiedener Inanspruchnahme desselben«.

Herr Dr. Alfred Nalepa, Professor an der k. k. Lehrerbildungsanstalt in Linz, übersendet eine vorläufige Mittheilung über »Neue Gallmilben« (8. Fortsetzung).

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Lang überreicht eine Arbeit der Herren Director Dr. J. M. Eder und E. Valenta in Wien: »Über den Verlauf der Bunsen'schen Flammenreactionen im ultravioletten Spectrum. Das Flammenspectrum von Kalium, Natrium, Lithium, Calcium, Strontium, Barium und das Verbindungsspectrum der Borsäure«.

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht zwei von Herrn Prof. Dr. Guido Goldschmiedt übersendete Arbeiten aus dem chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag:

1. »Über das Verhalten des veratrumsauren Kalkes bei der trockenen Destillation«, von Dr. Wilhelm Heinisch.
2. »Über das Mekonindimethylketon und das Dimekonindimethylketon«, von Franz v. Hemmelmayr.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. G. Tschermak überreicht eine Abhandlung des c. M. Herrn Prof. F. Becke in Prag: »Über die Bestimmbarkeit der Gesteinsgemengtheile, besonders der Plagioklase auf Grund ihres Lichtbrechungsvermögens«.

Das w. M. Herr Prof. Sigm. Exner überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Negative Versuchsergebnisse über das Orientirungsvermögen der Brieftauben«.

Das w. M. Herr Hofrath A. Kerner v. Marilaun berichtet über die bisherigen Ergebnisse der im Auftrage der kaiserlichen Akademie ausgeführten botanischen Reise des Dr. E. v. Halácsy.

Der Secretär legt die soeben an die kais. Akademie gelangte geologische Karte des Europäischen Russland im Massstabe von 1 : 2,520.000 vor.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Cruls, L., Le Climat de Rio de Janeiro. D'après les Observations Météorologiques faites pendant la période de 1851 à 1890. Rio de Janeiro, 1892; 4°.

Instituto Agronomico do Estado de São Paulo em Campinas, Relatorio Annual do Instituto Agronomico do Estado de 1892. S. Paulo, 1893; 8°.

Observatorio Astronómico de Madrid, Resumen de las Observaciones Meteorológicas, efectuadas en la Peninsula ibérica y en algunas de sur islas adyacentes durante el año de 1890. Madrid, 1893; 8°.

Über den Verlauf der Bunsen'schen Flammenreactionen im ultravioletten Spectrum.

Das Flammenspectrum von Kalium, Natrium, Lithium, Calcium, Strontium, Barium und das Verbindungsspectrum der Borsäure

(Vorläufige Mittheilung)

von

Director Dr. **J. M. Eder** und **E. Valenta.**

Wir untersuchten die genannten Flammenspectren mittelst des Quarzspectrographen und erhielten bei lange andauernden Belichtungen (12—36 Stunden) deutliche Spectrumphotographien, welche weit ins Ultraviolette reichten und mittelst welcher der Nachweis erbracht wurde, dass die Bunsen'schen Flammenreactionen sich bis ins Ultraviolett erstrecken, was bisher nicht bekannt war.

Es wurden auf diese Weise im Flammenspectrum der genannten Körper zum Theil Linien, welche bisher nur im Bogen- und Funkenspectrum nachgewiesen worden sind, erhalten, zum Theil wurden neue, bisher unbekannte Oxydbanden aufgefunden.

Unsere Untersuchungen erstrecken sich auf das gesammte sichtbare und ultraviolette Spectrum der Bunsenflammenreactionen, und wir geben nachfolgende Tabellen der gesammten Linien und Banden, welche in den Flammenspectren der obgenannten Stoffe auftreten. Die Wellenlängen wurden bezogen auf Rowland, respective Kayser und Runge's Zahlen.

a) Kaliumsalze.

Sämmtliche Linien gehören dem elementaren Kalium an; die beiden letzten sind für das Flammenspectrum neu.

		Lecoq	Eder und Valenta	*I*	Bemerkungen
Roth	α	7697	7699	10	Ziemlich scharfe Linie.
		7663	7666	10	» » »
		7248—6825	7040	1	Mitte einer breiten schwachen Bande.
		5831	5832	5	Scharfe Linie.
Gelb	β	5803	5802	8	» »
		5783	5783	5	» »
Grün	δ	5342	5344	4	Mitte einer verbreiterten Linie.
		5104	5103	3	» » » »
		4948	4950	3	Mitte einer etwas verbreiterten Linie.
Violett	γ	4045	4046	10	Breite Linie, entspricht der Doppellinie 4047·4—4044·3 des Bogenspectrums.
			3447	4	Entspricht der Doppellinie 3447·5 bis 3446·5 des Bogenspectrums.
Ultraviolett			3217	1	Entspricht der Doppellinie 3217·8 bis 3217·3 des Bogenspectrums.

b) Natriumsalze.

Die Natriumsalz-Bunsenflamme erweist sich bei der Untersuchung im Quarzspectrographen nicht als monochromatisch, sondern es treten zwei bisher in der Bunsenflamme noch nicht bekannte ultraviolette Linien auf. Sämmtliche Linien gehören dem Natriumelementenspectrum an.

	Eder und Valenta	*I*	Bemerkungen
Gelb	Na... 5896	10	
	Na... 5890	10	
	Na ....3302·5	8	Entspricht der Doppellinie 3303·1 / 3302·5 des Bogenspectrums nach Kayser und Runge.
Ultraviolett	Na ....2853·0	2	Entspricht der Linie 2852·9 des Bogenspectrums nach Kayser und Runge. Für das Flammenspectrum neu.

c) Lithiumsalze.

Auch die Lithiumflamme wies neue stark brechbare Linien auf, welche gleichfalls als dem Spectrum des elementaren Lithiums zugehörig erkannt wurden.

	Eder und Valenta	*I*	Bemerkungen
Roth	6708	10	Hauptlinie.
Rothgelb	6103	3	
Blau	4602	2	neu für das Flammenspectrum.
Ultraviolett	3232·8	4	neu für das Flammenspectrum.

Die Lithiumflamme gibt nur ein ganz schwaches continuirliches Spectrum, das weitaus schwächste der untersuchten Alkalimetalle.

d) Calciumsalze.

Calciumoxydsalze geben in der Bunsenflamme sehr wenig Metalllinien und viele Oxydbanden. Bei Gegenwart von Chlorcalcium treten ausser den genannten Oxydbanden noch Chloridbanden auf. Es wurden im Spectrum der Calciumsalzflammen 30 neue Oxydbanden von uns aufgefunden, wie aus der folgenden Tabelle ersichtlich ist.

		Nach Lecoq	Eder und Valenta	*I*	Bemerkungen
Orangeroth		6441	6442	4	Calciumoxyd.
		6348	(6349)	2	(Chlorid).
		6320	(6322)	10	(Chlorid).
	α	6265	6265	10	Oxyd.
	α	6202	(6202)	10	(Chlorid).
	α	6181	(6183)	10	(Chlorid).
	δ	6068	(6069)	5	(Chlorid).
	δ	6044	(6044)	5	(Chlorid).
	δ	5982	5983	5	Oxyd.
	γ	5933	(5934)	8	(Chlorid).
	ξ	5817	(5816)	3	(Chlorid).
		5728	5727	2	Oxyd.

		Nach Lecoq	Eder und Valenta	I	Bemerkungen
Gelb		5644	5644	2	Oxyd
	β {	5543	5543·5	8	»
		5517	5517	8	»
		5427	5428	2	»
		5372	5374	2	»
Blau			4550	1	» } neu.
			4515	1	»
			4465	1	»
			4435	1	»
			4396	1	»
			4362	1	»
			4324	1	»
			4294	1	»
			4257	1	»
Violett		4226	4227	10	Metallisches Calcium (Scharfe Linie)
			4159	1	Oxyd } neu
			4122	1	»
			4084	1	»
			4042	1	»
			4002	1	»
			3972	1	»
			3942	1	»
			3909	1	»
			3880	1	»
			3840	1	»
			3815	1	»
			3771	1	»
			3722	1	»
			3687	1	»
			3644	1	»
			3608	1	»
			3569	1	»
			3531	1	»
			3494	1	»
			3463	1	»
			3429	1	»

e) **Strontiumsalze.**

Verhalten sich ähnlich den Calciumsalzen, nur dissociiren diese Salze leichter, weshalb bei Strontiumchlorid das Chlorid-

spectrum weniger deutlich neben dem Oxyd und Metallspectrum hervortritt.

		Nach Lecoq	Eder und Valenta	I	Bemerkungen	
	ζ	6862	6863	4	Strontiumoxyd	
		6827	6828	4	»	
Roth		6729	(6731)	1	Strontiumchlorid	
	γ	6694	6695	8	Oxyd	
		6664	6665	8	»	
	ε	6627	6628	6	»	
		6597	(6597)	6	(Chlorid)	
Orange	δ	6464	6464	6	Oxyd	
	η	6350	(6351)	5	»	
		6276	6275	1	»	
		6233	6233	1	»	
		6191	6192	1	»	
	α	6059	6060	10	»	
		6031	6032	10	»	
		5970	5968	2	Metallisches Strontium	
		5940	5940	1	Oxyd	
	ι	5911	5910	3	»	
		5890	5891	3	»	
Blau	β	4607	4608	10	Metallisches Strontium	
Violett			4505	1	Oxyd	neu
			4470	1	»	neu
			4430	1	»	neu
Ultraviolett			4391	1	»	neu
			4357	1	»	neu
			4328	1	»	neu
			4292	1	»	neu
			4259	1	»	neu
			4032	2	Metallisches Strontium (Entspricht der Doppellinie im Bogenspectrum {4032·5, 4030·5).	neu
			3806	2	Breite verwaschene Banden (Mitte gemessen)	neu
			3778	2		neu
			3738	2	Breite verwaschene Bande	neu
			3692	3	» » »	neu
			3647	3	» » »	neu
			3612	1	» nebelige Bande	neu

f) Bariumsalze.

Bei Benützung von verdünnter Bariumchloridlösung wurden nur zwei Chloridbanden constatirt, dagegen constatirten wir dreissig neue Oxydbanden im Spectrum der Bariumsalzbunsenflamme (sowohl Nitrat- als Chloridflamme); es treten nur drei Metalllinien auf.

Nach Lecoq		Eder und Valenta	I	Bemerkungen
	6819	6820	1	Bariumoxyd
λ	6499	6497	2	Metall. Barium (vielleicht begleitet von einer Oxydbande?)
	6448	6450	1	Oxyd
ξ	6297	6297	2	»
	6239	6240	4	»
	6178	6177	4	»
γ	6108	6109	4	»
	6044	6044	4	»
	5995	5997	1	»
β	5938	5938	8	»
	5881	5882	8	»
μ	5824	5827	1	»
	5768	5768	4	»
η	5719	5720	6	»
	5661	5660	8	»
	5613	5612	3	»
α	5636	5636	10	Metallisches Barium
ζ	5492	5493	8	Oxyd
	5461	5460	1	»
ε	5346	5346	9	»
		5316	1	»
	5314	5314	2	Chlorid neu
		5280	1	Oxyd neu
		5255	1	» »
	5242	5243	2	(Chlorid)
ϑ	5215	5215	8	Oxyd
ι	5089	5089	9	»
	5019	5022	2	»
	4974	4977	2	»
		4954	1	
κ	4873	4873·5	10	»

	Nach Lecoq	Eder und Valenta	I	Bemerkungen
	4794	4796	3	Oxyd
		4756	1	» } neu
		4736	1	» } neu
		{ 4694	3	» } neu
		{ 4681	2	» } neu
		{ 4644	1	Oxyd } neu
		{ 4630	1	» } neu
		{ 4589	1	» } neu
		{ 4567	1	» } neu
		4554 ?	1	In der vorigen Oxydbande scheint die Bariummetalllinie λ = 4554 zu liegen (?) } neu
		4535	1	Oxyd } neu
		4488	1	» } neu
		4443	1	» } neu
		4398	1	» } neu
		4353	1	» } neu
		4309	1	» } neu
		4270	1	» } neu
		4235	1	» } neu
		4200	1	» } neu
		4165	1	» } neu
		4128	1	» } neu
		4088	1	» } neu
		4047	1	» } neu
		4009	1	» } neu
		3984	1	» } neu
		3951	1	» } neu
		3918	1	» } neu
				Spuren anscheinend regelmässig vertheilter Banden erstrecken sich bis gegen λ = 3400.

g) Borsäure.

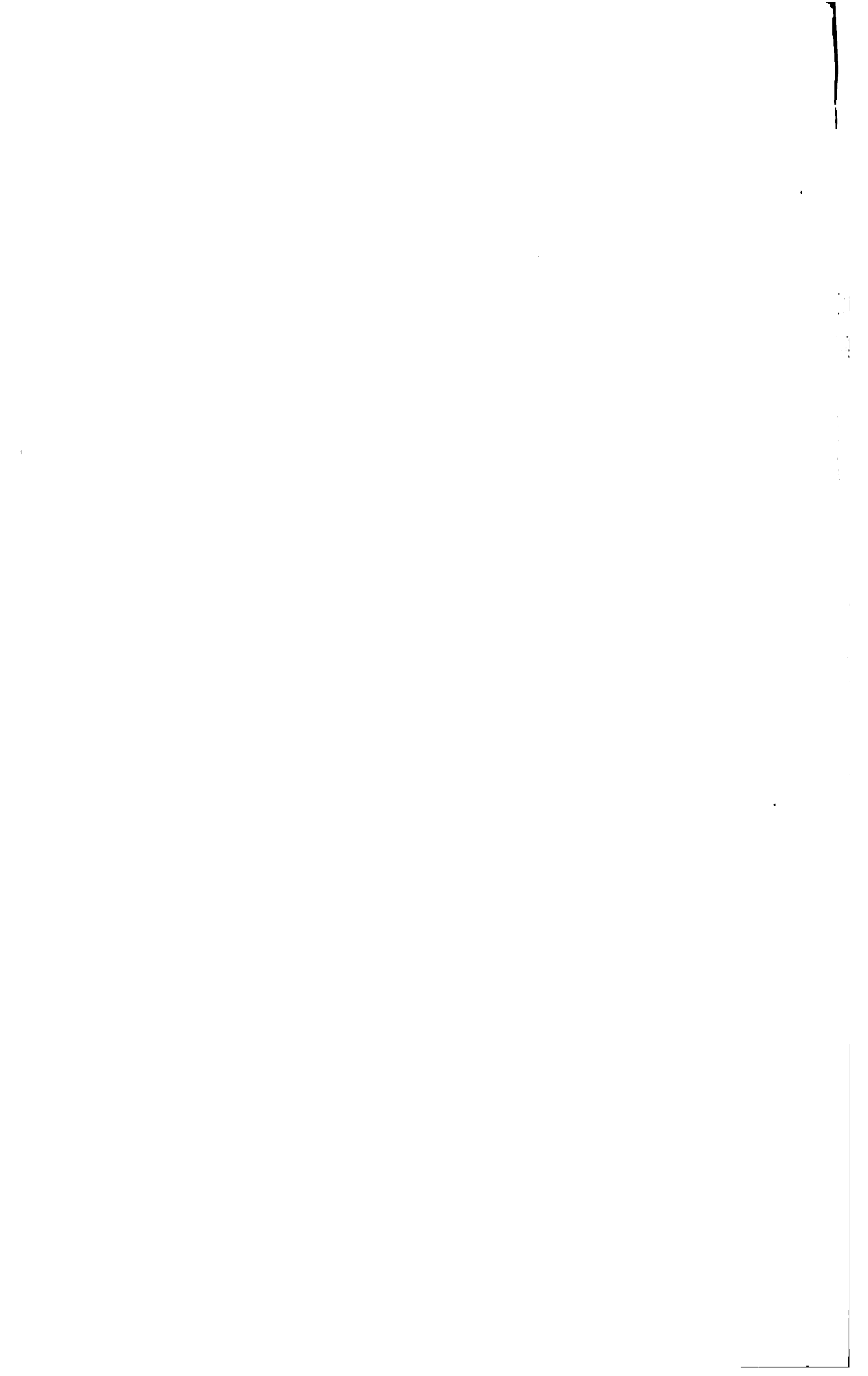
Die Borsäureflamme gibt stets nur ein Verbindungsspectrum, ohne dass in demselben die Linien des elementaren Bor nachzuweisen wären; selbst wenn man Borsäureäthyl + Leuchtgas mit Sauerstoff im Linnemann'schen Gebläse, unter starkem Drucke des Sauerstoffes, verbrennt. Es wurden von uns

sechs neue violette und ultraviolette Banden im Flammenspectrum der Borsäure nachgewiesen, während im brechbarsten Theile keine Banden vorhanden sind. Dies ist um so bemerkenswerther, als im Spectrum des elementaren Bor die charakteristischen Linien im Ultraviolett liegen (Eder und Valenta).

Tabelle der im Borsäureflammenspectrum auftretenden Linien und Banden.

	Salet	Lecoq	Eder und Valenta	*I*	Bemerkungen
Orange	6400	6397	6398	3	Alle Banden und Linien gehören der Borsäure selbst an.
	6200	6210	6208	3	
	6030	6031	6030	3	
Gelb	5800	5807	5795	5	Erstes Maximum der Bande.
			5594	4	Zweites Maximum der Bande.
Grün	5480	5480	5478	10	Mitte einer starken breiten Linie, die im ersten Maximum der Bande liegt.
	—	5439	5440	8	
	5200	5192	5212	6	Erstes Maximum der Bande.
			5172	8	Zweites Maximum der Bande.
	4910	4941	4920	6	Mitte des Maximums einer breiten Bande.
	4700	4721	4709	6	Mitte einer ziemlich breiten Bande.
	4540	4529	4529	5	» » » » »
			4334 (neu)	5	» » » » »
			4191 (neu)	5	» » » » »
			4094 (neu)	6	Erstes Maximum der Bande.
			4020 (neu)	4	Zweites Maximum der Bande.
			3894 (neu)	3	Mitte einer schwachen Bande.
			3768 (neu)	1	» » » »

Die Versuchsanordnung, sowie die Beschreibung eines zur Erzeugung lange andauernder Bunsenflammenreactionen von den Verfassern construirten Apparates (auf der Anwendung eines rotirenden Platinnetzes beruhend) sind in der Originalabhandlung ausführlichst gegeben (vergl. Denkschriften der kais. Akad. der Wissensch. 1893).



Der tägliche Gang der Temperatur auf dem Obirgipfel (2140 *m*) und einige Folgerungen aus demselben

von

J. Hann,

w. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. Juni 1893.)

Im Sommer 1891 wurde auf dem höchsten Punkte des Obirgipfels in Kärnten von Seite der österreichischen meteorologischen Gesellschaft ein neues Anemometerhäuschen aufgestellt. Der nach den Plänen des Herrn Oberbergrathes Ferd. Seeland in Klagenfurt unter der Obsorge des Herrn Bergverwalters R. Prugger in Eisenkappel mit einem Kostenaufwande von etwas über 1500 fl. errichtete Bau ist sehr zweckmässig ausgefallen und entspricht zugleich ästhetischen Anforderungen. Die meteorologische Zeitschrift enthält (Jahrgang 1893, Tafel III) ein sehr gelungenes Bild dieser neuen Warte nach einer photographischen Aufnahme des Herrn Dr. Ferd. v. Kleinmayr. Ich verweise auf diese Abbildung, welcher auch eine Ansicht der alten meteorologischen Station beim Rainer'schen Berghause am Obir (2044 *m*) beigegeben ist, weil sie manche der folgenden Erörterungen besser erläutert, als dies durch wörtliche Auseinandersetzungen erreicht werden kann. Auf der Nordseite dieses Anemometerhäuschens, das mit seinen vier Fronten genau nach den Weltgegenden orientirt ist, befindet sich $2^1/_2$ *m* über dem Boden ein Fenster, vor welchem in einer luftigen Blechbeschirmung ein Thermograph Richard angebracht wurde, zugleich mit einem Thermometer, welches zur directen Ablesung der Lufttemperatur bestimmt ist. Gegen das Innere der hölzernen Anemometerhütte sind diese Instrumente durch ein Glasfenster

abgeschlossen. Die Aufstellung des Thermographen ist eine sehr günstige und freie. Das Anemometerhäuschen hat wenig mehr als 2 m^2 Querschnitt und steht auf einem 1 *m* hohen, gemauerten Sockel. Der Gipfel des Obir hat nur eine sehr geringe Fläche und fällt allseitig, namentlich nach West und Nord sehr steil ab. Er ist zugleich in weitem Umkreise der höchste Gipfel (2141 *m*), die nächstliegenden, ihm an Höhe nahekommenden Gipfel der Karawanken sind: Die Kosuta (2135 *m*) in SW., in circa 9 *km*, und der Petzen (2114) im Osten in circa 21 *km* Entfernung; im Süden liegen die Sannthaler Alpen in circa 16 *km* Abstand, mit Gipfeln von 2300 bis 2600 *m*; nach Norden hin beherrscht der Obir das ganze kärntnerische Becken. Das Drauthal, in welches der Nordhang desselben abfällt, hat eine Seehöhe von wenig über 400 *m*, die Thäler im Osten und Süden reichen zu Seehöhen von 5—600 *m* hinab. Der Obir ist demnach eine fast freistehende Felspyramide von 1500 bis respective 1700 *m* relativer Erhebung.

Da die Aufstellung des Thermometers zugleich eine sehr günstige ist, so gestatten demnach die Temperaturregistrirungen auf dem Obirgipfel Schlüsse auf den Gang der Temperatur der höheren Luftschichten ohne erhebliche Beeinflussung durch die Unterlage. Es kommt noch ein Vortheil dazu. Die Gipfelstation auf dem Obir liegt noch in Sehweite der Sonnblickstation und fast genau 1000 *m* tiefer als letztere. Die horizontale Entfernung der beiden Gipfel ist circa 137 *km* oder 18½ deutsche Meilen, der Breitenunterschied beträgt wenig über einen halben Grad. Man kann daher die Temperaturbeobachtungen an den beiden Gipfelstationen zu manchen Vergleichungen benützen. Ich kenne kein anderes Paar von Gipfelstationen von ähnlicher Höhe, welche solche Vergleichungen gestatten würden.

Die Temperaturregistrirungen auf dem Obirgipfel beginnen mit 10. Februar 1892. Die Registrirungen an der unteren Station beim Berghaus, 100 *m* tiefer, liefern eine damit parallel gehende Reihe. Die directen Ablesungen am Thermometer, das auf dem Gipfel neben dem Registrirapparat in derselben Beschirmung angebracht ist, erfolgen täglich einmal, wenn es die Witterung zulässt. Sie dienen als Anhaltspunkte bei der Reduction der Thermographenzeichnungen. Die bis inclusive Februar 1893

durchgeführten Reductionen haben eine völlig befriedigende Übereinstimmung zwischen der Thermographenzeichnung und der directen Ablesung ergeben. Eine weitere Controle bieten in gewissem Sinne auch die Registrirungen an der unteren Station, die sich an die dreimaligen Ablesungen um 7^h, 2^h und 9^h anschliessen. Eine sorgfältige kritische Prüfung der Reduction der Thermogramme an der oberen Station hat deren völlige Verlässlichkeit ergeben. Der auffälligste Unterschied zwischen dem Temperaturgang unten beim Berghaus und oben auf dem Gipfel zeigte sich im Mai 1892. Nicht allein, dass dieser Monat nach den Registrirungen oben eine etwas höhere Temperatur hatte als unten, und dass auch die Maxima oben grösser waren als unten, es ergab sich zugleich die auffällige Erscheinung, dass die mittlere tägliche Wärmeschwankung auf dem Gipfel grösser war als unten beim Berghaus. In der Regel ist natürlich das Umgekehrte der Fall, besonders da die untere Station gegen die Sonnenstrahlung nicht genügend geschützt werden kann. Eine sorgfältige Prüfung der directen Ablesungen und der Thermogramme liess an der Richtigkeit der reducirten Temperaturwerthe auf dem Gipfel trotzdem nicht zweifeln. Es ergab sich nun bei weiteren Nachforschungen als vollkommen zureichender Grund für diese Anomalie der folgende Umstand. In der zweiten Hälfte des Mai 1892 setzte plötzlich hohe Wärme ein; der Schnee oben auf dem Gipfel war schon geschmolzen, unten aber gab es in der Thermometerhütte und deren Umgebung nach der Mittheilung des Beobachters J. Matteweber noch viel Eis und Schnee: »Im Mai 1892 gab es den ganzen Monat hindurch bis anfangs Juni noch bedeutend viel Schnee in der Umgebung des Hauses und auch in der Instrumentenhütte noch eine starke Eisrinde, wogegen auf dem Gipfel der Schnee schon längst weggeschmolzen war.« Dadurch klärt sich die ganze Sache auf und die kleinere tägliche Temperaturschwankung unten beim Berghaus trotz der stärkeren directen Wirkung der Sonnenstrahlung auf die Thermometerhütte wird verständlich.

Der Umstand, dass auf der kleinen Gipfelfläche, die frei von den Winden und Stürmen bestrichen wird, sich wenig Schnee halten kann, ist sehr günstig für die Registrirung möglichst richtiger Lufttemperaturen.

In der folgenden Tabelle I findet man den täglichen Gang der Temperatur auf dem Obirgipfel von Februar 1892 bis Februar 1893 inclusive in Form von Abweichungen der Stundenmittel vom Tagesmittel zusammengestellt, natürlich ohne jede Ausgleichung, als rohe Mittel aus den registrirten Temperaturen. Der absolute Werth der Monatstemperatur des Februar 1892 ist auf ein volles Monatsmittel reducirt worden, der tägliche Gang bezieht sich auf 20 Tage (10. bis 29. inclusive). Um den täglichen Gang im Februar etwas sicherer kennen zu lernen, habe ich auch noch den Monat Februar 1893 benützt. Die Daten für den Februar, die im Nachfolgenden angeführt werden, sind desshalb zumeist Mittel aus zwei Monaten (Februar 1892 und Februar 1893).

Zur Charakterisirung des allgemeinen Temperaturcharakters der Monate des Jahres 1892 und des Jänner und Februar 1893 mag Folgendes bemerkt werden: Der Februar und März 1892 waren zu kalt, namentlich der letztere (Abweichung circa —2°), April etwas zu warm, Mai nahe normal, Juni etwas zu kalt, der Juli hatte eine grosse negative Abweichung (fast $1\,^1/_2\,°$), August und September waren abnorm warm (August-Abweichung +1·7°), der October war erheblich zu kalt, der November erheblich zu warm, der December und der Februar 1893 waren fast normal, der Jänner 1893 war viel zu kalt (Abweichung nahe —6°). Diese Temperaturverhältnisse 1892/93 erklären einige Eigenthümlichkeiten im täglichen Gange der Temperatur, wie sie Tabelle I aufweist, und dienen namentlich auch zur Erläuterung des Unterschiedes im täglichen Gange der Wärme an den beiden Obirstationen, welcher nun auch in Betrachtung gezogen werden soll.

Die Lage der alten Station beim Berghause Obir ist ziemlich ungünstig für Beobachtungen des täglichen Wärmeganges. Das Berghaus liegt auf der Süd-Abdachung des Obirgipfels, und ist auch im Westen durch einen ziemlich nahen Bergrücken, der sich vom Gipfel herabzieht, gedeckt. Da das Haus mit seiner Rückseite an den Felsen angelehnt ist, so blieb zur Aufstellung der Thermometerhütte nur die nach SSW gekehrte Front des Hauses übrig. Es sind zwar thunlichst Vorkehrungen getroffen, den Einfluss der directen Sonnenstrahlung unschädlicher zu

I. Täglicher Gang der Temperatur auf dem Obirgipfel — 2140 *m*.

Abweichungen vom Monatsmittel.

	1892 Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Septbr.	Octbr.	Novbr.	Decbr.	1893 Jänner	Febr.
1h a.	— ·22	— ·55	— ·69	— ·76	— 1·07	— 1·47	— 1·32	— ·94	— ·37	— ·15	— ·24	— ·00	— ·14
2	— ·14	— ·54	— ·52	— ·81	— 1·15	— 1·49	— 1·48	— ·93	— ·33	— ·19	— ·20	— ·05	— ·19
3	— ·08	— ·56	— ·52	— ·96	— 1·24	— 1·56	— 1·61	— 1·00	— ·52	— ·13	— ·23	— ·23	— ·21
4	— ·15	— ·65	— ·40	— 1·07	— 1·12	— 1·63	— 1·71	— ·96	— ·40	— ·03	— ·23	— ·33	— ·12
5	— ·13	— ·71	— ·49	— 1·14	— ·99	— 1·55	— 1·63	— ·98	— ·30	— ·05	— ·27	— ·44	— ·23
6	— ·17	— ·69	— ·45	— 1·20	— ·36	— 1·25	— 1·20	— ·87	— ·33	— ·11	— ·35	— ·48	— ·21
7	— ·11	— ·64	— ·26	— 1·16	— ·17	— ·67	— ·64	— ·51	— ·23	— ·41	— ·34	— ·56	— ·24
8	— ·06	— ·43	— ·18	— ·82	— ·02	— ·10	— ·06	— ·13	— ·07	— ·26	— ·29	— ·40	— ·20
9	·03	— ·08	— ·10	— ·47	·40	·10	·07	— ·01	·11	— ·14	— ·09	— ·14	— ·15
10	·06	·15	·00	— ·02	·73	·63	·30	·23	·33	·09	·25	·10	— ·07
11	·17	·44	·24	·58	·92	1·06	·81	·61	·47	·26	·35	·17	·10
Mittag	·36	·98	·48	·89	1·32	1·64	1·40	1·03	·62	·43	·54	·19	·23
1	·61	·99	·66	1·30	1·44	1·91	1·73	1·31	·72	·55	·58	·34	·29
2	·61	·99	·85	1·65	1·54	2·17	2·04	1·42	·67	·56	·74	·44	·28
3	·54	1·09	·77	1·72	1·46	2·29	2·17	1·45	·50	·53	·62	·47	·47
4	·36	1·05	·82	1·50	1·24	1·97	2·03	1·44	·35	·33	·37	·23	·49
5	·05	·69	·72	1·34	·61	1·37	1·87	1·23	·20	·13	— ·02	·14	·33
6	— ·07	·26	·61	1·11	·23	1·08	1·31	·62	— ·05	— ·04	— ·12	·10	·18
7	— ·13	— ·02	·10	·52	— ·19	·20	·25	·04	— ·04	— ·19	— ·22	·22	·03
8	— ·20	— ·09	— ·13	— ·06	— ·34	— ·45	— ·38	— ·22	— ·07	— ·23	— ·12	·12	— ·13
9	— ·31	— ·36	— ·14	— ·31	— ·63	— ·76	— ·66	— ·37	— ·23	— ·23	— ·16	·05	— ·19
10	— ·36	— ·43	— ·23	— ·50	— ·69	— ·88	— ·95	— ·66	— ·32	— ·32	— ·16	·00	— ·11
11	— ·38	— ·39	— ·49	— ·57	— ·85	— 1·19	— 1·09	— ·80	— ·34	— ·30	— ·18	— ·05	— ·12
Mitternacht	— ·32	— ·49	— ·59	— ·66	— 1·04	— 1·39	— 1·17	— ·89	— ·35	— ·21	— ·24	— ·02	— ·18
Mittel	— 7·37	— 8·24	— 1·75	2·24	5·50	7·38	9·80	6·51	0·13	— 2·26	— 8·28	— 12·66	— 6·93

machen, denselben ganz zu beseitigen liess sich aber natürlich nicht erreichen. In Folge der Erwärmung der Holzverschalung in SSW-licher Exposition ist eine Verspätung des Temperaturmaximums zu erwarten und zugleich eine etwas zu hohe Tageswärme überhaupt; auch die Nachttemperaturen dürften etwas zu hoch sein, dessgleichen wohl auch das nächtliche Temperaturminimum. Herr Dr. Pernter hat in einer vorläufigen Mittheilung über den täglichen Wärmegang auf dem Obir (Zeitschrift für Meteorologie, XIX. B., 1884, S. 333) gezeigt, dass in der That eine erhebliche Verspätung im Eintritt des Temperaturmaximums sich zeigt. Um den Einfluss der nachmittägigen Besonnung des Thermometerhäuschens auf die Lufttemperatur in demselben zu constatiren, wurde im Jahre 1885 an einem Dachfenster der ENE-Seite des Hauses ein Thermometer in Beschirmung aufgestellt und Nachmittags stündlich abgelesen (siehe Jahrbücher der k. k. C. A. für Meteorologie und Erdmagnetismus, 1885, S. 51).

Die mittleren Unterschiede der Lufttemperaturen in der Thermometerhütte und vor dem Ostfenster des Hauses an sonnigen, klaren Tagen waren folgende:

Thermometerstand — (Thermometer vor Ostfenster).

	Stunde (Nachmittag)			
	2h	3h	4h	5h
Juni und Juli	0°5	1°4	2°1	2°8
August und September	1·1	2·6	3·1	2·7

Bei sonnigem Wetter ist demnach die Erwärmung der Luft in der Thermometerhütte eine ganz beträchtliche und sehr störende. Im Mittel eines ganzen Monats ist allerdings der Einfluss weit geringer, wegen der vielen trüben und nassen Tage.

Interessant ist in dieser Beziehung ein Vergleich des Temperaturganges beim Berghaus Obir mit jenem auf dem Säntis. Ich bilde die Differenzen im täglichen Wärmegange beider Stationen auf Grund der Zusammenstellung bei Dr. Trabert: »Der tägliche Gang der Temperatur und des Sonnenscheins auf dem Sonnblickgipfel« (Denkschriften der Wiener Akademie, B. LIX, 1892, S. 18 und 19 des Separatabdruckes). Der tägliche

Temperaturgang auf dem Säntis bezieht sich noch auf die alte Station beim Gasthause in 2470*m* Seehöhe auf der NE-Seite des Felsgipfels (3 Jahre 1884/87) mehr als 400 *m* höher als das Rainer'sche Berghaus auf dem Obir.

Unterschiede im täglichen Wärmegange auf dem Obir (Berghaus) und Säntis. Obir—Säntis.

Mittag	1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h Abd.
				Juni und Juli				
—0·5	—0·3	—0·2	0·0	0·2	0·8	1·0	0·8	0·6
				August und September				
—0·5	—0·3	0·0	0·3	0·8	1·3	1·0	0·4	0·3

Im Gange dieser Zahlen erkennt man recht deutlich den Einfluss der Abendsonne auf die Temperaturangaben in der Thermometerhütte beim Berghause Obir.

Die Eintrittszeiten des täglichen Temperaturmaximums sind:

	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Mittel
Obir......	$3^1/_2{}^h$	4^h	3^h	4^h	$3^1/_2{}^h$	3^h	3·5
Säntis	2	2	2	$2^1/_2$	2	2	2·1

Beim Berghause Obir tritt demnach im Sommerhalbjahre das Temperaturmaximum nahezu um $1^1/_2$ Stunden später ein als auf dem Säntis.

Der Übelstand bei der Thermometeraufstellung beim Berghause Obir liegt nicht allein in der Erwärmung der Thermometerhütte durch die Nachmittagssonne, sondern in vielleicht noch höherem Grade in der Erwärmung der ganzen nach SSW exponirten Berglehne selbst, an der das Berghaus angebaut ist.

Ich war nun sehr gespannt darauf, welche Differenzen sich in dem täglichen Gange der Temperatur beim Berghaus gegenüber der neuen Temperaturstation auf dem Gipfel ergeben werden.

Zu diesem Zwecke wurden zunächst die Differenzen der Stundenmittel der Temperatur an der unteren und an der oberen Station für jeden Monat gebildet. In diesen Differenzen steckt

aber auch die Wärmeabnahme mit der Höhe, die, wie schon bemerkt, gerade in den benützten Monaten (Februar 1892 bis Februar 1893) wegen der abnormen wechselnden Witterung viele Besonderheiten zeigte, so dass diese rohen Differenzen noch gar nicht geeignet sind, ein klares Bild von den Unterschieden im täglichen Wärmegange an den beiden Stationen zu liefern.

Wenn man aber den mittleren Temperaturunterschied in jedem Monate von den entsprechenden Temperaturdifferenzen zu den einzelnen Stunden abzieht, so erhält man die eigentlichen Unterschiede im täglichen Wärmegange oben und unten. Der kleine Höhenunterschied spielt dabei sicherlich gar keine Rolle. Wie ich später zeigen werde, ist der tägliche Wärmegang auf dem Obirgipfel fast genau derselbe, wie auf dem Sonnblickgipfel, trotz der fast 1000 *m* geringeren Höhe des ersteren.

Man darf sicherlich annehmen, dass der tägliche Wärmegang auf dem Obirgipfel genau ebenso ausgefallen wäre, wenn derselbe nur die Seehöhe des Berghauses hätte. Die Unterschiede im täglichen Wärmegange, die wir im Folgenden kennen lernen werden, sind demnach ganz allein begründet in der Aufstellung des Thermographen, der Exposition und örtlichen Umgebung der unteren Station.

Bevor ich die Unterschiede im täglichen Wärmegange an den beiden Stationen mittheile, möchte ich aber doch auch eine Vorstellung von den actuellen Temperaturdifferenzen in den wärmsten Monaten des Jahres geben. Da diese Unterschiede sich jedoch nur auf einen Jahrgang beziehen, will ich bloss die Mittel für Juni und Juli 1892 (zwei trübe Monate mit negativer Temperaturabweichung) und für August und September 1892 (zwei abnorm heitere Monate mit grosser positiver Temperaturabweichung) hier anführen.

Juni und Juli: Temperatur unten 7°0, Abweichung —0°9, Bewölkung 5·5.

Aug. und Sept.: Temperatur unten 9°3, Abweichung +1°7, Bewölkung 3·2.

Temperaturunterschied Obir-Berghaus 2044 *m* und Obirgipfel 2140 *m* im Sommer 1892.

	Juni u. Juli	Aug. u. Sept.		Juni u. Juli	Aug. u. Sept.
1^h a.	·66	·70	1^h p.	·95	2·24
2	·64	·67	2	1·10	2·53
3	·66	·68	3	1·15	2·35
4	·54	·60	4	1·30	2·21
5	·34	·51	5	1·52	1·64
6	— ·05	·21	6	1·36	1·35
7	- ·21	— ·03	7	·93	·95
8	— ·12	— ·05	8	·82	·92
9	·08	·48	9	·87	·79
10	·17	1·05	10	·74	·70
11	·55	1·52	11	·75	·67
Mittag	·68	1·87	Mittern.	·62	·62

Mittlere Temperaturdifferenz Juni—Juli....... 0·67
» » Aug.—Sept. ..... 1·05

Amplitude der Differenz Juni—Juli........... 1·73
» » » August—September .. 2·58

Man bemerkt zunächst, dass die untere Station in den Nachmittagsstunden sehr erheblich zu warm ist. Es erhebt sich Nachmittags in heiteren, warmen Sommermonaten selbst die mittlere Temperatur um 2° (mit Rücksicht auf die geringere Seehöhe der unteren Station) über die Lufttemperatur in gleicher Höhe, auch in kühlen und trüben Sommermonaten beträgt der Überschuss der Temperatur über jene der freien Atmosphäre in den Nachmittagsstunden sicherlich noch 1°. Im Juni und Juli wurde das Maximum der Differenz erst um 5^h erreicht, im August und September schon um 2^h Nachmittags.

In den ersten Vormittagsstunden bleibt die Temperatur in der Beschirmung der unteren Station um einige Zehntel Grade zurück hinter jener auf dem Gipfel. Es ist allerdings dazu zu bemerken, dass um diese Zeit die untere Station (der Thermometerstand) noch im Schatten liegt, während oben die Sonne etwa vom Aufgange bis 6^h a. die Thermometerbeschirmung

treffen muss. Sicherlich verzögert aber die massive Holzbeschirmung der Thermometer an der unteren Station die Temperaturzunahme am Morgen, da sie sich erst langsam wieder erwärmt. Ich möchte die negativen Differenzen um 7^h und 8^h Morgens hauptsächlich diesem Umstande zuschreiben.

Die folgende Tabelle II enthält die Unterschiede im täglichen Wärmegange beim Berghause Obir und auf dem Obirgipfel. Die in dieser Tabelle enthaltenen Zahlenwerthe sind aber schon einer Ausgleichrechnung unterworfen worden, um den jährlichen Gang derselben klarer zum Ausdrucke gelangen zu lassen. Die Horizontal-Columnen dieser Tabelle sind nach dem Schema $^1/_4\ (a+2b+c)$ ausgeglichen worden, die Vertical-Columnen aber, d. i. der tägliche Gang in jedem einzelnen Monate sind dann nicht mehr weiter geändert worden. Es wurde nur versucht, den abnormen Charakter einiger Monate, von dem schon oben die Rede war, einigermassen zu eliminiren und die Differenzen den Mittelwerthen aus mehreren Jahrgängen näher zu bringen. Wie weit dies erreicht worden ist, wird sich erst in den nächsten Jahren herausstellen.

Der tägliche Gang dieser Differenzen ist recht interessant. Im Mai und Juni ist auch noch in den ersten Nachtstunden die Temperatur unten wenigstens relativ höher als oben. Der Spätsommer, der Herbst und selbst noch der Winter hat die höchsten positiven Unterschiede im täglichen Wärmegange. Diese Eigenthümlichkeiten werden sicherlich auch in den mehrjährigen Mitteln erhalten bleiben.

Wenn man die Zahlenwerthe der Tabelle II an den mittleren täglichen Temperaturgang bei dem Berghause Obir mit entgegengesetzten Vorzeichen anbringen würde, so würde man den mittleren täglichen Wärmegang auf dem Obirgipfel erhalten. Doch möchte es sich keineswegs empfehlen, dies schon jetzt zu versuchen, weil trotz der Ausgleichungsrechnung, der diese Differenzen unterworfen worden sind, dieselben doch noch keinem mittleren normalen Zustande entsprechen. Namentlich im Winter wären unbrauchbare Resultate zu erwarten, da fast der ganze tägliche Gang auf dem Obirgipfel von derselben Grössenordnung ist, wie die Fehler, die den obigen Differenzen noch anhaften.

II. Unterschied im täglichen Wärmegange Obir-Berghaus—Obirgipfel.

Hundertel Grade Celsius.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr
1h a.	— 26	— 21	— 30	— 24	01	06	— 09	— 25	— 29	— 27	— 37	— 40	— 22
2	— 25	— 24	— 38	— 35	— 05	05	— 09	— 26	— 34	— 30	— 35	— 37	— 24
3	— 25	— 30	— 47	— 42	— 08	05	— 07	— 24	— 32	— 22	— 33	— 35	— 25
4	— 22	— 23	— 47	— 50	— 19	— 06	— 18	— 32	— 36	— 29	— 40	— 40	— 30
5	— 22	— 22	— 46	— 51	— 32	— 26	— 35	— 46	— 46	— 35	— 41	— 40	— 37
6	— 31	— 32	— 53	— 67	— 66	— 69	— 71	— 76	— 65	— 40	— 42	— 45	— 55
7	— 26	— 27	— 47	— 67	— 73	— 79	— 96	—1·06	— 83	— 46	— 39	— 40	— 60
8	— 20	— 24	— 46	— 61	— 57	— 65	— 97	—1·13	— 82	— 44	— 36	— 35	— 57
9	— 17	— 23	— 37	— 40	— 44	— 52	— 64	— 62	— 37	— 14	— 12	— 16	— 35
10	04	01	— 17	— 16	— 26	— 42	— 43	— 17	09	14	08	05	— 07
11	31	16	14	13	05	— 04	11	24	38	41	40	41	23
Mittag	56	32	34	33	11	02	17	59	77	56	68	73	43
1h p.	72	48	59	58	29	22	53	99	1·01	85	95	1·01	68
2	97	74	91	87	47	36	70	1·23	1·26	92	1·03	1·21	89
3	63	53	80	82	42	35	73	1·10	1·12	81	81	85	75
4	39	38	71	73	47	44	76	1·03	97	63	53	51	63
5	07	21	57	59	43	64	78	76	48	21	06	05	40
6	— 03	12	37	39	30	51	64	45	15	— 03	— 04	— 04	23
7	— 18	— 02	23	30	26	26	14	— 03	— 13	— 16	— 11	— 15	04
8	— 22	— 10	06	14	11	12	09	— 05	— 15	— 17	— 16	— 22	— 05
9	— 27	— 10	02	04	09	18	11	— 11	— 29	— 25	— 22	— 31	— 09
10	— 29	— 15	— 11	— 08	02	09	— 02	— 22	— 37	— 32	— 26	— 30	— 17
11	— 21	— 18	— 20	— 08	08	11	— 07	— 24	— 37	— 32	— 23	— 24	— 17
Mitternacht	— 25	— 20	— 24	— 16	11	08	— 15	— 35	— 40	— 34	— 30	— 33	— 21
Mittel	·30	·25	·39	·41	·27	·29	·40	·53	·52	·37	·38	·40	·354

Ich habe desshalb die Reduction des täglichen Temperaturganges beim Berghause Obir, wie er sich aus den mehrjährigen Beobachtungen ergibt, auf jenen einer freien Gipfelstation probeweise nur für die Jahreszeiten versucht, und auch dies nur in schematischer Weise. Die Rechnung wurde desshalb durchgeführt, weil sie einige nicht uninteressante Nebenresultate abzuwerfen verspricht.

Den mittleren täglichen Temperaturgang beim Berghause Obir hat schon Dr. Trabert in seiner früher citirten Abhandlung mitgetheilt. Ich habe noch den Jahrgang 1892 und ein paar ältere Jahrgänge 1882 und 1883 benützt, die dort nicht verwendet worden sind.

Der folgenden Tabelle III, welche den täglichen Wärmegang beim Berghause Obir in Form von Abweichungen der Stundenmittel der Temperatur vom Tagesmittel enthält, liegen die Aufzeichnungen von 7—8 Jahrgängen zu Grunde (1882 und 1883 lückenhaft, 1886 und 1887 etwas lückenhaft, Complet 1884, 1885, 1888, 1889 und 1892). Die Tabelle hat insoferne einen Werth, als es später möglich sein wird, den gestörten täglichen Wärmegang beim Berghause auf den richtigen Temperaturgang auf dem Gipfel zu reduciren. Zu diesem Zwecke werden die Registrirungen unten noch eine Weile fortgesetzt werden müssen, um die Temperaturdifferenzen zwischen Berghaus und Gipfel sicherer ableiten zu können. Vorläufig muss man sich darauf beschränken, die Reduction nur für die Jahreszeiten durchzuführen und auch dies soll nur in allgemeiner Form geschehen.

Zu diesem Zwecke wurden aus den Zahlenwerthen der Tabellen II und III Vierteljahrsmittel abgeleitet und diese durch periodische Functionen ausgedrückt.

III. Täglicher Gang der Temperatur im Mittel von 7–8 Jahrgängen.
Berghaus Obir, 2044 *m*.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr
1ʰ a.	— ·52	— ·76	— ·88	— ·75	—1·03	—1·32	—1·35	—1·48	—1·25	— ·52	— ·62	— ·39	— ·90
2	— ·59	— ·84	—1·03	— ·88	—1·14	—1·47	—1·47	—1·58	—1·38	— ·56	— ·64	— ·44	—1·00
3	— ·63	— ·91	—1·04	— ·99	—1·28	—1·57	—1·62	—1·69	—1·46	— ·60	— ·62	— ·51	—1·07
4	— ·66	— ·96	—1·10	—1·08	—1·38	—1·75	—1·73	—1·82	—1·52	— ·65	— ·60	— ·50	—1·15
5	— ·73	— ·99	—1·20	—1·20	—1·46	—1·72	—1·79	—1·85	—1·57	— ·66	— ·59	— ·54	—1·19
6	— ·78	—1·05	—1·21	—1·22	—1·40	—1·58	—1·71	—1·85	—1·58	— ·74	— ·61	— ·59	—1·19
7	— ·79	—1·06	—1·18	—1·16	—1·20	—1·33	—1·52	—1·72	—1·40	— ·78	— ·65	— ·63	—1·12
8	— ·76	— ·96	—1·00	— ·94	— ·93	— ·94	—1·06	—1·25	—1·05	— ·69	— ·53	— ·53	— ·88
9	— ·62	— ·83	— ·66	— ·50	— ·46	— ·42	— ·54	— ·64	— ·50	— ·43	— ·31	— ·40	— ·53
10	— ·26	— ·28	— ·19	— ·08	·04	·18	·08	·07	·24	— ·04	·17	— ·10	— ·01
11	·22	·29	·39	·40	·66	·82	·80	·80	·98	·36	·68	·41	·57
Mittag	·75	·91	1·08	·86	1·08	1·37	1·47	1·52	1·62	·81	1·11	·81	1·12
1	1·35	1·58	1·59	1·26	1·43	1·83	1·98	2·10	2·14	1·24	1·44	1·18	1·60
2	1·64	2·19	1·96	1·59	1·79	2·17	2·24	2·71	2·52	1·45	1·64	1·45	1·95
3	1·59	2·35	2·06	1·75	1·98	2·29	2·57	2·80	2·68	1·51	1·54	1·25	2·03
4	1·24	1·86	1·86	1·71	2·00	2·26	2·66	2·93	2·53	1·24	1·05	·71	1·84
5	·58	1·05	1·49	1·53	1·76	2·02	2·43	2·80	1·92	·68	·24	·25	1·40
6	·25	·55	·84	1·06	1·24	1·61	1·78	1·78	·78	·19	— ·01	·03	·84
7	·04	·08	·30	·43	·51	·63	·70	·47	·00	— ·08	— ·21	— ·08	·24
8	— ·05	— ·10	— ·08	·06	·04	·03	— ·04	— ·17	·01	— ·29	— ·32	— ·19	— ·08
9	— ·20	— ·37	— ·33	— ·16	— ·33	— ·35	— ·53	— ·59	— ·65	— ·15	— ·44	— ·25	— ·37
10	— ·31	— ·47	— ·53	— ·35	— ·50	— ·65	— ·82	— ·90	— ·87	— ·32	— ·53	— ·25	— ·54
11	— ·35	— ·57	— ·64	— ·48	— ·64	— ·83	— ·98	—1·10	—1·03	— ·36	— ·55	— ·29	— ·65
Mitternacht	— ·45	— ·66	— ·76	— ·62	— ·81	—1·11	—1·22	—1·31	—1·13	— ·44	— ·58	— ·33	— ·78
Mittel	·64	·90	·97	·88	1·05	1·26	1·38	1·50	1·28	·62	·65	·51	·96

Diese Vierteljahrsmittel enthält die nachfolgende Tabelle IV.

Tabelle IV.

	Täglicher Temperaturgang beim Berghause Obir 7—8 Jahre				Differenz gegen den täglichen Gang auf dem Gipfel 1 Jahr			
	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Winter	Frühling	Sommer	Herbst
1ʰa.	— ·56	— 89	—1·39	— ·80	— ·27	— ·18	— ·09	— ·31
2	— ·62	—1·02	—1·51	— ·86	— ·29	— ·26	— ·10	— ·33
3	— ·68	—1·10	—1·63	— ·89	— ·30	— ·32	— ·09	— ·29
4	— ·71	—1·19	—1·77	— ·92	— ·28	— ·39	— ·19	— ·35
5	— ·75	—1·29	—1·79	— ·94	— ·28	— ·43	— ·36	— ·41
6	— ·81	—1·28	—1·72	— ·98	— ·36	— 62	— ·72	— ·49
7	— ·83	—1·18	—1·53	— ·94	— 31	— ·62	— ·94	— ·56
8	— ·75	— ·96	—1·09	— ·76	— ·26	— ·55	— ·92	— ·54
9	— ·62	— ·54	—0·54	— ·41	— ·19	— ·40	— ·59	— ·21
10	— ·21	— ·08	·11	·12	·03	— ·20	— ·34	·10
11	·31	·48	·80	·67	·29	·11	·10	·40
Mittag	·82	1·01	1·45	1·18	·54	·26	·26	·67
1	1·37	1·43	1·97	1·61	·74	·49	·58	·94
2	1·76	1·78	2·37	1·87	·97	·75	·76	1·07
3	1·73	1·93	2·55	1 92	·67	·68	·73	·91
4	1·27	1 86	2·61	1·61	·43	·64	·74	·71
5	·63	1·59	2 41	·95	·11	·53	·73	·25
6	·28	1·05	1·72	·32	·02	·35	·53	·03
7	·01	0·41	·60	— ·10	— ·12	·26	·12	— ·13
8	— ·11	·01	— ·17	— ·17	— ·18	·10	·05	— ·16
9	— ·27	— ·27	— ·50	— ·45	— ·23	·05	·06	— ·25
10	— ·34	— ·46	— ·80	— ·57	— ·25	— ·02	— ·05	— ·32
11	— ·40	— ·59	— ·98	— ·65	— ·21	— ·07	— ·07	— ·31
Mitternacht	— ·48	— ·73	—1·22	— ·72	— ·26	— ·10	— ·14	— ·35
Mittel	·68	·96	1·38	·85	·32	·35	·39	·42

Die Unterschiede im täglichen Wärmegange oben und unten haben, wie man aus der Tabelle IV recht deutlich sieht, vollkommen denselben Gang, wie die Temperatur beim Berghause selbst, nur die Amplituden sind kleiner.

Im Sommer ist die Verspätung des Maximaleffectes der Störung recht deutlich ausgeprägt. Man kann sagen, dass die Störung im täglichen Gange der Temperatur beim Berghause darin besteht, dass auf den Gang der Lufttemperatur noch ein Temperaturgang von beinahe demselben Charakter aufgesetzt ist, so dass die Amplituden sehr vergrössert und zugleich der Eintritt des Nachmittagsmaximums namentlich im Sommer verzögert wird.

Den kürzesten und präcisesten Ausdruck finden diese Verhältnisse durch die folgenden Gleichungen. Die Zeit ist von Mitternacht an gezählt ($x = 0$ für Mitternacht).

A. Täglicher Gang der Temperatur beim Berghause Obir, ausgedrückt durch die Constanten der Bessel'schen Formel.

	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2
Winter...	—·691	—·741	+·230	+·452	223°0	26°9	1·013	·507
Frühjahr .	—·924	—1·166	+·128	+·420	218·4	17·0	1·488	·439
Sommer..	—1·411	—1·592	+·091	+·516	221·6	10·0	2·127	·524
Herbst...	—·976	—·825	+·261	+·457	229·8	29·7	1·277	·526
Jahr.....	—1·000	—1·081	+·177	+·461	222·8	21·0	1·472	·494

B. Unterschied im täglichen Gange Berghaus Obir—Obirgipfel.

	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2
Winter. .	—·390	—·242	+·166	+·201	238·2	39·6	·459	·261
Frühling..	—·209	—·496	+·100	+·191	202·9	27·6	·538	·216
Sommer..	—·150	—·560	+·121	+·345	195·0	19·3	·580	·366
Herbst...	—·481	—·356	+·214	+·280	233·5	37·4	·598	·352
Jahr.....	—·307	—·413	+·150	+·254	216·6	30·6	·515	·295

Die durch letztere Constanten repräsentirten Gleichungen sind der Ausdruck für die Störungen, denen der Gang der Temperatur beim Berghause in Folge örtlicher Einflüsse und fehler-

hafter Aufstellung des Thermographen unterliegt. Man bemerkt zunächst, dass das zweite Glied verhältnissmässig sehr gross ist. Der Einfluss des ersten Gliedes erreicht sein Maximum im Winter um 2^h, im Frühling um $4^1/_2{}^h$, im Sommer um 5^h und im Herbst um $2^1/_2{}^h$. Da auch das zweite Glied im Sommer um 5^hp. einen maximalen positiven Werth erhält, so erklärt sich die beträchtliche Verspätung im Eintritt des Temperaturmaximums zu dieser Jahreszeit.

Wenn man nun die durch obige Gleichungen (Tabelle B) repräsentirten Störungen im täglichen Gange der Temperatur beim Berghause Obir, von dem letzteren abzieht, so wie er durch die Gleichungen in Tabelle *A* repräsentirt wird, so erhält man die Ausdrücke für die wahrscheinlichsten mittleren Werthe des täglichen Wärmeganges auf dem Gipfel des Obir. Indem man die *p* und *q* der Tabelle *B* von den entsprechenden *p* und *q* der Tabelle *A* subtrahirt und dann aus den sich ergebenden neuen Werthen der *p* und *q* die Winkelconstanten *A* und die Amplituden *a* berechnet, findet man:

C. Berechneter mittlerer täglicher Gang der Temperatur auf dem Obirgipfel.

	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2
Winter...	— ·301	— ·499	+·064	+·251	211°1	14·3	·583	·259
Frühling..	— ·715	— ·670	+·028	+·229	226·9	7·0	·980	·231
Sommer..	—1·261	—1·032	—·030	+·171	230·7	350·1	1·630	·174
Herbst...	— ·495	— ·469	+·047	+·177	226·6	14·9	·681	·183
Jahr....	— ·693	— ·668	+·027	+·207	226·1	7·4	·962	·209

Die Amplituden des täglichen Wärmeganges auf dem Gipfel erscheinen nun sehr beträchtlich kleiner und es ist namentlich der Einfluss des zweiten periodischen Gliedes mit zwei Maximis und Minimis im Laufe eines Tages sehr stark herabgemindert, so dass der einfache tägliche Gang in bedeutend höherem Grade präponderirt.

Der tägliche Temperaturgang auf einem freien Berggipfel nähert sich demnach mehr einer einmaligen täglichen Wärmewelle als der durch Localeinflüsse gestörte Temperaturgang an der Erdoberfläche.

Die folgende Tabelle enthält den (während eines Jahres) beobachteten täglichen Gang der Temperatur auf dem Obirgipfel im Mittel der vier Jahreszeiten verglichen mit jenem auf dem Sonnblickgipfel im Mittel derselben Monate (Februar 1892 bis inclusive Februar 1893). Die Übereinstimmung des Wärmeganges auf dem Obirgipfel mit jenem auf dem Sonnblickgipfel ist eine fast vollständige. Obgleich der Obirgipfel fast 1000 *m* niedriger ist und um einen halben Grad südlicher liegt, sind die Amplituden der Temperatur im Jahresmittel genau die gleichen und nur im Sommer merklich grösser. Ich glaube daraus schliessen zu dürfen, dass bei freier Aufstellung der Thermographen auf isolirten hohen Berggipfeln die absolute Seehöhe nur mehr von geringem Einflusse auf den registrirten täglichen Wärmegang ist. Die Temperatur-Amplituden nehmen mit der Erhebung über die Erdoberfläche zuerst s e h r r a s c h ab und ändern sich dann nur mehr sehr langsam.

Die relative Seehöhe der beiden Gipfel ist fast die gleiche. Der Sonnblick mit 3100 *m* absoluter Seehöhe erhebt sich unmittelbar aus Thälern von 1600 *m* (Nordseite) und 1400 *m* (Südseite) Seehöhe, seine relative Erhebung über dieselben ist demnach circa 1600 *m*, wenn man nur die nächste Umgebung in Betracht zieht. Der Obir, 2140 *m* absolute Seehöhe, hat, wie schon eingangs bemerkt, desgleichen circa 1600 *m* relative Erhebung. Die Thäler an seinem Fusse erwärmen sich aber im Sommer viel stärker als jene, in welche der Sonnblick unmittelbar hinabschaut. Die kleine tägliche Amplitude, welche die Temperaturregistrirungen auf dem Obirgipfel auch für den Sommer ergeben haben, legt desshalb ein sehr günstiges Zeugniss ab für die auch vom Einflusse des erwärmten Bodens freie Aufstellung des Thermographen auf dem Obirgipfel.

Recht deutlich zeigt dies auch ein Vergleich mit dem täglichen Gange der Temperatur auf dem Säntisgipfel (alte Station). Die tägliche Amplitude ist auf letzterem, obgleich derselbe circa 400 *m* grössere Seehöhe hat, bedeutend grösser als auf dem Obirgipfel.

Auch die relative Seehöhe des Säntisgipfels ist bedeutender als die des Obir.

V. Täglicher Gang der Temperatur in den correspondirenden Monaten Februar 1892 bis Jänner 1893 inclusive.

	Obirgipfel 2140 m					Sonnblick 3100 m				
	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
1a.	—0·14	—0·67	—1·29	—0·49	—0·65	—0·30	—0·77	—0·69	—0·49	—0·56
2	—0·14	—0·62	—1·37	—0·48	—0·65	—0·31	—0·81	—0·82	—0·48	—0·60
3	—0·20	—0·68	—1·47	—0·55	—0·72	—0·36	—0·90	—0·92	—0 54	—0·68
4	—0·23	—0·71	—1·49*	—0·46*	—0·72	—0·41	—0·97*	—1·05	—0·61	—0·76
5	—0·30	—0·78	—1·39	—0·44	—0·73	—0·42*	—0·95	—1·05*	—0·61	—0·76
6	—0·34	—0·78*	—0·94	—0·44	—0·62	—0·37	—0·91	—0·86	—0·64*	—0 69
7	—0·36*	—0·69	—0·49	—0·38	—0·48	—0·36	—0·63	—0·52	—0·52	—0·51
8	—0·27	—0·48	—0·06	—0·15	—0 24	—0·29	—0·43	—0·33	—0·33	—0·34
9	—0·10	—0·22	0·19	—0 01	—0·03	—0·10	0·00	—0·05	—0·05	—0·05
10	0·12	0·04	0·55	0·22	0·23	0·15	0·34	0·24	0·15	0·22
11	0·22	0·42	0·93	0·45	0·50	0·35	0·61	0·47	0·36	0·45
Mittag	0·34	0·78	1·45	0·69	0·81	0·52	0·93	0·65	0 63	0·68
1	0·46	0·98	1·69	0·86	1·00	0·61	1·17	0·81	0·77	0 84
2	0·54*	1·16	1·92	0·88*	1·12	0·66*	1·38	1·09	0·78	0·98
3	0·53	1·19*	1·97*	0·83	1·13	0·65	1·39*	1·19*	0·86*	1·02
4	0·34	1·12	1·75	0·71	0·98	0·55	1·21	1·19	0·80	0·94
5	0·10	0·92	1·28	0·51	0·70	0·30	0·97	0·99	0·57	0·71
6	0·02	0·66	0·87	0·18	0·43	0·14	0·63	0·81	0·30	0·47
7	—0·02	0·20	0·09	—0·06	0·05	0·01	0·21	0·46	0·09	0·19
8	—0·05	—0·09	—0·39	—0·17	—0·18	—0·11	—0·14	0·05	—0·03	—0·06
9	—0·12	—0·27	—0·68	—0·28	—0·34	—0·12	—0·50	—0·25	—0·14	—0·25
10	—0·13	—0·39	—0·84	—0·43	—0·45	—0·19	—0·59	—0·40	—0·24	—0·35
11	—0·16	—0·48	—1·04	—0·48	—0·54	—0·24	—0 66	—0·50	—0·35	—0·44
Mittern.	—0·17	—0·58	—1·20	—0·48	—0·61	—0·26	—0·72	—0·59	—0·41	—0·50

Die Unterschiede im täglichen Wärmegange auf beiden Gipfeln im Mittel der drei Sommermonate sind:

Täglicher Wärmegang im Sommer. Differenz Säntis—Obirgipfel.

1ʰ a.	— ·25	1ʰ p.	·64
2	— ·29	2	·60
3	— ·31	3	·50
4	— ·32	4	·33
5	— ·32	5	·09
6	— ·35	6	— ·11
7	— ·31	7	— ·15
8	— ·13	8	— ·18
9	·15	9	— ·24
10	·39	10	— ·27
11	·52	11	— ·25
Mittag	·53	Mitternacht	— ·23

Von 6ʰ Abends bis 8ʰ Morgens ist die Temperatur relativ tiefer auf dem Säntis als auf dem Obir, die übrige Zeit ist sie relativ höher; die tägliche Amplitude ist demnach grösser, und zwar ziemlich genau um 1°. Die nächtliche negative Temperaturabweichung geht auf dem Säntis um etwas mehr als 0°3 tiefer unter das Tagesmittel und die positive erhebt sich gleich nach Mittag um mehr als 0°6 höher über dasselbe. Da aber die Sommertemperatur in der Gegend des Obir bedeutend excessiver ist als in der Gegend des Säntis, die Trübung und Regenmenge desgleichen geringer, so hätte man das Gegentheil erwarten müssen. Der Grund für die trotzdem kleinere Amplitude auf dem Obir liegt jedenfalls in der freien Gipfellage derselben gegenüber der alten Säntisstation circa 40 *m* unterhalb des Gipfels. Alles spricht demnach dafür, dass die neue Temperaturstation auf dem Obirgipfel eine sehr freie, dem Einflusse des erwärmten Bodens nicht mehr unterworfene Lage hat. Wohl aber wird der daselbst beobachtete tägliche Gang der Lufttemperatur noch immer etwas excessiver sein als jener in der freien Atmosphäre in gleicher Höhe.

Die Übereinstimmung im täglichen Gange der Temperatur auf dem Obirgipfel und auf dem Sonnblickgipfel findet wohl ihren kürzesten und zugleich augenfälligsten Ausdruck in den folgenden Gleichungen:

Täglicher Gang der Temperatur ($x = 0$ für Mitternacht).

I. Im Jahresmittel:

Obirgipfel (2140 *m*) . . . . $0\cdot89 \sin(234^\circ3+x)+0\cdot22 \sin(28^\circ1+2x)$

Sonnblickgipfel (3100 *m*) . . . . $0\cdot84 \sin(228\cdot4+x)+0\cdot18 \sin(33\cdot1+2x)$

II. Im Sommermittel (Juni—August):

Obirgipfel . . . . $1\cdot65 \sin(238^\circ1+x)+0\cdot25 \sin(24^\circ3+2x)$

Sonnblickgipfel . . . . $1\cdot04 \sin(224\cdot0+x)+0\cdot12 \sin(16\cdot9+2x)$

Im Jahresmittel ist die Übereinstimmung eine vollständige, im Sommermittel besteht ein merklicher Unterschied in der Amplitude und in der Phasenzeit der täglichen Wärmewelle. Die Amplitude ist um die Hälfte grösser auf dem Obir, und der Eintritt des Maximums erfolgt früher als auf dem Sonnblick (so weit das erste Glied allein in Betracht kommt, um nahezu 1 Stunde: Obirgipfel Maximum 2^h p., Sonnblickgipfel 3^h p.).

Die Übereinstimmung im täglichen Gange der Temperatur auf den beiden um fast 1000 *m* an absoluter Höhe verschiedenen Gipfeln zeigt, wie wir schon früher hervorgehoben haben, dass die rascheste Änderung im Temperaturgange bei zunehmender Entfernung von der Erdoberfläche in den alleruntersten Schichten vor sich geht, und dass es jedenfalls ganz unzulässig ist, eine mit der Höhe einfach proportionale Änderung (Abnahme) der Amplituden der Lufttemperatur anzunehmen. Die mittlere tägliche Wärmeschwankung in der Luftschichte zwischen den Niederungen und einem Berggipfel, der aus denselben emporsteigt, ist jedenfalls erheblich kleiner, als das Mittel aus den oben und unten beobachteten Temperaturamplituden. Am besten lässt sich die rasche Abnahme der Amplituden der täglichen Wärmeschwankung mit der Entfernung vom Erdboden mittelst den Temperaturstationen auf dem Eiffelthurm zu Paris constatiren. Ich will zum Schlusse dieser Erörterungen die täglichen Temperaturvariationen im Mittel der

vier Jahreszeiten für Klagenfurt, Obir und Sonnblick (Jahr 1892) und den Stationen auf dem Eiffelthurm (Jahr 1890) hier übersichtlich zusammenstellen.

Mittlere tägliche periodische Wärmeschwankung aus 24stündigen Beobachtungen.

	Klagenfurt 450 *m*	Obir 2140 *m*	Sonnblick 3100 *m*	Paris[1] 18 *m*	Eiffelthurm[1] 123 *m*	Eiffelthurm[1] 197 *m*	Eiffelthurm[1] 302 *m*
Winter ...	5·5	1·0	1·1	3·6	3·0	2·5	2·0
Frühling ..	9·1	2·0	2·4	6·9	5·8	5·0	4·6
Sommer ..	9·6	3·5	2·3	7·7	6·1	5·2	5·2
Herbst....	5·7	1·4	1·5	6·1	4·7	3·6	2·9
Jahr......	7·5	2·0	1·8	6·1	4·9	4·1	3·7

Die mittlere Tagesschwankung der Temperatur nimmt, wie die Beobachtungen auf dem Eiffelthurme zeigen, zuerst sehr rasch und dann bald viel langsamer mit der Höhe ab. Die Stationen in 18 und 123 *m* geben 1°1 Abnahme der Amplitude pro 100 *m* Höhenzunahme, die Stationen in 123 und 197 *m* liefern das gleiche Resultat, die Stationen in 197 und 302 *m* geben bloss 0°36 pro 100 *m*. Aus den vier Stationen erhält man folgende genäherte Gleichung für die Abnahme der Amplituden mit der Höhe, wenn wir mit A die Amplituden und mit h die relativen Höhen in Hektometern bezeichnen:

$$A_h = A_0 - 1\cdot 21\, h + 0\cdot 14\, h^2.$$

Lässt man das gleiche Gesetz der Abnahme der Amplituden auch für das kärntnerische Becken gelten, so würde man beiläufig folgende Reihenfolgen von Amplituden der Tagesschwankung der Temperatur in den verschiedenen Höhen aufstellen können:

Jahresmittel der Amplituden der periodischen täglichen Wärmeschwankung.

Relative Höhe	0	100	200	300	1700	2600 *m*
Amplitude	7·5	6·4	5·6	5·1	2·0	1·8

---

[1] Relative Höhen über dem Erdboden. Paris, Bureau Central, Terrasse.

Diese Zahlen dienen natürlich nur zu einer vorläufigen rohen Schätzung der Abnahme der Amplituden der periodischen Tagesschwankung der Temperatur mit der Höhe. Dieselbe scheint nach den Jahreszeiten ziemlich verschieden zu sein; die stündlichen Aufzeichnungen auf dem Eiffelthurme im Jahre 1890 geben z. B. folgendes eigenthümliche Resultat.

Localität	Änderung der Amplitude pro 105 m			
	Winter	Frühling	Sommer	Herbst
Bureau Central (18 m) — II. Plattform (123 m)	0°55	1°07	1°59	1°43
Intermediäre Plattform (197 m) — Spitze (302 m)	0·50	0·38	0·00	0·64

Diese Zahlen mögen nur hier stehen, um darauf aufmerksam zu machen, dass die Abnahme der Tagesamplitude der Temperatur ziemlich complicirten Einflüssen zu unterliegen scheint. Die bezüglichen Verhältnisse an den Stationen auf dem Eiffelthurm wird uns sicherlich Herr A. Angot noch seinerzeit vollkommen klar darstellen. Hier muss die Erörterung derselben nun abgebrochen werden.

Tägliche Periode der Wärmeabnahme mit der Höhe.

Die beiden, man darf sagen, benachbarten Gipfelstationen auf dem Obir und auf dem Sonnblick geben Gelegenheit, auch in Bezug auf die tägliche Periode der Wärmeabnahme mit der Höhe eine kleine vorläufige Untersuchung anzustellen.

Bekanntlich erhält man eine sehr beträchtliche tägliche Periode der Wärmeabnahme mit der Höhe, wenn man eine Station in der Niederung mit einer Station auf einem Berggipfel diesbezüglich vergleicht.

In Wirklichkeit wird die tägliche Änderung der Wärmeabnahme mit der Höhe viel kleiner sein, denn die grosse Steigerung der täglichen Wärmeschwankung in der Nähe der Erdoberfläche beschränkt sich bloss auf die untersten Luftschichten. In den höheren, freien Luftschichten dürfte der Unterschied im täglichen Wärmegange beim Übergange von einem Niveau zu einem anderen ein viel geringerer sein, als man dies gewöhnlich annimmt. Stündliche Temperaturaufzeichnungen

an benachbarten Gipfelstationen in verschiedener Seehöhe können uns darüber Aufschluss geben. Da in den Temperaturdifferenzen der Einfluss, den die Aufstellung der Thermometer in der Nähe einer festen Unterlage, sowie die übrigbleibende Wärmestrahlung auf den beobachteten täglichen Gang der Temperatur immerhin noch haben wird, fast ganz eliminirt sein dürfte, weil bei Gipfelstationen und gleicher Aufstellung der Thermometer diese Einflüsse als nahe gleich vorausgesetzt werden dürfen, so können die Temperaturdifferenzen eine weit allgemeinere Bedeutung beanspruchen, als die Temperaturen selbst. Diese Differenzen mögen den Unterschieden der wahren Lufttemperatur zu den verschiedenen Tagesstunden schon sehr nahe kommen und die daraus berechnete Wärmeabnahme mit der Höhe darf desshalb wohl als der wahre Werth derselben in den höheren Luftschichten angesehen werden.

Die folgende Tabelle enthält die Temperaturunterschiede zwischen dem Gipfel des Obir und jenem des Sonnblick für die einzelnen Stunden des Tages in jedem der 12 Monate (Februar ist das Mittel aus Februar 1892 und 1893). Da der Breitenunterschied zwischen Obir und Sonnblick fast genau $^1/_2$ Grad beträgt, und ich gerade für diese Gegend und für das Niveau von 2000 *m* die Temperaturänderung mit der geographischen Breite früher schon untersucht hatte,[1] so konnte ich jene Correctionen an die Monatsmittel des Obirgipfels anbringen, welche sie genähert auf die Breite des Sonnblick reduciren. Diese Correctionen sind:

Obir. Reduction auf die Breite von 47°.

Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	
·16	·16	·17	·20	·33	·53	
Juli	August	Sept.	October	Nov.	Dec.	Jahr
·62	·52	·35	·28	·27	·21	·32

Diese Correctionen sind natürlich sämmtlich negativ. Auf den täglichen Gang der Wärmeabnahme mit der Höhe hat

[1] »Die Temperaturverhältnisse der österreichischen Alpenländer«. Diese Sitzungsberichte, XCII, Abth. II. b., Juni 1885, S. 110, oder S. 78 des Separatabdruckes.

VI. Temperaturdifferenz Obirgipfel — Sonnblickgipfel, corrigirt für den Breitenunterschied.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr
1ʰ a.	4·96	5·94	5·20	5·33	6·27	5·25*	5·95*	6·14	6·24	5·21	4·93	5·16	5·55
2	4·89	6·02*	5·21	5·53	6·34	5·34	6·07	6·07*	6·26	5·26	4·84	5·28	5·59
3	4·77	6·00	5·24	5·64	6·29	5·36	6·04	6·08	6·23	5·09	5·10	5·30	5·60
4	4·70	6·00	5·23	5·76*	6·37	5·60	6·06	6·18	6·21	5·42	5·20*	5·43*	5·68
5	4·73	5·98	5·20	5·68	6·40	5·71	6·11	6·33	6·19*	5·52	5·17	5·23	5·69
6	4·60	5·97	5·31*	5·68	6·57*	6·22	6·15	6·56	6·25	5·54	5·19	5·10	5·76
7	4·47	6·01	5·28	5·52	6·32	6·22	6·32	6·73	6·36	5·63	4·82	5·07	5·73
8	4·52	6·02	5·14	5·33	6·29	6·26	6·64	7·10	6·54	5·68*	4·73	5·02	5·77
9	4·61	5·94	5·18	5·08	6·25	6·47	6·49	6·93	6·25	5·63	4·67	5·00	5·71
10	4·61	5·79	5·09	4·91	6·13	6·34	6·78	6·99	6·29	5·65	4·70	5·07	5·70
11	4·50	5·72	5·07*	5·01	6·12	6·38	6·96	7·23	6·49	5·59	4·64	4·97	5·73
Mittag	4·46*	5·66	5·18	4·96	6·03*	6·60*	7·31	7·69	6·65	5·42	4·56	4·95	5·79
1ʰ p.	4·61	5·64	5·15	4·88	6·12	6·58	7·39*	7·87*	6·84	5·52	4·53	4·93	5·84
2	4·76	5·49	5·11	4·80	6·05	6·53	7·29	7·84	6·93*	5·22	4·58	5·06	5·80
3	4·81	5·57	5·25	4·67*	6·24	6·33	7·41	7·79	6·74	5·07	4·59	4·96	5·79
4	4·69	5·54	5·34	4·85	6·51	6·17	7·12	7·55	6·78	5·02*	4·37*	4·83	5·73
5	4·77	5·52*	5·34	4·88	6·44	5·75	6·91	7·41	6·82	5·04	4·46	4·81*	5·68
6	4·82	5·60	5·22	5·08	6·63*	5·58	6·85	6·98	6·53	5·03	4·54	4·87	5·65
7	5·08	5·66	5·31	5·00	6·49	5·35	6·36	6·36	6·32	5·20	4·52	4·84	5·54
8	5·00*	5·67	5·39*	5·17	6·33	5·52	6·17	6·20	6·24	5·32	4·53	5·16	5·56
9	4·87	5·67	5·28	5·60	6·49	5·48	6·22	6·22	6·34	5·23	4·53	5·13	5·59
10	4·97	5·74	5·20	5·58	6·50	5·47	6·29	6·14	6·27	5·22	4·43	5·13	5·58
11	4·91	5·80	5·31	5·35	6·47	5·39	6·08	6·13	6·29	5·29	4·52	5·15	5·56
Mittn.	5·02	5·88	5·27	5·36	6·28	5·28	5·98	6·14	6·27	5·25	4·75	5·09	5·55
Mittel	4·76	5·71	5·23	5·23	6·32	5·88	6·54	6·77	6·42	5·33	4·69	5·06	5·67

natürlich die Anbringung dieser Correctionen keinen Einfluss. Die jährliche Periode der Wärmeabnahme mit der Höhe wird aber durch dieselben etwas verkleinert.

Die Temperaturdifferenzen der Tabelle VI zeigen im Winterhalbjahr fast gar keinen täglichen Gang, sie sind fast constant den ganzen Tag über. Soweit noch ein täglicher Gang erkennbar ist, zeigt er die höchst auffallende Erscheinung, dass das Minimum der Temperaturdifferenzen im täglichen Gange auf Mittag oder Nachmittag fällt, das Maximum auf den Abend oder die Nachtstunden. Das ist ganz das Gegentheil von den bekannten Verhältnissen: grösste Temperaturdifferenz (Maximum der Wärmeabnahme) am Nachmittag, kleinste am frühen Morgen. Diese Umkehrung des täglichen Ganges der Temperaturdifferenzen beginnt im October und währt bis zum Mai. In den eigentlichen Sommermonaten Juni bis September ist der tägliche Gang der Temperaturdifferenzen der normale mit einem Maximum in den ersten Nachmittagsstunden und einem Minimum in den Nachtstunden. Die Umkehrung des täglichen Ganges der Temperaturdifferenzen ist also den kalten Monaten eigenthümlich, vielleicht kann man sagen jenen Monaten, während welcher der Obirgipfel zumeist mit Schnee bedeckt ist. Während derselben Monate ist natürlich auch der 1000 *m* höhere Sonnblickgipfel mit Schnee bedeckt. In jener Jahreszeit also, wo beide Gipfel mehr oder minder eine Schneelage haben, ist die Wärmeabnahme mit der Höhe in der Nacht rascher als bei Tag. Mit anderen Worten, die untere Station (Obirgipfel) ist bei Nacht relativ wärmer, bei Tag kälter. Es handelt sich allerdings nur um einige Zehntel Grade Celsius.

Zur Zeit, da der Obirgipfel keine dauernde Schneedecke hat, in den vier Sommermonaten Juni—September, ist er bei Tag relativ wärmer und bei Nacht kälter als der höhere Sonnblickgipfel, der die permanente Schneegrenze überragt. Ich hebe die Verhältnisse der Bodenunterlage der Station hervor, ohne damit bestimmt behaupten zu wollen, dass wirklich die Schneedecke die Ursache der Umkehrung des täglichen Ganges der Temperaturdifferenzen ist. Mir scheint dies aber wahrscheinlich zu sein.

Im Winterhalbjahr, namentlich während der Anwesenheit einer Schneedecke, ist die Wärmeabnahme mit der Höhe zwischen den Thälern und den Berggipfeln am kleinsten. Die durch Wärmeausstrahlung während der langen Nächte erkaltete Luft über den Berghängen und Gipfel fliesst ins Thal hinab und wird durch wärmere aus der freien Atmosphäre ersetzt. Diese aus der Höhe auf die Bergabhänge gleichsam herabgesaugte Luft erwärmt sich beim Herabsinken dynamisch und bildet eine Art Wärmequelle für die Berghänge und Berggipfel. Ich habe einige auffallende Beispiele dafür in meiner schon oben citirten Abhandlung über die Temperaturverhältnisse der österreichischen Alpenländer (III. Theil, S. 63 [95]) ausführlicher behandelt. Es scheint mir nun nicht unwahrscheinlich zu sein, dass in diesem nächtlichen Herabsinken sich erwärmender Luft aus der Höhe die Ursache der relativ höheren Temperatur des Obirgipfels in den Nachtstunden des Winterhalbjahres liegen könnte. Der Obir liegt gerade in einem Gebiete, in welchem die nächtliche »Temperaturumkehrung« im Winter recht häufig ist, während beim Sonnblickgipfel wegen seiner Höhe und der bewegteren Luft auf der Nordseite der Alpen dies schon seltener und schwächer der Fall ist.

Wenn diese Annahme richtig ist, dann darf man voraussetzen, dass zur Zeit eines Barometermaximums diese Umkehrung des täglichen Ganges der Temperaturdifferenzen am stärksten sich geltend machen wird. Um diese Schlussfolgerung zu prüfen, habe ich in dem Winter 1892/93, dem einzigen, von dem jetzt schon Beobachtungen von dem Obirgipfel vorliegen, 20 Tage herausgesucht, während deren nach den täglichen Wetterkarten die Ostalpen im Gebiete eines Barometermaximums lagen.

Leider gehört der grössere Theil dieser Tage keinem ausgesprochenen Barometermaximum an, namentlich lag der Kern des Maximums nur wenige Male über den Ostalpen selbst. Es ist also von vorneherein kein sehr entschiedenes Resultat zu erwarten. Der Winter 1892/93 hatte nur im December einige ausgesprochene Barometermaxima; man darf sich aber, wegen der beträchtlichen Entfernung der beiden Stationen (Obir und Sonnblick) von den stündlichen Daten einiger weniger Tage

noch gar keinen entschiedenen täglichen Gang der Temperaturdifferenzen erwarten. Daher glaubte ich doch mindestens 20 Tage der Rechnung zu Grunde legen zu müssen. Die benützten Tage sind: 1892 November 21./24., 27./29.; December 16./22., 26./29.: 1893 Januar 28. und 29. Von diesen Tagen wurden die stündlichen Temperaturwerthe für Sonnblick und Obir ausgeschrieben und Mittelwerthe abgeleitet. Diese und die daraus folgenden stündlichen Temperaturunterschiede zwischen Obir und Sonnblick findet man in der folgenden Tabelle S. 736 zusammengestellt. Von einer Reduction auf gleiche Breite wurde wegen der Kleinheit und Unsicherheit dieser Reduction im vorliegenden Falle Abstand genommen. Dieselbe Tabelle VII enthält auch die Mittelwerthe der Temperaturdifferenzen aus Tabelle VI für 3 Perioden des Jahres.

Der Gang der Temperaturdifferenzen Sonnblick—Obir während der 20 Tage mit Barometermaximis zeigt genau den gleichen Gang, wie er im Wintermittel überhaupt stattfindet, nur in unregelmässigerer und schwächer ausgeprägter Form. Er spricht also kaum für die früher erwähnte Annahme über die Ursache des nächtlichen Maximums der Temperaturdifferenzen, bestätiget aber die Existenz dieses Maximums selbst im Mittel weniger Tage.

Da die einfachen Mittelwerthe der erwähnten 20 Tage noch einen sehr unregelmässigen Gang zeigten, habe ich dieselben auf die Formel gebracht ($x = 0$ für Mitternacht):

$$5\cdot259+0\cdot091 \sin(82^\circ4+x)+0\cdot031 \sin(48^\circ8+2x).$$

Mittelst derselben sind die »berechneten Werthe« erhalten worden. Von 6ʰ Morgens bis 7ʰ Abends bleiben die Temperaturdifferenzen unterhalb des Tagesmittels. Das Minimum fällt auf 10ʰ Vormittag, das Maximum auf 1ʰ Nachts. Die Amplitude der Variation beträgt nur 0°2, d. i. kaum 4% des Betrages der mittleren Temperaturdifferenz.

Wenn man die Temperaturdifferenzen Sonnblick—Obir durch den Höhenunterschied, d. i. 940 *m* dividirt, so erhält man die Wärmeabnahme mit der Höhe zwischen den beiden Gipfeln im Niveauintervall von 2 und 3 *km* Seehöhe.

VII. Mittlere Temperaturdifferenzen zwischen Obirgipfel und Sonnblickgipfel.

	I. Mittel von 20 Tagen, Barometermaxima				II. Mittlere Differenz corrigirt für den Breitenunterschied		
	Mittlere Temperatur		Temp.-Differenz		Decemb. bis März	April, Mai, October, Novb.	Juni bis Septmb.
	Sonnblick	Obir	beobachtet	berechnet			
1 a.	—9·78	—4·45	5·33	5·38*	5·31	5·43	5·90*
2	·76	·43	·33	·37	·35*	·49	·94
3	·88	·49	·39	·35	·33	·53	·93
4	·98	·53	·45*	·32	·34	·69	6·01
5	·84	·47	·37	·29	·29	·69*	·08
6	·80	·62	·18	·25	·25	·75	·29
7	·75	·64	·11	·22	·21	·57	·41
8	·65	·53	·12*	·20	·17	·51	·63
9	·52	·25	·27	·18	·18	41	·54
10	·38	·14	·24	·18*	·14	·35	·60
11	·19	·04	·15	·19	·08	·34	·76
Mittag	·01	3·90	·11	·19	·06*	·24	7·06
1	8·98	·78	·20	·20	·08	·26	·17*
2	9·07	·65	·42	·20	·10	·16	·15
3	·03	·74	·29	·21	·15	·14*	·07
4	·04	·99	·05	·21	·10	·19	6·90
5	·35	4·31	·04*	21	·11	·20	·72
6	·68	·53	·15	·22	·13	·32	·49
7	·83	·48	·35	·24	·22	·30	·10
8	·96	·50	·46	·26	·31	·34	·03
9	·89	55	·34	·29	·24	·46	·06
10	·85	·62	·23	·33	·26	·43	·04
11	·83	·52	·31	·35	·29	·41	5·97
Mittn.	·78	·45	·33	·37	·31	·41	·92
Mittel	—9·58	—4·32	5·26	5·26	5·51	5·40	6·41

Die stündlichen Werthe der Wärmeabnahme mit der Höhe, die hier nicht angeführt zu werden brauchen, da sie natürlich genau den gleichen Gang zeigen wie die Temperaturdifferenzen in Tabelle VII, wurden für die 3 Jahresperioden December bis März (Winter); April, Mai, October, November (Frühling und Herbst); dann Juni—September (Sommer), während welcher sie einen analogen Gang haben, abgeleitet und dann durch periodische Reihen ausgedrückt.

Täglicher Gang der Temperaturabnahme mit der Höhe pro 100 *m* zwischen Sonnblick und Obirgipfel. ($x = 0$ für Mitternacht).

Winter .... $0 \cdot 5425 + 0 \cdot 0132 \sin(68°9 + x) + 0 \cdot 0011 \sin(292°1 + 2x)$

Frühling u. Herbst. $0 \cdot 5626 + 0 \cdot 0217 \sin(31°9 + x) + 0 \cdot 0079 \sin(250°9 + 2x)$

Sommer .... $0 \cdot 6670 + 0 \cdot 0607 \sin(255°3 + x) + 0 \cdot 0139 \sin(29°8 + 2x)$

Mittelst dieser Gleichungen ist der in Tabelle VIII S. 738 enthaltene tägliche Gang der Wärmeabnahme mit der Höhe sowohl in Form von Abweichungen vom Tagesmittel als auch in Form der absoluten Werthe der Wärmeabnahme selbst berechnet worden.

Man sieht, dass während 8 Monaten des Jahres von October bis Mai inclusive fast kein täglicher Gang der Wärmeabnahme mit der Höhe vorhanden ist, und selbst im Sommer ist derselbe nur ganz schwach ausgeprägt. In grossen Höhen über 2000 *m* ist demnach fast keine tägliche Änderung in der Wärmeabnahme mit der Höhe mehr vorhanden; ein sehr bemerkenswerthes Resultat, das, wie mir scheint, hier zuerst nachgewiesen worden ist. Für die freie Atmosphäre gilt dieser Satz jedenfalls in noch höherem Grade, denn die Fehler, denen unsere Bestimmungen der Lufttemperatur unterliegen, streben dahin, die tägliche Wärmeschwankung etwas grösser erscheinen zu lassen, als sie in Wirklichkeit in den freien Atmosphären vorhanden ist.

VIII. Täglicher Gang der Wärmeabnahme mit der Höhe zwischen Sonnblick (3100 *m*) und Obir (2140 *m*) pro 100 *m*. Celsius Grade.

	Winter	Frühling und Herbst	Sommer	Winter	Frühling und Herbst	Sommer	Jahr
	Abweichungen vom Mittel			Absolute Werthe			
1h a.	·012	·008	—·049	·555	·570	·618	·581
2	·013*	·013	—·045	·555*	·576	·622	·584
3	·012	·018	—·040	·555	·581	·627	·588
4	·011	·023	—·036	·554	·586	·631	·590
5	·009	·026*	—·030	·551	·589*	·637	·592
6	·006	·026*	—·022	·548	·589	·645	·594
7	·002	·023	—·012	·545	·585	·655	·595
8	—·002	·016	·002	·541	·579	·669	·596
9	—·006	·008	·018	·537	·570	·685	·597
10	—·009	—·002	·036	·533	·561	·703	·599
11	—·012	—·011	·053	·531	·551	·720	·601
Mittag	—·013	—·019	·066	·529	·544	·733	·602
1	·014*	—·023	·073*	·529*	·539	·740*	·603*
2	—·013	—·025*	·072	·529	·538*	·739	·603
3	—·012	—·024	·064	·531	·539	·731	·600
4	—·009	—·020	·050	·533	·542	·717	·597
5	—·006	—·016	·030	·536	·547	·697	·593
6	—·004	—·011	·009	·539	·552	·675	·589
7	—·001	—·007	—·012	·542	·555	·655	·584
8	·002	—·004	—·030	·545	·558	·637	·580
9	·005	—·003	—·043	·547	·560	·624	·577
10	·008	—·001	—·050	·550	·562	·617	·576*
11	·010	·001	—·053*	·552	·563	·614*	·576
Mitternacht	·012	·004	—·051	·553	·566	·616	·578
Mittel	·007	·011	·031	·542	·563	·667	·591

Die wichtigsten Elemente des täglichen Ganges der Wärmeabnahme mit der Höhe zwischen Obir und Sonnblick sind:

	Mittel	Maximum Zeit	Maximum Betrag	Minimum Zeit	Minimum Betrag	Amplitude
Winter	0°542	2h a.	0°555	1h p.	0°529	0°026
Frühling und Herbst	0·563	5 a.	0·589	2 p.	0·538	0·051
Sommer	0·667	1 p.	0·740	11 p.	0·614	0·126
Jahr	0·591	1 p.	0·603	10½p.	0·576	0·027

Selbst im Sommer schwankt tagüber die Wärmeabnahme mit der Höhe nur zwischen den Grenzen 0°74 und 0°61 pro 100 *m*, im Winter bewegt sie sich gar nur zwischen 0·55 und 0°53, in den Übergangsjahreszeiten zwischen 0·59 und 0°54.

Von Interesse ist ein Vergleich mit den von Herrn Dr. Trabert aus dreijährigen correspondirenden Beobachtungen berechneten Werthen der Wärmeabnahme mit der Höhe zwischen Kolm Saigurn und Sonnblick (Höhendifferenz 1500 *m*). Die Lage von Kolm Saigurn ist ausserordentlich günstig zur Berechnung der Wärmeabnahme mit der Höhe, wegen der sehr geringen Horizontaldistanz von Sonnblickgipfel (bloss 2·5 *km*) und der örtlichen Verhältnisse überhaupt, die eine ganz locale Beeinflussung der beobachteten Temperatur, wie sie in vielen Thalstationen namentlich im Winter vorkommt, unwahrscheinlich erscheinen lassen.

Wärmeabnahme mit der Höhe zwischen Kolm Saigurn und Sonnblickgipfel. Mittel und Extreme im täglichen Gange.

	Mittel	Maximum Zeit	Maximum Betrag	Minimum Zeit	Minimum Betrag	Amplitude
Winter	0°530	Mittag	0·66	4h a.	0·49	0·17
Sommer	0·727	»	0·87	3 a.	0·61	0·26
Jahr	0·633	»	0·79	4 a.	0·54	0·25

Die Amplituden im täglichen Gange der Wärmeabnahme sind hier viel grösser und ziemlich extrem. Am extremsten ist der tägliche Gang in den Monaten April und Mai, wo das Mini-

mum um 3^ha. 0·60 beträgt und das Maximum um Mittag 0·92 erreicht. Diese ungemein rasche Wärmeabnahme mit der Höhe um die Mittagsstunden im Frühling ist sicherlich das Resultat einer ganz localen Temperatursteigerung in Kolm Saigurn (Gegensatz des im Frühjahre nach der Schneeschmelze stark erwärmten allseitig umschlossenen Thalbodens gegenüber den noch eisigen, freien Höhen des Sonnblickgipfels); die rasche Wärmeabnahme kommt sicherlich nur den untersten Luftschichten zu.

Hätten wir einen freien Berggipfel von der Höhe von Kolm Saigurn in der Nähe des Sonnblick, so würden stündliche Temperaturbeobachtungen auf demselben sicherlich einen viel gleichmässigeren täglichen Gang der Wärmeabnahme mit der Höhe ergeben, der sich jenem, wie er zwischen Obir und Sonnblick besteht, anschliessen würde.

Die Gleichungen für den täglichen Gang der Wärmeabnahme mit der Höhe zwischen Kolm Saigurn und Sonnblick sind ($x = 0$ für Mitternacht):

Winter.. $0·530+0·077 \sin(253°9+x)+0·038 \sin(79°3+2x)$

Sommer. $0·727+0·135 \sin(262·4+x)+0·028 \sin(113·9+2x)$

Jahr.... $0·633+0·110 \sin(261·0+x)+0·041 \sin(93·2+2x)$

Auffallend ist der frühe Eintritt des Maximums der Wärmeabnahme zwischen Kolm Saigurn und Sonnblick, der schon auf den Mittag fällt und zwar das ganze Jahr hindurch. Im Sommer wie im Winter ist der tägliche Gang der Wärmeänderung mit der Höhe zwischen Kolm und Sonnblick sehr nahe der gleiche.

Die Registrirung der Temperatur auf dem Obirgipfel hat jedenfalls schon jetzt den grossen Nutzen gehabt, dass sie uns darauf aufmerksam gemacht hat, wie vorsichtig man sein muss, wenn man aus stündlichen Temperaturbeobachtungen in Thälern allgemeinere Schlussfolgerungen ziehen will auf die Verhältnisse in der freien Atmosphäre. Man ist nur zu sehr geneigt, auf Grund der Beobachtungen in der Nähe der Erdoberfläche die tägliche Temperaturvariation in der Atmosphäre zu überschätzen. Selbst die Beobachtungen auf freien Berggipfeln,

unter den günstigsten Verhältnissen angestellt, werden immer noch eine etwas grössere tägliche Temperaturschwankung der Luft ergeben, als sie derselben in der That zukommt. Ich habe in einer kürzlich veröffentlichten Abhandlung über die tägliche Luftdruckschwankung gezeigt, dass die Grösse der einmaligen täglichen Variation des Barometers auf Bergen auf eine sehr kleine tägliche Variation der Temperatur der höheren Luftschichten hinweist. Die Temperaturregistrirungen auf dem Obirgipfel liefern eine Bestätigung dafür.

Werfen wir noch rasch einen Blick auf den jährlichen Gang der Wärmeabnahme mit der Höhe, soweit sich derselbe schon jetzt aus den Temperaturaufzeichnungen auf dem Obirgipfel ableiten lässt. Da erst die Beobachtungen eines Jahrganges mit recht abnormen Temperaturverhältnissen vorliegen, so können die daraus abgeleiteten Ergebnisse nur zu einer vorläufigen Orientirung dienen.

Ich theile im Nachfolgenden die Monatmittel der Temperaturabnahme mit der Höhe mit für das Höhenintervall Obir—Sonnblick, dann auch für das untere Niveau im Mittel aus Obirgipfel—Saager (Nordseite) und Obirgipfel—Eisenkappel (Südseite). Schloss Saager liegt sehr günstig auf einem Bergvorsprung des Südabfalles der Sattnitz gegen das Drauthal, 80 *m* über dem Thal auf steiler Berglehne. Trotzdem fand im December 1892 im Mittel von 7^h Morgens eine »Temperaturumkehrung« statt, Obirgipfel hatte (im Monatsmittel) eine 0°2 höhere Temperatur als das 1660 *m* tiefer liegende Saager. Die kalten Luftschichten im Drauthale hatten demnach eine bedeutende Mächtigkeit. Eisenkappel hat eine vollkommene Thallage, liegt aber fast 100 *m* höher als Saager. Auch hier gab es natürlich im December um 7^h Morgens eine »Temperaturumkehrung«.

Zum Vergleiche theile ich auch die Monatsmittel der Wärmeabnahme mit der Höhe zwischen Kolm Saigurn und Sonnblick mit (nach Dr. Trabert) im Mittel von drei Jahrgängen. Kolm Saigurn hat, wie schon bemerkt, eine sehr günstige Lage insoferne, als dort stagnirende, kalte Luftschichten fehlen, die Wärmeabnahme mit der Höhe daher jener in der freien Atmosphäre recht nahe kommen mag, wie dies auch die nachfolgenden Werthe derselben nachweisen dürften.

Wärmeabnahme mit der Höhe pro 100 *m*.

	Sonnblick— Kolm Saigurn $\Delta H = 1500\,m$	Sonnblick— Obirgipfel $\Delta H = 960\,m$	Obirgipfel— ½ (Saager+ Eisenkappel) $\Delta H = 1620\,m$
		A. Beobachtet	
Jänner	0°49	0°50	0°26
Februar	0·57	0·59	0·36
März	0·63	0·55	0·57
April	0·73	0·55	0·59
Mai	0·73	0·66	0·70
Juni	0·77	0·61	0·73
Juli	0·72	0·68	0·65
August	0·69	0·70	0·60
September	0·65	0·67	0·54
October	0·57	0·55	0·50
November	0·54	0·49	0·24
December	0·53	0·53	0·10
Jahr	0·63	0·59	0·49
		B. Berechnet	
Jänner	0·51	0·53	0·21
Februar	0·56	0·56	0·36
März	0·64	0·57	0·54
April	0·71	0·57	0·66
Mai	0·75	0·60	0·69
Juni	0·76	0·64	0·68
Juli	0·73	0·69	0·66
August	0·69	0·70	0·63
September	0·64	0·65	0·56
October	0·59	0·57	0·42
November	0·54	0·51	0·24
December	0·51	0·50	0·17
Jahr	0·63	0·59	0·49

Gleichungen des jährlichen Ganges der Wärmeabnahme mit der Höhe.

Kolm—Sonnblick ...... $0\cdot635 + \cdot124 \sin(299^\circ5 + x) + \cdot015 \sin(252^\circ9 + 2x)$
Obir—Sonnblick .... $0\cdot590 + \cdot083 \sin(271^\circ9 + x) + \cdot038 \sin(30^\circ4 + 2x)$
Obir—Saager, Kappel... $0\cdot487 + \cdot255 \sin(297^\circ6 + x) + \cdot067 \sin(309^\circ6 + 2x)$

Die Wärmeänderung mit der Höhe zwischen Kolm und Sonnblick stimmt sehr nahe überein mit jener, die zwischen Obir und Sonnblick besteht, die Übereinstimmung ist sogar von Juli bis inclusive Februar eine vollkommene, in den Monaten März, April, Mai, Juni ist die Wärmeänderung mit der Höhe zwischen Obir und Sonnblick eine viel kleinere als jene zwischen Kolm und Sonnblick. Ob dieser Unterschied im Mittel mehrerer Jahrgänge bestehen bleiben wird und vielleicht in dem Temperaturgegensatz des nach der Schneeschmelze sich rasch erwärmenden Thales von Kolm gegenüber dem Sonnblickgipfel begründet ist, ein Gegensatz, der zwischen Obir und Sonnblick nicht existirt, oder doch nur in den eigenthümlichen Witterungsverhältnissen des Jahrganges 1892 begründet war, das muss vorläufig dahingestellt bleiben. Ich bin eher geneigt, das erstere anzunehmen.

Die Wärmeänderung mit der Höhe zwischen den Thälern am Fusse des Obir und dessen Gipfel zeigt von October bis inclusive Februar die bekannten Anomalien; sie ist ungemein gering, namentlich im December und Jänner. Dadurch wird auch das Jahresmittel zu klein. Die Amplitude des jährlichen Ganges ist mehr als doppelt so gross als jene, die für Kolm—Sonnblick gilt; die Phasenzeiten stimmen aber recht nahe überein.

Zum Schlusse möchte ich noch die Verhältnisse der mittleren Temperatur zwischen Obirgipfel und Sonnblickgipfel kurz betrachten namentlich in Bezug auf den täglichen Gang dieser mittleren Temperatur.

Die folgende Tabelle IX enthält die Mittelwerthe aus den stündlichen Aufzeichnungen der Temperatur auf dem Obirgipfel und Sonnblickgipfel. Die Tabelle gibt also die wahrscheinlichen Stundenmittel der Lufttemperatur an in der Luftschichte zwischen 2100 und 3100 *m*.

IX. Mittlere Temperatur der Luftschichte (Mächtigkeit 960 *m*),

	1893 Jänner	1892 und 1893 Februar	1892 März	1892 April	1892 Mai	1892 Juni	1892 Juli	1892 August
1 a.	—15·25	—10·38	—11·48	—5·22	—1·50	1·54	2·59	5·19
2	—15·26	—10·36	—11·48	—5·16	—1·57	1·42	2·51	5·06
3	—15·39	—10·37	—11·51	—5·21	—1·69	1·32	2·45	4·91
4	—15·44	—10·36	—11·60	—5·25	—1·79	1·32	2·37	4·76
5	—15·56	—10·40	—11·65	—5·20	—1·69	1·39	2·42	4·76
6	—15·55	—10·41	—11·67	—5·16	—1·43	1·76	2·71	5·07
7	—15·56	—10·40	—11·60	—4·88	—1·14	1·95	3·40	5·55
8	—15·44	—10·37	—11·33	—4·70	—0·88	2·08	3·62	5·94
9	—15·23	—10·27	—11·00	—4·49	—0·53	2·40	3·80	6·15
10	—14·98	—10·12	—10·72	—4·30	—0·16	2·80	4·30	6·35
11	—14·86	— 9·96	—10·42	—4·11	0·20	2·96	4·65	6·73
Mittag	—14·79	— 9·76	—10·03	—3·85	0·53	3·26	5·05	7·10
1	—14·70	— 9·60	— 9·91	—3·63	0·86	3·38	5·28	7·33
2	—14·64	— 9·53	— 9·89	—3·40	1·14	3·51	5·60	7·66
3	—14·64	— 9·51	— 9·86	—3·41	1·26	3·48	5·66	7·81
4	—14·82	— 9·57	— 9·95	—3·46	1·11	3·39	5·50	7·77
5	—14·95	— 9·80	—10·30	—3·57	0·85	2·97	5·02	7·69
6	—15·02	— 9·97	—10·67	—3·77	0·55	2·67	4·78	7·34
7	—15·04	—10·11	—11·00	—4·22	—0·08	2·37	4·13	6·60
8	—15·05	—10·23	—11·10	—4·54	—0·55	2·14	3·58	6·04
9	—15·10	—10·31	—11·31	—4·77	—0·95	1·86	3·24	5·74
10	—15·19	—10·33	—11·35	—4·85	—1·12	1·81	3·07	5·49
11	—15·22	—10·38	—11·36	—5·00	—1·28	1·69	2·88	5·35
Mittn.	—15·24	—10·42	—11·44	—5·10	—1·39	1·55	2·73	5·26
Mittel	—15·12	—10·12	—10·94	—4·47	—0·47	2·29	3·81	6·15



zwischen Obirgipfel und Sonnblickgipfel
mittlere Höhe 2620 *m.*

1892 Sept.	1892 Octob.	1892 Nov.	1892 Decbr.	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
2·24	—3·02	—5·01	—11·22	—12·28	—6·07	3·11	—1·93	—4·29
2·24	—3·05	—5·00	—11·24	—12·29	—6·07	3·00	—1·94	—4·32
2·25	—3·15	—5·07	—11·28	—12·35	—6·14	2·90	—1·99	—4·39
2·25	—3·18	—5·03	—11·35	—12·38	—6·21*	2·82*	—1·99*	—4·44*
2·24	—3·13	—5·04	—11·29	—12·42	—6·18	2·86	—1·98	—4·43
2·33	—3·16	—5·11	—11·31	—12·42*	—6·09	3·18	—1·98	—4·33
2·65	—3·10	—5·21	—11·28	—12·41	—5·87	3·63	—1·89	—4·13
2·94	—2·95	—5·03	—11·20	—12·34	—5·64	3·88	—1·68	—3·94
3·20	—2·73	—4·88	—10·99	—12·16	—5·34	4·12	—1·47	—3·71
3·42	—2·52	—4·66	—10·69	—11·93	—5·06	4·48	—1·25	—3·44
3·70	—2·33	—4·46	—10·53	—11·78	—4·78	4·78	—1·03	—3·20
4·04	—2·15	—4·23	—10·32	—11·62	—4·45	5·14	—0·78	—2·93
4·22	—2·05	—4·10	—10·27	—11·52	—4·23	5·33	—0·64	—2·77
4·29	—1·95	4·09	—10·16	—11·44*	—4·05	5·59	—0·58*	—2·62
4·37	—2·03	—4·08	—10·21	—11·45	—4·00*	5·65*	—0·58	—2·60*
4·38	—2·15	—4·22	—10·41	—11·60	—4·10	5·55	—0·66	—2·70
4·15	—2·30	—4·46	—10·79	—11·85	—4·34	5·23	—0·87	—2·96
3·69	—2·53	—4·68	—10·92	—11·97	—4·63	4·93	—1·17	—3·21
3·23	—2·60	—4·81	—11·00	—12·05	—5·10	4·37	—1·39	—3·54
3·01	—2·68	—4·86	—11·07	—12·12	—5·40	3·92	—1·51	—3·78
2·81	—2·79	—4·87	—11·09	—12·17	—5·68	3·61	—1·62	—3·96
2·56	—2·87	—4·92	—11·09	—12·20	—5·77	3·46	—1·74	—4·07
2·42	—2·92	—4·93	—11·12	—12·24	—5·88	3·31	—1·81	—4·16
2·34	—2·95	—4·96	—11·18	—12·28	—5·98	3·18	—1·86	—4·23
3·12	—2·68	—4·74	—10·92	—12·05	—5·29	4·08	—1·43	—3·67

Da der August 1892 fast um 2° zu warm war, dagegen der Jänner 1893 um mehr als 6° zu kalt, so erscheint die Jahresschwankung der Lufttemperatur in dieser Schichte viel zu gross gegenüber mittleren, normalen Verhältnissen; statt 21°3 wird sie im Mittel wohl kaum 14° betragen. Allgemeines Interesse kann aber der tägliche Gang der Lufttemperatur in einer fast 1000 *m* mächtigen Luftschichte in einem so hohen Niveau beanspruchen, namentlich mit Bezug auf dessen Einfluss auf die tägliche Barometerschwankung daselbst. Hauptsächlich deshalb wurden die Zahlenwerthe dieser Tabelle abgeleitet. Es ist ja das erstemal, dass ein Versuch gemacht werden kann, den täglichen Gang der Temperatur in einer circa 1000 *m* mächtigen Luftschichte in einer Seehöhe über 2000 *m* zu erfahren. Dazu können nur Temperaturregistrirungen auf zwei benachbarten Berggipfeln in verschiedener Seehöhe benutzt werden. Die horizontale Entfernung der beiden Gipfel (Obir, Sonnblick) kann den täglichen Gang nicht beeinflussen, sondern nur die absoluten Werthe der mittleren Temperatur.

Um den täglichen Gang besser überblicken zu können, wurden auch für die Jahreszeiten Mittelwerthe abgeleitet. Das empfahl sich um so mehr, als ja vorerst bloss die Registrirungen eines einzelnen Jahrganges vorliegen, der manche Witterungsanomalien aufzuweisen hatte.

In diesen Mitteln für die vier Jahreszeiten kommt der tägliche Gang der Temperatur in der Luftschichte zwischen Obir und Sonnblick schon mit grosser Regelmässigkeit zum Ausdrucke.

Täglicher Gang der Temperatur in der 940 *m* mächtigen Luftschichte zwischen Obirgipfel (2140) und Sonnblickgipfel (3100).

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
Mittel	—12·0	—5·3	4·1	—1·4	—3·7
Maximum	—11·4	—4·0	5·6	—0·6	—2·6
Zeit	2h	3h	3h	2h	3h p.
Minimum	—12·4	—6·2	2·8	—2·0	—4·4
Zeit	6h	4h	4h	4h	4h a.
Amplitude	1°0	2°2	2°8	1°4	1°8

Die tägliche Wärmeschwankung in der Luftschichte zwischen 2100 und 3100 *m* ist somit sehr klein, 1° im Winter, kaum 3° im Sommer, und wird in Wirklichkeit wohl noch etwas kleiner sein. Der Eintritt des Temperaturmaximums fällt auf 3^h p., also ziemlich spät, das Minimum tritt dagegen schon sehr früh auf, nämlich schon 4^h Morgens. Ich will vorläufig nur diese Verhältnisse constatiren, ohne auf Vermuthungen über die ursächlichen Bedingungen derselben einzugehen.

Für die beiden extremen Jahreszeiten und für das Jahr habe ich den täglichen Wärmegang auch durch periodische Reihen dargestellt, die hier angeführt werden mögen.

Täglicher Gang der mittleren Temperatur der Luftschichte zwischen Obir- und Sonnblickgipfel.

Winter .... $0?413 \sin (229?6+x)+0\cdot 181 \sin (46?4+2x)$

Sommer .... $1\cdot 334 \sin (232\cdot 6+x)+0\cdot 186 \sin (20?1+2x)$

Jahr .... $0\cdot 872 \sin (231?5+x)+0\cdot 189 \sin (30?1+2x)$

Mit Ausnahme der Grösse der Amplitude des ersten Gliedes bleibt der jährliche Gang in allen Jahreszeiten nahe derselbe. Bemerkenswerth ist die Constanz der Amplitude des zweiten Gliedes und deren relativ (zu jener des ersten Gliedes) beträchtliche Grösse. Das erste Glied erreicht im Mittel seine extremen Werthe um $2^h\,34^m$ Morgens und Nachmittags.

In meiner Abhandlung: »Weitere Untersuchungen über die tägliche Oscillation des Barometers«[1] habe ich darauf hingewiesen, dass der tägliche Gang des Barometers auf den höheren Berggipfeln auf eine weit kleinere tägliche Variation der Lufttemperatur schliessen lässt, als die Beobachtungen zu ergeben scheinen. Da die stündlichen Temperaturbeobachtungen in der Nähe der Erdoberfläche jedenfalls eine viel zu grosse Amplitude der täglichen Temperaturänderung ergeben, und wir dieselben benützen müssen, wenn wir den täglichen Wärmegang in der Luftschichte zwischen dem Berggipfel und dessen Fuss ableiten wollen, so war dies wohl von vorneherein zu erwarten.

[1] Denkschriften der Wiener Akademie, Bd. LIX, 1892.

Die obigen Zahlenwerthe für den mittleren Gang der Lufttemperatur in der 960 *m* mächtigen Luftschichte zwischen Obirgipfel und Sonnblickgipfel können nun viel mehr darauf Anspruch machen, den wahren täglichen Gang der Lufttemperatur darzustellen und bei einer vollständigen Erklärung der täglichen Barometerschwankung mit mehr Erfolg benutzt zu werden. Doch will mir scheinen, dass, wenigstens im Sommer, die tägliche Variation der Lufttemperatur immer noch grösser sein dürfte, als sich dies mit der Grösse der beobachteten einmaligen täglichen Barometerschwankung (der sogenannten thermischen Oscillation im engeren Sinne) auf Berggipfeln leicht in Einklang bringen lässt.

Der Gegenstand soll aber hier nicht weiter verfolgt werden, da auch die entsprechenden Daten über die tägliche Variation des Barometers auf dem Obir und auf dem Sonnblickgipfel gegenwärtig nicht vorliegen. Ich will mich damit begnügen, die Gleichungen hinzuschreiben, welche die »thermische« Oscillation des Barometers ausdrücken, welche durch die oben angeführte tägliche Variation der Lufttemperatur in der Luftschichte zwischen Obir- und Sonnblickgipfel auf letzterem erzeugt werden müsste.

Man erhält diese Gleichungen, wenn man die numerischen Coëfficienten der vorhin mitgetheilten Gleichungen für den täglichen Gang der Temperatur mit dem Factor $bh : RT^2$ multiplicirt und zu den Winkelconstanten 180° hinzugibt.

Die den erwähnten Factor constituirenden Grössen sind in unserem Falle folgende: $h = 960\ m$, $\alpha = 0\cdot0038$ gesetzt, wird $T_0 = 263$, $R = 30\cdot37$; b ist im Winter $= 516\cdot2$, Sommer $= 524\cdot8$, Jahr $= 519\cdot9$; T im Winter 251° im Sommer 267° im Jahr 259·3. Hienach berechnet sich der Factor zur Reduction der täglichen Temperaturvariation auf die dadurch verursachte tägliche Barometerschwankung im Niveau des Sonnblick zu 0·260 im Winter, zu 0·234 im Sommer und 0·245 im Jahresmittel.

Auf diesem Wege erhält man folgende Gleichungen, welche die »thermische« Luftdruckoscillation im Niveau des Sonnblickgipfels, hervorgebracht durch die tägliche Temperaturvariation in der Luftschichte zwischen Obir- und Sonnblickgipfel ausdrücken.

Tägliche thermische Luftdruckschwankung:

Winter	$0 \cdot 107 \sin(49°6+x)+0 \cdot 047 \sin(226°4+2x)$
Sommer	$0 \cdot 311 \sin(52 \cdot 6+x)+0 \cdot 043 \sin(200°1+2x)$
Jahr	$0 \cdot 214 \sin(51 \cdot 5+x)+0 \cdot 046 \sin(210°1+2x)$

Der Sinn dieser Gleichungen ist, dass auf die tägliche »thermische« Luftdruckschwankung, wie sie im Niveau von 2140 *m* schon besteht, im Niveau von 3100 *m* noch eine weitere »thermische« Druckschwankung aufgesetzt wird in Folge der täglichen Temperaturvariation der zwischenliegenden Luftschichte von 960 *m* Mächtigkeit, deren Grösse und Verlauf die vorstehenden Gleichungen ausdrücken. Dieselben können auch als der Unterschied der reinen thermischen Druckschwankung auf dem Sonnblickgipfel gegenüber jener auf dem Obirgipfel betrachtet werden.

XIX. SITZUNG VOM 13. JULI 1893.

Herr Intendant Hofrath Ritter v. Hauer führt den Vorsitz.

Die Königl. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen, als Mitglied des Verbandes wissenschaftlicher Körperschaften, macht der k. Akademie Mittheilung von den für das Jahr 1893/94 ihrerseits in Aussicht genommenen naturwissenschaftlichen Arbeiten. Es sind dies:

1. Die Fortsetzung der Herausgabe der Werke Wilhelm Weber's.
2. Weitere Reisen und Arbeiten von Peter für eine topographische Flora von Mitteleuropa.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Lang übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: »Krystallographisch-optische Bestimmungen«.

Ferner übersendet Herr Hofrath V. v. Lang eine Arbeit aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität zu Innsbruck von H. Bauernberger: »Über die Stärke elektrischer Wellen, wenn der Funke in Öl überspringt«.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. E. Mach übersendet eine vorläufige Mittheilung über die von Ludwig Mach im verflossenen Jahre im physikalischen Institute der k. k. deutschen Universität Prag ausgeführten optischen Untersuchungen.

Herr Regierungsrath Mach übersendet ferner eine Notiz von Herrn Ludwig Mach: »Über ein Röhrenniveau von variabler Empfindlichkeit«.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. A. v. Waltenhofen übersendet folgende zwei Arbeiten aus dem elektrotechnischen

Institute der k. k. technischen Hochschule in Wien von dem Privatdocenten Dr. J. Sahulka:

1. »Messung der Capacität von Condensatoren mit Wechselstrom.«
2. »Erklärung des Ferranti'schen Phänomens«.

Das c. M. Herr Prof. Franz Exner übersendet eine Abhandlung des Herrn Bruno Piesch, stud. phil. in Wien: »Über den elektrischen Widerstand des Ceylongraphits.«

Das c. M. Herr Prof. Zd. H. Skraup in Graz übersendet folgende sechs Abhandlungen aus dem chemischen Universitätsinstitute in Graz:

1. »Über Isomerien in der Schleimsäurereihe«, von Zd. H. Skraup.
2. »Beiträge zur Kenntniss der Albumosen«, von H. Schrötter in Graz.
3. »Über die Einwirkung von Natriumäthylat auf Bibrombernsteinsäureester«, von G. Pum.
4. »Über Bleitetrachlorid«, von H. Friedrich.
5. »Über die Beziehungen zwischen dem optischen Drehungsvermögen des Cinchonidins und seiner Salze, sowie den Einfluss von Lösungsmitteln auf die Rotation«, von Carl Schuster.
6. »Über das Verhalten der Maleïnsäure beim Erhitzen«, von Zd. H. Skraup.

Das c. M. Herr Prof. Friedrich Becke in Prag übersendet folgende Mittheilung: »Über moleculare Axenverhältnisse«.

Herr Prof. Dr. Ph. Knoll in Prag übersendet eine Abhandlung: »Über die Herzthätigkeit bei einigen Evertebraten und deren Beeinflussung durch die Temperatur«.

Herr Prof. Dr. J. Puluj in Prag übersendet eine Abhandlung: »Über einen Phasenindicator und einige mit demselben ausgeführte Messungen«.

Herr Dr. L. Kussminsky in Prag übersendet folgende Mittheilung: »Über die Wirkung periodisch veränderlicher elektromotorischer Kräfte«.

Herr Prof. Dr. Guido Goldschmiedt übersendet eine Arbeit aus dem chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag: »Über die Einwirkung von Jodmethyl auf Papaverinsäure«, von Franz Schranzhofer.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. »Bestimmung der Lösungswärme eines Salzes mittelst der Übersättigung und Theorie der Übersättigung«, von Prof. Dr. O. Tumlirz an der k. k. Universität in Czernowitz.
2. »Über Flächen concreter Krümmung«, von Dr. Emil Waelsch, Privatdocent an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag.
3. »Über eine algebraische Theorie der Schaaren nichtadjungirter Berührungscurven, welche zu einer algebraischen Curve gehören«, von Herrn Wilhelm Weiss, Assistent an derselben Hochschule.
4. »Auflösung von Gleichungen aller Grade durch einfache arithmetische Reihen«, von Herrn Robert Brabée in Znaim.

Das w. M. Sigmund Exner überreicht eine Abhandlung von Dr. L. Réthi, betitelt: »Das Rindenfeld, die subcorticalen Bahnen und das Coordinationscentrum des Kauens und Schluckens«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. J. Wiesner überreicht eine von Herrn Hermann Schrötter R. v. Kristelli in Wien ausgeführte Arbeit, betitelt: »Über den Farbstoff des Arillus von *Afzelia* und *Ravenala madagascariensis*, nebst Bemerkungen über den anatomischen Bau der Samen«.

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht vier in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeiten:

1. »Elektrolytische Bestimmungen und Trennungen«, von Dr. G. Vortmann.
2. »Chemische Untersuchungen im östlichen Mittelmeer« (III. Abhandlung), von Dr. K. Natterer.
3. »Über die Trennung der flüchtigen fetten Säuren«, von Herrn Max Wechsler

4. »Über die Darstellung von Methyl-3-Pentansäure und die Löslichkeitsbestimmungen ihres Calcium-, Barium- und Silbersalzes«, von Herrn V. Kulisch.

Das c. M. Herr Custos Dr. Emil v. Marenzeller überreicht eine Abhandlung mit dem Titel: »Zoologische Ergebnisse der Tiefsee-Expeditionen im östlichen Mittelmeere auf S. M. Schiff „Pola“. 2. Polychäten des Grundes, gesammelt 1890, 1891 und 1892.«

Herr Dr. Hans Rabl, Assistent am histologischen Institute der k. k. Universität in Wien, überreicht eine Abhandlung: »Über geschichtete Niederschläge bei Behandlung der Gewebe mit Argentum nitricum.«

Herr Dr. Josef Schaffer, Privatdocent und Assistent an der Lehrkanzel für Histologie der k. k. Universität in Wien, überreicht eine vorläufige Mittheilung über den feineren Bau der Thymus und deren Beziehungen zur Blutbildung, sowie über das zum Studium dieser Frage an der zoologischen Station in Neapel mit Unterstützung der kaiserl. Akademie der Wissenschaften aus dem Legate Wedl gesammelte Material.

Schliesslich überreicht der Secretär eine Abhandlung des Herrn Dr. Hugo Zapałowicz, k. u. k. Hauptmann-Auditor in Wien, unter dem Titel: »Das Rio-Negro-Gebiet in Patagonien«.

Notiz über ein Röhrenniveau von variabler Empfindlichkeit

von

Ludwig Mach.

(Mit 2 Textfiguren.)

Der inneren Wand eines Libellenrohres ertheilt man bekanntlich die (schwach) tonnenförmige Gestalt durch Schleifen auf einem Stahldorne von derselben Form. Die Dicke dieses Dornes nimmt von seinen (genau gleich starken) Enden gegen die Mitte entsprechend dem Radius, unter welchem die Röhre ausgeschliffen werden soll, allmälig zu. Bei sehr grossem Radius, also beim Schleifen von hoch empfindlichen Libellen, ist aus naheliegenden Gründen die Herstellung des Werkzeuges ausserordentlich schwierig. Das Schleifen erfordert nebst grosser Geduld beträchtliche mechanische Fertigkeit. Ich versuchte deshalb vor einiger Zeit dieses umständliche Verfahren durch ein anderes recht einfaches zu ersetzen.

Von dem Gedanken ausgehend, dass ein an den beiden Enden fixirtes, in der Mitte, jedoch einseitig und senkrecht auf seine Axe, gedrücktes Glasrohr eine annähernd kreisbogenförmige Krümmung besitzt, führte ich die im Nachfolgenden näher beschriebene Libelle aus. Die Wand des Glasrohres *gg* (Fig. 1) trägt in der Mitte eine Bohrung, in welcher die Mutter eines feinen Stahlschräubchens *s* ($^7/_{40}$ *mm* Gangsteigung) eingelassen ist. Ein gut cylindrisches Rohr, das ganz wie die gewöhnlichen Libellen eine Theilung und Ätherfüllung besitzt, wird an seinen Enden mit zwei aufgepassten, bogenförmigen Stahlstückchen *m* und *n* versehen. Diametral diesen beiden

Klötzchen gegenüber und in der Mitte von $g'g'$ befindet sich ein ganz ähnlich gearbeitetes Stück *o*. Dieses Rohr wird in das erstere eingeschoben und mit Hilfe des in *o* eingreifenden Schräubchens *s* gedrückt. Da bei der ganzen Pressungsvorrichtung ausser Glas nur Stahl in Stücken von sehr geringer

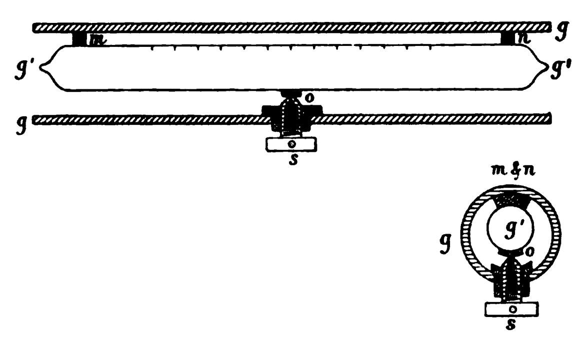


Fig. 1.

Ausdehnung verwendet wurde, so ist die Änderung der Krümmung durch Temperaturschwankungen auf ein Minimum reducirt. Fig. 2 zeigt die Vorrichtung in einem Metallgestell montirt, dessen Einrichtung wohl leicht ersichtlich ist. Eine Bestimmung der Empfindlichkeit (bei sanft gepresstem Rohre) ergab $1p = 7''$.

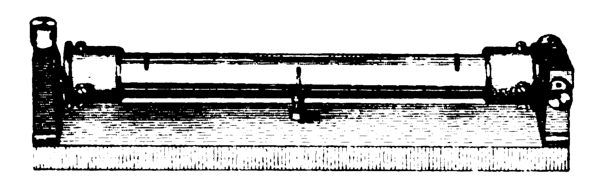


Fig. 2.

Innerhalb der Temperaturgrenzen von +40° C. bis —20° C. war diese Libelle nahezu denselben Variationen unterworfen wie irgend ein anderes durch Schleifen hergestelltes Röhrenniveau. Da an den Enden die gleiche Empfindlichkeit wie in der Mitte vorhanden war, so dürfte wohl die Biegungscurve einem Kreisbogen sehr nahe kommen. An manchen Stellen aber bemerkte ich sehr geringe Variationen der Empfindlichkeit, welche ich der nicht ganz vollkommen cylindrischen Form des

Rohres zuschreiben muss.[1] Wenn man ein möglichst cylindrisches Glas unter vielen Glasröhren systematisch heraussucht, und dessen eventuelle Formfehler durch Nachschleifen auf einem cylindrischen Dorne, was beiläufig gesagt eine sehr leichte Arbeit ist, corrigirt, so könnte man durch Einfügen desselben in die obige Biegungsvorrichtung eine gute Libelle von beträchtlicher Empfindlichkeit erhalten.

[1] Das Glas meiner Versuchslibelle war von Herrn A. Pessler, Mechanicus in Freiberg i. S., aus einem Röhrenvorrath ausgewählt worden. Obwohl es ohne jede Correction der Cylinderfehler mit Füllung und Theilung versehen wurde, so ersetzt es im gebogenen Zustande eine Libelle von der oben erwähnten Empfindlichkeit.

Über Tangentencongruenzen einer Fläche

von

Emil Waelsch,

Privatdocent an der k. k. deutschen technischen Hochschule zu Prag.

1. Vorbemerkungen. Es seien die Coordinaten x, y, z eines Flächenpunktes a abhängig von den Parametern u, v und das Bogenelement sei dann

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

Setzt man

$$\frac{\partial x}{\partial u} = x_u, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = x_{uu}, \text{ etc.}$$

und

$$\Sigma x_u x_{uu} = m, \quad \Sigma x_u x_{uv} = m', \quad \Sigma x_u x_{vv} = m''$$
$$\Sigma x_v x_{uu} = n, \quad \Sigma x_v x_{uv} = n', \quad \Sigma x_v x_{vv} = n'',$$

so sei, wenn noch

$$T^2 = EG - F^2$$

gesetzt wird,

$$T^2 J_1 = Gm - Fn, \quad T^2 J_1' = Gm' - Fn', \quad T^2 J_1'' = Gm'' - Fn''$$
$$T^2 J_2 = En - Fm, \quad T^2 J_2' = En' - Fm', \quad T^2 J_2'' = En'' - Fm''.$$

Die Differentialgleichung der geodätischen Linien der Fläche lässt sich dann schreiben:[1]

$$\begin{vmatrix} J_1 du^2 + 2J_1' du dv + J_1'' dv^2 + d^2u, & du \\ J_2 du^2 + 2J_2' du dv + J_2'' dv^2 + d^2v, & dv \end{vmatrix} = 0. \tag{1}$$

[1] Siehe für diese Formel und die früheren Knoblauch, Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen, S. 73, 78 und 140.

Auf der Fläche liege nun eine Schaar S_1 von ∞^1 Curven vor, gegeben durch die Differentialgleichung:

$$Q du - P dv = 0. \tag{2}$$

Damit diese Curven sämmtlich geodätische Linien der Fläche sind, muss nach Formel (1) die Gleichung bestehen:

$$\Gamma \equiv \begin{vmatrix} J_1 P^2 + 2 J_1' P Q + J_1'' Q^2 + P_u P + P_v Q, & P \\ J_2 P^2 + 2 J_2' P Q + J_2'' Q^2 + Q_u P + Q_v Q, & Q \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Setzt man

$$\begin{vmatrix} J_1 P + J_1' Q + P_u, & P \\ J_2 P + J_2' Q + Q_u, & Q \end{vmatrix} = \lambda_1, \quad \begin{vmatrix} J_1' P + J_1'' Q + P_v, & P \\ J_2' P + J_2'' Q + Q_v, & Q \end{vmatrix} = \lambda_2, \tag{4}$$

so übergeht Gleichung (3) in

$$\Gamma \equiv P\lambda_1 + Q\lambda_2 = 0. \tag{5}$$

2. Brennpunkt einer Tangentencongruenz der Fläche. Die Tangenten t der Curven der Schaar S_1 bilden eine Strahlencongruenz. Sei t_a diejenige dieser Tangenten, welche die Fläche im Punkte a berührt. Dann ist a der eine Brennpunkt dieses Strahles t_a der Congruenz, der andere Brennpunkt sei a'. Es sind die Coordinaten dieses Punktes a' zu bestimmen.

Die Coordinaten eines Nachbarpunktes des Punktes a auf der Fläche sind

$$x + x_u du + x_v dv, \quad y + y_u du + y_v dv, \quad z + z_u du + z_v dv.$$

Soll dieser Nachbarpunkt auf der Tangente t_a liegen, so muss $du:dv$ der Gleichung (2) genügen. Die Coordinaten dieses Nachbarpunktes sind demnach:

$$x + du\left(x_u + \frac{Q}{P} x_v\right), \quad y + du\left(y_u + \frac{Q}{P} y_v\right), \quad z + du\left(z_u + \frac{Q}{P} z_v\right);$$

daher sind die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Tangente t_a, wenn μ einen beliebigen Werth hat:

$$x + \mu(P x_u + Q x_v), \quad y + \mu(P y_u + Q y_v), \quad z + \mu(P z_u + Q z_v). \tag{6}$$

Soll dieser Punkt der Brennpunkt a' der Tangente t_a sein, so muss μ einen bestimmten Werth haben, und wir werden zeigen, dass sich μ durch die beiden obigen Grössen λ_1, λ_2 in folgender Weise ausdrückt. Es ist

$$\frac{1}{\mu} = -\frac{(PL+QM)\lambda_2-(PM+QN)\lambda_1}{LP^2+2MPQ+NQ^2},$$

wobei

$$L du^2+2 M du\, dv+N dv^2 \tag{7}$$

die Differentialform der Inflexionstangente der Fläche ist.

3. Beweis. Um dies zu zeigen, sei

$$a \equiv x\xi+y\eta+z\zeta+1 = 0$$

die Gleichung des Punktes a. Differentiirt man diese nach u und v, so erhält man die Gleichungen der unendlich-fernen Punkte

$$\left.\begin{aligned} b &\equiv x_u\xi+y_u\eta+z_u\zeta = 0 \\ c &\equiv x_v\xi+y_v\eta+z_v\zeta = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

Es sind dies die unendlich-fernen Punkte der Tangenten an die Linien $v =$ const., $u =$ const. der Fläche. Ein beliebiger Punkt der Tangentialebene T_a des Punktes a hat dann die Gleichung

$$\lambda a+\sigma b+\tau c = 0.$$

und

$$a' \equiv \lambda a+Pb+Qc = 0 \tag{9}$$

ist die Gleichung eines Punktes der Tangente t_a. Der Parameter λ soll nun hier so bestimmt werden, dass dieser Punkt der Brennpunkt a' der Tangente t_a wird.

Die Tangente t_a hat zu Coordinaten die Determinanten der Matrix

$$|a, m|,$$

wobei

$$m \equiv Pb+Qc \tag{10}$$

der unendlich-ferne Punkt der Tangente t_a ist.

Differentiirt man diese Coordinaten nach u respective v, so erhält man die Coordinaten zweier linearen Complexe

$$|bm|+|am_u|, \quad |cm|+|am_v|. \tag{11}$$

Diese beiden linearen Complexe haben mit dem singulären linearen Complexe t_a ∞^1 Strahlen gemeinsam. Diese Strahlen sind nun[1] die Tangenten der Brennfläche der Strahlencongruenz in den Brennpunkten a und a' des Strahles t_a. Die Tangentialebene $T_{a'}$ der Brennfläche für den Punkt a' entspricht daher dem Brennpunkte a' in den Complexen, deren Coordinaten durch (11) gegeben sind.

Für zwei Punkte x, y, welche auf demselben Strahl dieser Complexe liegen, hat man nach (11) die Gleichungen

$$(bmxy)+(am_u xy) = 0, \quad (cmxy)+(am_v xy) = 0,$$

wobei ( ) die Determinante der vier innenstehenden Punkte bedeutet. Da nun die Ebene $T_{a'}$ Nullebene des Punktes a' für beide Complexe ist, so ist ihre Gleichung

$$(bma'x)+(am_u a'x) = 0 \tag{12}$$

oder

$$(cma'x)+(am_v a'x) = 0. \tag{13}$$

Setzen wir hier aus (9) den Werth von a' ein, so folgt aus Gleichung (12)

$$(b, m, \lambda a+m, x)+(am_u mx) =$$
$$= \lambda(bmax)+(m_u max) = (\lambda b+m_u, max) = 0.$$

Diese Gleichung muss nun mit der Gleichung der Tangentialebene $T_{a'}$, welche sich aus (13) in analoger Weise ergibt, nämlich mit

$$(\lambda c+m_v, max) = 0$$

identisch sein. Daher müssen die vier Punkte

$$\lambda b+m_u, \ \lambda c+m_v, \ m, \ a$$

in einer Ebene liegen. Da aber die ersten drei dieser Punkte im Unendlichen liegen, so muss hiezu ihre Determinante

$$(\lambda b+m_u, \lambda c+m_v, m) = 0$$

---

[1] Siehe: Zur Infinitesimalgeometrie der Strahlencongruenzen und Flächen. Diese Sitzungsberichte, Bd. 100, S. 161.

sein. Hieraus ergibt sich für λ die Gleichung

$$\lambda\{(bm_v m)+(m_u cm)\}+(m_u m_v m) = 0.$$

Da aber $m = Pb+Qc$ ist, so folgt hieraus

$$-\lambda\{P(bcm_u)+Q(bcm_v)\}+(m_u m_v m) = 0. \tag{14}$$

Wenn nun die Punkte b und c [siehe Formel (8)] weiter nach u und v differentiirt werden, so erhält man in

$$e \equiv x_{uu}\xi+y_{uu}\eta+z_{uu}\zeta = 0$$
$$f \equiv x_{uv}\xi+y_{uv}\eta+z_{uv}\zeta = 0$$
$$g \equiv x_{vv}\xi+y_{vv}\eta+z_{vv}\zeta = 0$$

die Gleichungen dieser Punkte e, f, g.

Dann ist

$$\left.\begin{aligned} m_u &= P_u b+Q_u c+Pe+Qf \\ m_v &= P_v b+Q_v c+Pf+Qg \end{aligned}\right\}, \tag{15}$$

daher ist nach Formel (14)

$$-\lambda\{(bc,\, Pe+Qf)P+(bc,\, Pf+Qg)\,Q\}+(mm_u m_v) = 0.$$

Nun ist bekanntlich

$$(bce) = TL,\ (bcf) = TM,\ (bcg) = TN,$$

wobei L, M, N die Werthe in der Differentialform (7) sind, also ergibt sich

$$\lambda = \frac{\Delta}{TH}, \tag{16}$$

wobei $H = LP^2+2MPQ+NQ^2$ ist.

Wir bestimmen nun noch den Werth der Determinante $\Delta = (mm_u m_v)$.

Wenn der unendlich-ferne Punkt der Normale des Punktes a die Gleichung

$$A \equiv X\xi+Y\eta+Z\zeta = 0$$

hat, wobei XYZ die Richtungscosinus der Normale bedeuten, so ist[1]

[1] Siehe Knoblauch, l. c. S. 78.

$$e = LA + J_1 b + J_2 c$$
$$f = MA + J_1' b + J_2' c$$
$$g = NA + J_1'' b + J_2'' c.$$

Setzt man diese Werthe in (15) ein und die gewonnenen Werthe von m_u und m_v in Δ, so erhält man Δ als Determinante der drei Reihen

$$Pb + Qc,$$
$$(P_u + PJ_1 + QJ_1')b + (Q_u + PJ_2 + QJ_2')c + (PL + QM)A$$
$$(P_v + PJ_1' + QJ_1'')b + (Q_v + PJ_2' + QJ_2'')c + (PM + QN)A.$$

Daher ist

$$\begin{aligned}\Delta = (bcA)\{&P(Q_u + PJ_2 + QJ_2')(PM + QN)\\ &-P(Q_v + PJ_2' + QJ_2'')(PL + QM)\\ &+Q(P_v + PJ_1' + QJ_1'')(PL + QM)\\ &-Q(P_u + PJ_1 + QJ_1')(PM + QN)\}.\end{aligned}$$

Dies gibt aber, da $(bcA) = T$ ist, und vermöge Formel (4)

$$\Delta = T\{-\lambda_1(PM + QN) + \lambda_2(PL + QM)\}.$$

Nach Formel (16) ist daher der Schlusswerth von λ

$$\lambda = \frac{\Delta}{TH} = \frac{(PL + QM)\lambda_2 - (PM + QN)\lambda_1}{LP^2 + 2MPQ + NQ^2}, \tag{17}$$

wobei λ_1, λ_2 die Werthe (4) haben. Daher gibt Formel (6) für den Punkt a':

$$a' \equiv a + \frac{1}{\lambda}(Pb + Qc). \tag{18}$$

4. Specielle Curvenschaaren S_1. Ist in der letzten Formel $\lambda = \infty$, so fällt der Brennpunkt a' mit a zusammen. Die Tangente t_a ist Inflexionstangente der Fläche im Punkte a, und in der That gibt der Nenner $LP^2 + 2MQ + NQ^2 = 0$ die Werthe von $\frac{Q}{P}$, welche den Inflexionstangenten entsprechen.

Ist $\lambda = 0$, so fällt a' ins Unendliche. Es gibt dann einen zu t_a benachbarten Strahl t_a' der Congruenz, welcher t_a im unendlich-fernen Punkte a' schneidet, weiters einen zu t_a' benachbarten Congruenzstrahl t_a'', welcher durch a' geht u. s. f.

Daher besteht dann die Tangentencongruenz aus den Erzeugenden von ∞^1 Cylindern, welche der Fläche umschrieben sind. Diese Cylinder sind der Fläche längs der Curven einer Schaar umschrieben, und die gegebene Schaar S_1 ist conjugirt zu dieser Schaar. Der Zähler von λ gleich Null gesetzt, gibt also die Bedingung dafür, dass die Schaar S_1 eine conjugirte Schaar hat, längs deren Curven der Fläche Cylinder umschrieben sind.

Eliminirt man aus Formel (17) und aus der Gleichung (5) λ_1 oder λ_2, so erhält man:

$$\lambda = \frac{\lambda_2}{P} - \frac{(PM+QN)\Gamma}{PH} = -\frac{\lambda_1}{\varphi} + \frac{(PL+QM)\Gamma}{QH}.$$

Sind daher die Curven der Schaar S_1 geodätische Linien der Fläche, ist also $\Gamma = 0$, so ergibt sich

$$\lambda_g = \frac{\lambda_2}{P} = -\frac{\lambda_1}{Q}. \tag{19}$$

Die Tangentencongruenz dieser Curvenschaar ist dann eine Normalencongruenz. Nach Formel (18) ist der zweite Brennpunkt a' der Tangente t_a gegeben durch

$$a' \equiv a + \frac{1}{\lambda_g}(Pb+Qc). \tag{20}$$

5. Anwendung für Flächen mit Liouville'schem Bogenelement. Es seien ∞^1 Schaaren S_1 auf der Fläche vorgelegt, P und Q der Gleichung (2) hängen also von einem Parameter α ab. Dann gibt jede der Curvenschaaren eine Curve, welche durch a geht, und diese hat eine Tangente t_a mit einem Brennpunkte a'. Für alle ∞^1 Curvenschaaren S_1 nimmt a' ∞^1 Lagen in der Tangentialebene T_a an; dieser Punkt a' beschreibt daher eine Curve $\mathfrak{A}$, deren Parameterdarstellung durch den Parameter α dann in (18) vorliegt.

Wir setzen nun voraus, dass das Bogenelement der vorgelegten Fläche die Form hat

$$ds^2 = \varepsilon^2(du^2+dv^2);$$

dann ist $E = G = \varepsilon^2$, und es ergibt sich aus Gleichung (4) und (19) für eine Schaar S_1 geodätischer Linien

$$Q\lambda_g = Q_u P - P_u Q - \frac{\varepsilon_v}{\varepsilon}(P^2 + Q^2) \tag{21}$$

und als Gleichung des Brennpunktes a' nach (20)

$$a' \equiv a + \frac{1}{\lambda_g}(Pb + Qc) = 0. \tag{22}$$

Nun ist vermöge Formel (8)

$$\frac{b}{\varepsilon} \equiv \frac{x_u}{\varepsilon}\xi + \frac{y_u}{\varepsilon}\eta + \frac{z_u}{\varepsilon}\zeta,$$

worin $\frac{x_u}{\varepsilon}, \frac{y_u}{\varepsilon}, \frac{z_u}{\varepsilon}$ die Richtungscosinus der Tangente an die Curve $v =$ const. sind. Der Punkt

$$a + x\frac{b}{\varepsilon}$$

dieser Tangente hat dann von dem Punkte a den Abstand x. Ebenso sind in

$$a + x\frac{b}{\varepsilon} + y\frac{c}{\varepsilon} = 0$$

x und y die Cartesischen Coordinaten eines Punktes der Tangentialebene T_a in dem System, welches die Tangenten der Curven $u =$ const., $v =$ const. zu Axen hat. Daher sind nach Formel (22)

$$\mathfrak{x} = \frac{\varepsilon P}{\lambda_g}, \quad \mathfrak{y} = \frac{\varepsilon Q}{\lambda_g} \tag{23}$$

die Coordinaten des Punktes a' in diesem System.

Hängen P und Q von einem Parameter α ab, so beschreibt dieser Punkt die Curve $\mathfrak{A}$. Diese Curve $\mathfrak{A}$ soll nun für diejenigen ∞^1 Schaaren geodätischer Linien bestimmt werden, welche sich bei den Flächen ergeben, deren Bogenelement die Liouville'sche Form hat.

Das Bogenelement habe also die Form

$$ds^2 = (U + V)(du^2 + dv^2),$$

wo U eine Function von u, V eine Function von v allein ist. Eine Schaar geodätischer Linien ist gegeben durch die Gleichung

$$\sqrt{V+\alpha}\,du-\sqrt{U-\alpha}\,dv=0;$$

es ist demnach $P=\sqrt{U-\alpha}\,,Q=\sqrt{V+\alpha}$ zu setzen, und es ergibt sich aus Formel (21)

$$PQ\lambda_g=-\frac{1}{2}(QU'+PV')$$

und aus (23)

$$\mathfrak{x}:\mathfrak{y}:1=\varepsilon\,P^2:\varepsilon\,PQ=-\frac{1}{2}(U'+\frac{P}{Q}V')$$

führt man statt α den Parameter

$$\sqrt{\frac{U-\alpha}{V+\alpha}}=\frac{P}{Q}=\mathfrak{a}$$

ein, so übergehen diese Gleichungen in

$$\mathfrak{x}:\mathfrak{y}:1=\mathfrak{a}^2:\mathfrak{a}:-\frac{1}{2}\varepsilon^{-3}(U'+\mathfrak{a}V')(1+\mathfrak{a}^2). \tag{24}$$

Hierin ist a die Tangente des Winkels, welchen die geodätische Linie mit dem Parameter α mit der Linie $u=$ const. bildet.

Nun sind die geodätischen Krümmungen der Linien $u=$ $=$ const., $v=$ const., respective gleich

$$\gamma=\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial u},\quad \gamma'=-\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial v},$$

so dass folgt:

$$\mathfrak{x}:\mathfrak{y}:1=\mathfrak{a}^2:\mathfrak{a}:(\gamma'\mathfrak{a}-\gamma)(1+\mathfrak{a}^2). \tag{25}$$

Dies ist nun die Parameterdarstellung der Curve $\mathfrak{A}$. Sie ist eine Curve dritter Ordnung, welche durch die unendlich-fernen imaginären Kreispunkte geht, und sie hat im Punkte a einen Doppelpunkt, welcher die Tangenten an die Curven $u=$ const., $v=$ const. zu Tangenten hat. Diese Curve ist daher die all-

gemeine Strophoide, welche sich ergibt, indem man auf eine gleichseitige Hyperbel, welche den Mittelpunkt der Transformation enthält, eine Transformation mit reciproken Radien ausführt. Ihre Gleichung ist nach (25)

$$(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2)(\gamma'\mathfrak{x}-\gamma\mathfrak{y})-\mathfrak{x}\mathfrak{y}=0.^1 \qquad (26)$$

6. Specielle Fälle. Für eine Fläche, die auf eine Rotationsfläche abwickelbar ist, ist $V=0$, also $\gamma'=0$, und die Strophoide zerfällt in die Gerade $\mathfrak{x}=0$ und den Kreis

$$(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2)\gamma'-\mathfrak{y}=0,$$

dessen Durchmesser $\frac{1}{\gamma'}$ ist; dieser Durchmesser ist demnach gleich dem geodätischen Krümmungsradius der Curve $v=\text{const.}$ Diese Curve wickelt sich in einen Parallelkreis der Rotationsfläche ab, der geodätische Krümmungsmittelpunkt eines Punktes dieses Parallelkreises liegt auf der Rotationsaxe. Daher wird der Kreis $\mathfrak{A}$ für einen Punkt der Rotationsfläche die Rotationsaxe schneiden; seine Ebene steht senkrecht zur Meridianebene.

Ist der Meridian der Rotationsfläche die Tractrix der Axe, so sind diese Kreise $\mathfrak{A}$ alle gleich. Liegt nun eine Fläche constanter negativer Krümmung vor, so lässt sie sich auf diese Rotationsfläche, die Pseudosphäre, abwickeln. Daher kann man für die Flächen constanter negativer Krümmung eine Gruppirung der geodätischen Linien zu ∞^1 Schaaren S_1 angeben, so dass die entsprechenden Curven $\mathfrak{A}$ gleiche Kreise werden. Es können ∞^1 solche Gruppirungen gefunden werden, da diese Flächen ∞^1-mal auf die Pseudosphäre abwickelbar sind.

Ist in Formel (26) $\gamma=\gamma'$, also $U'=V'$, so ist $U'=V'=\text{const.}$, demnach $U=\alpha u+\beta$, $V=\alpha v+\gamma$. Dann lässt sich das Bogenelement in der Form schreiben:

$$ds^2=(u+v)(du^2+dv^2);$$

und man hat die Lie'sche Flächenclasse, deren geodätische Curven zwei conforme und eine nichtconforme infinitesimale

[1] Diesen Satz habe ich bereits in einer Note: Sur les surfaces à élément de Liouville etc., Comptes rend., t. 116, p. 1435 mitgetheilt.

Transformation gestatten.[1] Hier sind die Strophoiden die gewöhnlichen Strophoiden; ihre Gleichung ist

$$(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2)(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})-\rho\mathfrak{x}\mathfrak{y}=0,$$

wobei ρ der Radius der geodätischen Krümmung der Curven $u=$ const., $v=$ const. ist.

[1] Siehe Lie, Untersuchungen über geodätische Linien, Math. Ann., Bd. 20, S. 389.

Über den elektrischen Widerstand des Ceylongraphits

von

Bruno Piesch,

stud. phil. in Wien.

Die Untersuchungen verschiedener Kohlenarten auf ihren elektrischen Widerstand und dessen Abhängigkeit von der Temperatur haben das bekannte Resultat ergeben, dass der Widerstand der Kohle mit Erhöhung der Temperatur abnimmt, und auch die im Folgenden mitgetheilten Beobachtungen am Ceylongraphit stimmen mit diesem allgemeinen Resultat überein. Aber die Abhängigkeit des Widerstandes von der Temperatur ist bei den einzelnen Kohlenarten eine sehr verschiedene und steht gewiss mit der Verschiedenheit in einigen anderen physikalischen und chemischen Eigenschaften im Zusammenhang. So zeichnet sich der Ceylongraphit gegenüber dem bisher untersuchten feinkörnigen sibirischen Graphit durch seine blätterige Structur aus, und schon diese Unterschiede in den Structurverhältnissen legen es nahe, dass diese beiden Graphitarten auch in ihrem elektrischen Leitungsvermögen Unterschiede zeigen müssen. Die Beobachtungen haben dies auch thatsächlich bestätigt und haben ausserdem noch einige bemerkenswerthe Eigenschaften in dem Verhalten des Ceylongraphits ergeben, von denen ich eine gleich hervorheben will. Es wurden nämlich mittelst einer Säge aus einem grösseren Stück vier möglichst dünne parallelepipedische Stücke herausgeschnitten, und dieselben ergaben merklich verschiedene Resultate, wie aus der späteren Zusammenstellung ersichtlich sein wird.

Ich will nun zunächst kurz die Art der Contacte, der Erwärmung und die angewandte Methode der Widerstandsbestimmung angeben. Ein Contact, der wohl am einfachsten herzustellen ist, ist der, an die galvanisch verkupferten Enden des Graphitstückes Kupferstreifen oder -Drähte anzulöthen, jedoch lässt der tiefe Schmelzpunkt des Zinnlothes keine grosse Temperatursteigerung zu, und daher gebrauchte ich diese Art des Contactes nur bei Temperaturen unter Null Graden. Bei den anderen Messungen benützte ich Quecksilbercontact mit folgender Anordnung. In zwei Korkplatten, die durch Glasstäbe mit einander verbunden waren, wurden Vertiefungen zur Aufnahme von Quecksilber angebracht. In die obere der Korkscheiben wurde das Graphitstück derart befestigt, dass es in die Vertiefung ragte, und nur die obere Endfläche mit dem Quecksilber in Berührung kam. Die Korkplatten wurden dann einander soweit genähert, bis der Contact zwischen der unteren Endfläche des Graphits mit der Quecksilberoberfläche der unteren Korkplatte hergestellt war. Das Ganze kam in ein Becherglas und wurde durch die starken Zuleitungsdrähte an den Klemmschrauben des Deckels befestigt. Das Becherglas wurde in einem Ölbade erwärmt, und es konnte auf diese Weise die Temperatur in demselben hinreichend lange constant erhalten werden. Bei den ganz tiefen Temperaturen wurde das Graphitstück selbst von fester Kohlensäure umgeben.

Zu den Widerstandsmessungen benützte ich die von F. Kohlrausch angegebene Abänderung der Thomson'schen Messbrücke, bei welcher der zu messende und der Vergleichswiderstand hintereinander in den Stromkreis, ein Differentialgalvanometer in übergreifendem Nebenschluss eingeschaltet war, derart, dass je eine Drahtrolle des Galvanometers mit den entsprechenden Enden beider Widerstände in Verbindung stand; als Vergleichswiderstand diente ein Kupferdraht von bekanntem Widerstand und bestimmter Länge, die durch einen Schiebercontact beliebig abgeändert werden konnte. Bei dieser Methode der Widerstandsmessung brauchen die Widerstände der Zuleitungsdrähte und ihre Änderung mit der Temperatur, ferner auch Contactfehler bei der Verschiebung und Fehler des Galvanometers nicht berücksichtigt zu werden.

Es folgen nun zuerst die Beobachtungen der Widerstandsmessungen der einzelnen Graphitstücke bei den verschiedenen Temperaturen, und zwar wurden die Stücke II und IV auch bei Temperaturen unter 0° untersucht. Sämmtliche Widerstände sind in Siemens-Einheiten ausgedrückt.

I. Stück Specif. Gewicht = 2·25		II. Stück Specif. Gewicht = 2·22		III. Stück Specif. Gewicht = 2·244		IV. Stück Specif. Gewicht = 2·25	
t	w	t	w	t	w	t	w
26°	0·06794	23°	0·02726	23°	0·13260	25°	0·08190
68	0·06641	63	0·02675	65	0·12930	65	0·07924
110	0·06444	109	0·02613	103	0·12488	107	0·07659
158	0·06214	147	0·02566	142	0·12074	149	0 07371
198	0·06061	187	0·02535	183	0·11598	189	0.07078
229	0·05953	215	0·02503	224	0·11169	231	0·06825
		23	0·03783			—12	0·08424
		—15	0·03876			—80	0·08572
		—83	0·03946				

Aus diesen Beobachtungen berechnete ich die Temperaturcoëfficienten nach der Gleichung $w = a + bt + ct^2 = a(1 + \alpha t + \beta t^2)$, und zwar, um eine möglichst grosse Genauigkeit zu erreichen, nach der Methode der kleinsten Quadrate. Bei den Stücken II und IV sind die Coëfficienten für Temperaturen unter Null aus den zuletzt angegebenen Beobachtungen allein berechnet worden. Ausserdem gebe ich hier die specifischen Widerstände an, bezogen auf den Widerstand einer Quecksilbersäule von 1 *m* Länge und 1 mm^2 Querschnitt. Es ergaben sich folgende Werthe:

	I. Stück	II. Stück für Temperaturen über 0°	II. Stück für Temperaturen unter 0°	III. Stück	IV. Stück für Temperaturen über 0°	IV. Stück für Temperaturen unter 0°	IV. Stück. Berechnung nach der Gleichung $w = a+bt$
$a =$	0·069265	0·027628	0·038288	0·13485	0·08357	0·08357	0·08362
$b = -0·0000$	4594	155	1306	8801	6583	6071	6684
$c = 0·000000$	+013	+016	+0276	−0739	−00394	−422	—
$\alpha = -0·000$	6630	5612	341	6526	7878	7265	7994
$\beta = 0·00000$	+0188	+0594	+0719	−0548	−00471	−5054	—
Specifischer Widerstand	29·87	25·83	—	85·69	50·27	—	—

In der letzten Rubrik sind die Coëfficienten für IV angegeben, wie sie sich aus der einfacheren Formel $w = a+bt = a(1+\alpha t)$ ergeben. Um eine Controle für die Genauigkeit zu haben, sind bei IV nach den erhaltenen Coëfficienten die Widerstände für die einzelnen Beobachtungstemperaturen berechnet worden und ist die Übereinstimmung mit den beobachteten Widerständen eine sehr gute. Ich will hier die einzelnen Werthe zur Vergleichung zusammenstellen.

t	Beobachtete Widerstände	Widerstände berechnet nach der Formel	
		$w = a+bt+ct^2$	$w = a+bt$
−80	0·08572	0·08572	0·08595
−12	0·08424	0·08423	0·08396
25	0·08190	0·08192	0·08194
65	0·07924	0·07927	0·07926
107	0·07659	0·07648	0·07645
149	0·07371	0·07367	0·07375
189	0·07078	0·07098	0·07098
231	0·06825	0·06815	0·06817

Wenn wir die erhaltenen Werthe für den specifischen Widerstand des Ceylongraphits vergleichen mit den entsprechenden Werthen, die von Muraoka (Wied. Ann., XIII [1881]) für sibirischen Graphit gefunden wurden, so macht sich hier ein sehr bedeutender Unterschied bemerkbar, und zwar geht derselbe dahin, dass unser Ceylongraphit bei weitem schlechter leitet als der sibirische. Diese Thatsache ist umso auffallender, weil der Ceylongraphit ein grösseres specifisches Gewicht besitzt als der andere. Muraoka gibt letzteres mit 1·8 an. Es scheint also auch hier ein Zusammenhang des Leitungsvermögens mit dem specifischen Gewichte ganz ausgeschlossen.

Es wäre noch das verschiedene Verhalten der einzelnen Stücke zu bemerken, und ich glaube, dass diese Erscheinung zum Theil auf die krystallinischen Eigenschaften des Graphits zurückzuführen ist, dass er also nach den verschiedenen Richtungen hin ein verschiedenes Verhalten zeigt. Auch eine zweite Erscheinung, wie sie sonst bei stark krystallinischen Substanzen auftritt, ist mir hier sehr aufgefallen, dass nämlich der Widerstand nach einer starken Erwärmung bei der Abkühlung nicht auf denselben ursprünglichen Werth zurückkehrt, sondern darüber hinauswächst; ein entsprechendes Verhalten zeigt sich auch nach einer starken Abkühlung. In der ersten obigen Tabelle ist diese Erscheinung auch ersichtlich, indem für das II. Stück bei 23° zwei verschiedene Werthe für den Widerstand angegeben sind, wovon aber der zweite von der Messung nach der starken Erwärmung herrührt.

Messung der Capacität von Condensatoren mit Wechselstrom

von

J. Sahulka.

Aus dem Elektrotechnischen Institute der k. k. technischen Hochschule in Wien.

(Mit 4 Textfiguren.)

Der Zweck der vorliegenden Arbeit war, zu untersuchen, wie sich die Condensatoren im Wechselstrombetriebe verhalten, und insbesondere zu prüfen, ob sie dieselbe Capacität haben, wie sie mit einer Gleichstromquelle gemessen wird oder nicht. Die Capacität von Condensatoren, welche in einen Wechselstromkreis eingeschaltet sind, könnte in der Weise gefunden werden, dass man die Stärke des Ladungsstromes und die Spannungsdifferenz am Condensator misst. Zur Untersuchung verschiedener Condensatoren würde man mehrere Strom- und Spannungsmesser benöthigen. Nach den Versuchen von Steinmetz[1] verbrauchen die Condensatoren mit festem Dielektricum im Wechselstrombetriebe eine Arbeit, welche innerhalb eines weiten Bereiches dem Quadrate der Spannungsdifferenz proportional ist. Da ich nicht bloss die Capacität, sondern auch die Arbeitsverluste der Condensatoren ermitteln wollte, wählte ich zur Messung eine Methode, welche analog ist der Joubert'schen Methode zur Bestimmung der Selbstinductions-Coëfficienten. Das Resultat meiner Untersuchungen ist, dass die Capacität der Condensatoren mit festem Dielektri-

[1] Dielektrische Hysteresis, von CH. Steinmetz. Elektrotechnische Zeitschrift, Berlin 1892, S. 227.

cum im Wechselstrombetriebe beträchtlich kleiner ist als die mit einer Gleichstromquelle gemessene Capacität.

Als Messinstrument verwendete ich ein Elektrometer, und zwar ein Multicellular-Voltmeter von W. Thomson, mit welchem Spannungsdifferenzen von 80 bis 400 Volt gemessen werden konnten. Das Instrument enthält in gleichen Abständen über einander eine Reihe von Quadrantenpaaren *AA* (Fig. 1), welche unter einander leitend verbunden sind; diese bilden das feste System. In den einzelnen so entstehenden Zellen befinden sich Aluminiumnadeln *B*, welche unter einander in fester Weise leitend verbunden sind und von einem feinen Platindrahte und einer Spirale getragen werden. Das Instrument hat zwei Klemmen, von welchen die eine mit dem festen System, die andere mit den Nadeln und einem das Instrument einschliessenden Metallgehäuse *C* leitend verbunden ist. Wenn zwischen den Klemmen des Instrumentes keine Spannungsdifferenz besteht, so nehmen die Nadeln eine Stellung zwischen den Quadranten ein. Wird das Instrument an zwei Punkte angeschlossen, welche eine Spannungsdifferenz haben, so werden die Nadeln in der Richtung der Pfeile zu den Quadranten bewegt. Die Drehung ist stets kleiner als 90°. Die Ablesung erfolgt mit Hilfe eines Zeigers, welcher auf einer Scala einspielt. Bei dem verwendeten Instrumente waren nur die Intervalle zwischen 120 und 220 Volt hinreichend gross, um eine genaue Ablesung zu ermöglichen. Um nun zu wissen, ob in jedem Falle die Capacität und der Ladestrom des Instrumentes vernachlässigt werden kann, wollte ich zunächst diese beiden Grössen bestimmen. Dies war mit keiner der bekannten Methoden ausführbar, da sowohl der Ladestrom, als auch die Capacität ausserordentlich klein sind. Die Bestimmung geschah in folgender Weise: Um eine passende Spannungsdifferenz zu haben, wurde der zur Verfügung stehende Wechselstrom von circa 100 Volt Spannungsdifferenz mit Hilfe eines Transformators, dessen Umsetzungsverhältniss 1 : 2 war,

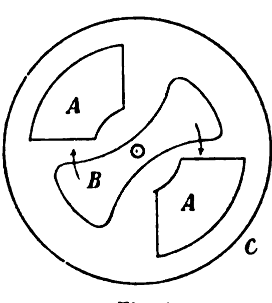


Fig. 1.

transformirt. Es wurde hierauf die Spannungsdifferenz E zwischen den Klemmen des Secundärkreises des Transformators gemessen, wenn derselbe nur durch das Multicellular-Voltmeter geschlossen war. Hierauf wurde zu dem Voltmeter ein bekannter grosser Graphitwiderstand in Serie geschaltet. Das Voltmeter zeigte nun eine kleinere Spannungsdifferenz E' an. Da das Voltmeter als ein kleiner Luftcondensator angesehen werden kann, muss die auf dasselbe entfallende Spannungsdifferenz E' (Fig. 2) im Vergleich zu dem Ladestrom J in der Phase um 90° nachfolgen, während die gleichzeitig auf den Graphitwiderstand entfallende Spannungsdifferenz E'' mit dem Strome J in der Phase übereinstimmt.[1] Es ist daher:

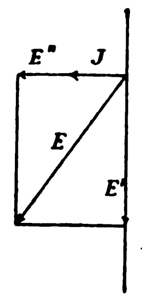


Fig. 2.

$$E = \sqrt{E'^2 + E''^2}.$$

Da E und E' beobachtet wurde, ist E'' bekannt; nun kennt man auch den Ladestrom

$$J = \frac{E''}{R}.$$

Ist n die Periodenzahl des Wechselstromes, welche als bekannt vorausgesetzt ist, so hat man:

$$J = 2\pi n E'C. \qquad 1)$$

Der verwendete Wechselstrom hatte 5000 Polwechsel in der Minute, so dass $p = 2\pi n = 262$ ist. In der folgenden Tabelle sind die Resultate einer Versuchsreihe zusammengestellt. Die Grössen R sind in Megohm, die Grössen E, E', E'' in Volt, J in Milliontel-Ampère, C in Milliontel-Mikrofarad ausgedrückt. Die letzte Reihe enthält den scheinbaren Widerstand des Voltmeters in Megohm.

---

[1] Unter E, J sind die Quadratwurzeln aus dem mittleren Quadrate der veränderlichen Spannungsdifferenz, respective des Stromes verstanden.

R	E	E'	E''	J	C	R'
11·05	207·2	195·3	69·2	6·26	122	31·2
20·78	207·6	177·1	108·3	5·21	112	34·0
33·16	207·6	154·6	138·6	4·18	103	37·0
41·90	207·9	140·3	153·4	3·66	99·6	38·3
52·40	208·0	124·4	166·7	3·18	97·6	39·1

In der Figur 3 sind die Versuchsresultate graphisch dargestellt. Die Einheit der Abscissen bedeutet 1 Volt, die Einheit der Ordinaten bedeutet für die Curve C: $\frac{1}{10^6}$ Mikrofarad, für die Curve J: $\frac{1}{10^7}$ Ampère. Wie ersichtlich ist, wächst die Capacität des Instrumentes mit zunehmender Voltzahl; dies musste sich ergeben, weil bei zunehmender Spannungsdifferenz sich die Nadeln zu den Quadranten bewegen. Würde man bei der Messung das bewegliche System stets mit Hilfe eines Torsionsknopfes in die Nullstellung zurückdrehen, so wäre die Capacität constant; dann könnte auch die Scala über die ganze Peripherie reichen. Es wäre dann die Spannungsdifferenz E' und der Ladungsstrom J proportional der Quadratwurzel aus dem Torsionswinkel. Wie aus der Tabelle ersichtlich ist, verbraucht das Instrument nicht mehr Strom als ein Spiegelgalvanometer. Wenn für ein Instrument die Curve J (Fig. 3) aufgenommen ist, so kann man umgekehrt mit dem Instrumente grosse Widerstände messen, welche frei sind von Capacität und Selbstinduction.

Um die Capacität eines Condensators im Wechselstrombetriebe zu messen, schaltete ich zu demselben einen inductionslosen Widerstand R in Serie, der von derselben Grössenordnung sein muss wie der scheinbare Widerstand des Condensators; zu jedem Condensator gibt es einen solchen geeigneten Widerstand. Mit dem Multicellular-Voltmeter wurde die gesammte Spannungsdifferenz E, die am Condensator E' und die am Widerstande herrschende E'' gemessen. Ist der Condensator ein Luftcondensator, so kann E als Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreieckes dargestellt werden, dessen Katheten $E'E''$

sind (Fig. 2). Hat er jedoch ein festes Dielektricum, so ist E' im Vergleich mit dem Ladestrome J und daher auch im Vergleich mit E'' um einen Winkel φ in der Phase verschoben, welcher kleiner ist als 90°, wie dies im Polardiagramm (Fig. 4) dargestellt ist. Die Componente E' überwindet den inductiven Widerstand des Condensators. Da das Dielektricum des Con-

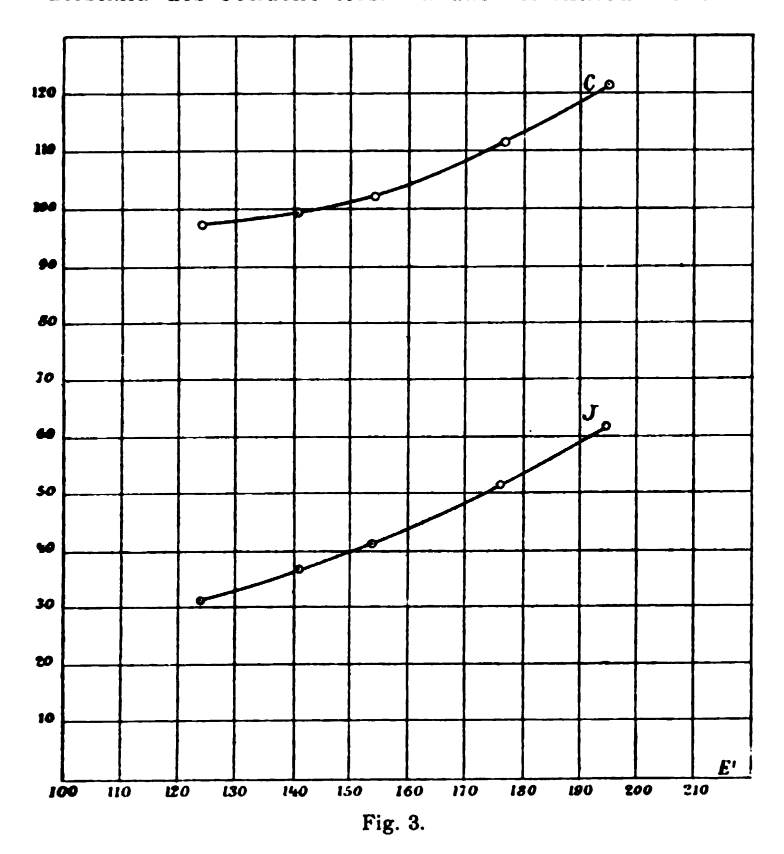


Fig. 3.

densators im Wechselstrombetriebe Arbeit verbraucht, was auch an der Erwärmung desselben kenntlich ist, so folgt, dass die Capacität des Condensators in jedem Zeitmomente eine andere ist. Sowie nun die Stromstärke oder Spannungsdifferenz im Wechselstrombetriebe definirt wird als die Quadratwurzel aus dem mittleren Quadrate der veränderlichen Stromstärke, respective Spannungsdifferenz, so muss auch für die Capacität C' eines Condensators im Wechselstrombetriebe eine Definition

gewählt werden. Die Definition könnte mit Rücksicht auf die Formel 1) lauten:

Der inductive Widerstand eines in einen Wechselstromkreis eingeschalteten Condensators ist gleich dem Quotienten aus der durch die Ladung des Condensators hervorgerufenen Spannungsdifferenz E' und der Stromstärke J.

Die Capacität C' des Condensators ist gleich dem reciproken Werthe des Productes aus dem inductiven Widerstande und $2\pi n$.

Fig. 4.

In der folgenden Tabelle sind einige Versuchsresultate zusammengestellt, welche an Condensatoren angestellt wurden, die paraffinirtes Papier als Dielektricum hatten. C ist die mit einer Gleichstromquelle in bekannter Art gemessene Capacität in Mikrofarad, der vorgeschaltete Widerstand R ist in Ohm, E, E', E'' in Volt, J in Ampère ausgedrückt, $C' = \frac{J}{E' . 2\pi n}$ ist die Capacität des Condensators im Wechselstrombetriebe und ist ebenfalls in Mikrofarad ausgedrückt. Es wurde ferner noch die Phasenverschiebung φ und der Arbeitsverbrauch A im Condensator in Watt ausgedrückt berechnet gemäss den Formeln:[1]

$$\cos \varphi = \frac{E^2 - E'^2 - E''^2}{2 E' E''}$$

$$A = E' J \cos \varphi .$$

Endlich wurden noch gerechnet die Grössen:

$$\rho = \frac{E'}{J} \cos \varphi \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\pi n C''} = \frac{E'}{J} \sin \varphi .$$

Der untersuchte Condensator verhält sich wie ein Luftcondensator von der constanten Capacität C'', dem ein Ohm'scher Widerstand ρ vorgeschaltet ist.

---

[1] Die Bestimmung der in einem Wechselstromapparate verbrauchten Energie mit Hilfe der Beobachtung von drei Spannungsdifferenzen wurde zuerst von Ayrton und Sumpner ausgeführt. Phil. Mag., Bd. 32, p. 204, 1891.

Die Grösse C'', welche durch die obige Formel definirt ist, könnte man die effective Capacität des Condensators nennen; diese ist ein wenig grösser als C'.

Nr.	C	R	E	E'	E''	J	C'	φ	A	ρ	$\frac{1}{pC''}$	C''
1	1·004	4000	206·9	147·8	135·2	0·0338	0·873	86° 9'	0·336	293·7	4363	0·875
2	»	5000	206·8	132·0	149·2	0·0298	0·862	85°31'	0·308	346·6	4416	0·864
3	»	6000	207·5	120·1	161·1	0·0269	0·855	86° 2'	0·224	309·1	4454	0·857
4	»	7000	207·4	107·5	170·0	0·0243	0·863	85°59'	0·183	309·7	4413	0·865
5	0·514	9000	207·6	139·7	145·3	0·0161	0·440	86°30'	0·137	527·9	8661	0·441
6	2·618	2000	207·1	129·8	152·5	0·0763	2·244	85°58'	0·697	119·7	1697	2·249

Es scheint mir am Vortheilhaftesten zu sein, bei einem Condensator die effective Capacität C'', sowie den Arbeitsverlust, der in ihm bei einer bestimmten Spannungsdifferenz und Periodenzahl stattfindet, anzugeben. Da sich die Grösse $\cos\varphi$ als eine Differenz von grossen Zahlen ergibt, ist die Bestimmung von φ etwas unsicher. Dadurch ist auch ρ und der Arbeitsverbrauch etwas unsicher bestimmt, so dass sich namentlich bei Spannungsvariationen leicht Abweichungen ergeben können, wie dies bei dem mit Nr. 2 bezeichneten Versuche der Fall war. Will man φ, ρ und den Arbeitsverbrauch genau ermitteln, so muss man jeden Versuch mehrmals wiederholen und die Mittelwerthe nehmen. Die Werthe des C'' differiren bei ruhigem Gange der Maschine nur um $1^0/_0$.

Nimmt man aus den ersten vier Versuchen, welche sich auf denselben Condensator beziehen, das Mittel, so ersieht man, dass das Verhältniss der C'' der drei Condensatoren (1 : 0·510 : : 2·600) übereinstimmt mit dem Verhältnisse der Werthe der C (1 : 0·512 : 2·608). Es ergaben sich aber die Werthe C'' um $14^0/_0$ kleiner als die Werthe C. Man ersieht daraus, dass die Condensatoren im Wechselstrombetriebe eine kleinere Capacität haben als die, welche sich bei einer Messung mit einer Gleichstromquelle ergibt; nur bei den Luftcondensatoren kann dies nicht der Fall sein. Die Ursache dieser Erscheinung liegt in der Beschaffenheit des Dielektricums. Wenn auch dasselbe einen sehr grossen Widerstand hat, nimmt es bei

der Ladung doch elektrische Energie auf. Bei der Entladung wird ein Theil dieser Energie wieder zurückgegeben, während ein anderer Theil in Wärme umgewandelt wurde. Aus diesem Grunde beobachtet man bei der Verwendung einer Gleichstromquelle sowohl einen zu grossen Ladungs-, als auch einen zu grossen Entladungsausschlag am Spiegelgalvanometer, weil dasselbe nicht bloss die Elektricitätsmenge anzeigt, welche die Belegungen aufgenommen haben, sondern auch die, welche vom Dielektricum aufgenommen, respective bei der Entladung theilweise zurückgegeben wurde. Im Wechselstrombetriebe erfolgt Ladung und Entladung in sehr kurzer Zeit, indem sich während der Dauer einer Viertelperiode die Spannungsdifferenz vom Nullwerthe bis zum Maximalwerthe ändert. Daher hat das Dielektricum bei jeder einzelnen Ladung nicht hinreichend Zeit, so viel elektrische Energie aufzunehmen, wie sie bei gleicher Spannungsdifferenz von einer Gleichstromquelle aufnehmen würde; ebenso gibt es bei der Entladung weniger Energie ab. Aus diesem Grunde ist es erklärlich, dass die Capacität der Condensatoren im Wechselstrombetriebe viel kleiner ist als bei Verwendung von Gleichstrom. Man muss daher für den Wechselstrombetrieb eine besondere Definition der Capacität geben, wie dies zuvor gemacht wurde.

Betrachtet man die Werthe für die Verluste A in dem ersten Condensator, so sieht man, dass sie mit dem von Steinmetz an der citirten Stelle angegebenen Gesetze, dass die Verluste dem Quadrate des E' proportional sind, annähernd übereinstimmen. Sollte das Gesetz genau erfüllt sein, so müssten die Zahlen lauten 0·352, 0·281, 0·232, 0·186.

Ich habe in gleicher Weise auch die Capacität von Leydnerflaschen untersucht, es war aber dann nothwendig, zu den Flaschen einen Widerstand von 1 Megohm in Serie zu schalten. Da das Multicellular-Voltmeter je nach der Ablenkung einen Widerstand von 30 bis 40 Megohm hatte, durfte man, wenn genaue Messungen ausgeführt werden sollten, den durch das Voltmeter fliessenden Strom nicht mehr vernachlässigen. Die Berechnung gestaltet sich dann etwas complicirter.

Bei zwei cylindrischen Leydnerflaschen von 14 *cm* Durchmesser, deren Belegungen 14 *cm* hoch waren, und deren Glas-

dicke im Mittel 3·60 *mm* war, ergab sich, wenn man den durch das Multicellular-Voltmeter fliessenden Strom vernachlässigte, eine Capacität von $\frac{3370}{10^6}$ Mikrofarad, welche beiden Flaschen zusammen zukommt.

Eine ganz kleine Leydnerflasche schaltete ich mit dem Multicellular-Voltmeter direct in Serie. Man kann angenähert annehmen, dass die Spannungsdifferenz E' an der Leydnerflasche mit der Spannungsdifferenz E'' am Voltmeter in der Phase übereinstimmt. Dann verhalten sich diese Grössen verkehrt wie die Capacitäten. Die verwendete Flasche hatte 7·5 *cm* Durchmesser, die Höhe der Belegung war 11 *cm*. Es wurde beobachtet: $E = 207 \cdot 6$, $E' = 190 \cdot 6$; daher ist $E'' = 17 \cdot 0$. Da das Multicellular-Voltmeter bei der Spannungsdifferenz von 190·6 Volt eine Capacität von $\frac{119}{10^6}$ Mikrofarad hat, wie aus der Figur 3 ersichtlich ist, so ergibt sich für die Capacität der Leydnerflasche der Werth:

$$C'' = \frac{119}{10^6} \cdot \frac{190 \cdot 6}{17} = 0 \cdot 00133 \text{ Mikrofarad.}$$

Über die Stärke elektrischer Wellen, wenn der Primärfunke in Öl überspringt

von

Hermann Bauernberger.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Innsbruck.)

Bekanntlich haben Sarasin und de la Rive[1] gezeigt, dass die Hertz'schen Versuche besser anzustellen sind, wenn der Primärfunke in einem flüssigen Dielektricum statt in Luft überspringt. Im Folgenden habe ich nun quantitativ bei der Lecher'schen Drahtcombination den Einfluss verschiedener Öle (Baumöl, Olivenöl, Parafinöl, Terpentinöl und Petroleum) auf den Primärfunken untersucht und bin dabei zu folgenden Resultaten gekommen. Es zeigt sich, dass die beste Kugeldistanz ungefähr $^1/_3$ unter der äussersten Schlagweite liegt, und ferner erwies sich Petroleum als die für vorliegende Zwecke geeignetste Flüssigkeit. Die Maxima waren zwar bei Petroleum nur circa $^1/_3$ höher als bei Luft, aber der ganze Verlauf der Wellen war viel regelmässiger und die Versuche konnten viel längere Zeit ausgedehnt werden.

Schliesslich wird anhangsweise gezeigt, dass der Ort, an welchem der Primärcondensator in der Primärschwingung sich befindet, auf die Grösse des Maximums nur verhältnissmässig geringen Einfluss hat.

1. Versuchsanordnung.

A und A_1 (Fig. 1) sind quadratische Messingplatten von 40 *cm* Kantenlänge; ihnen gegenüber (6 *cm* entfernt) stehen

[1] C. R., Band CXV, Nr. 12.

zwei andere gleich grosse Messingplatten B und B_1. Die letzteren sind an beiden Seiten eines aufrechtstehenden Holzrahmens befestigt und durch Hartgummicylinder von A und A_1 isolirt. Von der Mitte der Platten B und B_1 aus sind die 1 *mm* starken Kupferdrähte I und II parallel in einer Entfernung von 30 *cm* gespannt, welche zu einem Elektrometer führen. An der unteren Ecke der Platten A und A_1 sind kleine Klemmschrauben angebracht, von denen die Drähte p und q zu den Kugeln a und b gehen.

Von den vier Quadranten des Thomson'schen Elekrometers (Lang'sche Construction) waren zwei entfernt und die Einstellung der Lemniskate L wurde durch eine kleine Magnetnadel erzielt. Um die von Bjerknes[1] als Fehlerquelle bezeichnete Elektrisirung der Magnetnadel zu vermeiden, durfte die

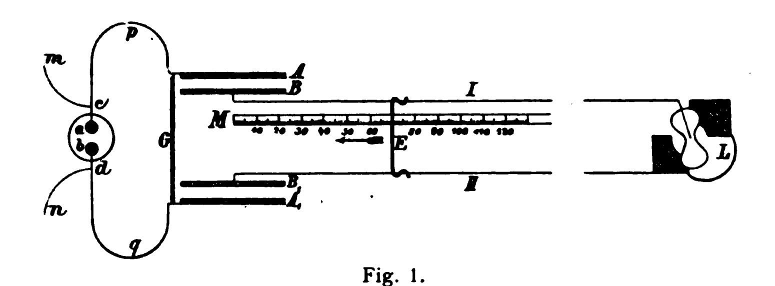


Fig. 1.

Ladung der Lemniskate nicht wie gewöhnlich mittelst des dünnen Platindrahtes, der als Aufhängefaden dient, geschehen, sondern sie wurde durch die Dämpfungsflüssigkeit — hier Kupfervitriollösung — zugeleitet und die Lemniskate selbst durch ein Schellackstäbchen von der Magnetnadel isolirt.

Die Elektroden für den Primärfunken a und b haben einen Durchmesser von 3 *cm* und sind senkrecht übereinander in einem circa 10 *cm* weiten und 14 *cm* hohen Glasgefässe; die obere a ist mittelst eines isolirenden Hartgummistückes an der Spindel einer über dem Glase stehenden Mikrometerschraube befestigt. Das Glasgefäss wurde zweimal durchbohrt, und zwar am Boden, um die Verbindung mit der Kugel b, und an der

---

[1] Wied. Ann., B. 44, S. 77 u. ff.

Seite, um durch einen auf der Axe federnd aufliegenden Kupferdraht die Verbindung mit der oberen Kugel *a* herzustellen. An diese beiden Zuleitungsdrähte *c* und *d* sind Klemmschrauben angebracht, welche durch *p* und *q* mit den Platten A und A_1 einerseits und durch *m* und *n* mit den Polen des Rhumkorff anderseits verbunden sind.

Um in dem primären Stromkreise Aca, bdA_1 jede statische Ladung zu verhindern, wurde an den Klemmen der Platten A und A_1 eine 160 *cm* lange, gebogene Glasröhre *G* aufgehängt und mit destillirtem Wasser gefüllt, in welches von den Klemmen Verbindungsdrähte führten. Zu dem gleichen Zwecke wurde die auf I und II verschiebbare, 42 *cm* lange Brücke *E* aus Kupferdraht mit der Erdleitung verbunden. Als Erreger der primären Schwingungen diente ein Rhumkorff mittlerer Grösse (die Spule war 30 *cm* lang und 12 *cm* dick), welcher in der Regel durch vier Bunsenelemente betrieben wurde. Ein in den Stromkreis geschaltetes Ampèremeter zeigte bei den meisten Versuchen 1·48—1·56 *A* als mittlere Stromstärke des intermittirenden Rhumkorff-Primärstromes.

2. Allgemeine Bemerkungen.

Capacitätsänderungen des Elektrometers bei einem Ausschlage. Die Anordnung des Elektrometers kann zu einigen Bedenken Anlass geben. Schon Bjerknes hat zur Bestimmung der Schwingungsintensität eine ähnliche Anordnung getroffen, dabei aber immer nur den ersten Ausschlag beobachtet. Mein Elektrometer besass nun eine ziemliche Capacität und es schien nicht unmöglich, dass bei verschiedenen Ausschlägen des Elektrometers die sich ändernde Capacität desselben die Versuche störend beeinflusse. Um diesen Einfluss kennen zu lernen, wurde die Lemniskate mittelst einer Hilfsvorrichtung immer in derselben Lage gehalten. Diese Nullmethode bestand darin, dass die Magnetnadel durch einen Hilfsstrom abgelenkt werden konnte. Dieser Hilfsstrom wurde von Fall zu Fall mittelst eines Stöpselrheostaten so regulirt, dass trotz der Hertz'schen Schwingungen die Nadel ruhig blieb, weil die statischen Kräfte der Schwingungen und die magnetischen Kräfte des Stromes sich aufhoben. Der Aus-

schlag des Stromes allein gab dann ein Mass für die Grösse des Ausschlages, den die Hertz'schen Schwingungen für sich verursacht hätten. Bei einer derartigen Messung ändert sich die Capacität des Elektrometers nicht, was namentlich für rechnende Versuche von Wichtigkeit wäre. Vergleicht man die so erhaltenen Resultate mit den ersten Ausschlägen, so zeigt sich, dass der Werth der letzteren zwar bedeutend grösser ist, die Lage und relative Gestalt der Welle aber sich nicht ändert. In der folgenden Tabelle sind die Resultate beider Messmethoden zusammengestellt.[1] Der Primärfunke sprang in Terpentinöl über; die Stromstärke war 2·0 *A*. Die erste Columne enthält die Distanz der Brücke *E* von *B*, auf dem Massbande *M* abgelesen.

Distanz in *cm*	erste Ausschläge	Compensationmethode	
		Ausschläge	Widerstand
40	0·5	0·7	300
90	1·15	1·3	180
120	1·75	—	—
140	4·8	4·7	75
150	7 6	—	—
160	12·0	9·5	26·6
165	14·5	—	—
170	16·2	12·2	20
175	16·5	—	—
180	15·35	10·4	22
190	19·0	12·2	20
195	21·3	—	—
200	25·25	16·0[2]	17·9
202	27·0	17·3	17·2
205	28·0	16·75	17·5
207	27·0	—	—
210	24 5	14·0	18·7
220	15·5	9·4	27·5
225	12·0[2]	—	—
230	9·2	5·1	50
240	5·5	4·2	65
250	3·7	—	—
260	—	2·0	137
270	2·0	—	—
290	0·9	1·0	257

[1] Einen anderen Kunstgriff, den E. Wiedemann (Wied. Ann., 48, S. 564, 1893) anwendete, lernte ich erst nach Fertigstellung dieser Arbeit kennen.

[2] Da in Folge der ausgeschiedenen Kohle das Terpentinöl schon sehr dunkel erschien, wurde es hier filtrirt und dann der Versuch wiederholt, ohne dass eine Änderung eintrat. Auch Sarasin und de la Rive haben dies beobachtet (C. R. l. c.).

Man sieht, dass die Stellung des Maximums (bei 205 *cm* Distanz) bei beiden Messungen fast ganz genau stimmt. Die kleinen Abweichungen lassen sich, wie leicht gezeigt werden kann, auf nebensächliche Fehlerquellen zurückführen. Da also die durch die Ablenkung verursachte Capacitätsänderung keinen merklichen Einfluss hat, so wird im Folgenden immer durch Beobachtung der ersten Ausschläge gemessen.

Ferners war durch Versuche der Einfluss des Abstandes der Kugeln *a* und *b* zu untersuchen. Die Grösse des Maximums ist abhängig von der Distanz der Kugeln und der Stromstärke, und zwar derart, dass bei Erhöhung der letzteren auch die Kugeldistanz vergrössert werden musste.

Veränderliche Kugeldistanz bei constanter Stromstärke. Aus den vielen Versuchen, die ich hierüber anstellte und die alle das gleiche Resultat ergaben, will ich nur jene anführen, bei denen Petroleum als Dielektricum verwendet wurde. Die mittlere Stromstärke war 1·56 *A*. Die Resultate sind in folgende Tabelle eingetragen und in Fig. 2 graphisch dargestellt.

Distanz	Kugeldistanz in *mm*			
	0·32	0·64	0·80	0·96
90	5·9	—	1·5	1·25
130	4·7	3·2	3·85	4·85
140	—	—	6·25	—
145	—	—	7·0	—
150	5·7	6·0	8·35	7·5
155	—	6·3	8·2	7·7
160	—	6·0	7·9	—
170	5·4	4·1	6·5	6·5
190	5·1	1·5	2·25	2·0
200	4·3	0·9	1·65	1·35
205	—	—	1·35	—
210	5·25	1·0	1·1	1·2
230	5·1	0·8	1·0	1·0

Das grösste Maximum ergibt sich also bei einer Distanz von 0·8 *mm*. 1·2 *mm* war die äusserste Distanz, bei der zwischen *a* und *b* noch Funken übersprangen. Diese und alle anderen Versuche, zu denen auch andere Öle verwendet wurden, zeigen, dass das höchste Maximum dann erreicht wird, wenn die Distanz der Kugeln *a* und *b* etwa $^1/_3$ unter der grössten Distanz liegt, bei der überhaupt noch Funken überspringen. Dies gilt natürlich auch, wenn der Funke durch Luft oder Gas überspringt, nur müssen dann die Distanzen bedeutend grösser sein. Darin liegt der Grund, warum die Entfernung 0·32 *mm* ein so ungünstiges Resultat lieferte; denn durch die Funken tritt immer eine Verbrennung des Öles

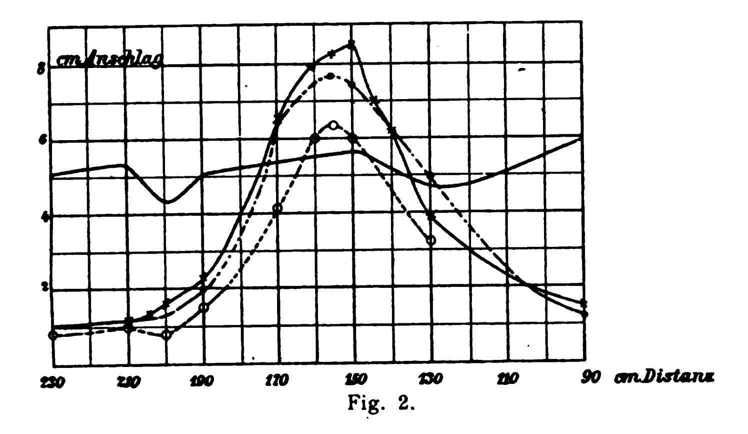


Fig. 2.

ein und die gasigen Verbrennungsproducte können bei so geringer Distanz nicht schnell genug entweichen, so dass die Funken vielfach durch Gas übersprangen. Am Elektrometer gibt sich dies immer durch ein stossweises Hinaustreiben der Lemniskate zu erkennen.

Veränderliche Stromstärke bei constanter Kugeldistanz. Obwohl die eben angeführten Versuche ganz sicher schliessen lassen, dass zu jeder Kugeldistanz eine gewisse Stromstärke gehöre, habe ich doch mehrere Versuchsreihen durchgeführt, wo ich bei constanter Kugeldistanz die Stromstärke variirte. Dieselben haben das vorige Resultat genau bestätigt. War die Stromstärke zu klein oder zu gross, so zeigte sich auch immer die Welle verflacht und erniedrigt.

3. Verschiedene Öle.

Bei allen Versuchen, wo der Funke zwischen *a* und *b* durch Öle übersprang, zeigten sich locale Verbrennungen mit mehr minder starker Gasentwicklung. Sarasin und de la Rive, welche mit weit grösseren Distanzen (circa 7·0 *mm*) der Kugeln *a* und *b* arbeiteten, constatiren bei Petroleum sogar Entzündungen des ganzen Öles. Bei meinen Versuchen ist dieser Fall nie eingetreten, was wohl in dem sehr kleinen Funken seinen Grund haben mag, da die Mittel, deren ich mich bedienen konnte, leider bedeutend kleiner waren; sie werden aber den in physikalischen Instituten gewöhnlich zur Verfügung stehenden Grössen näher kommen.

Im Allgemeinen zeigten schon die Vorversuche, dass die flüssigeren Öle die besten Resultate lieferten.

a) Baumöl. Dieses Öl war vollständig untauglich, indem sich gar kein eigentliches Maximum constatiren liess. Der Grund mag in Folgendem liegen: Erstens können die gasigen Verbrennungsproducte der grösseren Consistenz des Öles wegen nicht rasch genug entweichen, so dass der Funke fast immer nur durch Gas überspringt; für Gas musste aber die Distanz *ab* bedeutend grösser sein, um ein ausgeprägtes Maximum zu ermöglichen. Zweitens wurde, um das Entweichen der Gasblasen zu erleichtern, die Entfernung *ab* etwas vergrössert, so trat eine um so stärkere Gasentwicklung ein und schliesslich sprang der Funke selbst bei 0·7 *mm* Distanz nicht mehr über. Der Vergleich mit anderen Ölen ergibt, dass Baumöl unter allen von mir untersuchten Ölen am besten isolirt. Ein anderer Übelstand zeigte sich erst nach länger fortgesetzten Versuchen, indem dann beide Kugeln an den einander am nächsten gegenüberstehenden Flächen ganz mit Kohle überzogen waren, ja selbst Kohlenfäden von einer Kugel zur andern gingen. Dadurch war aber eine, wenn auch schlechte, Leitung zwischen den Kugeln hergestellt[1]

[1] Weil der Funke längs seines Weges Kohlentheilchen ausscheidet, durchschlägt auch bei den in Öl eingelagerten Transformatoren der Funke immer leichter an solchen Stellen die Ölschicht, wo er schon einmal übergesprungen ist.

und die Constanz des Funkens unmöglich gemacht, ein Übelstand, der auch bei vielen anderen Ölen auftritt.

b) Olivenöl. Bedeutend bessere Resultate lieferte das Olivenöl. Bei einer Kugeldistanz von 0·4 *mm* und 1·6 *A*. Stromstärke erhielt ich ein deutlich ausgesprochenes Maximum in der Entfernung 125 *cm*. Vergrösserte ich nach und nach die Kugeldistanz, so traten die schon beim Baumöl erwähnten Störungen immer häufiger ein, da dann in Folge der intensiveren Verbrennung die Gase nicht schnell genug entweichen konnten. Bei 0·7 *mm* Distanz musste ich die Versuche unterbrechen, weil der Funke fast nur mehr in Gas übersprang. Nachdem ich circa 3 Stunden experimentirt hatte, waren die beiden Kugeln an den Übergangsstellen dicht mit Kohle bedeckt und 5—6 Kohlenfäden hingen von der oberen zur unteren herab, so dass schliesslich der Funke nicht mehr die nöthige Spannung hatte, das Öl zu durchbohren und langsame Entladungen durch Convection stattfanden.

c) Paraffinöl. Mit diesem wurden schon theilweise befriedigende Resultate erzielt; doch muss man die Trübung des Öles durch ausgeschiedene Kohle und die Bildung von Kohlenfäden als misslich betonen. Dem kann man an und für sich wohl durch fleissiges Filtriren des Öles und durch starkes Umrühren theilweise abhelfen, doch läuft man da immer Gefahr, die Entfernung der Kugeln zu ändern, so dass die einzelnen Messungen nicht zusammenstimmen. Übrigens waren auch bei diesem Öle die störenden Stösse deutlich bemerkbar.

d) Terpentinöl. Ich verwendete reines, weisses Terpentinöl und erhielt dabei ganz gute Resultate. Die mittlere Stromstärke war meist 1·48—1·56 *A* und dafür hatte ich 0·5 *mm* als die günstigste Kugeldistanz gefunden. Wohl sprangen auch noch bei 1·0 *mm* einzelne Funken über, doch schon so unregelmässig, dass keine genauen Messungen gemacht werden konnten. Auch schon bei 0·7 *mm* Distanz traten Störungen ein, indem da die Welle verflacht ist, was auf ein häufiges Überspringen des Funkens in Gas schliessen lässt. Der in diesem Öle immer vorhandene Ozongehalt oxydirte ziemlich rasch die Kugeln und änderte so den Widerstand, ferner waren die Kohlenablagerungen auf beiden Kugeln beträchtlich. Diese zwei

Gründe bewirkten, dass Messungen bei gleicher Distanz der Kugeln und gleicher Stromstärke verschiedene Resultate ergaben, je nachdem ich dieselben am Beginn oder am Schlusse einer Versuchsreihe machte; diese Differenz war zuweilen ziemlich beträchtlich. Nachdem die Funken im ganzen circa 6 Stunden lang übersprungen waren, bemerkte ich, dass beide Kugeln an der Übergangsstelle der Funken kleine Vertiefungen hatten; offenbar sind sie durch Verbrennung des Messings entstanden. Bei anderen Ölen, die nicht soviel oder kein Ozon enthalten, trat keine so auffallende Veränderung der Kugeln ein.

e) Petroleum. Um die Gefahr einer Entzündung zu verringern, wählte ich das bestraffinirte Petroleum, das sogenannte »Kaiseröl«. Die damit erhaltenen Resultate sind die besten, die ich unter allen Ölen erhalten habe. Bei einer mittleren Stromstärke von 1·56 *A* erwies sich, wie schon erwähnt, die Distanz 0·8 *mm* als die günstigste. Die mit Petroleum erreichten Maxima zeichnen sich nicht so sehr dadurch aus, dass sie grösser sind als die mit Luft, Terpentinöl etc. erreichten, als durch ihre Constanz und Regelmässigkeit, so dass das Petroleum als das geeignetste Öl für derlei Versuche erscheint.

Störungen durch abgelagerte Verbrennungsproducte kamen selbst dann nicht vor, wenn ich den Apparat durch drei Stunden functioniren liess, ohne die Kugeln zu reinigen. Die Ausscheidung von Kohle ist beim Petroleum eben sehr gering und so bleibt auch das Öl fast ganz rein, wodurch das lästige Filtriren wegfällt. Dann möchte ich noch als Vorzug des Petroleums erwähnen, dass es die Oberflächen der Kugeln nicht im geringsten angreift.

Aus dem Ganzen sieht man also, dass von allen diesen Ölen Petroleum am meisten geeignet ist, bei Erzeugung Hertz'scher Wellen als Dielektricum zu dienen, in welchem der Primärfunke überspringt.

4. Änderung der Länge des primären und secundären Stromkreises.

Nachdem durch die vorausgehenden Versuche ein Dielektricum gefunden war, welches eine genaue und bequeme

Beobachtung des Verlaufes der Hertz'schen Wellen zulässt, untersuchte ich noch anhangsweise den Einfluss der Drahtlängen des primären und secundären Stromkreises.

1. Die Drähte I und II hatten eine Länge von 490 *cm*. Um den Einfluss kennen zu lernen, welchen die Länge der Drähte p und q auf die Lage und Höhe des Maximums hat, nahm ich für dieselben folgende Längen: 60, 100, 125, 150, 160, 170, 187, 200 und 250 *cm*. Vergleichshalber wurde ein paarmal Terpentinöl statt Petroleum genommen.

Erste Versuchsreihe.

Dielektricum: Terpentinöl. Stromstärke 1·54 *A*.

Drahtlänge	60	100	150	250
Maximum bei	173	161	144	86
Höhe des Maximums	4·3	5·1	5·6	4·35

Im Allgemeinen sieht man also, dass das Maximum gegen B hinwandert, wenn p und q länger werden, und dass zuerst ein Ansteigen, dann ein Sinken des Maximums auftritt.

Zweite Versuchsreihe.

Dielektricum: Petroleum. Stromstärke 1·55 *A*.

Drahtlängen	100	125	150	170
Maximum bei	164	154	143	137
Höhe des Maximums	6·1	6·45	6·6	6·6

Dritte und vierte Versuchsreihe.

Dielektricum: Petroleum. Stromstärke 1·54 *A*.

Drahtlängen	160	170	187	200
Maximum bei	145	137	128	122
Höhe des Maximums	6·55	6·5	6·35	5·4

Aus den mitgetheilten Resultaten folgt, dass das Maximum am grössten ist, wenn p und q circa 160 *cm* lang sind; das Maximum ist dann 145 *cm* von B entfernt.

2. Um diese Resultate prüfen zu können, wurden dieselben Untersuchungen bei anderen Längen des secundären Kreises angestellt. Ich theile hier zwei Versuchsreihen mit.

Fünfte Versuchsreihe.

Petroleum. Stromstärke 1·52 *A*; secundärer Kreis 390 *cm* lang.

Drahtlängen..........	125	160	170	200
Maximum bei	105	87	81	62
Höhe des Maximums ..	6·85	7·4	7·4	7·0

Für das grösste Maximum hat sich also die Länge der Zuleitungsdrähte p und q nicht geändert, dafür desto mehr der Abstand des Maximums von B, welcher hier nur mehr circa 85 *cm* ist.

Sechste Versuchsreihe.

Petroleum. Stromstärke 1·48 *A*; secundärer Kreis 340 *cm* lang.

Drahtlängen..........	150	160	170
Maximum bei	72	67·5	55
Höhe des Maximums ..	4·5	4·75	4·7

Auch hier haben p und q die gleiche Länge wie früher, während das Maximum bei 60 *cm* steht.

Bei der von mir getroffenen Versuchsanordnung ist also das grösste Maximum dann vorhanden, wenn jeder der Zuleitungsdrähte p und q 160 *cm* lang ist; dies gilt innerhalb der untersuchten Grenzen für jede Länge der Drähte I und II. So lange der primäre Stromkreis so liegt, dass die Condensatoren ungefähr in der Mitte der Primärströmung stehen, ändert sich die Grösse des Maximums verhältnissmässig sehr wenig.

Vergleicht man alle sechs Versuchsreihen mitsammen, so lässt sich mit ziemlicher Sicherheit schliessen, dass die Verschiebung der Maxima ungefähr gleich der Hälfte der Änderung der Zuleitungsdrähte ist; die Abweichungen glaube ich als zufällige Störungen ansehen zu können.

Erklärung des Ferranti'schen Phänomens

von

J. Sahulka.

Aus dem Elektrotechnischen Institute der k. k. technischen Hochschule in Wien.

Mit dem Namen Ferranti'sches Phänomen bezeichnet man eine Reihe von Erscheinungen, welche sich darbieten, wenn der secundäre Kreis eines Transformators, dessen primärer Kreis mit einer Wechselstrommaschine verbunden ist, durch einen Condensator geschlossen wird. Die merkwürdigste dieser Erscheinungen ist die, dass das Umsetzungsverhältniss des Transformators steigt. Gleichzeitig wird auch die primäre Spannungsdifferenz grösser und der primäre Strom schwächer. Der Condensator darf nicht eine zu grosse Capacität haben, da sehr grosse Condensatoren im Wechselstrombetriebe nur einen kleinen scheinbaren Widerstand haben und ein Condensator von unendlich grosser Capacität dieselbe Wirkung hätte, als ob der secundäre Kreis durch ein Drahtstück kurz geschlossen würde. Das Umsetzungsverhältniss kann durch Einschaltung des Condensators in den secundären Kreis grösser werden als das Verhältniss der Windungszahlen des Transformators.[1] Eine richtige Erklärung dieser Erscheinung ist bisher nicht gegeben worden. Dieselbe hat, wie im Folgenden theoretisch gezeigt wird, nur in der sogenannten Streuung der magnetischen Kraftlinien im Transformator ihre Ursache; dies

[1] Diese Erscheinung wurde in der Deptforter Centrale an Transformatoren beobachtet, welche einen Wechselstrom von 2500 auf 10.000 Volt transformirten, wenn an den secundären Kreis die Ferranti'schen concentrischen Kabel angeschlossen wurden, welche infolge ihrer Länge von 10 *km* eine beträchtliche Capacität hatten.

wurde auch durch das Experiment bestätigt. Würden alle vom primären Kreise erzeugten magnetischen Kraftlinien sämmtliche Windungen des secundären Kreises durchsetzen und umgekehrt, so würde das Ferranti'sche Phänomen nicht auftreten.

Theoretischer Nachweis.

Betrachten wir zunächst den Fall, wenn der secundäre Kreis des Transformators nicht durch einen Condensator, sondern durch irgend einen Widerstand r_2 geschlossen ist, der weder Selbstinduction, noch Capacität hat. Die primäre Spannungsdifferenz sei $\Delta_1 \sin 2\pi n t$, wobei n die Zahl der Perioden des Wechselstromes pro Secunde vorstellt. Der Ohm'sche Widerstand der primären Wickelung sei R_1, der Ohm'sche Widerstand des ganzen secundären Kreises R_2, die Coëfficienten der Selbstinduction seien $L_1 L_2$, der der gegenseitigen Induction M. Bezeichnet man mit $i_1 i_2$ die veränderlichen Werthe des primären und secundären Stromes, so müssen bekanntlich die Maxwell'schen Gleichungen erfüllt sein:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 \sin 2\pi n t &= R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ 0 &= R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Bezeichnet man mit

$$\begin{aligned} p &= 2\pi n \\ k &= \frac{Mp}{\sqrt{R_1^2 + p^2 L_1^2}}, \end{aligned} \tag{2}$$

so ergibt sich nach der Maxwell'schen Formel für die Amplitude der Stromstärke im secundären Kreise der Werth:

$$J_2 = \frac{\Delta_1 k}{\sqrt{(R_2 + k^2 R_1)^2 + p^2 (L_2 - k^2 L_1)^2}}.$$

Die Amplitude der secundären Klemmenspannung ist $\Delta_2 = J_2 r_2$, das Umsetzungsverhältniss ist

$$u = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{k r_2}{\sqrt{(R_2 + k^2 R_1)^2 + p^2 (L_2 - k^2 L_1)^2}}. \tag{3}$$

Die Grösse R_1 ist stets klein und kann vernachlässigt werden. Da auch in der Regel der Ohm'sche Widerstand der secundären Wickelung sehr klein ist, so kann man, wenn der secundäre Kreis durch einen grossen Widerstand r_2 geschlossen ist, annähernd setzen: $r_2 = R_2$. Man erhält aus den Formeln 2) und 3):

$$k = \frac{M}{L_1}$$

$$u = \frac{M}{L_1} \cdot \frac{r_2}{\sqrt{R_2^2 + p^2\left(L_2 - \frac{M^2}{L_1}\right)^2}}. \qquad 4)$$

Ist der Transformator ein vollkommener, d. h. wenn keine Streuung von Kraftlinien stattfindet, so ist:

$$M^2 = L_1 L_2$$

und daher

$$u = \frac{M}{L_1} \cdot \frac{r_2}{R_2}.$$

Die Werthe von L_1 und L_2 verhalten sich in diesem Falle wie die Quadrate der Windungszahlen N_1 und N_2 der primären und secundären Wickelung; daher ist

$$u = \frac{N_2}{N_1} \cdot \frac{r_2}{R_2}.$$

Wenn r_2 sehr gross ist oder der secundäre Kreis unterbrochen ist, so erhält man:

$$u = \frac{N_2}{N_1}.$$

Findet im Transformator eine Streuung von magnetischen Kraftlinien statt, so ist $M^2 < L_1 L_2$. Es bleibt dann in der Formel 4) das zweite Glied im Nenner stehen und folglich ist

$$u < \frac{M}{L_1}.$$

Nun ist überdies in diesem Falle $\frac{M}{L_1} < \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$; daher folgt:

$$u < \frac{N_2}{N_1}.$$

Bei starker Streuung der Kraftlinien kann das Umsetzungsverhältniss beträchtlich kleiner sein als das Verhältniss der Windungszahlen.

Denken wir uns nun den secundären Kreis durch einen Condensator von der Capacität C geschlossen, so hat man in den Maxwell'schen Gleichungen nur an Stelle des L_2 zu setzen $L_2 - \frac{1}{p^2 C}$, weil der Condensator den scheinbaren negativen Selbstinductionscoëfficienten $\frac{1}{p^2 C}$ hat. Die Formel für J_2 ist in gleicher Weise zu ändern, der Ausdruck für k bleibt ungeändert. Unter R_2 hat man in diesem Falle nur den Drahtwiderstand der secundären Wickelung zu verstehen; es ist daher R_2 ebenso wie R_1 sehr klein. Die Amplitude Δ_2 der Klemmenspannung im secundären Kreise wird erhalten, wenn man J_2 mit dem scheinbaren Widerstande des Condensators multiplicirt; dieser ist $\frac{1}{pC}$. Daher erhält man:

$$\Delta_2 = \frac{\Delta_1 k}{pC\sqrt{(R_2 + k^2 R_1)^2 + p^2\left(L_2 - \frac{1}{p^2 C} - k^2 L_1\right)^2}}. \qquad 5)$$

Wenn man R_1 und R_2 vernachlässigt und für k seinen Werth substituirt, so folgt:

$$u = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{M}{L_1 p^2 C\left[L_2 - \frac{M^2}{L_1} - \frac{1}{p^2 C}\right]}. \qquad 6)$$

Findet keine Streuung von Kraftlinien statt, so ist $M^2 = L_1 L_2$ zu setzen. Es ergibt sich, da das Vorzeichen nicht in Betracht kommt:

$$u = \frac{N_2}{N_1}.$$

Das Umsetzungsverhältniss bei einem vollkommenen Transformator bleibt dasselbe, ob der secundäre Kreis offen oder durch einen Condensator oder grossen Widerstand geschlossen ist.

Wenn aber Streuung von Kraftlinien stattfindet, so ist in der Formel 6) im Nenner die Grösse $L_2 - \frac{M^2}{L_1}$ von Null ver-

schieden. Da der Nenner eine Differenz ist, gibt es für C passende Werthe, welche die Differenz sehr klein machen; dann kann aber der Quotient gross sein. In diesem Falle wird infolge der Einschaltung des Condensators das Umsetzungsverhältniss bedeutend erhöht werden können und von der Capacität des Condensators abhängen. Bei der Beurtheilung des Werthes von u aus der Formel 6) darf man jedoch nicht übersehen, dass in der Formel 5) die Grösse $R_2+k^2R_1$ vernachlässigt wurde, und dass dies nur gestattet ist, wenn das zweite Glied einen grossen Werth hat.

Die zweite gleichzeitig beobachtete Erscheinung, dass die primäre Spannungsdifferenz eines Transformators etwas grösser wird, wenn der secundäre Kreis durch einen Condensator geschlossen wird, und dass gleichzeitig der primäre Strom etwas schwächer wird, ist dadurch begründet, dass der scheinbare Widerstand des primären Kreises zunimmt. Ist nämlich der secundäre Kreis offen, so hat der primäre Kreis den scheinbaren Widerstand

$$\sqrt{R_1^2+p^2L_1^2}.$$

Ist er durch einen Condensator geschlossen, so hat man an Stelle von R_1 und pL_1 zu setzen die sogenannten effectiven Widerstände R_1' und pL_1', welche von Maxwell berechnet wurden, nur hat man an Stelle von L_2 wieder zu schreiben $L_2-\frac{1}{p^2C}$; es ist

$$R_1' = R_1 + \frac{M^2p^2R_2}{R_2^2+p^2\left(L_2-\frac{1}{p^2C}\right)^2}$$

$$L_1' = L_1 - \frac{M^2p^2\left(L_2-\frac{1}{p^2C}\right)}{R_2^2+p^2\left(L_2-\frac{1}{p^2C}\right)^2}$$

$$R_1'^2+p^2L_1'^2 = (R_1^2+p^2L_1^2)+ \\ + \frac{M^2p^2\left(M^2p^2+2R_1R_2-2p^2L_1L_2+\frac{2L_1}{C}\right)}{R_2^2+p^2\left(L_2-\frac{1}{p^2C}\right)^2}. \qquad 7)$$

In der Formel 7) hat der Nenner des zweiten Gliedes sicher einen positiven Werth, im Zähler steht eine Differenz. Wenn C klein ist, so ist $\frac{2L_1}{C}$ gross, dann ist das zweite Glied positiv und somit

$$R_1'^2+p^2L_1'^2 > R_1^2+p^2L_1^2.$$

Die Erhöhung des scheinbaren Widerstandes der primären Wickelung hat eine Erhöhung des Δ_1 und eine Abnahme des J_1 zur Folge.

Versuche.

Das Ergebniss der Berechnung, dass die Ursache des Ferranti'schen Phänomens in der Streuung der magnetischen Kraftlinien gelegen ist, wurde auch durch den Versuch bestätigt. Es wurde zu diesem Zwecke ein besonderer Transformator verfertigt. Der cylindrische, gerade Kern bestand aus ungefähr 2000 gefirnissten Eisendrähten, welche 1 *mm* dick und 41 *cm* lang waren. Die ganze Länge wurde in zwei ungleiche Theile getheilt. In dem kleineren Theile, welcher ein Viertel der Länge einnahm, wurden zunächst drei Lagen isolirten Kupferdrahtes von je 73 Windungen gewickelt; darüber kam noch eine einfache Lage von 73 Windungen. In dem langen Theile wurden drei Lagen von je 219 Windungen gewickelt und darüber noch eine einfache Lage von 219 Windungen. Die einzelnen Lagen wurden von einander durch schellackirtes Papier gut isolirt. Die Drähte waren dünn, weil der Transformator nicht zur Abgabe von Strömen bestimmt war und jeder einzelne Versuch nur kurze Zeit dauerte. Wenn sämmtliche 292 Windungen in dem ersten Viertel der Transformatorlänge als primäre Wickelung verwendet wurden und alle anderen (876 Windungen) als secundäre Wickelung, so war eine sehr ungleichförmige Vertheilung der Windungen und daher starke Streuung vorhanden. Das Verhältniss der Windungszahlen ist 1 : 3. Wenn die beiden äusseren einfachen Lagen von zusammen 292 Windungen als primäre Wickelung, die beiden inneren Spulen von zusammen 876 Windungen als secundäre Wickelung verwendet wurden, so war eine gleichförmigere Vertheilung der Windungen und daher

geringere Streuung vorhanden; das Verhältniss der Windungszahlen ist dasselbe.

Der zur Verfügung stehende Wechselstrom hatte 105 Volt Spannungsdifferenz und 5000 Richtungswechsel in der Minute. Dem Primärkreis des beschriebenen Transformators wurde noch ein Widerstand vorgeschaltet. Die primäre Spannungsdifferenz Δ_1 wurde mit einem Hitzdraht-Voltmeter, die secundäre Δ_2 beim ersten und dritten Versuche mit einem Elektrometer (Multicellular-Voltmeter von W. Thomson), beim zweiten Versuche mit einem Hitzdraht-Voltmeter (von Hartmann und Braun) gemessen.

1. Versuch bei ungleichförmiger Vertheilung der Windungen. Bei offenem secundären Kreise war $\Delta_1 = 74 \cdot 0$, $\Delta_2 = 102 \cdot 0$ Volt, $u = 1 \cdot 38$, $J_1 = 7 \cdot 6$ Ampère. Schaltete man in den secundären Kreis einen Condensator von $5 \cdot 15$ Mikrofarad (Condensator mit paraffinirtem Papier), so war $\Delta_1 = 75 \cdot 3$, $\Delta_2 = 122 \cdot 7$, $u = 1 \cdot 63$, $J_1 = 7 \cdot 5$. Das Umsetzungsverhältniss u stieg demnach um $18^0/_0$. Bei Einschaltung von Condensatoren mit kleinerer Capacität stieg u um weniger. Dass das Umsetzungsverhältniss beträchtlich kleiner ist als das Verhältniss der Windungszahlen, kann wegen der starken Streuung der Kraftlinien nicht überraschen.

2. Versuch bei ungleichförmiger Vertheilung der Windungen. Die Spannungsdifferenz Δ_2 wurde mit einem Hitzdraht-Voltmeter gemessen. Da der Widerstand desselben circa 550 Ohm war, floss im secundären Kreise ausser dem Ladestrom des Condensators noch der Strom im Hitzdraht-Voltmeter, wodurch die Erscheinungen des Ferranti'schen Phänomens etwas schwächer auftraten. Es ergab sich ohne Einschaltung eines Condensators: $\Delta_1 = 63 \cdot 1$, $\Delta_2 = 85$, $u = 1 \cdot 35$; nach Einschaltung des Condensators von $5 \cdot 15$ Mikrofarad war $\Delta_1 = 63 \cdot 7$, $\Delta_2 = 96$, $u = 1 \cdot 51$. Die Erhöhung des Umsetzungsverhältnisses ist in diesem Falle geringer, sie beträgt nur $11 \cdot 9^0/_0$. Dass das Umsetzungsverhältniss ohne Einschaltung des Condensators kleiner ist als beim ersten Versuche, kann nicht überraschen, weil das Hitzdraht-Voltmeter Strom braucht und der Widerstand der secundären Wickelung $5 \cdot 45$ Ohm betrug. Die primäre Stromstärke war $6 \cdot 6$ Ampère.

3. Versuch bei gleichförmiger Vertheilung der Windungen. Es ergab sich ohne Condensator $\Delta_1 = 55 \cdot 6$, $\Delta_2 = 150$, $u = 2 \cdot 70$, nach Einschaltung des Condensators von 5·15 Mikrofarad $\Delta_1 = 56 \cdot 6$, $\Delta_2 = 154 \cdot 9$, $u = 2 \cdot 74$. Die primäre Stromstärke nahm ab von 7·8 bis 7·7 Ampère. Das Umsetzungsverhältniss stieg bei Einschaltung des Condensators in diesem Falle nur um 1·5%. Bei den drei Versuchen mussten der primären Wickelung verschiedene Widerstände vorgeschaltet werden, damit die primäre Stromstärke, respective die Erwärmung der primären Wickelung nicht zu gross werde.

—

Über eine Eigenschaft der Invarianten von Covarianten

von

Dr. **Gustav Kohn,**

Privatdocent an der k. k. Universität in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 15. Juni 1893.)

Im vierten Bande der Math. Annalen[1] hat Gordan die Discriminanten und Resultanten für einige Covarianten aufgestellt und sie haben sich durch gewisse Potenzen der Discriminanten und Resultanten der Stammformen theilbar ergeben. Ich habe dann diese Erscheinung weiter verfolgt[2] und bin zu allgemeinen Resultaten gelangt. Indessen war dieselbe damit noch nicht in ihrem vollen Umfang erkannt und auf ihre einfachsten Gründe zurückgeführt, wie aus der vorliegenden Note hervorgeht. Hier wird in einfachster Weise gezeigt, dass überhaupt Invarianten (nicht bloss Discriminanten und Resultanten) von Covarianten in einer ausgedehnten Reihe von Fällen durch gewisse Potenzen der Discriminanten und Resultanten der Stammformen theilbar sind, und die Bestimmung der Potenzexponenten führt auf gewisse, bisher in die Theorie nicht eingeführte Gradzahlen von Invarianten und Seminvarianten, von welchen auch andere Eigenschaften dieser Gebilde abhängen dürften.

1. Es lässt sich fast unmittelbar ein Kriterium angeben, welches nicht nur die Theilbarkeit einer vorgelegten Invariante durch die Discriminante einer Stammform zu erkennen, sondern

---

[1] Resultanten von Covarianten, S. 169.

[2] Zur Theorie der associirten Formen, diese Berichte, Bd. C, S. 865. — Über die Resultante einer Covariante und einer Grundform, ebenda, S. 1013.

auch den Exponenten der höchsten Potenz dieser Discriminante zu bestimmen lehrt, welche in der Invariante aufgeht.

Ist

$$f = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots$$

eine der Stammformen und J eine Invariante, welche durch die Discriminante von f D_f theilbar ist, so wird J verschwinden, wenn $a_0 = a_1 = 0$ gesetzt wird (weil dann zwei Wurzeln von f einander gleich, nämlich $= 0$ sind), d. h. es ist

$$J = a_0 \varphi_0 + a_1 \varphi_1, \tag{1}$$

wo φ_0 und φ_1 ganze Functionen der Coëfficienten bedeuten. Besitzt umgekehrt die Invariante J die Form (1), so wird sie durch die Discriminante D_f theilbar sein, weil sie verschwindet, wenn zwei Wurzeln von f in dem Werthe Null zusammenfallen und desshalb als Invariante verschwinden wird, wenn überhaupt zwei Wurzeln von f einander gleich werden.

Wie bekannt hat die Discriminante von f die Gestalt

$$D_f = a_0 \psi_0 + a_1^2 \psi_1,$$

wo ψ_0 und ψ_1 ganze Functionen der Coëfficienten von f sind, die nicht verschwinden, wenn $a_0 = a_1 = 0$ gesetzt wird. Setzen wir a_0 durch die zweite, a_1 durch die erste Potenz einer unbestimmten Grösse t theilbar voraus, so wird also die zweite und keine höhere Potenz von t in D_f aufgehen.

Wenn jetzt die Annahme gemacht wird, die Invariante J sei durch die k^{te} ($k \geqq 0$) und keine höhere Potenz der Discriminante von f theilbar, d. h. es sei

$$J = D_f^k J_1 \qquad k \geqq 0,$$

wo J_1 eine Invariante bedeutet, die nicht durch die Discriminante theilbar ist, so wird J durch die $2k^{\text{te}}$ und keine höhere Potenz von t theilbar sein. Denn D_f^k ist durch die $2k^{\text{te}}$ und keine höhere Potenz von t theilbar, und in J_1 geht t überhaupt nicht auf, weil sonst diese Invariante die Form (1) haben müsste und dann nach Obigem der Voraussetzung entgegen durch D_f theilbar wäre.

Wir gelangen zu dem folgenden Resultat:

Ist $J = \Sigma C a_0^{\lambda_0} a_1^{\lambda_1} \ldots a_n^{\lambda_n}$ eine als Function der Coëfficienten $a_0, a_1, \ldots a_n$ der Stammform f geschriebene Invariante, so wird der Exponent der höchsten Potenz der Discriminante von f, welche in J aufgeht, gegeben durch die Hälfte des kleinsten Werthes, den $2\lambda_0 + \lambda_1$ für ein Glied von J annimmt.

Ein analoger Satz lässt sich auch aufstellen, wenn statt binärer Stammformen solche mit beliebig vielen Variabeln zu Grunde gelegt werden.

2. In ähnlicher Weise, wie man aus einer hingeschriebenen Invariante entnehmen kann, durch welche Potenz der Discriminante einer Stammform sie theilbar ist, kann man auch entnehmen, durch welche Potenz der Resultante von zwei Stammformen sie theilbar ist.

Die Stammformen

$$f = a_0 x_1^n + \ldots \quad \text{und} \quad f_1 = a_0' x_1^{n'} + \ldots$$

haben die gemeinsame Wurzel Null, wenn $a_0 = a_0' = 0$. Eine Invariante J, welche die Resultante von f und f_1 R_{ff_1} als Factor enthält, wird also die Form haben

$$J = a_0 \varphi + a_0' \varphi_1, \tag{2}$$

wo φ und φ_1 ganze Functionen der Coëfficienten bedeuten. Umgekehrt wird eine Invariante J immer, wenn sie die Form (2) besitzt, durch die Resultante R_{ff_1} theilbar sein. Denn J verschwindet dann, wenn der Nullwerth eine gemeinsame Wurzel von f und f_1 ist, also wegen der Invarianteneigenschaft immer, wenn f und f_1 eine gemeinsame Wurzel haben.

Im Besonderen hat, wie bekannt, die Resultante R_{ff_1} die Form

$$R_{ff_1} = a_0 \psi + a_0' \psi_1,$$

wo ψ und ψ_1 ganze Functionen der Coëfficienten von f und f_1 bedeuten, welche nicht mit a_0 und a_0' identisch verschwinden. Wenn jetzt a_0 und a_0' durch die erste Potenz einer unbestimmten Grösse t theilbar vorausgesetzt werden, so wird also R_{ff_1} durch

die erste und keine höhere Potenz von t theilbar sein. Wird die Annahme gemacht, die Invariante J sei durch die k^{te} $(k \geqq 0)$ und keine höhere Potenz von R_{ff_1} theilbar, d. h. es sei

$$J = R_{ff_1}^k J_1 \qquad k \geqq 0,$$

wo J_1 eine durch R_{ff_1} nicht mehr theilbare Invariante bedeutet, so wird die k^{te} und keine höhere Potenz von t in J aufgehen. Denn $R_{ff_1}^k$ ist durch die k^{te} und keine höhere Potenz von t theilbar, während die Unbestimmte t in J_1 überhaupt nicht aufgeht, weil diese Invariante sonst die Form (2) haben müsste, welche die Theilbarkeit durch die Resultante nach sich zieht.

Es folgt:

Ist $J = \Sigma C a_0^{\lambda_0} a_1^{\lambda_1} \ldots a_n^{\lambda_n} . a_0'^{\lambda_0'} a_1'^{\lambda_1'} \ldots a_{n'}'^{\lambda_{n'}'}$ eine als Function der Coëfficienten der Stammformen $f = a_0 x_1^n + \ldots$ und $f_1 = a_0' x_1^{n'} + \ldots$ geschriebene Invariante, so wird der Exponent der höchsten Potenz der Resultante von f und f_1, die in J aufgeht, gegeben durch den kleinsten Werth, den $\lambda_0 + \lambda_0'$ für ein Glied von J annimmt.

3. Es wird gut sein, ehe wir dazu schreiten, die in den Artikeln 1 und 2 gewonnenen Kriterien für Invarianten von Covarianten zu verwerthen, zwei einfache Hilfssätze zu erörtern.

Der erste Hilfssatz betrifft eine ganze homogene Function

$$\Phi = \Sigma C a_0^{\lambda_0} a_1^{\lambda_1} \ldots a_n^{\lambda_n}$$

der Coëfficienten $a_0, a_1, \ldots a_n$ einer Binärform f und gibt eine einfache Bedeutung für den kleinsten Werth d_r an, den der aus den Exponenten gebildete Ausdruck

$$r\lambda_0 + (r-1)\lambda_1 + \ldots + 1\lambda_{r-1} \qquad (r = 1, 2, \ldots n)$$

für ein Glied von Φ annimmt.

Führt man in der homogenen Function g^{ten} Grades Φ statt der Coëfficienten die Wurzeln von f ein, so gibt die Zahl

$$d_r = \min[r\lambda_0 + (r-1)\lambda_1 + \ldots + 1 . \lambda_{r-1}]$$

an, um wie viel der Grad von Φ in r Wurzeln kleiner ist als rg. Es folgt dies aus dem Umstande, dass nur die r ersten Coëfficienten von f $a_0, a_1, \ldots a_{r-1}$ in r von den Wurzeln einen

von r verschiedenen Grad haben, welcher für diese Coëfficienten beziehungsweise um $r, (r-1), \ldots, 1$ kleiner als r ist.

Freilich muss man, um hieraus schliessen zu können, dass der Grad von Φ in r Wurzeln von f genau durch die Zahl $rg - d_r$ gegeben wird, noch wissen, dass die Glieder höchsten Grades in r Wurzeln, welche aus den einzelnen Gliedern von Φ resultiren, sich unter einander nicht zerstören. Dies ergibt sich aber sofort, wenn man diese Glieder höchsten Grades in r Wurzeln wirklich aufstellt, wie ich in der Abhandlung: »Über symmetrische Functionen...« (diese Berichte, Bd. CII, S. 199 f.) gezeigt habe.

Genau in derselben Weise, wie im Falle einer Form f am eben angegebenen Orte geschehen, kann man, im Falle man in eine ganze Function Φ der Coëfficienten beliebig vieler Formen $f_1, f_2, \ldots f_\varkappa$ statt der Coëfficienten die Wurzeln einführt, die Summe der Terme übersichtlich angeben, welche als Functionen von r_1 Wurzeln von f_1, r_2 Wurzeln von $f_2, \ldots r_\varkappa$ Wurzeln von $f_\varkappa$ angesehen den höchsten Grad besitzen. Man erkennt dann wieder genau so wie a. a. O., dass diese Terme sich unter einander nicht zerstören können und gelangt dadurch zur folgenden Verallgemeinerung unseres Hilfssatzes:

»Ist Φ eine ganze Function der Coëfficienten der Formen f_i $(i = 1, 2, \ldots \varkappa)$ homogen vom Grade g_i in den Coëfficienten von f_i und bezeichnet man die diesen Coëfficienten $a_0^{(i)}, a_1^{(i)}, \ldots a_{n_i}^{(i)}$ in einem beliebigen Gliede von Φ zukommenden Exponenten mit $\lambda_0^{(i)}, \lambda_1^{(i)}, \ldots \lambda_{n_i}^{(i)}$, so hat der kleinste Werth $d_{r_1, r_2, \ldots r_\varkappa}$, den der Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{i=\varkappa} [r_i \lambda_0^{(i)} + (r_i - 1)\lambda_1^{(i)} + \ldots + 1 \,.\, \lambda_{r_i - 1}^{(i)}]$$

für ein Glied von Φ annimmt, eine einfache Bedeutung für die durch die Wurzeln von $f_1, f_2, \ldots f_\varkappa$ ausgedrückte Function Φ. Dieser Werth gibt an, um wie viel der Grad dieser Function in r_1 Wurzeln von f_1, r_2 Wurzeln von $f_2, \ldots r_\varkappa$ Wurzeln von $f_\varkappa$ hinter der Zahl

$$\sum_{i=1}^{i=n} r_i g_i$$

zurückbleibt.«

Das Resultat des Artikels 1 kann man jetzt dahin aussprechen, dass die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Invariante J durch die k^{te} und keine höhere Potenz der Resultante der Stammform f theilbar sei, darin besteht, dass der Grad von J in zwei Wurzeln von f um $2k$ Einheiten geringer ist als der doppelte Grad in einer Wurzel. Das Resultat des Artikels 2 besagt, dass für die Theilbarkeit von J durch die k^{te} Potenz der Resultante der Stammformen f und f_1 nothwendig und ausreichend ist, dass die Summe des Grades von J in einer Wurzel von f und des Grades in einer Wurzel von f_1 um k Einheiten grösser sei als der Grad in beiden Wurzeln.

4. Wir wenden uns zum Beweise des zweiten Hilfssatzes. Ist

$$\Phi = \Phi_0 x_1^\nu + \binom{\nu}{1} \Phi_1 x_1^{\nu-1} x_2 + \ldots \Phi_\nu x_2^\nu$$

eine Covariante der Form $f = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots$, so lässt sich eine einfache Beziehung angeben, in welcher die im letzten Artikel definirten Zahlen d_r für die verschiedenen Coëfficienten $\Phi_0, \Phi_1, \ldots$ zu einander stehen.

Wie bekannt, geht durch Anwendung des Processes

$$n a_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + (n-1) a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + \ldots + a_n \frac{\partial}{\partial a_{n-1}}$$

auf einen Coëfficienten Φ_i der Covariante Φ, der folgende Coëfficient Φ_{i+1} von einem Zahlenfactor abgesehen hervor.

Die Anwendung dieses Processes auf ein Glied $a_0^{\tau_0} a_1^{\tau_1} \ldots a_n^{\tau_n}$ ergibt offenbar Glieder $a_0^{\lambda_0} a_1^{\lambda_1} \ldots a_n^{\lambda_n}$, für welche der Ausdruck $r\lambda_0 + (r-1)\lambda_1 + \ldots 1 . \lambda_{r-1}$ theils gleich dem Ausdruck $r\tau_0 + (r-1)\tau_1 + \ldots 1 . \tau_{r-1}$, theils um eine Einheit kleiner ist. Es wird also durch Anwendung des Processes die Gradzahl d_r gewiss nicht um mehr als eine Einheit erniedrigt, diese Gradzahl ist für den $(i+1)^{\text{ten}}$ Coëfficienten Φ_{i+1} der Covariante entweder gleich oder um eins kleiner als für den i^{ten}, und es folgt insbesondere:

»Bezeichnet man die Gradzahlen d_r für die Coëfficienten $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots$ der Covariante mit $d_r^{(0)}, d_r^{(1)}, d_r^{(2)} \ldots$, so ist

$$d_r^{(1)} \geqq d_r^{(0)}-1, \; d_r^{(2)} \geqq d_r^{(0)}-2, \; d_r^{(3)} \geqq d_r^{(0)}-3, \ldots \text{«}$$ [1]

Diese Bemerkung lässt sich unmittelbar auf simultane Covarianten erweitern, und da der Beweis genau derselbe bleibt wie im speciellen Falle, so genügt es, das Resultat der Verallgemeinerung auszusprechen:

»Wenn die in Artikel 3 definirte Gradzahl $d_{r_1, r_2, \ldots r_x}$ für die Coëfficienten $\Phi_0, \Phi_1 \ldots$ einer simultanen Covariante der Formen $f_1, f_2, \ldots f_x$, beziehungsweise durch $d^{(0)}_{r_1 r_2 \ldots r_x}, d^{(1)}_{r_1 r_2 \ldots r_x}, \ldots$ bezeichnet wird, so ist

$$d^{(1)}_{r_1 r_2 \ldots r_x} \geqq d^{(0)}_{r_1 r_2 \ldots r_x} - 1, \; d^{(2)}_{r_1 r_2 \ldots r_x} \geqq d^{(0)}_{r_1 r_2 \ldots r_x} - 2, \ldots \text{«}$$

5. Wir gehen jetzt zum eigentlichen Gegenstande unserer Untersuchung über.

Es sei

$$\Phi = \Phi_0 x_1^\nu + \binom{\nu}{1} \Phi_1 x_1^{\nu-1} x_2 + \ldots + \Phi_\nu x_2^\nu$$

eine Covariante und

$$f = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots$$

eine der Stammformen. Für das Leitglied Φ_0 der Covariante Φ mag der doppelte Grad in den Coëfficienten von f um d_2 Einheiten grösser sein als der Grad, den das als Function der Wurzeln von f betrachtete Leitglied in zwei Wurzeln besitzt, so dass, wenn a_0 durch das Quadrat und a_1 durch die erste

---

[1] Da die Gradzahl d_r für eine ganze Function $\Sigma C a_0^{\lambda_0} a_1^{\lambda_1} \ldots a_n^{\lambda_n}$ den kleinsten Werth angibt, den der Ausdruck $r\lambda_0 + (r-1).\lambda_1 + \ldots 1.\lambda_{r-1}$ für ein Glied der Function annimmt, so verschwindet eine Function, für die $d_r > 0$, wenn $a_0 = a_1 = \ldots a_{r-1} = 0$ gesetzt werden. Aus dem Satz des Textes folgt also, dass wenn r Wurzeln von f gleich Null werden, die $d_r^{(0)}$ ersten Coëfficienten von Φ ebenfalls verschwinden und damit der Satz:

Ist Φ eine Covariante der Form f, deren Leitglied in r Wurzeln von f einen Grad hat, der um $d_r^{(0)}$ niedriger ist als der r-fache Grad in einer Wurzel, so fallen in eine r-fache Wurzel der Stammform f mindestens $d_r^{(0)}$ Wurzeln der Covariante Φ.

Potenz einer Unbestimmten t theilbar vorausgesetzt wird, Φ_0 durch t^{d_2} theilbar wird (Artikel 3), dann folgt aus dem im letzten Artikel bewiesenen Hilfssatze, dass in den folgenden Coëfficienten $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ der Covariante t, beziehungsweise zur Potenz $d_2-1, d_2-2, \ldots$ aufgeht.

Ist jetzt

$$J = \Sigma C \Phi_0^{\lambda_0} \Phi_1^{\lambda_1} \ldots \Phi_\nu^{\lambda_\nu}$$

eine Invariante der Covariante Φ, so wird nach Artikel 1 der Exponent der höchsten Potenz von t, welche unter der für a_0 und a_1 gemachten Voraussetzung in J aufgeht, gleich sein dem doppelten Exponenten der höchsten Potenz der Discriminante von f, durch die J theilbar ist.

Mit Rücksicht auf das eben über die Coëfficienten $\Phi_0, \Phi_1 \ldots$ der Covariante Φ Gesagte wird aber das Glied

$$C \Phi_0^{\lambda_0} \Phi_1^{\lambda_1} \ldots \Phi_n^{\lambda_n}$$

von J theilbar sein durch t zur Potenz

$$d_2 \lambda_0 + (d_2-1)\lambda_1 + \ldots 1\,\lambda_{d_2-1}$$

und der kleinste Werth, den dieser Ausdruck für ein Glied von J annimmt, ist also der Exponent einer Potenz von t, die jedenfalls in J aufgeht. Dieser kleinste Werth gibt aber nach Artikel 3 an, um wie viel der Grad der als Function der Wurzeln von Φ betrachteten Invariante J in d_2 unter diesen Wurzeln hinter dem d_2-fachen Grade in einer Wurzel zurückbleibt, so dass wir zu dem folgenden Satze gelangen:

Ist für das als Function der Wurzeln einer Stammform f betrachtete Leitglied einer Covariante Φ der Grad in zwei Wurzeln von f um d_2 Einheiten geringer als der doppelte Grad in einer Wurzel, so wird eine Invariante J von Φ, welche als Function der Wurzeln von Φ dargestellt in d_2 Wurzeln von Φ einen Grad besitzt, der um D_{d_2} Einheiten hinter dem d_2-fachen Grade in einer Wurzel zurückbleibt, theilbar durch die Discriminante von f zur Potenz $\frac{1}{2} D_{d_2}$.

Genau dieselbe Deduction, die uns zu diesem Satze geführt hat, lässt sich auch in dem allgemeineren Fall anwenden, dass J

eine simultane Invariante der Covarianten $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \ldots \Phi^{(\rho)}$ bedeutet und führt zu dem folgenden Ergebniss:

Wenn die Zahlen $d_2^{(1)}, d_2^{(2)} \ldots d_2^{(\rho)}$ angeben, um wie viel für die als Functionen der Wurzeln einer Stammform f angesehenen Leitglieder der Covarianten $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \ldots \Phi^{(\rho)}$ der doppelte Grad in einer Wurzel den Grad in zwei Wurzeln übersteigt, so ist eine simultane Invariante dieser Covarianten durch die Discriminante von f zur Potenz $\frac{1}{2} D_{d_2^{(1)} d_2^{(2)} \ldots d_2^{(\rho)}}$ theilbar, wo die Zahl $D_{d_2^{(1)} d_2^{(2)} \ldots d_2^{(\rho)}}$ angibt, um wie viel für die durch die Wurzeln von $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \ldots \Phi^{(\rho)}$ dargestellte Invariante J der Grad in $d_2^{(1)}$ Wurzeln von $\Phi^{(1)}$, $d_2^{(2)}$ Wurzeln von $\Phi^{(2)}, \ldots$ und $d_2^{(\rho)}$ Wurzeln von $\Phi^{(\rho)}$ hinter der Summe zurückbleibt, die man durch Addition des $d_2^{(1)}$-fachen Grades in einer Wurzel von $\Phi^{(1)}$, des $d_2^{(2)}$-fachen Grades in einer Wurzel von $\Phi^{(2)}, \ldots$ und des $d_2^{(\rho)}$-fachen Grades in einer Wurzel von $\Phi^{(\rho)}$ erhält.

Ergänzend ist diesem Satze die Bemerkung hinzuzufügen, dass aus unserer Deduction hervorgeht, dass wenn $\frac{1}{2} D_{d_2^{(1)} d_2^{(2)} \ldots d_2^{(\rho)}}$ keine ganze Zahl ist, die nächsthöhere ganze Zahl den Exponenten einer Potenz der Discriminante von f angibt, welche in der Invariante J aufgeht.

6. Wenn wir die Bedeutung der Ergebnisse des letzten Artikels durch Anwendung auf specielle Fälle erläutern wollen, empfiehlt es sich vor Allem, die Invariante J als Discriminante oder Resultante anzunehmen.

Ist J die Discriminante der Covariante Φ und werden die Bezeichnungen des letzten Artikels beibehalten, so wird

$$D_{d_2} = d_2(d_2 - 1).$$

Denn J ist in diesem Falle das Product der quadrirten Wurzeldifferenzen, der Grad von J in einer Wurzel wird gegeben durch die Anzahl der Factoren, in denen sie vorkommt, der Grad in d_2 Wurzeln aber durch das d_2-fache dieser Zahl vermindert um die Zahl $d_2(d_2 - 1)$, welche angibt, wie oft zwei von den betrachteten d_2 Wurzeln mitsammen im selben Factor vorkommen.

Für den Exponenten $\frac{d_2(d_2-1)}{2}$ der Potenz der Discriminante von f, durch welche die Discriminante der Covariante Φ nach Artikel 5 theilbar ist, lässt sich eine untere Grenze angeben, sobald der Grad g der Covariante in den Coëfficienten von f und deren Gewicht p bekannt sind. Die Zahl d_2, welche erhalten wird, wenn man vom doppelten Grade $2g$ des Leitgliedes von Φ seinen Grad in zwei Wurzeln von f abzieht, wird gewiss nicht kleiner sein als die Zahl $2g-p$, wo von $2g$ der Grad in allen Wurzeln abgezogen erscheint, und wir können den Satz aussprechen:

Ist p das Gewicht einer Covariante Φ, g ihr Grad in den Coëfficienten einer Stammform f und $2g>p+1$, so ist die Discriminante von Φ mindestens durch die

$$\tfrac{1}{2}(2g-p)(2g-p-1)^{\text{te}}$$

Potenz der Discriminante von f theilbar.

Wählen wir zweitens als Invariante J des Artikels 5 die Resultante der zwei Covarianten $\Phi^{(1)}$ und $\Phi^{(2)}$, so wird

$$D_{d_2^{(1)} d_2^{(2)}} = d_2^{(1)} . d_2^{(2)}.$$

Denn diese Resultante ist das Product aller Differenzen, die man aus je einer Wurzel von $\Phi^{(1)}$ und einer Wurzel von $\Phi^{(2)}$ bilden kann, ihr Grad als Function von $d_2^{(1)}$ unter den Wurzeln von $\Phi^{(1)}$ und $d_2^{(2)}$ unter den Wurzeln von $\Phi^{(2)}$ ist gleich der Anzahl ihrer Factoren, in denen eine der ersten $d_2^{(1)}$ Wurzeln vorkommt, vermehrt um die Anzahl, in denen eine von den zweiten $d_2^{(2)}$ Wurzeln vorkommt, die Summe vermindert um die Anzahl $d_2^{(1)} . d_2^{(2)}$ von Factoren, wo eine der $d_2^{(1)}$ ersten mit einer der $d_2^{(2)}$ zweiten Wurzeln zusammen vorkommt.

Wenn p_1, respective p_2 das Gewicht von $\Phi^{(1)}$, respective $\Phi^{(2)}$ und g_1, respective g_2 ihren Grad in den Coëfficienten von f angeben, so wird wie oben

$$d_2^{(1)} \geqq 2g_1-p_1 \quad \text{und} \quad d_2^{(2)} \geqq 2g_2-p_2,$$

und es gilt der Satz:

Sind $\Phi^{(1)}$ und $\Phi^{(2)}$ zwei Covarianten vom Gewichte p_1, beziehungsweise p_2, in den Coëfficienten der

Stammform f vom Grade g_1, beziehungsweise g_2 und $2g_1 > p_1$, $2g_2 > p_2$, so ist die Resultante von $\Phi^{(1)}$ und $\Phi^{(2)}$ mindestens durch die

$$^1/_2(2g_1 - p_1)(2g_2 - p_2)^{\text{te}}$$

Potenz der Discriminante von f theilbar.

Ist die Zahl $^1/_2(2g_1 - p_1)(2g_2 - p_2)$ gebrochen, so hat man sie nach Obigem in unserem Satze durch die nächstgrössere ganze Zahl zu ersetzen.

7. Ganz ähnlich wie in Artikel 5 die Invarianten von Covarianten auf die Theilbarkeit durch die Discriminante einer Stammform untersucht worden sind, können sie auf die Theilbarkeit durch die Resultante von zwei Stammformen untersucht werden.

Ist $\Phi_0 x_1^\nu + \binom{\nu}{1} \Phi_1 x_1^{\nu-1} x_2 + \ldots \Phi_\nu x_2^\nu$ eine Covariante und sind

$$f = a_0 x_1^n + \ldots \quad \text{und} \quad f_1 = a_0' x_1^n + \ldots$$

zwei Stammformen, so wird nach Artikel 2 der Exponent der höchsten Potenz der Resultante von f und f_1, die in der Invariante von Φ

$$J = \Sigma C \Phi_0^{\lambda_0} \Phi_1^{\lambda_1} \ldots \Phi_\nu^{\lambda_\nu}$$

aufgeht, übereinstimmen mit dem Exponenten der höchsten Potenz einer Unbestimmten t, die in J unter der Voraussetzung aufgeht, dass a_0 und a_0' durch die erste Potenz dieser Unbestimmten theilbar sind.

In dem Leitglied Φ_0 geht unter der für a_0 und a_0' gemachten Voraussetzung $t^{d_{11}}$ auf, wo d_{11} für das durch die Wurzeln der Stammformen dargestellte Leitglied angibt, um wie viel die Summe aus dem Grade in einer Wurzel von f und dem Grade in einer Wurzel von f_1 den Grad in diesen beiden Wurzeln übersteigt (Artikel 3). Die folgenden Coëfficienten $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ der Covariante sind also nach Artikel 4, beziehungsweise durch $t^{d_{11}-1}, t^{d_{11}-2}, \ldots$ theilbar. Hieraus ist zu schliessen, dass die Invariante $J = \Sigma C \Phi_0^{\lambda_0} \Phi_1^{\lambda_1} \ldots \Phi_\nu^{\lambda_\nu}$ durch t zu einer Potenz theil-

bar ist, welche durch den kleinsten Werth gegeben wird, den der Ausdruck

$$d_{11}\lambda_0+(d_{11}-1)\lambda_1+\ldots+1.\lambda_{d_{11}-1}$$

für ein Glied von J annimmt. Da dieser kleinste Werth aber nach Artikel 3 angibt, um wie viel für die als Function der Wurzeln der Covariante Φ betrachtete Invariante J, der d_{11}-fache Grad in einer Wurzel den Grad in d_{11} Wurzeln übertrifft, so haben wir das Resultat:

Ist für das als Function der Wurzeln der Stammformen betrachtete Leitglied einer Covariante Φ die Summe aus dem Grade in einer Wurzel der Stammform f_1 und dem Grade in einer Wurzel der Stammform f_1 um d_{11} Einheiten grösser als der Grad in den beiden Wurzeln, so wird eine Invariante J dieser Covariante theilbar sein durch eine Potenz der Resultante von f und f_1, deren Exponent $D_{d_{11}}$ angibt, um wie viel für die durch die Wurzeln von Φ dargestellte Invariante der d_{11}-fache Grad in einer Wurzel den Grad in d_{11} Wurzeln übersteigt.

In ganz ähnlicher Weise ergibt sich auch der allgemeinere Satz:

Wenn für die durch die Wurzeln der Stammformen dargestellten Leitglieder der Covarianten $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)} \ldots \Phi^{(\rho)}$ die Summe aus dem Grade in einer Wurzel der Stammform f und dem Grade in einer Wurzel der Stammform f_1 beziehungsweise um $d_{11}^{(1)}, d_{11}^{(2)}, \ldots d_{11}^{(\rho)}$ grösser ist als der Grad in beiden Wurzeln, so wird eine simultane Invariante J dieser Covarianten theilbar sein durch die Resultante von f und f_1 zur Potenz $D_{d_{11}^{(1)}, d_{11}^{(2)} \ldots d_{11}^{(\rho)}}$, welche angibt, um wie viel für die durch die Wurzeln von $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \ldots \Phi^{(\rho)}$ dargestellte Invariante J die Summe aus dem $d_{11}^{(1)}$-fachen Grade in einer Wurzel von Φ^{1}, dem $d_{11}^{(2)}$-fachen Grade in einer Wurzel von $\Phi^{2}, \ldots$, dem $d_{11}^{(\rho)}$-fachen Grade in einer Wurzel von $\Phi^{(\rho)}$ den Grad in $d_{11}^{(1)}$ Wurzeln von $\Phi^{(1)}$, $d_{11}^{(2)}$ Wurzeln von $\Phi^{(2)}, \ldots$ $d_{11}^{(\rho)}$ Wurzeln von $\Phi^{(\rho)}$ übersteigt.

Nehmen wir als Invariante J speciell die Discriminante von Φ, so ist (Artikel 6)

$$D_{d_{11}} = d_{11}(d_{11}-1)$$

und wenn wieder p das Gewicht von Φ und g, beziehungsweise g' den Grad dieser Covarianten in den Coëfficienten von f, beziehungsweise f_1 bedeutet, so ist ferner

$$d_{11} \geqq g+g'-p,$$

so dass wir den Satz aussprechen können:

Ist p das Gewicht einer Covariante Φ, g ihr Grad in den Coëfficienten der Stammform f, g' in den Coëfficienten von f_1 und $g+g'>p+1$, so ist die Discriminante von Φ mindestens durch die

$$(g+g'-p)(g+g'-p-1)^{\text{te}}$$

Potenz der Resultante von f und f_1 theilbar.

Wählen wir als Invariante J die Resultante der beiden Covarianten $\Phi^{(1)}$ und $\Phi^{(2)}$ von dem Gewichte p_1, beziehungsweise p_2 und dem Grade g_1, beziehungsweise g_2 in den Coëfficienten von f, g'_1, beziehungsweise g'_2 in den Coëfficienten von f_1, so haben wir (vergl. Artikel 6):

$$D_{d_{11}^{(1)} d_{11}^{(2)}} = d_{11}^{(1)} . d_{11}^{(2)}$$

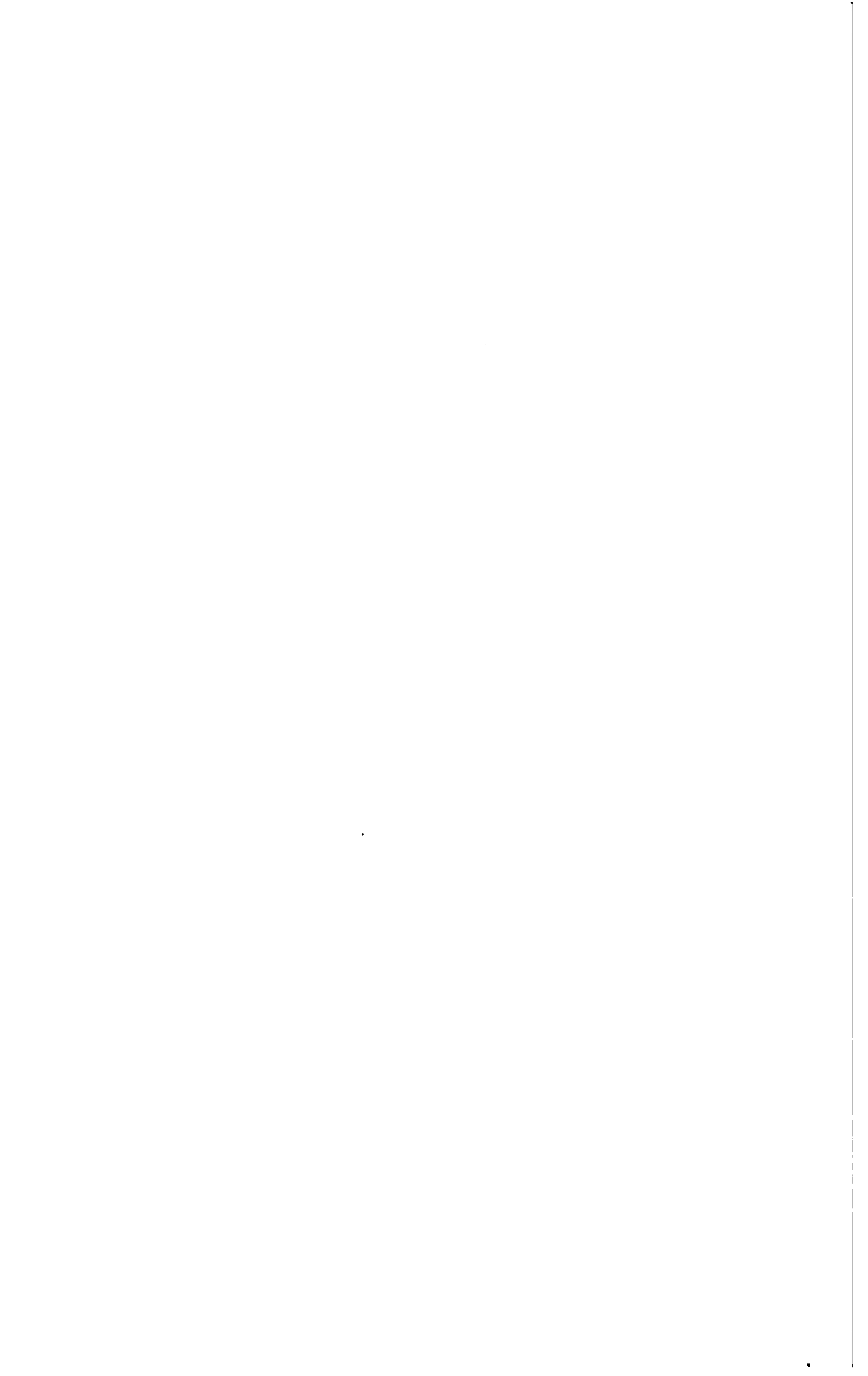
$$d_{11}^{(1)} \geqq g_1+g'_1-p_1, \qquad d_{11}^{(2)} \geqq g_2+g'_2-p_2$$

und damit den Satz:

Sind $\Phi^{(1)}$ und $\Phi^{(2)}$ zwei Covarianten von dem Gewicht p_1, beziehungsweise p_2, dem Grad g_1, beziehungsweise g_2 in den Coëfficienten der Stammform f, g'_1, beziehungsweise g'_2 in den Coëfficienten der Stammform f_1 und ist $g_1+g'_1>p_1$, $g_2+g'_2>p_2$, so ist die Resultante von $\Phi^{(1)}$ und $\Phi^{(2)}$ mindestens durch die

$$(g_1+g'_1-p_1)(g_2+g'_2-p_2)^{\text{te}}$$

Potenz der Resultante von f und f_1 theilbar.



Über einen Phasenindicator und einige mit demselben ausgeführte Messungen

von

Prof. **J. Puluj.**

(Mit 9 Textfiguren.)

Herr O. Fröhlich[1] hat in zwei Abhandlungen dargelegt, wie man das Telephon dazu benützen kann, um den Einfluss der Selbstinduction auf Wechselströme und veränderliche Gleichströme objectiv darzustellen und die verursachten Stromänderungen qualitativ zu verfolgen. In jenen Abhandlungen wurde an einer Stelle bemerkt, dass man das Telephon auch zur Messung der Phasendifferenz und der Selbstinduction von Wechselströmen verwenden könnte, es sind aber solche Messungen vom Herrn Verfasser bis jetzt noch nicht veröffentlicht worden.

In der vorliegenden Abhandlung wird ein Phasenindicator beschrieben, mit welchem eine Reihe von Messungen der Phasendifferenz von Wechselströmen und der Selbstinduction inductiver Stromkreise ausgeführt wurde.

Der Apparat besteht im Wesentlichen aus zwei gleich langen, mit silberplattirten, ebenen Glasspiegeln und eisernen konischen Ankern versehenen Stahlfedern, welche mit Hilfe von zwei kleinen Elektromagneten und Wechselströmen in schwingende Bewegung versetzt werden können. Die Stahlfedern sind 7·5 *mm* breit, 0·3 *mm* dick und 21 *mm* lang. Die Elektromagnete sind 21 *mm* lang und haben je 6 × 15 Windungen eines 1 *mm* dicken, gut isolirten Kupferdrahtes von 29 *mm*

[1] Elektrotechnische Zeitschrift, 1887, S. 210. 1889, S. 345.

äusserem und 13·4 *mm* innerem Durchmesser. Je eine Spule und Feder sind an einem rechtwinklig gebogenen eisernen Ständer, wie in Fig. 1 dargestellt ist, befestigt, und der 9 *mm* dicke, vorn konisch abgedrehte, rückwärts mit Gewinde und Schraubenkopf versehene Eisenkern lässt sich durch Drehung im Ständer und Spule dem Federanker nähern oder von demselben entfernen und dadurch die Grösse der Schwingungsamplitude der Feder beliebig ändern. Zwei so ausgestattete Elektromagnetspulen sind auf Säulen verschiebbar angebracht und zusammen auf einem Holzbrett mit drei Stellschrauben montirt. Die eine der Federn ist nur für verticale, die zweite

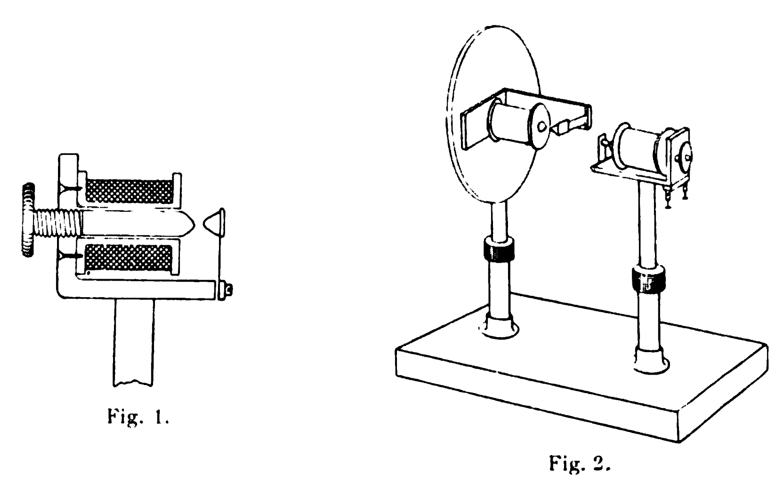


Fig. 1.

Fig. 2.

für verticale und horizontale Schwingungen eingerichtet und beide werden entweder in verticaler oder in gekreuzter Stellung verwendet, je nachdem man die Phasendifferenz der Schwingungscomponenten direct oder indirect beobachten, beziehungsweise messen will. Der ganze Apparat ist in Fig. 2 perspectivisch in $^1/_4$ natürlicher Grösse dargestellt.[1]

Bei Anwendung der Lissajous'schen Schwingungsmethode geben die Federn bekanntlich im Allgemeinen eine elliptische Schwingungscurve, welche je nach der Grösse der Schwingungsamplituden und der Phasendifferenz der Wechsel-

[1] Der Apparat wurde in der Werkstatt des Physikalischen Cabinets vom Mechaniker Ludwig Castagna ausgeführt.

ströme ihre Gestalt und Lage ändert, bei beliebigem Verhältniss der Schwingungsamplituden und 0°, 180°, 360°,... Phasendifferenz in eine gerade Linie und bei Gleichheit der Amplituden und einer Phasendifferenz von 90°, 270°,... in einen Kreis übergeht.

Es muss vor Allem bemerkt werden, dass die Federn doppelt so viele Schwingungen machen als der erregende Wechselstrom, da bei jeder Stromrichtung der weiche Anker der schwingenden Feder von dem Eisenkern des Elektromagnets angezogen wird. Eine Feder mit polarisirtem Anker würde dagegen ebensoviele Schwingungen machen wie der erregende Wechselstrom, und dasselbe müsste der Fall sein, wenn der Eisenkern des Elektromagnets, wie beim Telephon, polarisirt wäre.

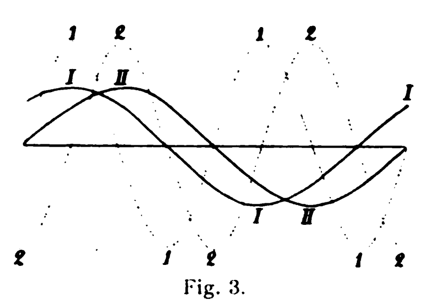


Fig. 3.

Für die Zwecke der Messungen werden die Federn so abgestimmt, dass ihre Schwingungszahl nahezu ein ganzes Vielfaches der Periodenzahl des verwendeten Wechselstromes ist. Dies geschieht in der Weise, dass man den Grundton der schwingenden Feder mit dem Ton vergleicht, den der Wechselstrom in einem dazu passenden Elektromagnet, einem Transformator u. s. w. erzeugt und durch Änderung der Länge der Federn eine angenäherte Consonanz der Töne herstellt. Es wäre jedoch überflüssig, eine vollständige Übereinstimmung der beiden Töne herbeiführen zu wollen, da es nicht möglich ist, bei Wechselstrommaschinen einen vollkommen gleichmässigen Gang, wenn auch nur für die Dauer eines Versuches, zu erzielen. Nach meiner Erfahrung ist es für die Messungen sogar vortheilhafter, die schwingende Feder gegen den Wechselstrom ein wenig zu verstimmen. Die Schwingungscurve zeigt

allerdings rasch auf einander folgende kleine Zuckungen, diese sind aber bei den Messungen nicht so störend wie die grösseren und langsameren Veränderungen der Schwingungscurve, welche durch Interferenz der eigenen und der elektromagnetisch erzeugten Schwingungen der Feder entstehen.

Wie bereits oben bemerkt wurde, wird der Federanker vom Elektromagnet bei jeder Richtung des erregenden Wechselstromes angezogen. Dieser Umstand hat zur Folge, dass die Phasendifferenz der beiden Schwingungscomponenten doppelt so gross sein muss wie die Phasendifferenz der beiden Wechselströme. Dies ist aus Fig. 3 deutlich zu ersehen, in welcher mit I und II die Stromcurven, mit 1 und 2 die Schwingungscurven einer Feder für den Fall dargestellt sind, dass die Wechselströme eine Phasendifferenz von 45°, die Schwingungscomponenten eine solche von 90° haben.

Theorie des Phasenindicators.

Haben die erregenden Wechselströme bei gekreuzter Stellung der Federn des Phasenindicators eine Phasendifferenz φ und die Periodicität $p = 2\pi n = \frac{2\pi}{T}$, wird also mit $2n$ die Anzahl Stromwechsel in einer Secunde und mit T die Periode bezeichnet, so sind die horizontale und die verticale Schwingung der Federn durch die Formeln

$$x = A \sin 2pt \qquad 1)$$

$$y = B \sin (2pt - 2\varphi) \qquad 2)$$

gegeben, in welchen A und B die Amplituden und t die Zeit bedeuten. Die beiden Schwingungscomponenten geben für die Phasendifferenz $2\varphi = 0°$ eine in Fig. 4 dargestellte geradlinige Schwingung GG, deren Lage die erste Nullage heissen soll. Diese geradlinige Schwingung übergeht bei zunehmender Phasendifferenz in eine elliptische Schwingungscurve, die im Sinne des Uhrzeigers erfolgt. Bei wachsender Phasendifferenz dreht sich die Ellipse mit ihrer längeren Axe gegen die positive Ordinatenaxe, fällt mit derselben bei 90° Phasendifferenz zusammen, dreht sich bei weiter zunehmender Phasendifferenz im nächsten Quadranten in der Richtung gegen die negative

Abscissenaxe und übergeht bei 180° Phasendifferenz wieder in eine geradlinige Schwingung $G'G'$, deren Lage die zweite Nulllage heissen soll. Bei weiterer Zunahme der Phasendifferenz wird die resultirende Schwingung wieder elliptisch, erfolgt aber von nun an entgegen dem Sinne des Uhrzeigers und die Axe der Ellipse nähert sich in entgegengesetzter Richtung abermals der positiven Ordinatenaxe, fällt mit derselben bei 270° Phasendifferenz zusammen, dreht sich bei weiter zunehmender Phasendifferenz gegen die erste Nullage GG und erreicht dieselbe bei 360° Phasendifferenz, wobei die elliptische Schwingung wieder in eine geradlinige ubergeht.

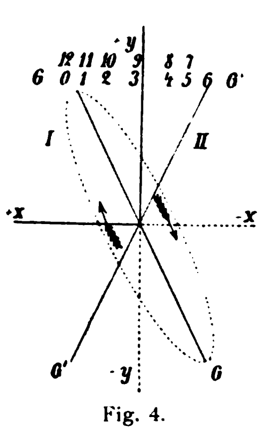


Fig. 4.

In Fig. 4 ist die resultirende Schwingung der Componenten

$$x = 0\cdot 5 \sin 2pt,$$
$$y = \sin(2pt - 30°)$$

dargestellt. Der Endpunkt der längeren Axe der Ellipse fällt bei einer Phasendifferenz von 30°, 60°, 90°, . . ., 330° und 360° nacheinander mit den Punkten 1, 2, 3, . . ., 11 und 12 zusammen.

Aus dem Gesagten folgt, dass die elliptische Schwingungscurve entweder links von der positiven Ordinatenaxe, im Quadranten der ersten Nullage, oder rechts, im Quadranten der zweiten Nullage, liegen kann: links für Phasendifferenzen der Schwingungscomponenten von 0° bis 90° und von 270° bis 360°, rechts dagegen für Phasendifferenzen von 90° bis 180° und von 180° bis 270°.

Die elliptische Schwingungscurve hat bei einer gegebenen Phasendifferenz der Schwingungscomponenten eine bestimmte Lage und schneidet von der Abscissen- und Ordinatenaxe die Längen $2a$ und $2b$ ab, deren Grösse von der betreffenden Amplitude und der Phasendifferenz der Wechselströme abhängt. Diese Abhängigkeit ergibt sich aus den Ausdrücken 1) und 2); man erhält

$$\text{für } t = 0, \quad x = 0, \ y = -b = B \sin(-2\varphi),$$

$$\text{für } t = \frac{\pi}{2p}, \ x = 0, \ y = +b = B \sin(\pi - 2\varphi),$$

somit in beiden Fällen

$$\sin 2\varphi = \frac{b}{B} \tag{3}$$

und analog

$$\sin 2\varphi = \frac{a}{A}, \tag{4}$$

welche Beziehungen zunächst für alle Phasendifferenzen zwischen 0° und 90° gelten.

Liegt die Phasendifferenz der Schwingungscomponenten im zweiten Quadranten, also zwischen 90° und 180°, so wird man setzen müssen:

$$\frac{b}{B} = \sin(180° - 2\varphi). \tag{5}$$

Bei Phasendifferenzen im dritten und vierten Quadranten ist noch zu berücksichtigen, dass b sein Zeichen ändert und somit zu setzen ist im dritten Quadranten

$$\frac{b}{B} = \sin(2\varphi - 180°) \tag{6}$$

und im vierten Quadranten

$$\frac{b}{B} = \sin(360° - 2\varphi). \tag{7}$$

Aus dem Gesagten ist zu ersehen, dass es möglich ist, mit Hilfe von Schwingungscurven die Phasendifferenz φ der Wechselströme zu bestimmen. Zu diesem Zwecke wird man entweder den Abschnitt b der Ordinatenaxe und die Amplitude B oder die analogen Längen a und A messen und aus dem Verhältnisse derselben φ nach einer von den obigen Formeln 3), 5), 6), 7) berechnen.

Zur leichteren Messung der Längen b und B werden auf einem Projectionsschirme zwei gekreuzte und auf einander

senkrecht stehende Centimeterscalen angebracht und an denselben der innerhalb der Ellipse liegende Abschnitt der Ordinatenaxe $2b$ und die Höhe der Ellipse $2B$ unmittelbar abgelesen. Dabei muss die elliptische Schwingungscurve zu dem Kreuzungspunkte der Scalen symmetrisch liegen, und ausserdem müssen die beiden Schwingungscomponenten, wenn dieselben einzeln erregt werden, genau parallel zu den betreffenden Scalenrichtungen erfolgen.

Es muss hier noch bemerkt werden, dass aus der Schwingungscurve nicht entnommen werden kann, wann die Phasendifferenz der Schwingungscomponenten im ersten oder vierten, beziehungsweise im zweiten oder dritten Quadranten liegt. Dies könnte nur dann der Fall sein, wenn die Rotationsrichtung der Lichtcurve wahrgenommen werden könnte, was jedoch nicht möglich ist; es lässt sich absolut nicht unterscheiden, in welchem Sinne die elliptische Schwingung erfolgt. Es muss daher anderweitig bekannt sein, in welchem Quadranten die Phasendifferenz der Wechselströme liegen muss, und dementsprechend wird man im Quadranten der ersten Nullage zwischen den Formeln

$$\varphi = \frac{1}{2} \arcsin \frac{b}{B} \quad \text{und} \quad \varphi = \pi - \frac{1}{2} \arcsin \frac{b}{B}$$

und im Quadranten der zweiten Nullage zwischen den Formeln

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{b}{B} \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{b}{B}$$

zu wählen haben.

Die erste Nullage der resultirenden Schwingung lässt sich dagegen leicht experimentell in der Weise bestimmen, dass man die hintereinander geschalteten Elektromagnete des Phasenindicators mit dem Wechselstrom erregt und die Lage der resultirenden Schwingungscurve beobachtet. Noch einfacher lässt sich der Quadrant der ersten Nullage dadurch ermitteln, dass man die Ablenkung des Lichtbildes beobachtet, wenn beide Federn an die Eisenkerne der Elektromagnete angedrückt werden.

Objective Darstellung der Schwingungscurven.

Bei allen Versuchen, die weiter mitgetheilt werden sollen, wurden die Schwingungscurven auf einem mit gekreuzter Centimeterscala versehenen, vom Phasenindicator ungefähr 3 *m* weit entfernten Schirme in der in Fig. 5 angedeuteten Weise projicirt und zu diesem Zwecke ein paralleles Strahlenbündel von einer elektrischen Lampe verwendet. Das auf dem Schirme mit

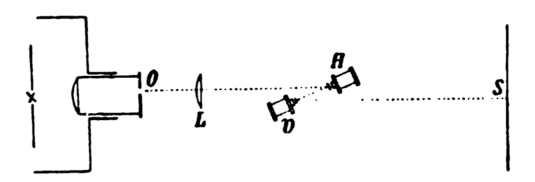


Fig. 5.

der Linse *L* entworfene Bild der Öffnung, von welcher das Strahlenbündel kam, war eine scharf begrenzte runde Lichtscheibe von ungefähr 1 *cm* Durchmesser, infolge dessen die in Fig. 7 dargestellte Schwingungscurve aus einem ebenso breiten Lichtband bestand. Der Projectionsschirm wurde durch Verschiebung so eingestellt, dass auf der horizontalen Scala beiderseits vom Kreuzungspunkte durch den äusseren Rand der Lichtcurve links und durch den inneren Rand derselben rechts gleiche Stücke begrenzt wurden und dieselbe Symmetrie der Lichtcurve auch bezüglich der verticalen Scala erreicht wurde.

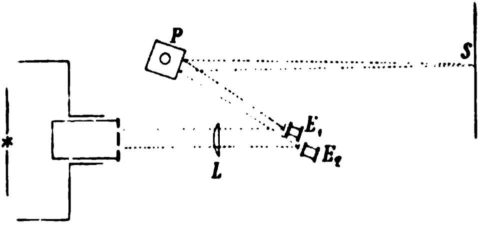


Fig. 6.

Nach dieser Justirung des Schirmes wurde im geeigneten Momente wiederholt der Abschnitt $2b$ auf der verticalen Centimeterscala abgelesen und abwechselnd die Höhe $2B$ der elliptischen Schwingungscurve (Fig. 7) in der Weise bestimmt, dass

die tiefste Stelle des äusseren und die höchste Stelle des inneren Randes der Lichtcurve auf dem Schirme mit Bleistift bezeichnet und dann auf die verticale Scala projicirt wurden. Oft bediente ich mich zur Bestimmung der Höhe $2B$ eines Blattes Papier mit vielen parallel gezogenen geraden Linien. Dieser Hilfsschirm wurde auf dem Projectionsschirme so eingestellt, dass die erste Linie, bei Parallelstellung derselben zur horizontalen Scala, die höchste Stelle des inneren Randes der Lichtcurve berührte, worauf die tiefste Stelle des äusseren Randes der Lichtcurve markirt wurde. Der Abstand dieser Stelle von der ersten Linie in Centimetern gemessen gibt die Höhe der Schwingungscurve.

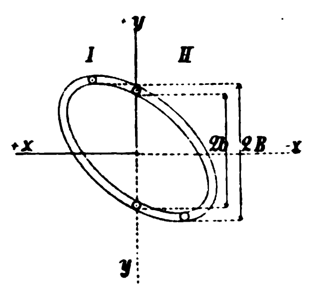


Fig. 7.

Dass die Messung von $2b$ und $2B$ in der angedeuteten Weise vorgenommen werden muss, ergibt sich aus der einfachen Überlegung, dass bei der schwingenden Bewegung eines ausgedehnten Lichtbildes der Weg zu messen ist, den ein und derselbe Punkt des Lichtbildes in einer bestimmten Zeit zurücklegt. Es ist daher selbstverständlich, dass die genannten Längen auch von Mitte zur Mitte der bandförmigen Lichtcurve gemessen werden können.

Will man die Phasendifferenz der Schwingungscomponenten, beziehungsweise der Wechselströme nicht messen, sondern direct beobachten, so kann dieselbe in der in Fig. 6 angedeuteten Weise objectiv dargestellt werden. Aus zwei runden kleinen Öffnungen der elektrischen Lampe fallen zwei parallele Strahlenbündel auf die Spiegel des Phasenindicators und werden nach ihrer Reflexion von denselben und dem Polygonalspiegel P durch die Linse L auf dem Projectionsschirme zu zwei Lichtbildern vereinigt. Durch Drehung eines der beiden Elektromagnete des Phasenindicators um die verticale Axe werden die Bilder zum Decken gebracht. Die beiden Federn des Phasenindicators sind in diesem Falle für verticale Schwingungen eingestellt und geben daher im schwingenden Zustande nur eine einzige verticale Lichtlinie, welche durch Drehung des Polygonalspiegels analysirt werden kann und zwei in der Phase

gegeneinander verschobene Sinuslinien gibt. In dieser Weise lässt sich mit dem Phasenindicator die Wirkung der Selbstinduction auf Wechselströme demonstriren, wenn man in einem von zwei Stromzweigen die Selbstinduction durch Hineinschieben eines entsprechend grossen Eisenkernes in eine Drahtspule ändert.

Messung der Phasendifferenz verzweigter Wechselströme.

Mit dem beschriebenen Phasenindicator wurde nach der Lissajous'schen Schwingungsmethode zunächst eine Reihe von Messungen der Phasendifferenz zwischen verzweigten Wechselströmen ausgeführt und zu diesem Zwecke eine Normalrolle von bekanntem Selbstinductionscoëfficienten verwendet, aus welchem die Phasendifferenz auch berechnet werden konnte. Bei diesen Versuchen bildeten die Normalrolle und eine Spule des Phasenindicators den einen Stromzweig, während in dem zweiten Stromkreise 12 parallel geschaltete Glühlampen von je 100 Volt und die zweite Spule des Phasenindicators eingeschaltet waren.

Die verwendete Normalrolle wurde in einer früheren Abhandlung beschrieben[1] und hatte 16 Lagen von je 17, zusammen 272 Windungen von 23·634 *cm* mittlerem Radius eines 0·11765 *cm* dicken, gut isolirten Kupferdrahtes von 8·71 Ω Widerstand bei 20° C. Für den Selbstinductionscoëfficienten dieser Rolle wurde nach der Maxwell-Stefan'schen Formel der Werth $0\cdot077295 \times 10^9$ *cm* berechnet und ausserdem experimentell nach zwei Methoden ein etwas grösserer Mittelwerth $0\cdot08077 \times 10^9$ *cm* gefunden.

Zur Berechnung der Phasendifferenz aus der Selbstinduction der Normalrolle diente die bekannte Formel

$$\tan \varphi = p \frac{L_2 r_1 - L_1 r_2}{r_1 r_2 + p^2 L_1 L_2}, \qquad 8)$$

in welcher p die Periodicität der beiden Wechselströme, $r_1 r_2$ die Ohm'schen Widerstände und $L_1 L_2$ die Selbstinductionscoëfficienten der Stromzweige bedeuten. Aus dieser Formel ist

[1] Diese Sitzungsber., 1891, Bd. 100, S. 332.

zu ersehen, dass zur Berechnung der Phasendifferenz ausser dem Selbstinductionscoëfficienten der Normalrolle die Selbstinductionscoëfficienten der Spulen des Phasenindicators bekannt sein müssen. Die letzteren wurden mit dem Phasenindicator selbst in folgender Weise bestimmt.

Da beide Spulen des Phasenindicators gleich gross sind und gleich viele Windungen haben, so kann angenommen werden, dass sie auch gleiche Selbstinductionscoëfficienten λ haben. Setzt man nun in die obige Formel $L_1 = L_2 = \lambda$, so ergibt sich

$$\tan\varphi = p\,\frac{(r_1 - r_2)\lambda}{r_1 r_2 + p^2\lambda^2}, \tag{9}$$

und wenn wegen der Kleinheit von λ das quadratische Glied $p^2\lambda^2$ gegen $r_1 r_2$ vernachlässigt wird,

$$\tan\varphi = \frac{p(r_1 - r_2)\lambda}{r_1 r_2}. \tag{10}$$

Nach der Gleichung 10) lässt sich aus der mit dem Phasenindicator beobachteten Phasendifferenz φ der Selbstinductionscoëfficient λ angenähert bestimmen. Die Gleichung 9) liefert für λ zwei Werthe:

$$\lambda = \frac{r_1 - r_2 \pm \sqrt{(r_1 - r_2)^2 - 4 r_1 r_2 \tan^2\varphi}}{2p\tan\varphi},$$

von denen der mit dem Näherungswerthe von λ besser übereinstimmende Werth der richtige sein wird.

Zur Bestimmung von λ wurden die beiden Spulen des Phasenindicators in Parallelschaltung mit verzweigten Wechselströmen erregt. Da beide Stromzweige gleiche Widerstände hatten, so wurde als resultirende Schwingung, wie zu erwarten war, eine gerade Linie in der ersten Nullage erhalten. Nach Zuschaltung eines inductionslosen Widerstandes von $0{\cdot}208\ \Omega$ in einem der beiden Stromzweige verwandelte sich dagegen die gerade Linie in eine Ellipse mit den Abmessungen $2b = 25$ *mm*, $2B = 76$ *mm*. Es ist daher

$$\frac{b}{B} = 0 \cdot 32895 = \sin 2\varphi$$

$$2\varphi = 19^\circ 2$$
$$\varphi = 9^\circ 6$$
$$\tan \varphi = 0 \cdot 169137.$$

Während dieses Versuches machte die sechspolige Wechselstrommaschine 1026 Touren in einer Minute, daher war die Periodicität $p = 322 \cdot 3$; die Widerstände der beiden Stromzweige waren:

$$r_1 = 0 \cdot 3326\ \Omega$$
$$r_2 = 0 \cdot 5326\ \Omega$$

Mit diesen Werthen erhält man nach 10) den angenäherten Werth

$$0 \cdot 00047 \times 10^9\ cm$$

und nach Gleichung 9) die Werthe:

$$0 \cdot 00055 \times 10^9\ cm$$

und

$$0 \cdot 00312 \times 10^9\ cm,$$

von denen der erstere der richtige sein wird.

Der Controle halber wurde der Selbstinductionscoëfficient der beiden Spulen des Phasenindicators auch nach der Rayleigh'schen Brückenmethode mit einem ballistischen Galvanometer, das eine Schwingungsdauer $T = 7 \cdot 67$ Secunden hatte, bestimmt und für beide hintereinander geschaltete Spulen der Werth

$$0 \cdot 00114 \times 10^9\ cm$$

erhalten. Es ist daher der Selbstinductionscoëfficient einer Spule

$$\lambda = 0 \cdot 00057 \times 10^9\ cm,$$

welcher nur um $3 \cdot 5\%$ grösser ist als der aus der beobachteten Phasendifferenz berechnete Werth

$$0 \cdot 00055 \times 10^9\ cm.$$

Dieser Unterschied könnte auch damit erklärt werden, dass nach der Rayleigh'schen Messungsmethode nur schwache

Ströme verwendet wurden, während die Elektromagnete des Phasenindicators bei der Bestimmung der Phasendifferenz mit Strömen von ungefähr 1 Ampère erregt wurden.

Es sei noch bemerkt, dass das quadratische Glied $p^2\lambda^2$ durch zwei Beobachtungen eliminirt werden könnte, wenn es möglich wäre, die Tourenzahl der Wechselstrommaschine innerhalb entsprechender Grenzen zu ändern. In diesem Falle wäre die Selbstinduction der Elektromagnete des Phasenindicators durch den Ausdruck

$$\lambda = \frac{p_2^2-p_1^2}{p_1 p_2} \cdot \frac{r_1 r_2}{r_1-r_2} \cdot \frac{\tan\varphi_1 \tan\varphi_2}{p_2 \tan\varphi_2 - p_1 \tan\varphi_1} \quad 11)$$

bestimmt.

Hier folgen die Resultate der Messungen, welche mit der Normalrolle ausgeführt wurden. Bei diesen war die Selbstinduction des einen Stromzweiges, in welchem die Normalrolle und ein Elektromagnet des Phasenindicators eingeschaltet waren,

$$L_2 = 0\cdot077845 \times 10^9\, cm$$

und die Selbstinduction des zweiten Stromzweiges

$$L_1 = 0\cdot00055 \times 10^9\, cm.$$

Die Widerstände der beiden Zweige waren

$$r_2 = 9\cdot535\, \Omega$$
$$r_1 = 28\cdot000\, \Omega$$

Bei der Periodicität des Wechselstromes $p = 319\cdot5$ lag die elliptische Schwingungscurve im Quadranten der zweiten Nullage, und ihre Abmessungen waren:

$$2b = 8\cdot6 \quad cm$$
$$2B = 13\cdot0 \quad cm$$

In Berücksichtigung, dass die Phasendifferenz der beiden Zweigströme höchstens 90° betragen kann, somit die Phasendifferenz der Schwingungscomponenten im zweiten Quadranten liegen muss, wird in diesem Falle zu setzen sein:

$$\frac{b}{B} = 0\cdot6615 = \sin(180° - 2\varphi)$$

$$180° - 2\varphi = 41°42$$
$$2\varphi = 138\cdot58$$
$$\varphi = 69\cdot29.$$

Mit Zugrundelegung des theoretischen Selbstinductionscoëfficienten der Normalrolle erhält man nach den Formeln

$$\tan\varphi_2 = \frac{pL_2}{r_2}, \quad \tan\varphi_1 = \frac{pL_1}{r_1}$$

die Werthe:

$$\varphi_2 = 69°02$$
$$\varphi_1 = 0\cdot36,$$

somit

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 68°66.$$

Wird aber bei der Berechnung für den Selbstinductionscoëfficienten der Normalrolle der experimentell bestimmte Mittelwerth $0\cdot08077 \times 10^9$ *cm* gesetzt, so findet man für die Phasendifferenz den Werth:

$$\varphi = 69°49,$$

welcher mit dem aus den Abmessungen der Schwingungscurve berechneten Werthe bis auf $0\cdot3^0/_0$ übereinstimmt. Die aus dem theoretischen Selbstinductionscoëfficienten der Normalrolle berechnete Phasendifferenz 68°66 stimmt dagegen mit 69°29 nur bis auf $0\cdot9^0/_0$ überein.

Der Versuch mit der Normalrolle wurde bei derselben Anordnung wiederholt und dabei die Klemmenspannung an den Verzweigungspunkten mit dem Cardew'schen Voltmeter, die unverzweigte Stromstärke mit einem Siemens'schen Elektrodynamometer gemessen. Es war

$$e = 37 \text{ Volt}$$
$$i = 1\cdot42 \text{ Ampère}$$
$$r_1 = 26\cdot01\,\Omega$$
$$r_2 = 9\cdot622\,\Omega$$
$$L_1 = 0\cdot00055 \times 10^9\, cm$$
$$L_2 = 0\cdot077845 \times 10^9\, cm$$
$$2n = 101\cdot1$$
$$p = 317\cdot6$$

Die elliptische Schwingungscurve lag wieder im Quadranten der zweiten Nullage, und für das Verhältniss ihrer Abmessungen wurde als Mittelwerth aus fünf Beobachtungen erhalten:

$$\frac{b}{B} = 0 \cdot 6928.$$

Die Berechnung der Phasendifferenz der beiden Stromzweige aus den Abmessungen der Schwingungscurve, aus dem theoretischen und experimentell bestimmten Selbstinductionscoëfficienten der Normalrolle liefert folgende Werthe:

$$\varphi = 68^\circ 07,\ 68^\circ 36,\ 69^\circ 21.$$

Die voranstehenden Messungen wurden durch ziemlich starke Schwankungen der Lichtcurve erschwert, welche zum Theil durch mechanische Erschütterungen der rotirenden Feldmagnete der Wechselstrommaschine, zum Theil durch Funkenbildung am Commutator der Selbsterregung der Wechselstrommaschine verursacht wurden. Die Axe der Maschine wurde daher mit einem neuen Stellring versehen und die Feldmagnete bei allen nachfolgenden Messungen von aussen mit Gleichstrom erregt, der einer Dynamomaschine entnommen wurde. Die Schwankungen der Lichtcurve wurden dadurch grösstentheils beseitigt.

Die Wiederholung der Messungen ergab folgende Resultate:

$$r_1 = 9 \cdot 62\ \Omega$$
$$r_2 = 27 \cdot 70\ \Omega$$
$$2n = 102 \cdot 6$$

und als Mittel aus 11 Beobachtungen

$$\frac{b}{B} = 0 \cdot 6237.$$

Aus diesem Verhältnisse der Abmessungen der Schwingungscurve, aus dem theoretischen und experimentell bestimmten Selbstinductionscoëfficienten der Normalrolle ergibt die Rechnung für die Phasendifferenz der Stromzweige die Werthe:

$$\varphi = 70^\circ 66,\ 68^\circ 66,\ 69^\circ 49.$$

Zum Vergleich sind nachstehend die Resultate der drei Versuche mit der Normalrolle und ihre Mittelwerthe zusammengestellt:

69°29	68°66	69°49	$2u$ = 101·7
68·07	68·36	69·21	101·1
70·66	68·66	69·49	102·6
69°34	68°56	69°40	101°8

Aus dieser Zusammenstellung ist zu ersehen, dass der aus dem experimentell bestimmten Selbstinductionscoëfficienten berechnete Mittelwerth der Phasendifferenz 69°4 mit dem Mittelwerthe 69°34, der mit dem Phasenindicator erhalten wurde, bis auf 0·1% übereinstimmt, während der aus dem theoretischen Selbstinductionscoëfficienten berechnete Mittelwerth 68°56 nur eine Übereinstimmung bis auf 1·1% zeigt.

Bestimmung der Phasendifferenz der Zweigströme mit Hilfe eines Elektrodynamometers.

Die Phasendifferenz verzweigter Wechselströme wurde mit dem Phasenindicator und zur Controle auch mit einem Elektrodynamometer für schwache Ströme in der Weise gemessen,

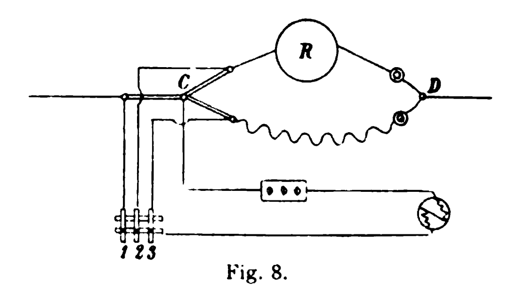


Fig. 8.

dass mit dem letzteren die Potentialdifferenzen an den Enden von drei ganz gleichen inductionslosen Widerständen im Hauptstromkreise und in den Verzweigungen bestimmt wurden. Die Anordnung der Apparate bei diesem Versuche ist aus Fig. 8 ersichtlich.

Die drei im Verzweigungspunkte *C* zusammenstossenden Hilfswiderstände von je 1·36 Ω bei 20° C. bestanden aus bifilar gespannten Neusilberdrähten. Der Widerstand des die Normal-

rolle enthaltenden Stromzweiges wurde unmittelbar nach dem Versuche mit einem Differentialgalvanometer gemessen und war

$$r_2 = 10 \cdot 95\ \Omega.$$

Der Widerstand des zweiten aus bifilar gespannten Neusilberdrähten bestehenden Stromzweiges war

$$r_1 = 33 \cdot 96\ \Omega.$$

Die Selbstinductionscoëfficienten der beiden Stromzweige waren, wie früher,

$$L_2 = 0 \cdot 077845 \times 10^9\, cm$$
$$L_1 = 0 \cdot 00055 \times 10^9\, cm.$$

Durch Stöpseln der verticalen Lamellen 1, 2 oder 3 konnte man die Potentialdifferenzen an den Enden der drei Hilfswiderstände im Hauptstromkreise und in den Verzweigungen, beziehungsweise die entsprechenden Ausschläge des Elektrodynamometers α, α_1, α_2 beobachten, welche auch den effectiven Stromstärken in den genannten Stromkreisen proportional waren. Der Widerstand im Elektrodynamometerkreise war 1246 Ω.

In dem betrachteten Falle ist, wie in einer früheren Mittheilung gezeigt wurde,[1] die Phasendifferenz der beiden Stromzweige durch die Beziehung

$$\cos \varphi = \frac{\alpha - (\alpha_1 + \alpha_2)}{2\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}} \qquad 12)$$

bestimmt.

Der Phasenindicator zeigte wieder eine elliptische Schwingungscurve im Quadranten der zweiten Nullage, und fünf Messungen ergaben für $\frac{b}{B}$ den Mittelwerth

$$0 \cdot 69646.$$

Unmittelbar nach diesem Versuche wurden die Ausschläge des Elektrodynamometers α, α_1, α_2 mit Fernrohr und einer vom Elektrodynamometer 3 *m* weit entfernten Millimeterscala beobachtet und für dieselben folgende Werthe erhalten:

---

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 102, Abth. II. a, 1893.

	α	α_1	α_2
	105·5	46·6	30·2
	105·5	47·0	30·3
	106·0	47·1	31·0
Mittel	105·7	46·9	31·5

Während der Messungen mit dem Phasenindicator und dem Elektrodynamometer machte die Wechselstrommaschine 1027, 1038, 1030, im Mittel 1032 Touren in einer Minute; es war also

$$2n = 103\cdot 2.$$

Für die Phasendifferenz der beiden Zweigströme erhält man aus den Beobachtungen mit dem Phasenindicator

$$\varphi = 67^\circ 93$$

und aus den Ablesungen am Elektrodynamometer nach Gleichung 12)

$$\varphi = 68^\circ 03,$$

welche Werthe eine sehr gute Übereinstimmung zeigen.

Die Berechnung der Phasendifferenz aus dem theoretischen und experimentell bestimmten Selbstinductionscoëfficienten der Normalrolle liefert etwas kleinere Werthe

$$\varphi = 66^\circ 25$$

und

$$\varphi = 67^\circ 15,$$

von denen der letztere auch in diesem Falle mit dem aus den Abmessungen der Schwingungscurve berechneten etwas besser übereinstimmt.

Es sei noch bemerkt, dass bei diesen Versuchen gemessen wurde

$$e = 29 \text{ V.}$$
$$i_1 = 0\cdot 853 \text{ A.}$$

Messung der Phasendifferenz beim veränderlichen Widerstande des einen der beiden Stromzweige.

Bei diesen Versuchen enthielt der eine Stromzweig acht parallel geschaltete Glühlampen und eine Spule des Phasen-

indicators, der zweite Stromzweig die zweite Spule des Phasenindicators, die Normalrolle und einen inductionslosen Widerstand, der aus mehreren circa 3 *m* langen bifilar gespannten Neusilberdrähten von solcher Dicke bestand, dass derselbe durch die verwendeten Ströme nicht merklich erwärmt wurde.

Nachstehend sind die Widerstände des die Normalrolle enthaltenden Stromzweiges r_2 und die entsprechenden, aus je drei Beobachtungen gewonnenen Mittelwerthe des Verhältnisses der Abmessungen b und B zusammengestellt

Versuch	r_2	$\frac{b}{B}$
1.	$r_2 = 9 \cdot 77\ \Omega$,	$\frac{b}{B} = 0 \cdot 65422$
2.	15·39	0·86056
3.	26·29	1·00000
4.	36·31	0·92274
5.	42·08	0·86943
6.	58·20	0·76545

Bei den Versuchen 1 und 2 lag die elliptische Schwingungscurve mit der längeren Axe im Quadranten der zweiten Nulllage, beim Versuche 3 fiel diese Axe mit der verticalen Scala zusammen, und die Ellipse verwandelte sich bei gleichen Schwingungsamplituden in einen Kreis; bei den Versuchen 4, 5 und 6 lag dagegen die Ellipse mit ihrer grösseren Axe im Quadranten der ersten Nullage.

Während dieser Versuche machte die Wechselstrommaschine im Mittel 1030 Touren in einer Minute, es war somit $2n = 103$ und $p = 323 \cdot 6$.

Nachstehend folgen die Widerstände und die entsprechenden, aus $\frac{b}{B}$ berechneten Werthe der Phasendifferenz der beiden Stromzweige.

r_2		φ
$r_2 = 9 \cdot 77\ \Omega$	$180 - 2\varphi = 40^\circ 87$	$\varphi = 69^\circ 57$
15·39	$180 - 2\varphi = 59 \cdot 39$	60·31
26·29	$2\varphi = 90 \cdot 00$	45·00
36·31	$2\varphi = 67 \cdot 33$	33·67
42·08	$2\varphi = 60 \cdot 38$	30·19
58·20	$2\varphi = 49 \cdot 95$	24·98

Weiter sind diese Phasendifferenzen φ mit den aus dem theoretischen und experimentell bestimmten Selbstinductions-coëfficienten der Normalrolle bestimmten Werthen φ' und φ'' und die Differenzen $\varphi-\varphi'$ und $\varphi-\varphi''$ zusammengestellt.

φ	φ'	$\varphi-\varphi'$	φ''	$\varphi-\varphi''$
69°57	68°47	+1°10	69°30	+0°27
60·31	58·24	+2·07	59·34	+0·97
45·00	43·44	+1·56	44·68	+0·32
33·67	34·40	—0·73	35·60	−1·93
30·19	30·57	—0·38	31·68	—0·49
24·98	23·07	+1·91	23·98	+1·00

Auch hier ist die bessere Übereinstimmung der Werthe φ'' mit φ nicht zu verkennen.

Die mit dem Phasenindicator erhaltenen Werthe φ können dazu benützt werden, um aus denselben den Selbstinductions-coëfficienten der Normalrolle nach der Formel

$$L = \frac{r_2 \tan(\varphi+\varphi_1)}{p} - \lambda \qquad 13)$$

zu berechnen. Mit Benützung der Werthe

$$\lambda = 0\cdot00055 \times 10^9\,cm$$
$$p = 323\cdot6$$
$$r_1 = 30\,\Omega$$
$$\varphi_1 = 0°34$$

gibt die Rechnung folgende Werthe für L:

φ	L
φ = 69°57	L = 0·0820 Q.
60·31	840
45·00	817
33·67	751
30·19	761
24·98	845
Mittel	0·0806 Q.

Der letzte Mittelwerth stimmt mit dem experimentell bestimmten Werthe 0·08077 Q. bis auf $^1/_4$ Procent überein.

Versuche mit einer zweispuligen Normalrolle.

Es wurde mit dem Phasenindicator auch die Phasendifferenz zwischen dem primären und secundären Strome in einer zweispuligen Normalrolle gemessen, welche im Physikalischen Cabinete angefertigt und 1891 von Herrn Dr. Sahulka in einer Abhandlung beschrieben wurde.[1] Die Normalrolle besteht aus zwei gleichen Spulen von 24·07 *cm* mittlerem Radius und je 561 Windungen eines 0·636 *mm* dicken, gut isolirten Kupferdrahtes. Der Abstand der Mittelpunkte der beiden Spulen beträgt 5·008 *cm* und die Widerstände derselben bei 20° C. sind 39·24 Ω und 40·23 Ω.

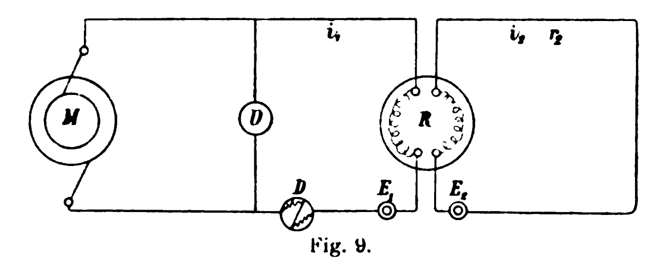


Fig. 9.

Für den Selbstinductionscoëfficienten jeder Spule ergab die Rechnung nach der Maxwell-Stefan'schen Formel den Werth

$$L = 0\cdot 32583 \times 10^9 \, cm,$$

während die Messungen des Herrn Dr. Sahulka einen etwas grösseren Mittelwerth

$$L = 0\cdot 33657 \times 10^9 \, cm.$$

lieferten.

Fig. 9 zeigt die Anordnung der Apparate: M ist eine Wechselstrommaschine, V ein Hummel'sches Voltmeter, D ein Siemens'sches Elektrodynamometer für starke Ströme, R die zweispulige Normalrolle, E_1, E_2 die beiden Elektromagnete des Phasenindicators. Bei den weiter folgenden Versuchen wurde gemessen: e_1 die Klemmenspannung und i_1 die Stromstärke des

[1] Sahulka, Bestimmung der Coëfficienten der Selbstinduction und gegenseitigen Induction mit dem Differentialgalvanometer. Elektrotechnische Zeitschrift, 1891, Heft 28, S. 371.

primären Stromkreises, r_2 Widerstand des secundären Stromkreises im warmen Zustande unmittelbar nach den Versuchen, N die Tourenzahl der Wechselstrommaschine und die Längen $2b$ und $2B$ der Schwingungscurve.

Am 25. Mai wurden zwei Versuche mit folgenden Resultaten ausgeführt:

1. Versuch.

$$e_1 = 403 \text{ V.} \qquad N = 1014$$
$$i_1 = 3 \cdot 63 \text{ A.} \qquad 2n = 101 \cdot 4$$
$$r_2 = 40 \cdot 527 \; \Omega \qquad p = 318 \cdot 6$$

Die Schwingungscurve lag im Quadranten der ersten Nulllage, und ihre Abmessungen waren:

$$2b = 11 \cdot 3 \; cm$$
$$2B = 17 \cdot 3 \; cm$$
$$\frac{b}{B} = 0 \cdot 65318$$

Nun ist hier Folgendes zu berücksichtigen. Die Theorie der Wechselwirkung zweier Stromkreise bei Anwendung harmonischer Wechselströme liefert für die Phasendifferenz φ zwischen dem primären und secundären Stromkreise die Beziehungen:

$$\varphi = 90° + \psi \qquad 14)$$

$$\tan \psi = \frac{pL_2}{r_2}, \qquad 15)$$

aus denen zu ersehen ist, dass, wie gross auch L_2 sein mag, der Winkel ψ höchstens den Werth 90° erreichen kann, und die von der Selbstinduction des primären Stromkreises unabhängige Phasendifferenz φ im zweiten Quadranten liegen muss. Daraus folgt weiter, dass die Phasendifferenz der schwingenden Federn 2φ im vierten Quadranten liegen muss und somit im vorliegenden Falle zu setzen ist:

$$0 \cdot 65318 = \sin (360° - 2\varphi)$$
$$360° - 2\varphi = 40°78$$
$$2\varphi = 319 \cdot 22$$
$$\varphi = 159 \cdot 61$$

2. Versuch.

$$2b = 11{\cdot}4\,cm, \quad 2B = 18{\cdot}0\,cm$$

$$\frac{b}{B} = 0{\cdot}63333 = \sin(360^\circ - 2\varphi)$$

$$\varphi = 160^\circ 35.$$

Beide Versuche geben den Mittelwerth:

$$\varphi = 159^\circ 98.$$

Nach den Formeln 14) und 15) erhält man mit Zugrundelegung des theoretischen Selbstinductionscoëfficienten des secundären Stromkreises:

$$\tan\psi = \frac{318{\cdot}6 \times 0{\cdot}32583}{40{\cdot}527} = 2{\cdot}5615$$

$$\psi = 68^\circ 68$$

und die Phasendifferenz

$$\varphi = 158^\circ 68.$$

Wenn dagegen für den Selbstinductionscoëfficienten L_2 der experimentell bestimmte Mittelwerth gesetzt wird, so ist

$$\tan\psi = \frac{318{\cdot}6 \times 0{\cdot}336578}{40{\cdot}527} = 2{\cdot}6460$$

$$\psi = 69^\circ 3$$

und

$$\varphi = 159^\circ 3.$$

Dieser Werth stimmt mit dem Mittelwerthe, der mit dem Phasenindicator erhalten wurde, besser überein als der aus dem theoretischen Selbstinductionscoëfficienten berechnete Werth der Phasendifferenz $\varphi = 158^\circ 68$. Die Differenz beträgt nur $0{\cdot}4^0/_0$.

Es muss noch bemerkt werden, dass bei dieser Berechnung die Selbstinduction des Phasenindicators vernachlässigt wurde und dass mit Berücksichtigung derselben die Phasendifferenz im letzten Falle, statt $159^\circ 3$, $159^\circ 33$ wäre.

Am 26. Mai wurde die Spule mit dem Widerstande $r_2 = 39{\cdot}24\,\Omega$ als secundäre verwendet und die Phasendifferenz der beiden Ströme bei $e_1 = 413$ V., $i_1 = 3{\cdot}64$ A., $2n = 101{\cdot}7$, $p = 319{\cdot}5$ bestimmt. Die elliptische Schwingungscurve lag mit

ihrer grösseren Axe wieder im Quadranten der ersten Nullage, und es wurde gemessen:

$$2b = 9 \cdot 8\, cm$$
$$2B = 15 \cdot 5\, cm,$$

daher

$$\frac{b}{B} = 0 \cdot 632258,$$

und

$$\varphi = 160^\circ 4.$$

Die Berechnung der Phasendifferenz aus der Selbstinduction des secundären Stromkreises gibt mit Zugrundelegung des theoretischen Werthes von L

$$\varphi = 159^\circ 21$$

und mit dem experimentell bestimmten Selbstinductionscoëfficienten

$$\varphi = 159^\circ 81.$$

Auch in diesem Falle stimmt der letzte Werth mit dem aus den Abmessungen der Schwingungscurve berechneten besser, und zwar bis auf 0·37% überein.

Aus den Gleichungen 14) und 15) ergibt sich noch eine einfache Methode, nach welcher die Selbstinduction der Bewicklungen eines Transformators bestimmt werden kann. Zu diesem Zwecke wird zuerst die eine und dann die andere Bewicklung als secundärer Stromkreis verwendet, in beiden Fällen mit dem Phasenindicator die Phasendifferenz zwischen dem primären und secundären Strome bestimmt und L_2 aus den Phasendifferenzen nach der Formel

$$L_2 = \frac{r_2 \tan(\varphi - 90^\circ)}{p} \tag{16)}$$

berechnet.

Aus den voranstehenden drei Versuchen erhält man für den Selbstinductionscoëfficienten der Spulen der Normalrolle:

0·342
0·356
0·345
Mittel 0·348 Q.,

welcher Mittelwerth mit dem experimentell bestimmten bis auf $3 \cdot 2\%$ übereinstimmt.

Versuche mit einem Transformator.

Im Nachstehenden werden noch einige Messungen mitgetheilt, welche in Gemeinschaft mit meinen Schülern an einem ringförmigen Transformator von Ganz & Co. in den praktischen Übungen ausgeführt wurden.

Der für eine Leistung von 1400 Watt construirte Transformator hat eine primäre und zwei secundäre Bewicklungen aus einem $1 \cdot 8\, mm$, beziehungsweise $1 \cdot 2\, mm$ dicken Kupferdrahte. Die secundären Bewicklungen können mit Hilfe einer einfachen Vorrichtung entweder serienweise oder parallel geschaltet werden. Die primäre Bewicklung hat einen Widerstand von $1 \cdot 204\ \Omega$, die secundäre einen solchen von $0 \cdot 0466\ \Omega$ bei Hintereinanderschaltung der beiden Spulen und bei 20° C. Das Umsetzungsverhältniss des Transformators bei Hintereinanderschaltung der secundären Spulen ist 6.

Bei den Messungen war in den primären und secundären Stromkreis je eine Spule des Phasenindicators eingeschaltet, und der Gesammtwiderstand des secundären Stromkreises war $2 \cdot 2844\ \Omega$.

Es wurde gemessen: die Klemmenspannung des primären Stromkreises e mit dem Cardew'schen Voltmeter, die Tourenzahl der Wechselstrommaschine N in einer Minute und die Längen $2b$ und $2B$ und diese Messungen ergaben folgende Werthe.

$$e = 29\ \text{V.}$$
$$N = 1016$$
$$2b = 20\, cm$$
$$2B = 35\, cm,$$

somit

$$\frac{b}{B} = 0 \cdot 57143.$$

Die Schwingungscurve lag mit ihrer grösseren Axe im Quadranten der ersten Nullage. Aus diesem und dem bereits auf S. 836 mitgetheilten Grunde muss daher gesetzt werden:

$$0 \cdot 57143 = \sin(360^\circ - 2\varphi),$$
$$\varphi = 162^\circ 58.$$

Die Phasendifferenz zwischen dem primären und secundären Stromkreise lässt sich aber, wie bereits oben dargelegt wurde, aus dem Selbstinductionscoëfficienten der secundären Bewicklung nach den Formeln 14) und 15) berechnen.

Im vorliegenden Falle wurde der Selbstinductionscoëfficient der secundären Bewicklung des Transformators nach einer von Prof. Ferraris zuerst angewendeten Methode aus dem Verhältnisse der effectiven Stromstärken des primären und secundären Stromkreises, jedoch mit dem Unterschiede bestimmt, dass zur indirecten Messung der Ströme nicht ein Elektrometer, sondern ein Siemens'sches Elektrodynamometer für schwache Ströme mit dem Selbstinductionscoëfficienten $l = 0 \cdot 4436 \times 10^9\ cm$ und Widerstand $\rho = 302 \cdot 2\ \Omega$ benützt wurde. Die zu diesem Zwecke im primären und secundären Stromkreise eingeschalteten inductionslosen Widerstände, an deren Enden die Potentialdifferenzen gemessen wurden, waren $\rho_1 = 1 \cdot 36\ \Omega$ und $\rho_2 = 0 \cdot 2\ \Omega$.

Die Theorie der Wechselwirkung zweier Stromkreise mit gegenseitiger Induction liefert bei Anwendung harmonischer Wechselströme, wenn mit $J_1 J_2$ die maximale, mit $i' i''$ die effective primäre, beziehungsweise secundäre Stromstärke, mit L_2 der Selbstinductionscoëfficient des secundären Stromkreises und mit M die gegenseitige Induction der beiden Stromkreise bezeichnet wird, die bekannte Beziehung

$$\left(\frac{J_1}{J_2}\right)^2 = \left(\frac{i'}{i''}\right)^2 = \frac{r_2 + p^2 L_2^2}{p^2 M^2}. \qquad 17)$$

Diese Beziehung gestattet, wenn das Verhältniss der effectiven Stromstärken bei zwei oder mehreren Werthen des Widerstandes r_2 des secundären Stromkreises gemessen wird, sowohl M als L_2 zu berechnen.

Betreffend die Anwendung des Elektrodynamometers zur Messung der Potentialdifferenzen muss hier jedoch Folgendes bemerkt werden. Wenn ein Elektrodynamometer mit dem Widerstande ρ und Selbstinduction l in einer Zweigleitung an zwei

Punkte des Hauptkreises angelegt wird, zwischen denen sich ein Widerstand ρ_1 befindet, so ist die unverzweigte effective Stromstärke i' des primären Stromkreises durch den Ausdruck

$$i'^2 = A^2 \alpha_1 \left(\frac{\rho + \rho_1}{\rho_1}\right)^2 \left[1 + \frac{p^2 l^2}{(\rho + \rho_1)^2}\right]$$

gegeben, in welchem A den Reductionsfactor und α_1 den Ausschlag des Elektrodynamometers bezeichnet. Für den secundären Stromkreis ist analog:

$$i''^2 = A^2 \alpha_2 \left(\frac{\rho + \rho_2}{\rho_2}\right)^2 \left[1 + \frac{p^2 l^2}{(\rho + \rho_2)^2}\right],$$

daher

$$\left(\frac{i'}{i''}\right)^2 = \frac{1}{m^2} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \tag{18}$$

worin der Kürze halber

$$m^2 = \frac{(\rho + \rho_2)^2 + p^2 l^2}{(\rho + \rho_1)^2 + p^2 l^2}$$

gesetzt wurde.

Nach Einsetzung des unter 18) stehenden Ausdruckes in die Gleichung 17) erhält man:

$$\left(\frac{1}{m} \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2 \frac{\alpha_1}{\alpha^2} = \frac{r_2^2 + p^2 L_2^2}{p^2 M^2}$$

oder, wenn der Einfachheit halber gesetzt wird,

$$\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{m}{pM}\right)^2 = a, \quad \left(\frac{\rho_1 m L_2}{\rho_2 M}\right)^2 = b, \tag{19}$$

die Beziehung

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = a r_2^2 + b. \tag{20}$$

Durch Beobachtung des Verhältnisses $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ bei zwei oder mehreren verschiedenen Werthen des Widerstandes r_2 können die Constanten a und b und aus den letzteren L_2 und M nach den Formeln

$$L_2 = \frac{1}{p}\sqrt{\frac{b}{a}} \quad \text{und} \quad M = \frac{m\rho_1}{p\rho_2\sqrt{a}} \qquad 21)$$

berechnet werden.

Nachstehend folgen die Ergebnisse der diesbezüglichen Messungen: α_1 und α_2 sind Mittelwerthe aus je drei Beobachtungen und bedeuten Ausschläge des Elektrodynamometers, welche mit Fernrohr an einer 3 *m* weit entfernten Millimeterscala beobachtet wurden und r_2 sind die zugehörigen Widerstände des secundären Stromkreises.

r_2	α_1	α_2	$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$
2·1194 Ω	113·35	92·65	1·223
3·8594	43·90	30·00	1·463

Die Berechnung dieser Beobachtungen nach den Formeln 20) und 21) gibt folgende Werthe:

$$a = 0\cdot023059$$
$$b = 1\cdot11942$$
$$M = 0\cdot13976 \times 10^9\,cm$$
$$L_2 = 0\cdot02184 \times 10^9\,cm.$$

Nun lässt sich, wie bereits oben dargelegt wurde, aus dem Selbstinductionscoëfficienten des secundären Stromkreises die Phasendifferenz zwischen dem primären und secundären Strome in der bekannten Weise berechnen.

In Berücksichtigung, dass beim Einschalten des Phasenindicators die Selbstinduction des secundären Stromkreises um $0\cdot00055 \times 10^9$ *cm* erhöht wurde, erhält man

$$\tan\psi = \frac{319\cdot2 \times 0\cdot02238}{2.2844} = 3\cdot1247$$
$$\psi = 72°25$$

und somit die Phasendifferenz zwischen dem primären und secundären Strome

$$\varphi = 162°25,$$

welcher Werth nur um $0\cdot1\%$ kleiner ist als die Phasendifferenz, welche aus den Abmessungen der elliptischen Schwingungscurve erhalten wurde.

Zum Schlusse sei hier noch Folgendes bemerkt. Aus den Coëfficienten L_2 und M lässt sich nach der bekannten, für pollose Transformatoren geltenden Näherungsformel

$$M^2 = L_1 L_2$$

der Selbstinductionscoëfficient L_1 des primären Stromkreises berechnen. Man erhält für denselben den Werth

$$L_1 = 0 \cdot 89436 \times 10^9 \, cm.$$

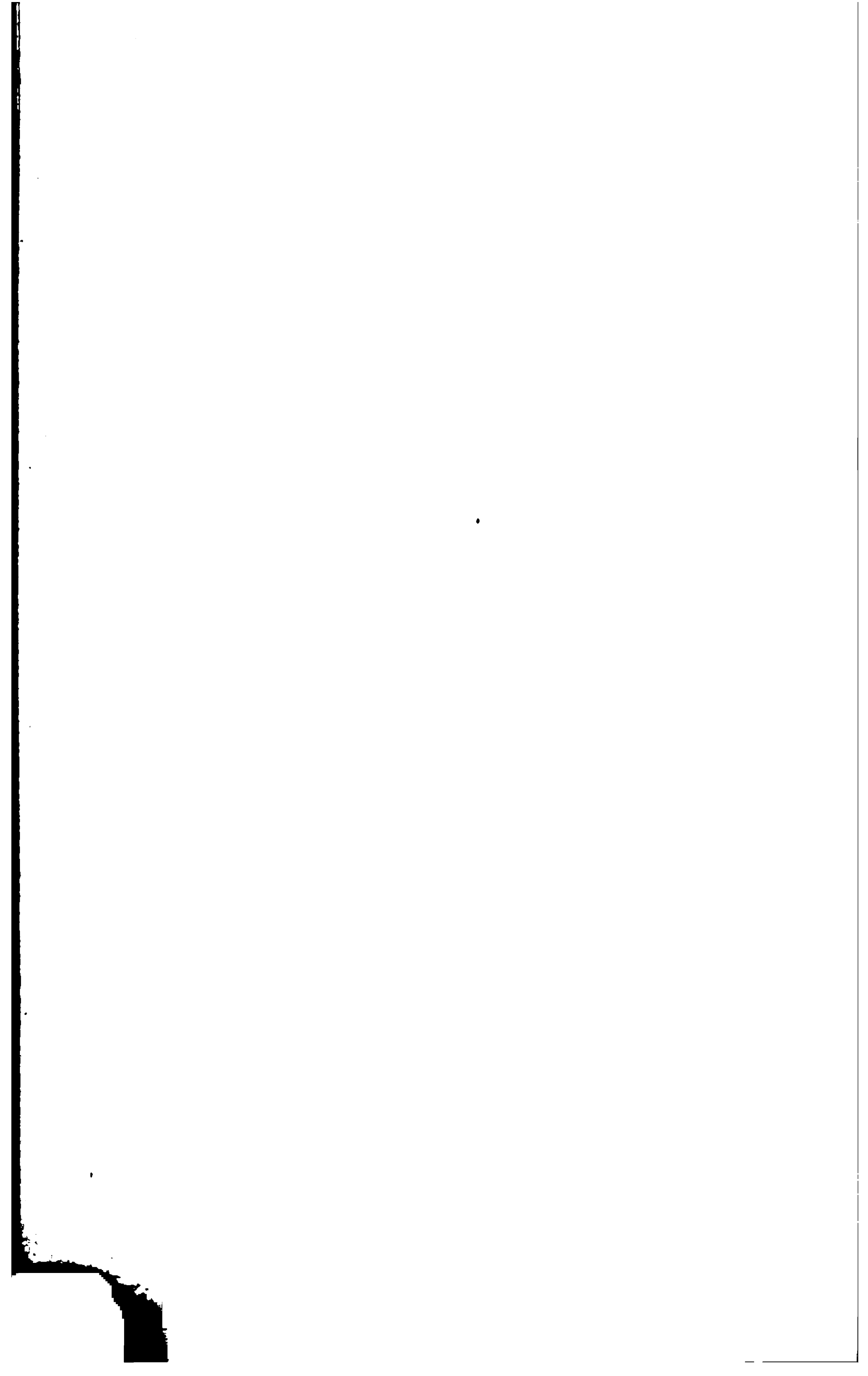
Würde man die primäre Bewicklung des Transformators als secundären Stromkreis verwenden, so müsste beim Gesammtwiderstande des secundären Stromkreises $r_2 = 1 \cdot 44 \, \Omega$ die Phasendifferenz der beiden Ströme

$$\varphi = 179^\circ 7$$

betragen und die Schwingungscurve im Quadranten der ersten Nullage liegen. Die Schwingungscurve wird fast eine gerade Linie bilden, da im angenommenen Falle das Verhältniss der Abmessungen der elliptischen Schwingungscurve

$$\frac{b}{B} = \sin (360^\circ - 2\varphi) = 0 \cdot 0105$$

sehr klein ist.



Krystallographisch-optische Bestimmungen IV

von

Viktor v. Lang,

w. M. k. Akad.

(Mit 34 Textfiguren.)

Das Nachfolgende enthält die ausführliche Mittheilung der krystallographischen Untersuchungen, die ich an verschiedenen meist in den hiesigen Laboratorien dargestellten Substanzen ausgeführt habe. Wo es anging, habe ich auch die Orientirung der optischen Elasticitätsaxen zu bestimmen gesucht.

1. Unterschwefelsaures Silberoxyd

$$Ag_2S_2O_6 + 2H_2O.$$

Krystalle von Prof. Lieben.

Diese Substanz wurde schon von Heeren (Pogg. Ann. Bd. 7, S. 191) als rhombisch mit dem Axenverhältniss

$$a : b : c = 0 \cdot 985 : 1 : 0 \cdot 58$$

bestimmt. Meine Krystalle waren vollkommen ausgebildete Tetraëder und daher wegen der Seltenheit, mit der diese Form selbständig im rhombischen System auftritt, nicht ohne Interesse. Sie eigneten sich wegen ihrer schlechten Flächenbeschaffenheit allerdings nicht zur Messung; es kann aber kaum zweifelhaft sein, dass sie die hemiëdrische Ausbildung der Form (111) sind. Die Krystalle des unterschwefelsauren Silberoxydes sind nämlich sehr gut spaltbar nach den Flächen des Prismas (110). Spaltete man nun an den Tetraëdern die Ecken ab, so erhielt man mit der betreffenden Tetraëderfläche

horizontale Kanten, so dass das Verhältniss der Parameter in der xy-Ebene für das Prisma und das Tetraëder jedenfalls dasselbe ist.

Für die Neigung zweier Spaltungsflächen zu einander aber wurde beobachtet

$$110.\bar{1}10 = 88°53' \ (89°8' \text{ gerechnet}).$$

Spaltungsstücke parallel den Prismenflächen zeigen im Polarisationsapparate eine optische Axe am Rande des Gesichtsfeldes und in der Mitte desselben positiven Charakter. Aus der rhombischen Symmetrie folgt hieraus, dass die Axenebene senkrecht zur Prismenrichtung sein muss. Da die am Rande sichtbare Axe gegen den spitzen Winkel des Prismas zu gerichtet ist, so hat die diesen Winkel halbirende X-Axe negativen Charakter und ist wahrscheinlich erste Mittellinie. Das Schema der optischen Orientirung würde demnach

𝔞𝔠𝔟.

Für das isomorphe unterschwefelsaure Natron hat man das Schema 𝔞𝔠𝔟 [Grailich und Lang, diese Sitzungsber., Bd. 27 (1857), S. 3] und dasselbe Schema nach Topsoe [Pogg. Ann., Erg.-Bd. 6 (1874), S. 533] auch für das isomorphe Lithionsalz.

2. Ameisensaures Natron

$NaCHO_2$.

Krystalle dargestellt von Prof. Loschmidt.

Diese Verbindung wurde schon von A. Fock gemessen, Z. f. Kryst. u. Min., Bd. 7 (1883), S. 61, nach welchem dieselbe monosymmetrisch mit den Elementen $a:b:c = 0\cdot9197:1:0\cdot9703$, $\beta = 58°9'$ ist. Hier stimmen meine Messungen, die Ausbildung der Krystalle war jedoch eine ganz andere, da die Form (010) ganz fehlt, die Formen (110) und ($\bar{1}$11) aber gleich stark ausgebildet waren. Ausserdem fand sich in der Zone [110.$\bar{1}$11] noch die Fläche 021 vor. Mit Rücksicht hierauf dürfte es sich

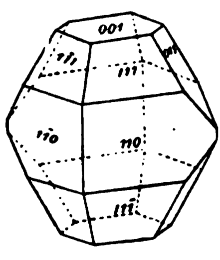


Fig. 1.

empfehlen, den Flächen (110) lieber die Bezeichnung (111) zu geben, wodurch die Elemente dieser Verbindung werden

$$a:b:c = 0\cdot9196:1:1\cdot6512,$$
$$\eta = 93°\,37'.$$

Beobachtete Formen: 001, 011, 111, 11$\bar{1}$.

	Fock gerechnet	Fock beobachtet	Lang beobachtet
111.1$\bar{1}$1 =	76° 0′	76° 0′	
11$\bar{1}$.1$\bar{1}\bar{1}$	79 0	79 10	79°36′
001.111	65 26	65 26	
111.11$\bar{1}$	44 34		
11$\bar{1}$.00$\bar{1}$	70 0	70 0	70 11
110.$\bar{1}$11	85 56	85 36	85 44
111.011	42 6		42 32
011.$\bar{1}$11	43 50		43 35

Die Krystalle sind, wie schon A. Fock fand, vollkommen spaltbar nach den Flächen der Formen (001) und (11$\bar{1}$).

3. Ameisensaures Lithion

$LiCHO_2 + H_2O$.

Krystalle von Prof. Loschmidt.

Handl (diese Sitzungsber., Bd. 42) findet für diese Verbindung:

Krystallsystem: rhombisch.

$$a:b:c = 0\cdot6510:1:0\cdot4845.$$

Formen: 010, 101, 110, 021, 111.

Hiemit stimmen meine Messungen vollkommen überein; an den von mir untersuchten Krystallen war auch noch die Fläche 100 vorhanden. Ich erhielt

	Gerechnet	Beobachtet
110.100 =	56°56′	56°54′
110.010	33 4	33 12
110.111	48 24	48 3
201.100	45 54	45 52

Die optische Untersuchung ergab, dass die erste Mittellinie mit negativem Charakter senkrecht zur Fläche 100, die Normale senkrecht zur Fläche 010 ist. Das Schema der optischen Orientirung wird daher

$$\dot{b}\underline{a}c.$$

4. Methyläthylacrylsäure

$$C_6H_{10}O_2.$$

Siehe Ad. Lieben und S. Zeisel, diese Sitzungsber., Bd. 87, II (1883), S. 171.

Krystallsystem: monosymmetrisch.

$$a:b:c = 1{\cdot}4087:1:0{\cdot}3847,$$
$$\eta = 104°\,38'.$$

Formen: 110, 011.

	Gerechnet	Beobachtet
$110.\bar{1}10 =$	72°34′	*72°34′
$011.0\bar{1}1$	40 50	*40 50
110.011	65 5	64 48
$\bar{1}10.011$	81 53	81 42
$\bar{1}10.0\bar{1}1$	98 7	98 2

Die einfachen Krystalle sind nach der Z-Axe verlängert.

5. Zweifach oxalsaures Äthylamin

$$C_2H_7NH,\ C_2HO_4.$$

Krystalle von Prof. Loschmidt.

Diese Krystalle wurden von Loschmidt als rhombisch bestimmt, diese Sitzungsber., Bd. 51, II (1865), S. 12. Die optische Untersuchung lehrte aber, dass die Krystalle in das monosymmetrische System gehören, welches Resultat auch durch neue Messungen bestätigt wurde. Es ist darnach

Krystallsystem: monosymmetrisch.

$$a:b:c = 3{\cdot}267:1:2{\cdot}446,$$
$$\eta = 101°\,32'.$$

Formen: 100, 001, 110, 101, $\bar{1}01$, $\bar{1}11$.

	Gerechnet	Beobachtet	Loschmidt
{ 100.001 =	78°26′	*78°26′	79° —
{ 001.$\bar{1}$01	60 0		61 4′
{ 100.110	72 39	*72 39	72 30
{ 110.$\bar{1}$10	34 42		
{ 001.110	86 34	86 29	
{ 110.11$\bar{1}$	21 40	*21 40	21 40
110.101	81 25		81 12
11$\bar{1}$.100	77 55	77 55	78 20
{ $\bar{1}$01.$\bar{1}$11	65 16		
{ $\bar{1}$11.11$\bar{1}$	49 28		
110.$\bar{1}$11	36 27	36 41	

Meine nach der Fläche 100 plattenförmigen Krystalle, welche die von Loschmidt beobachteten Flächen 101 und $\bar{1}$01 nicht aufweisen, zeigen im Polarisationsapparat beide Axen in einer Ebene senkrecht zur Kante 100.001. Dieselben sind aber unter verschiedenem Winkel zur Flächennormale geneigt. Die Ebene der optischen Axen fällt daher mit der Symmetrieebene zusammen. Geneigte Dispersion konnte an den beiden Axen, deren Winkel in Luft 89° 20′ betrug, nicht beobachtet werden, doch scheint der auf der Fläche 100 gemessene Axenwinkel für roth kleiner zu sein als für violett. Der optische Charakter ist negativ.

6. Adipinsaures Ammoniak

$C_6H_8(NH_4)_2O_4$.

Siehe H. Weidel, diese Sitzungsber., Bd. 99, II (1890), S. 536.

Krystallsystem: monosymmetrisch.

$$a:b\,c = 0\cdot 9838 : 1 : 0\cdot 6962,$$
$$\eta = 98°\,16'.$$

Formen: 001, 110, 011, $\bar{2}$01.

	Gerechnet	Beobachtet	Arppe
{ 110.1$\bar{1}$0 =	88°28′	88°32′	87° —
{ 110.001	84 5	*84 5	
{ 011.01$\bar{1}$	110 52	111 18	114 —
{ 011.001	34 34	*34 34	

	Gerechnet	Beobachtet	Arppe
010.110 =	61°14′	*61°14′	
011.$\bar{1}$10 =	71 53	71 58	
20$\bar{1}$.001 =	60 22	61 —	
20$\bar{1}$.110 =	69 15		
(100.001) =	81 44		82° —

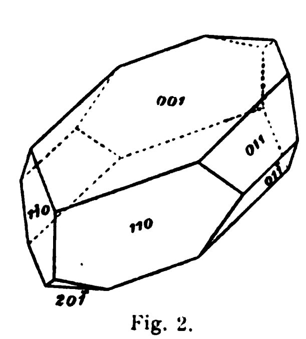


Fig. 2.

Die Krystalle sind tafelförmig nach der Fläche 001 ausgebildet und nach der X-Axe verlängert. Der monosymmetrische Charakter derselben wurde schon von Arppe (Journ. f. prakt. Ch., Bd. 35, S. 205) auf Grund der oben angegebenen, ungefähren Messungen erkannt. Die von ihm beobachtete Endfläche 100 war an meinen Krystallen nicht vorhanden. Durch die Fläche 001 untersucht zeigen die Krystalle eine optische Axe, dementsprechend die Symmetrieebene die Ebene der optischen Axen ist.

7. Monochloraldehydhydrat

$CH_2Cl, CHO + {}^1/_2 H_2O.$

Siehe K. Natterer, diese Sitzungsber., Bd. 86, II (1882), S. 29.

Krystallsystem: monosymmetrisch.

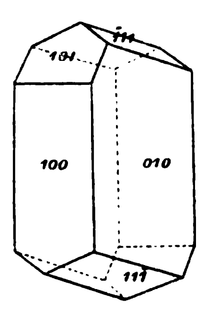


Fig. 3.

$a:b:c = 1\cdot2972 : 1 : 1\cdot05442$

$\eta = 95°14'$.

Formen: 100, 010, 101, $\bar{1}$11.

	Gerechnet	Beobachtet
101.100 =	62°51′	*62°51′
$\bar{1}$11.$\bar{1}$00	73 52	*73 52
$\bar{1}$11.010	62 40	62 28
$\bar{1}$11.$\bar{1}\bar{1}$1	54 40	54 52
$\bar{1}$11.101	51 24	*51 24

Die Krystalle sind in der Richtung der Symmetrieaxe verkürzt, in der Richtung der Z-Axe verlängert.

8. Polymeres des Monochloraldehyds

$(CH_2Cl, CHO)n$.

Siehe K. Natterer, diese Sitzungsber., Bd. 86, II (1882), S. 49.

Krystallsystem: rhombisch.

$$a : b : c = 0 \cdot 6140 : 1 : 0 \cdot 6527.$$

Formen: 010, 110, 101, 111, 121.

	Gerechnet	Beobachtet
010.110 =	58°27′	58°15′
110.$\bar{1}$10	63 6	63 18
101.$\bar{1}$01	93 30	*93 30
110.101	51 38	*51 38
101.$\bar{1}$2$\bar{1}$	87 22	
$\bar{1}$2$\bar{1}$.$\bar{1}\bar{1}$0	35 46	35 —
010.121	48 12	
010.111	65 34	65 30
110.111	38 43	38 20
111.$\bar{1}\bar{1}$1	102 34	
121.$\bar{1}\bar{2}$1	118 34	
111.$\bar{1}$11	83 36	
121.$\bar{1}$21	65 46	

Die Krystalle sind in der Richtung der Z-Axe verlängert; sie sind nadelförmig und an ihren Enden durch einzelne Flächen der Formen 101, 111 und 121 zugeschärft, desshalb und da letztere Flächen auch wegen Rundung sich nicht sehr gut zur Messung eignen, konnte das Krystallsystem nicht mit absoluter Sicherheit bestimmt werden.

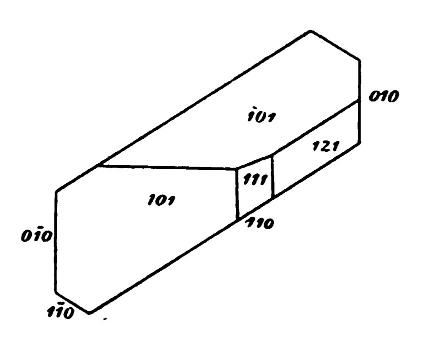


Fig. 4.

9. Zersetzungsproduct von Propionaldehyd-Ammoniak

$C_{15}H_{29}N_3$.

Siehe A. Waage, diese Sitzungsber., Bd. 88, II (1883), S. 494.

Krystallsystem: asymmetrisch.

$$a:b:c = 1:1\cdot1848:0\cdot8015,$$
$$\xi = 94°58, \eta = 72°25', \zeta = 101°58'.$$
$$010.001 = 88°32', 001.100 = 79°0', 100.010 = 106°57'.$$

Formen: 100, 010, 001, 101, 011.

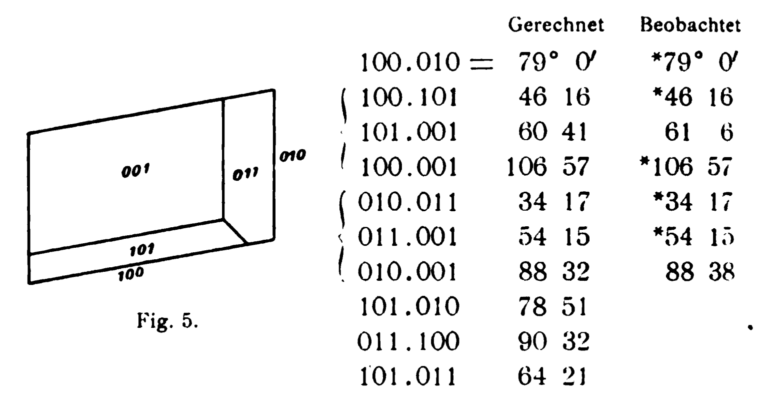


Fig. 5.

	Gerechnet	Beobachtet
100.010 =	79° 0'	*79° 0'
100.101	46 16	*46 16
101.001	60 41	61 6
100.001	106 57	*106 57
010.011	34 17	*34 17
011.001	54 15	*54 15
010.001	88 32	88 38
101.010	78 51	
011.100	90 32	
101.011	64 21	

Die Krystalle sind in der Richtung der X-Axe verkürzt, in der Richtung der Z-Axe verlängert.

Theilbarkeit faserig nach der Fläche 010.

10. β-Dinitro-Dibrombenzol

$C_6H_2Br_2N_2O_4$.

Siehe F. Schiff, diese Sitzungsber., Bd. 99, II. b. (1890), S. 360.

Krystallsystem: rhombisch.

$$a:b:c = 0\cdot8847:1:0\cdot5700.$$ [1]

Formen: 100, 010, 001, 110, 101, 011, 111.

[1] A. a. O. steht im Axenverhältniss irrthümlich 0·8541 statt 0·8847.

	Gerechnet	Beobachtet
110.010	= 48°30′	48°50′
110.1$\bar{1}$0	83 0	
110.100	41 30	41 16
010.011	60 19	
011.0$\bar{1}$1	59 22	—
100.101	57 13	56 30
101.$\bar{1}$01	65 34	
110.011	70 51	
011.$\bar{1}$01	43 5	
$\bar{1}$01.$\bar{1}\bar{1}$0	66 5	
001.111	40 42	*40 42
111.110	49 18	49 34
100.111	60 46	61 7
111.011	29 14	
010.111	64 24	64 48
111.101	25 36	
111.1$\bar{1}$1	51 12	*51 12
$\bar{1}$11.101	68 6	68 13

Die Krystalle sind Tafeln, gebildet von den Flächen 100, welche durch die Flächen 110 und 111 einen sechsseitigen Umriss erhalten. Die Flächen 010 und 001 treten sehr untergeordnet auf, die Fläche 101 nur als recht gute Spaltungsfläche. Fig. 6 ist eine Projection auf die Fläche 001.

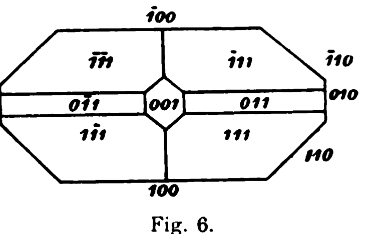


Fig. 6.

Die Ebene der optischen Axen ist parallel der Fläche 100, die erste Mittellinie mit negativem Charakter parallel der Z-Axe. Die Doppelbrechung ist ungemein stark, und der Charakter war nur bei Na-Beleuchtung zu erkennen. Das Schema der optischen Orientirung wird

abc.

Die untersuchte Verbindung zeigt in krystallographischer Hinsicht einige Ähnlichkeit mit den von Descloizeaux (Ann. Chim. Phys. [4], t. 15, p. 231) gemessenen beiden Dinitrochlor-

benzol. Derselbe fand beide Verbindungen rhombisch, und zwar die α-Verbindung mit dem Axenverhältniss $a:b:c = 0\cdot8086:1:$ $:0\cdot7128$, die β-Verbindung mit dem Verhältniss $a:b:c =$ $= 0\cdot8346:1:0\cdot3866$.

11. Campherdichlorid

$C_{10}H_{16}Cl_2$.

Siehe F. V. Spitzer, diese Sitzungsber., Bd. 81, II (1880), S. 596.

In den a. a. O. mitgetheilten Resultaten meiner Messungen ist durch ein Versehen für das Axenverhältniss $b:c$ der reciproke Werth gesetzt. Auch habe ich später noch wohl ausgebildete Krystalle von Dr. Spitzer erhalten, welche die Fläche 111 zeigten. Die krystallographischen Verhältnisse dieser Substanz sind somit gegeben durch

Krystallsystem: rhombisch.

$$a:b:c = 0\cdot9174:1:0\cdot5930.$$

Formen: 100, 010, 011, 110, 111.

	Gerechnet	Beobachtet
010.110 =	47°28′	*47°28′
110.1$\bar{1}$0	85 4	
010.011	59 20	*59 20
011.0$\bar{1}$1	81 20	
110.011	69 50	69 53
100.111	60 56	
111.$\bar{1}$11	58 8	
010.111	63 31	63 32
111.1$\bar{1}$1	52 58	
110.111	48 44	48 42

Die Krystalle sind prismatisch parallel der Z-Axe durch Vorherrschen der Flächen 010 und 110. Bei den später untersuchten Krystallen war auch die Fläche 010 stark entwickelt, während die Flächen 110 zurücktraten.

Platten, die senkrecht zur Längsrichtung herausgespalten wurden, liessen bei Na-Licht erkennen, dass sie senkrecht zu einer Mittellinie der optischen Axen sind, und gaben für dieselbe einen negativen Charakter. Platten parallel der Fläche 100 zeigten, dass die Ebene der optischen Axen parallel der Längsrichtung ist, und gaben positiven Charakter. Wahrscheinlich ist letztere Mittellinie die erste, da etwas schief geschnittene Platten eine Axe am Rande zeigten. Das Schema der optischen Orientirung wird demzufolge

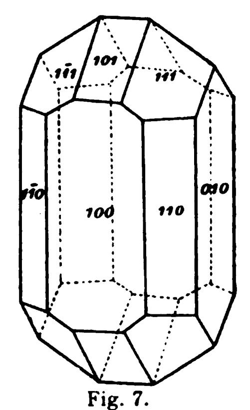


Fig. 7.

$\underset{+}{c}ba$.

12. Dibromcapronsäure

$C_6H_{10}O_2Br_2$.

Siehe Ad. Lieben und S. Zeisel, diese Sitzungsber., Bd. 87, II (1883), S. 178.

Krystallsystem: monosymmetrisch.

$$a:b:c = 0\cdot9565:1:1\cdot5331,$$
$$\eta = 94°36'.$$

Formen: 001, 110, 011.

	Gerechnet	Beobachtet
110.1$\bar{1}$0 =	87°16′	*87°16′
110.001	86 40	*86 40
{ 011.001	56 48	*56 48
{ 011.01$\bar{1}$	66 24	
110.011	52 28	52 38

Die Krystalle sind kurze Prismen (110), geschlossen durch die Endflächen (001), untergeordnet treten noch die Flächen (011) auf.

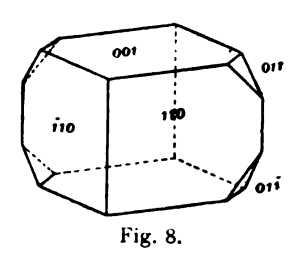


Fig. 8.

Spaltbarkeit unvollkommen parallel 001.

Auf Fläche 001 sieht man im Polarisationsapparat beide optische

Axen am Rande des Gesichtsfeldes, die Ebene derselben steht senkrecht auf der Symmetrieebene und ist etwas schief zur Fläche 001. Der optische Charakter ist positiv und $\rho < v$.

13. Chelidonsäure

$C_7H_4O_6$.

Krystalle von Prof. A. Lieben.

Krystallsystem: monosymmetrisch.

$$a:b:c = 3 \cdot 2102 : 1 : 1 \cdot 2288,$$
$$\eta = 123° 16'.$$

Formen: 100, 001, 110, 101, 011.

	Gerechnet	Beobachtet
100.101 =	41°55′	*41°55′
101.001	14 49	*14 49
100.001	56 44	
110.100	69 34	*69 34
110.$\bar{1}$10	40 52	
101.110	74 56	74 56
110.01$\bar{1}$	57 27	57 40
01$\bar{1}$.10$\bar{1}$	47 37	46 50
011.001	45 47	46 10
011.0$\bar{1}$1	91 32	
110.011	36 22	

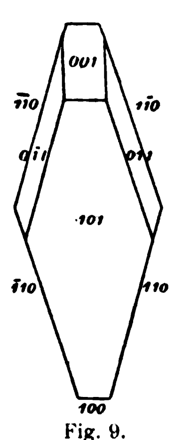


Fig. 9.

Die Krystalle sind dünne rhombische Plättchen, begrenzt von den Flächen 100 und 101, welches beide ausgezeichnete Spaltungsflächen sind. In der Richtung der *Z*-Axe gesehen geben die Plättchen die in Fig. 9 dargestellte Projection.

Auf der Spaltungsfläche 101 gibt die Untersuchung Polarisationsapparate beide optische Axen, wobei die zweite Mittellinie parallel der Symmetrieaxe geht, die erste Mittellinie mit negativem Charakter aber nahezu senkrecht zur Fläche 101 ist. Die optischen Axen zeigen im Einklange mit der angegebenen Orientirung

starke horizontale Dispersion und $\rho < v$. Der scheinbare Axenwinkel in Luft beträgt ungefähr 40°.

14. Chinindiäthyljodid

$C_{20}H_{24}N_2O_2(C_2H_5J)_2+3H_2O$.

Siehe Zd. H. Skraup, diese Sitzungsber., Bd. 84, II (1881), S. 645.

Krystallsystem: monosymmetrisch.

$$a:b:c = 1\cdot7291:1:1\cdot2135,$$
$$\eta = 107°6'.$$

Formen: 100, 001, 110, $\bar{1}11$.

	Gerechnet	Beobachtet
100.001 =	72°54′	
100.110	58 10	*58°10′
110.$\bar{1}$10	62 20	
110.001	81 15	*81 15
$\bar{1}$10.$\bar{1}$11	52 5	52 12
$\bar{1}$11.001	46 40	*46 40
$\bar{1}$11.110	62 24	
$\bar{1}$11.11$\bar{1}$	101 46	

Die sehr kleinen, canariengelben Krystalle sind durch das Vorherrschen der Fläche 001 Plättchen, welche durch die begrenzenden Prismenflächen 110 eine rhombische Gestalt erhalten. Die Fläche $\bar{1}$11 war nur als äusserst schmale Abstumpfung der Kante $\bar{1}$11.001 zu beobachten.

15. Chininsäure-Chlorhydrat

$C_{11}H_9NO_3HCl+2H_2O$.

Siehe Zd. H. Skraup, diese Sitzungsber., Bd. 84, II (1881), S. 632.

Krystallsystem: asymmetrisch.

$$a:b:c = 0\cdot5619:1:1\cdot11291,$$
$$\xi = 89°23', \eta = 106°52', \zeta = 89°5'.$$
$$010.001 = 90°55', 001.100 = 73°6', 100.010 = 91°9'.$$

Formen: 010, 001, 110, 1$\bar{1}$0, $\bar{2}$01, $\bar{1}$11, $\bar{1}\bar{1}$1.

	Gerechnet	Beobachtet
010.001 =	90°55′	*90°55′
010.110	62 39	
110.1$\bar{1}$0	55 10	*55 10
1$\bar{1}$0.0$\bar{1}$0	62 11	
$\bar{2}$01.001	81 47	
110.001	75 28	*75 28
001.$\bar{1}\bar{1}$1	61 2	60 59
$\bar{1}\bar{1}$1.$\bar{1}\bar{1}$0	43 30	
1$\bar{1}$0.001	74 40	*74 40
001.$\bar{1}$11	61 42	62 16
$\bar{1}$11.$\bar{1}$10	43 38	*43 38
010.$\bar{1}$11	65 36	65 59
$\bar{1}$11.$\bar{1}\bar{1}$1	49 40	50 0
$\bar{1}\bar{1}$1.0$\bar{1}$0	64 44	63 50
$\bar{1}$11.$\bar{2}$01	33 54	
$\bar{2}$01.$\bar{1}\bar{1}$0	37 4	
$\bar{1}\bar{1}$1.$\bar{2}$01	34 27	
$\bar{2}$01.$\bar{1}$10	36 10	

Die Krystalle, bei denen die Fläche 001 vorherrscht, haben monosymmetrischen Habitus, auch sind die entscheidenden Winkel so wenig von einander verschieden, dass ihre Differenzen innerhalb der Fehler der Messungen fallen, da letztere

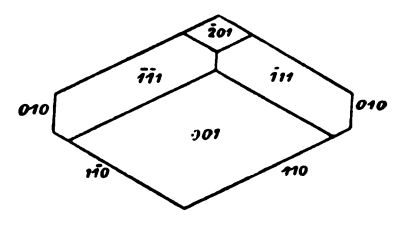


Fig. 10.

nicht mit grosser Genauigkeit ausgeführt werden konnten. Gegen die Annahme des monosymmetrischen Systems spricht jedoch der Umstand, dass auf Fläche 001 die optischen Hauptschnitte die Winkel der Kanten 110 und $\bar{1}$10 nicht halbiren. Fig. 10 ist eine Projection auf eine zur Z-Axe senkrechte Ebene.

16. Saures chinolinsaures Kali

$C_7H_4KNO_4 + 2H_2O$.

Siehe Zd. Skraup, diese Sitzungsber., Bd. 83, II (1881), S. 444.

Krystallsystem: asymmetrisch.

$$a:b:c = 0\cdot6807 : 0\cdot6667 : 1,$$
$$\xi = 96°12', \eta = 120°54, \zeta = 103°56'.$$

Formen: 100, 010, 001, 110, $\bar{1}01$, $0\bar{1}1$.

	Gerechnet	Beobachtet
010.001 =	73°50'	73°50'
001.100	69 40	69 40'
100.010	56 0	56 0
110.100	32 20	32 20
110.010	37 20	
110.001	58 39	58 12
$\bar{1}01.\bar{1}00$	40 13	39 50
$\bar{1}01.001$	83 47	84 10
$\bar{1}01.0\bar{1}0$	78 29	
$0\bar{1}1.0\bar{1}0$	42 31	43 10
$0\bar{1}1.001$	63 39	62 30
$0\bar{1}1.100$	86 1	
$0\bar{1}1.\bar{1}01$	74 47	
$\bar{1}01.110$	127 27	
$110.0\bar{1}1$	112 4	

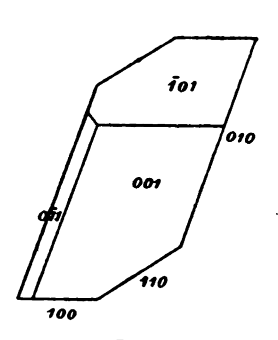


Fig. 11.

Die Krystalle sind plattenförmig durch Vorherrschen der Fläche 010. Die beiden nur untergeordnet auftretenden Flächen $0\bar{1}1$ und $\bar{1}01$ eignen sich sehr schlecht zur Messung, da erstere äusserst schmal, die zweite aber rauh ist. In beistehender Figur ist die Projectionsebene senkrecht zur *Z*-Axe.

17. Amido-*p*-Phenylchinolin

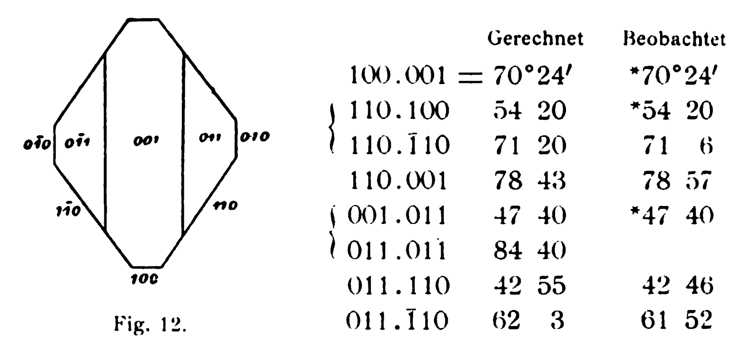
$C_{15}H_{12}N_2$.

Siehe H. Weidel und G. v. Georgievics, diese Sitzungsber., Bd. 97, II (1888), S. 107.

Krystallsystem: monosymmetrisch.

$$a:b:c = 1\cdot4790 : 1 : 1\cdot1652,$$
$$\eta = 109°36'.$$

Formen: 100, 010, 001, 110, 011.



	Gerechnet	Beobachtet
100.001 =	70°24′	*70°24′
110.100	54 20	*54 20
110.$\bar{1}$10	71 20	71 6
110.001	78 43	78 57
001.011	47 40	*47 40
011.01$\bar{1}$	84 40	
011.110	42 55	42 46
011.$\bar{1}$10	62 3	61 52

Fig. 12.

Die Krystalle sind Prismen (110), deren Seitenkanten sehr schmal durch die Endflächen 100 und 010 abgestumpft sind; oben sind sie durch die Flächen 001 und 011 geschlossen; ihre horizontale Projection ist in Fig. 12 dargestellt.

Sehr gut spaltbar nach 001.

18. Orthochinolinbenzcarbonsäure-Chlorhydrat

$C_{10}H_7NO_2HCl$.

Siehe A. Schlosser und Zd. H. Skraup, diese Sitzungsber., Bd. 84, II (1881), S. 484.

Krystallsystem: asymmetrisch.

$$a:b:c = 0\cdot8981:1:0\cdot7748,$$
$$\xi = 78°11, \ \eta = 111°24', \ \zeta = 97°50'.$$

Formen: 100, 010, 001, 101, $\bar{1}$01, 011, $\bar{1}$21.

	Gerechnet	Beobachtet
010.001 =	89°40′	89°40′
001.100	69 40	69 40
100.010	86 6	86 6
100.101	38 0	38 0
101.001	31 40	30 58
001.$\bar{1}$01	48 39	50 —
$\bar{1}$01.$\bar{1}$00	61 41	60 —
010.011	60 23	
011.001	39 17	37 —
001.0$\bar{1}$0	80 20	

	Gerechnet	Beobachtet
010.$\bar{1}$21 =	40°15′	
$\bar{1}$21.$\bar{1}$01	61 58	63°—
$\bar{1}$01.0$\bar{1}$0	77 17	75 50′
011.100	69 31	
011.$\bar{1}$01	63 28	65 —
$\bar{1}$21.001	73 22	
101.011	45 14	
011.$\bar{1}$21	42 17	

Die Messungen an verschiedenen Krystallen, deren horizontale Projection in Fig. 13 dargestellt ist, gaben infolge unvollkommener Ausbildung sehr differirende Werthe. Die Krystalle sind ausgezeichnet spaltbar nach der Fläche 010, auf welcher auch die beiden optischen Axen gesehen werden können. Dieselben liegen symmetrisch gegen die Flächennormale am Rande des Gesichtsfeldes, zeigen starke gekreuzte Dispersion und negativen Charakter.

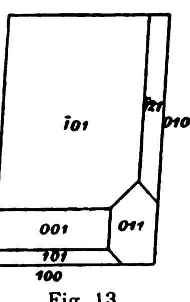


Fig. 13.

19. Chitenin

$C_{19}H_{22}N_2O_4 + 4H_2O$.

Siehe Zd. H. Skraup, diese Sitzungsber., Bd. 80, II (1879), S. 234.

Krystallsystem: rhombisch.

$a:b:c = 0·4582:1:0·5114$.

Formen: 010, 110, 011.

	Gerechnet	Beobachtet
010.110 =	65°23′	65°12′
110.1$\bar{1}$0	49 14	*49 14
010.011	62 55	63 8
011.0$\bar{1}$1	54 10	
110.011	79 4	*79 4

Die Krystalle sind nach der Z-Axe verlängert, wobei die spitzen Kanten des Prismas 110 manchmal gar nicht, manchmal aber sehr tief durch die Flächen 010 abgestumpft sind.

Auf der letzteren Fläche zeigen die Krystalle im Polarisationsapparate bei Natriumlicht Interferenzcurven, denen zufolge die Normale dieser Fläche negativen Charakter hat und wahrscheinlich zweite Mittellinie ist. Die Ebene der optischen Axen ist senkrecht zur Längsrichtung *Z*. Dem entsprechend zeigte ein Krystall, bei dem ein Flächenpaar des Doma 011 stark entwickelt war, auf diesen Flächen eine optische Axe. Das Schema der optischen Orientirung ist

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}\underset{+}{\mathfrak{c}}.$$

Die Doppelbrechung ist sehr stark.

20. Chitenin-Platinchlorid

$C_{19}H_{22}N_2O_4H_2Cl_6Pt+3H_2O.$

Siehe Zd. H. Skraup, diese Sitzungsber., Bd. 80, II (1879), S. 238.

Krystallsystem: rhombisch.

$$a:b:c = 0\cdot 9045:1:1\cdot 8669.$$

Formen: 001, 110, 111.

	Gerechnet	Beobachtet
110.1$\bar{1}$0 =	84° 16′	*84° 16′
110.001	90 0	89 52
111.001	70 14	*70 14
111.110	19 46	
111.$\bar{1}$11	88 31	
111.1$\bar{1}$1	78 11	

Die Krystalle sind tafelförmig durch das Vorherrschen der Fläche 001, deren rhombischer Charakter auch durch die optische Untersuchung bestätigt wird.

21. Butylchloralhydrat

$C_4H_5Cl_3O+H_2O.$

Siehe Ad. Lieben und S. Zeisel, diese Sitzungsber., Bd. 88, II (1883), S. 209.

Krystallsystem: rhombisch.

$$a:b:c = 0\cdot 6486:1:1\cdot 1939.$$

Formen: 001, 011, 111.

	Gerechnet	Beobachtet
001.011 =	50° 3′	50° 1′
011.01$\bar{1}$	79 54	*79 54
001.111	65 30	65 25
111.11$\bar{1}$	49 0	*49 0
011.111	49 46	49 33
111.1$\bar{1}\bar{1}$	80 28	
111.1$\bar{1}$1	59 22	

Fig. 14.

Die Krystalle sind tafelförmig durch das Vorherrschen der Flächen 001, wobei die Flächen 011 weniger entwickelt als die Flächen 111 sind.

22. Cinchonidin

$C_{19}H_{22}N_2O$.

Siehe Zd. H. Skraup, diese Sitzungsber., Bd. 80, II (1879), S. 226.

Diese Verbindung wurde schon von Leers unter dem Namen Chinidin untersucht; Ann. Chem. Pharm., Bd. 82, S. 147. Hiemit stimmen meine Messungen überein.

Krystallsystem: rhombisch.

$$a : b : c = 0 \cdot 6544 : 1 : 0 \cdot 9503.$$

Formen: 001, 010, 110, 011, 021.

	Gerechnet	Beob. Lang	Leers
110.010 =	56°48′		
110.1$\bar{1}$0	66 24	*66°24′	65°30′
011.010	46 28		
011.001	43 32		
011.0$\bar{1}$1	87 4		86 —
021.010	27 45		
021.001	62 15	*62 15	
021.02$\bar{1}$	55 30	55 28	
011.021	18 43		
110.021	61 1		
110.011	67 51		

Die Krystalle sind tafelförmig durch das Vorherrschen der Flächen 001. Die von Leers beobachteten Krystalle zeigten statt der Flächen 021 die Flächen 011.

Im Polarisationsapparate sieht man durch die Flächen 001 bei Na-Licht viele Interferenzstreifen, nach welchen die Z-Axe wahrscheinlich die zweite Mittellinie, und zwar mit negativem Charakter ist. Die Ebene der optischen Axen ist parallel den Kanten 001.021. Im Einklange hiemit zeigen senkrecht zur G-Axe geschliffene Platten ein der Normale entsprechendes Verhalten, wobei die angegebene Kantenrichtung die Axe der kleineren Elasticität ist. Das Schema der optischen Orientirung ist daher

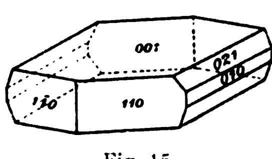


Fig. 15.

bac.

23. Cinchonidinchlorhydrat

$C_{19}H_{22}N_2O, HCl+H_2O.$

Siehe Zd. H. Skraup, diese Sitzungsber., Bd. 80, II (1879), S. 226.

Krystallsystem: rhombisch.

$a : b : c = 0·7855 : 1 : 0·9601.$

Formen: 110, 310, 011, 111.

	Gerechnet	Beob. Lang	Kopp
110.1̄10 =	76° 18′	*76° 18′	
310.3̄10	28 40		
310.1̄10	52 50		53°
011.01̄1	87 40	*87 44	85
110.011	64 40	*64 40	64
310.011	79 54		82
111.011	41 25	41 18	
111.110	32 45	32 48	
111.11̄1	62 34		

Die von Kopp untersuchten Krystalle waren offenbar nicht vollständig ausgebildet und zeigten nur das Doma 011 und von den Prismen 110 und 310 nur je ein Flächenpaar. Kopp beschrieb daher auch diese Verbindung als monosymmetrisch; Ann. Chem. Pharm., Bd. 82, S. 156. Meine Krystalle waren

dagegen meist regelmässig entwickelt und entweder nach den Flächen 110 oder den Flächen 011 verlängert; die von Kopp angegebene Fläche 310 habe ich nicht beobachtet.

Für den rhombischen Charakter dieser Substanz spricht auch ihr optisches Verhalten. Eine zur *Z*-Axe senkrechte Platte ist senkrecht zur ersten Mittellinie, doch liegen die Axen schon ausserhalb des Gesichtsfeldes. Der Charakter der ersten Mittellinie ist positiv und die Ebene der optischen Axen parallel der *X*-Axe. Die Doppelbrechung ist sehr stark, und etwas dickere Platten zeigen nur bei Na-Licht Interferenzcurven. Das optische Orientirungsschema ist für diese Substanz nach dem Vorhergehenden

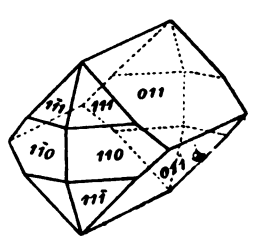


Fig. 16.

bca.
+

24. Cinchotenidin

$C_{18}H_{20}N_2O_3 + 3H_2O.$

Siehe Zd. H. Skraup und G. Vortmann, diese Sitzungsber., Bd. 78, II (1878). S. 612.

Krystallsystem: monosymmetrisch.

$a:b:c = 1\cdot1209:1:0\cdot4568,$

$\eta = 91°48'.$

Formen: 100, 101, $\bar{1}01$, 110, 120.

	Gerechnet	Beobachtet
101.100 =	66°17′	66°15′
$\bar{1}01.\bar{1}00$	69 23	69 35
$101.\bar{1}01$	44 20	*44 20
110.100	48 15	*48 15
110.101	74 28	*74 28
120.100	65 57	65 52

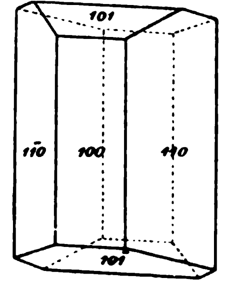


Fig. 17.

Die Krystalle sind nadelförmig in der Richtung der *Z*-Axe; von den Prismenflächen ist die Fläche 100 mitunter sehr stark entwickelt.

25. Cinchotenidin-Platinchlorid

$(C_{18}H_{20}NO_3)_2(HCl)_4PtCl_4$.

Siehe Zd. H. Skraup und G. Vortmann, diese Sitzungsber., Bd. 78 (1878), S. 615.

Die a. a. O. mitgetheilten Messungen sind durch einige Druckfehler entstellt. Auch fand ich noch die Flächen (111) und (122) als sehr schmale Abstumpfungen der von den Flächen (100) und (011) gebildeten Kanten. Man hat somit:

Krystallsystem: rhombisch.

$$a:b:c = 0\cdot9462:1:0\cdot9083.$$

Formen: 100, 001, 011, 110, 111, 122.

	Gerechnet	Beobachtet
⎧ 110.100 =	43°25′	43°10′
⎩ 110.$\bar{1}$10	93 10	*93 10
⎧ 011.001	42 15	
⎩ 011.01$\bar{1}$	95 30	*95 30
110.011	62 29	62 34
⎧ 100.111	54 36	54 —
⎩ 100.122	70 26	70 30
001.111	52 53	
001.122	45 46	
110.122	47 17	

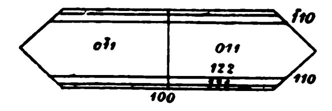


Fig. 18.

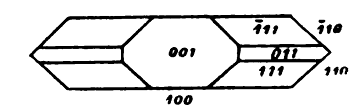


Fig. 19.

Die Krystalle sind tafelförmig, indem die Flächen 100 sehr stark entwickelt sind. Die Figuren 18 und 19 geben die Projectionen zweier verschiedener Krystalle auf die XY-Ebene.

26. Gallussäure.

Krystalle von L. Barth.

Krystallsystem: monosymmetrisch.

$$a:b:c = 1{\cdot}2174:1:0{\cdot}8406,$$
$$\eta = 91°\,12'.$$

Formen: 100, 101, $\bar{1}02$, 150, $\bar{2}11$.

	Gerechnet	Beobachtet
100.101 =	54°20′	*54°20′
$\bar{1}02.\bar{1}00$	72 20	*72 20
$101.\bar{1}02$	53 10	
150.100	80 40	*80 40
$150.\bar{1}50$	18 40	
$\bar{2}11.\bar{1}00$	43 57	44 10
$\bar{2}11.\bar{1}50$	56 5	55 —
$\bar{2}11.\bar{1}02$	43 32	
$\bar{2}11.101$	89 19	
$\bar{2}11.11\bar{2}$	126 58	

Die lichtbraun gefärbten Krystalle sind dünne Plättchen durch das Vorherrschen der Flächen 100 und sind mitunter in der Richtung der Z-Axe bis zu 8 *mm* lang, während die der X-Axe parallele Querdimension höchstens 1 *mm* beträgt. Auch die dünnsten Plättchen erwiesen sich noch als Zwillinge. Die Krystalle zeigen nämlich, durch die Fläche 100 betrachtet, zwei optische Axen, deren Verbindungslinie parallel der Längsrichtung der Plättchen ist. Diese zwei Axen liegen am Rande des Gesichtsfeldes ganz symmetrisch und zeigen auch dieselbe Farbenvertheilung, nur sind die Ringe der einen Axe weiter als die der andern. Beim Herumdrehen der Plättchen erkennt man dann, dass die beiden Axen nicht zusammengehören, sondern dass man es mit einer Zwillingsbildung zu thun hat, bei welcher die Zwillingsfläche parallel der Fläche 100 ist.

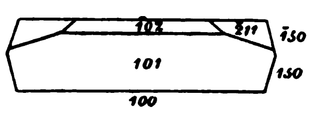


Fig. 20.

Am Ende der Plättchen lassen sich auch sehr kleine St
auffinden, durch welche nur eine Axe sichtbar ist.

Die Flächen an den Enden der Plättchen sind mit
nahme der Flächen 101 sehr schlecht ausgebildet, und
diese Fläche tritt meist nur an einem der beiden Zwill
individuen auf, so dass hieran die Zwillingsbildung we
gut zu constatiren ist. Es gelingt dies aber unzweifelhaft d
Abbrechen der Enden, da der Bruch in beiden Individuen, ob
unvollkommen, nach der Fläche 102 erfolgt.

Die Flächen 150 sind immer recht gut ausgebildet.

27. Gallussäure-Äthyläther

$$(OH)_3COOC_2H_5,\ C_6H_2 = C_9H_{10}O_5.$$

Krystalle von Prof. G. Goldschmidt.

Krystallsystem: monosymmetrisch.

$$a : b : c = 1 \cdot 574 : 1 : 1 \cdot 462,$$
$$\eta = 109° 25'.$$

Formen: 001, 110, $\bar{1}11$, $\bar{1}12$,

	Gerechnet	Beobachtet
$110 . \bar{1}10 =$	67°56′	
$110 . 1\bar{1}0$	112 4	*112° 4′
$001 . 110$	79 18	*79 18
$110 . 11\bar{1}$	33 39	33 15
$11\bar{1} . 11\bar{2}$	23 3	
$11\bar{2} . 00\bar{1}$	44 0	
$11\bar{1} . 00\bar{1}$	67 3	66 44
$110 . 11\bar{2}$	56 42	
$\bar{1}11 . 11\bar{1}$	78 0	
$\bar{1}12 . 11\bar{2}$	54 6	
$110 . \bar{1}11$	62 50	
$110 . \bar{1}12$	64 56	

Vorherrschend an diesen Krystallen sind die Flächen
und 001, doch sind diese Flächen so verzogen, dass die Krys
die Gestalt von Prismen haben, die von einem Flächenpaar
und dem Endflächenpaar 001 gebildet sind. Die scharfen Ka

(110.00$\bar{1}$) dieser Prismen sind bisweilen abgestumpft durch die äusserst schmalen Flächen 11$\bar{1}$ und 11$\bar{2}$.

28. Milchsaures Guanidin

$CH_5N_3, C_3H_6O_3$.

Vor langer Zeit erhielt ich diese Verbindung in schönen Krystallen von W. A. Hofmann; sie wurde auch damals von mir krystallographisch und optisch untersucht. Inzwischen wurde diese Verbindung auch von Bodewig untersucht (Pogg. Ann., Bd. 157, 1876, S. 125), mit dessen Ergebnissen meine Bestimmungen im vollen Einklange sind.

Die von mir untersuchten Krystalle waren einfacher und zeigten nur die Formen 010, 001, 110, 111, wovon die Form 001 von Bodewig nicht beobachtet worden war. Einige der von mir beobachteten Winkel sind

110.010 =	51°30′	52°15′ gerechnet
110.111	39 59	39 59
111.001	49 40	50 1
111.010	61 54	62 1

Die gerechneten Werthe folgen aus dem von Bodewig angegebenen Axenverhältniss

$$a:b:c = 0\cdot7743:1:0\cdot7301.$$

Auch hatte ich den Axenwinkel in Öl gemessen für die erste positive Mittellinie, welche parallel der Y-Axe ist, und für die zweite zur Z-Axe parallele Mittellinie. Ich fand

	Na-Flamme
Platte senkrecht zur ersten Mittellinie H_a =	84°12′.
Platte senkrecht zur zweiten Mittellinie	108 48.

Daraus folgt für den wahren Winkel der optischen Axen 79°2′, also fast identisch mit Bodeweg, welcher 79°12′ fand.

Die zweite Platte wurde auch in Wasser gemessen und gab für Na-Licht 126°54′. Hieraus folgt, da der Brechungsquotient des Wassers für die D-Linie gleich 1·3336 ist, für

den mittleren Brechungsquotienten des milchsauren Guani
$\beta = 1 \cdot 5467$.

Das Schema der optischen Orientirung ist

$$\underset{+}{c}ba.$$

29. Diisopropylglycol

$C_8H_{18}O_2$.

Siehe W. Fossek, diese Sitzungsber., Bd. 88, II (1883), S. 368.

Krystallsystem: monosymmetrisch.

$$a:b:c = 0 \cdot 8195 : 1 : 1 \cdot 9098,$$
$$\eta = 97°30'.$$

Formen: 100, 001, 111, $\bar{1}11$.

	Gerechnet	Beobachtet
100.001 =	82°30'	*82°30'
100.111	41 5	
111.$\bar{1}$11	94 38	94 —
$\bar{1}$11.$\bar{1}$00	44 17	
001.111	66 42	66 47
111.11$\bar{1}$	36 28	
11$\bar{1}$.00$\bar{1}$	76 50	*76 50
$\bar{1}$11.$\bar{1}\bar{1}$1	76 24	*76 24
$\bar{1}$11.11$\bar{1}$	103 36	103 54
111.1$\bar{1}$1	71 12	

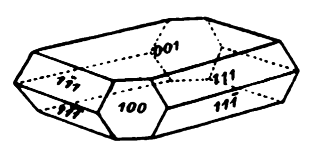


Fig. 21.

Die Krystalle sind durch das herrschen der Fläche 001 platte mig. Auch kommen Zwillinge vor bei Fläche 001 Zwillingsfläche is

Wie die Untersuchung be Licht ergibt, ist die negative M linie der optischen Axen, welche in der Symmetrieebene, ausserhalb des Gesichtsfeldes liegen, schief zur Fläche 00

30. α-Saurer Hemipinsäuremethyläther

$C_{11}O_{12}O_6 + aq.$

Siehe R. Wegscheider, diese Sitzungsber., Bd. 85, II (1882), S. 952.

Krystallsystem: asymmetrisch.[1]

$$a:b:c = 0\cdot9105:1:1\cdot0269,$$
$$\xi = 112°27', \quad \eta = 102°2', \quad \zeta = 84°32',$$
$$010.001 = 68°10', \quad 001.100 = 79°13', \quad 100.010 = 90°57'.$$

Formen: 100, 010, 110, $\bar{1}10$, 101, $\bar{1}01$, 011, $0\bar{1}1$, 111.

	Gerechnet	Beobachtet
100.110 =	44°24'	*44°24'
110.010	46 33	*46 33
010.$\bar{1}$10	45 34	
$\bar{1}$10.$\bar{1}$00	43 29	43 52
100.101	38 30	*38 30
101.$\bar{1}$01	92 44	*92 44
$\bar{1}$01.$\bar{1}$00	48 46	49 10
010.011	33 53	
011.0$\bar{1}$1	90 47	
0$\bar{1}$1.0$\bar{1}$0	55 20	
100.111	53 40	55 —
111.011	30 29	
011.$\bar{1}$00	95 51	
010.111	48 26	
111.101	28 35	30 —
101.0$\bar{1}$0	102 59	103 10
110.111	26 32	
110.101	43 26	*43 26
101.0$\bar{1}$1	61 57	61 28
0$\bar{1}$1.$\bar{1}\bar{1}$0	74 37	75 —
1$\bar{1}$0.101	66 9	67 —
101.011	53 48	
011.$\bar{1}$10	60 3	

[1] Neu berechnet.

	Gerechnet	Beobachtet
110.011 =	49° 3′	
011.Ī01	56 37	
Ī01.ĪĪ0	74 20	75°—
1Ī0.0Ī1	58 37	
0Ī1.Ī01	73 54	
Ī01 Ī10	47 29	

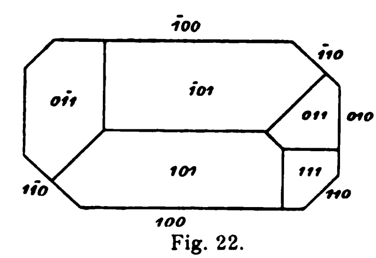


Fig. 22.

Die Krystalle sind i Richtung der *Z*-Axe verlä wobei die Fläche 100 herrscht. Die Flächen 01 111 treten sehr unterge auf und konnten auch nu näherungsweise gemesse den. In beistehender Figur ist die Projectionsebene sen zur *Z*-Axe.

31. β-Saurer Hemipinsäuremethyläther

$C_{11}H_{12}O_6$.

Siehe R. Wegscheider, diese Sitzungsber., Bd. 85, II (1882), S.

Krystallsystem: rhombisch.

$$a : b : c = 0\cdot6248 : 1 : 0\cdot5336.$$[1]

Formen: 100, 010, 110, 011.

	Gerechnet	Beobachtet
110.100 =	32° 0′	32° 0′
110.010	58 0	
110.1Ī0	64 0	64 30
011.010	61 55	61 30
011.0Ī1	56 10	56 10
110.011	75 14	75

Die krystallographische Bestimmung konnte nur ap mativ ausgeführt werden, da sämmtliche Flächen abge

[1] A. a. O. ist das Axenverhältniss durch einen Fehler falsch ang

sind. Die Krystalle sind Combinationen des vorherrschenden Prismas 110 mit dem Doma 011. Die stumpfen Kanten des Prismas sind durch die Flächen 100, die spitzen Kanten durch die äusserst schmalen Flächen 010 abgestumpft.

Die Krystalle sind spaltbar nach der Fläche 001. Auf solchen Spaltungsstücken sieht man die beiden optischen Axen, wobei die erste Mittellinie anscheinend senkrecht zur Spaltungsebene, die zweite senkrecht zur Fläche 100 ist. Das optische Verhalten spricht also auch für das rhombische System.

32. Saurer Hemipinsäureäthyläther

$C_{12}H_{14}O_6 + 1\,^1/_2\, H_2O$.

Siehe R. Wegscheider, diese Sitzungsber., Bd. 85, II (1882), S. 959.

Krystallsystem: monosymmetrisch.

$$a : b : c = 1 \cdot 3596 : 1 : 0 \cdot 5723,$$
$$\eta = 90° 36'.$$

Formen: 100, 110, 101, $\bar{1}01$.

	Gerechnet	Beobachtet
100.101 =	66°40′	*66°40′
101.$\bar{1}0\bar{1}$	45 38	
$\bar{1}0\bar{1}$.$\bar{1}00$	67 41	*67 41
100.110	53 40	*53 40
110.$\bar{1}10$	72 40	72 20
110.101	76 26	76 46
110.$10\bar{1}$	77 0	77 2

Die Krystalle sind plattenförmig nach der Fläche 100 und nach der X-Axe verlängert. Während die Flächen des Prismas 110 schlecht ausgebildet sind, spiegeln die zur Symmetrieaxe parallelen Flächen sehr gut, so dass über den monosymmetrischen Charakter der Krystalle kein Zweifel bleibt. Auf 100 sieht man im Polarisationsapparat bei Na-Licht Curven

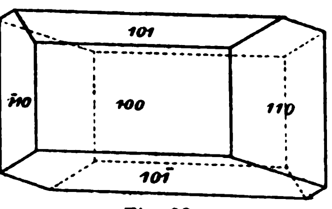


Fig. 23.

welche erkennen lassen, dass die optischen Axen in der
metrieebene liegen und dass die positive Mittellinie n
senkrecht zur Fläche 100 ist.

33. Kynurensäure

$C_{10}H_7NO_3$.

Siehe M. Kretschy, diese Sitzungsber., Bd. 83, II (1881), S. 17

Krystallsystem: rhombisch.

$a : b = 1 : 1·282$.

Formen: 110, 001.

	Gerechnet	Beobachtet
110.1$\bar{1}$0 =	75°54′	*75°54′
110.001	90 0	90 — appr.

Die Krystalle sind sehr schmale Nadeln, gebildet vo
Prisma 110 mit den Endflächen 001. Letztere Flächen
jedoch noch schlechter als die Prismenflächen ausgebilde
konnten nur sehr näherungsweise gemessen werden.

Für den rhombischen Charakter spricht jedoch das op
Verhalten der Prismenflächen, auf denen die Schwing
richtungen parallel und senkrecht zur Längsrichtung
Auch zeigen sie im Na-Licht Curven, welche nach der L
richtung symmetrisch, senkrecht dazu aber unsymmetrisc
laufen.

34. Kynurin

$C_9H_7NO + 3H_2O$.

Siehe M. Kretschy, diese Sitzungsber., Bd. 83, II (1881), S. 18

Krystallsystem: monosymmetrisch.

$a : b : c = 1·0764 : 1 : 1·6056$.

$\eta = 102° 34′$.

Formen: 100, 001, 110, 101, $\bar{1}$01, $\bar{1}$21.

	Gerechnet	Beobachtet
100.001	= 82°26′	82°36′ S
100.101	31 26	*31 26
101.001	51 0	*51 0
001.$\bar{1}$01	61 28	61 30
$\bar{1}$01.$\bar{1}$00	36 6	35 10
100.110	46 54	
110.$\bar{1}$10	86 12	
110 001	84 50	
101.110	54 20	
110.12$\bar{1}$	25 23	24 46
12$\bar{1}$.$\bar{1}$0$\bar{1}$	100 17	
101.12$\bar{1}$	79 43	*79 43
$\bar{1}$01.$\bar{1}$21	62 9	62 30
$\bar{1}$21.12$\bar{1}$	55 42	55 —
$\bar{1}$21.$\bar{1}$00	67 49	68 26
$\bar{1}$21.001	77 6	77 0 S
$\bar{1}$21.110	67 11	

Die zwei mit *S* bezeichneten Winkel wurden an Krystallen gemessen, die ich sechs Jahre später von Prof. Skraup erhalten hatte. Die Krystalle sind plattenförmig durch das Vorherrschen der Endfläche 001 und zeigen auf dieser Fläche die beiden optischen Axen parallel der Längsrichtung der Platten, welche mit der Symmetrieaxe zusammenfällt. Im Einklange hiemit beobachtet man an den beiden Axenbildern eine deutliche horizontale Dispersion, wobei $v < \rho$.

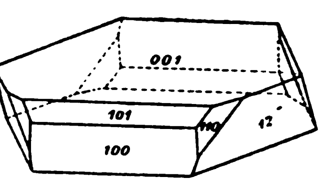


Fig. 24.

35. Salzsaures Kynurin

$HCl . 2(C_9H_7NO) + 2H_2O$.

Siehe M. Kretschy, diese Sitzungsber., Bd. 83, II (1881), S. 188.

Krystallsystem: monosymmetrisch.

$$a : b : c = 4 \cdot 2286 : 1 : 7 \cdot 6680,$$
$$\eta = 104° 20'.^{1}$$

[1] Auf Grund einer neuen Berechnung wurden die Elemente gegen die loc. cit. mitgetheilten etwas geändert.

Formen: 100, 001, 101, $10\bar{1}$, 110.

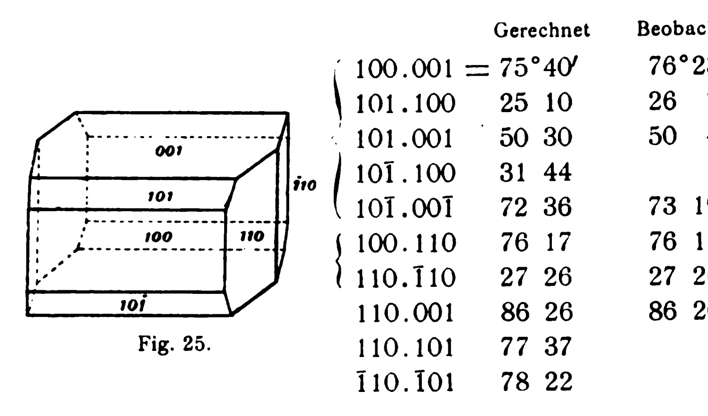


Fig. 25.

	Gerechnet	Beobac[ht]
100.001 =	75°40′	76°2
101.100	25 10	26
101.001	50 30	50
$10\bar{1}.100$	31 44	
$10\bar{1}.00\bar{1}$	72 36	73 1
100.110	76 17	76 1
$110.\bar{1}10$	27 26	27 2
110.001	86 26	86 2
110.101	77 37	
$\bar{1}10.\bar{1}01$	78 22	

Die Krystalle sind verlängert in der Richtung der metrieaxe Y.

36. Opiansäuremethyläther

$C_{11}H_{12}O_5$.

Siehe R. Wegscheider, diese Sitzungsber., Bd. 85, II (1882), S.

Krystallsystem: rhombisch.

$$a:b:c = 1\cdot4863:1:2\cdot0356,^{1}$$
$$\eta = 92°6'.$$

Formen: 100, 001, 110, 101, 111.

	Gerechnet	Beobachtet
100.001 =	87°54′	*87°54′
100.101	35 24	
101.001	52 30	53 —
100.110	56 3	55 40
$110.1\bar{1}0$	67 54	
100.111	58 11	58 40
101.111	49 42	
$111.\bar{1}1\bar{1}$	80 36	*80 36

[1] Das a. a. O. angegebene Axenverhältniss ist durch einen Fehler

	Gerechnet	Beobachtet
001.111 =	66°49′	*66°49′
111.110	22 1	21 29
001.110	88 50	88 40
110.101	62 55	
111.$\bar{1}$10	70 14	69 51

Fig. 26 gibt den Habitus der aus Alkohol erhaltenen Krystalle, Fig. 27 den Habitus der aus Äther abgeschiedenen.

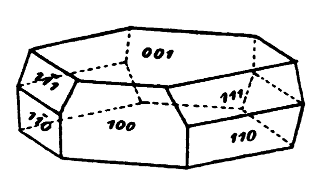


Fig. 26.

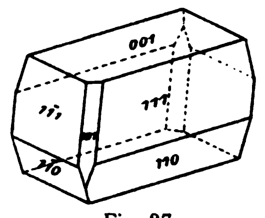


Fig. 27.

Der monosymmetrische Charakter wird auch durch das optische Verhalten bestätigt, indem auf Fläche 001 eine optische Axe schief austretend zu sehen ist, wobei die Ebene der optischen Axen auf der Kante 001.101 senkrecht steht. Die Ebene der optischen Axen ist daher parallel der Symmetrieebene.

37. Isobenzyldiphenyl

$C_{19}H_{16}$.

Siehe G. Goldschmidt, diese Sitzungsber., Bd. 84, II (1881), S. 314.

Krystallsystem: monosymmetrisch.

$$a : b = 3{\cdot}1015 : 1,$$
$$\eta = 108°10'.$$

Formen: 100, 001, 110.

	Gerechnet	Beobachtet
100.110 =	71°12′	71°30′
110.$\bar{1}$10	37 30	*37 30
100.001	71 50	*71 50
110.001	84 3	84 19

Die Krystalle sind Nadeln, gebildet von den Flächen
und (100), an deren Enden nur die Fläche (001) aufgef
wurde. Durch die Fläche 100 im Polarisationsapparat betr
sieht man eine optische Axe, gegen den spitzen Wink
Krystallaxen gelegen, während die zweite schon auss
des Gesichtsfeldes gegen den stumpfen Winkel zu lieg
Ebene der optischen Axe fällt daher mit der Symmetrie
zusammen. Der optische Charakter der Mittellinie, welc
zwei angegebenen Axenrichtungen halbirt, ist positiv.

38. Para-Benzyldiphenyl

$C_{19}H_{16}$.

Siehe G. Goldschmidt, diese Sitzungsber., Bd 84, II (1881), S.

An diesen Krystallen konnten nur vierseitige Prismen
mit den Winkeln von 80°18′ und 99°42′ beobachtet w
deren spitze Kanten durch die Flächen (010) gerade abgest
sind. Auf diesen Flächen sieht man im Polarisationsappa
Na-Licht Curven, welche nach der Längsrichtung und
recht dazu vollkommen symmetrisch sind. Die Krystalle d
daher ins rhombische Krystallsystem gehören, wobei

$$a : b = 1 : 0 \cdot 8436.$$

39. Pikrotoxid

$C_{15}H_{16}O_6$.

Siehe L. Barth und M. Kretschy, diese Sitzungsber., Bd. 81, II (1880

Krystallsystem: rhombisch.

$$a : b : c = 0 \cdot 8224 : 1 : 0 \cdot 6553.$$

Formen: 110, 101, 011, 111.

	Gerechnet	Beobachtet
110.1̄10 =	78°54′	*78°54′
101.1̄01	77 6	*77 6
011.011̄	113 32	
110.101	61 14	
110.011	69 37	69 45

	Gerechnet	Beobachtet
101.011 =	49° 9′	48° —
111.110	44 6	43 42′
111.101	27 9	
111.011	33 41	

Die sehr kleinen, gut entwickelten Krystalle sind Prismen, gebildet durch die Flächen 101, an deren Enden die Flächen 110 und untergeordnet die Flächen 011 und 111 auftreten.

40. Pimelinsäure aus Hydrochelidonsäure

$C_7H_{12}O_4$.

Siehe L. Haitinger und Ad. Lieben, diese Sitzungsber., Bd. 90, II (1884), S. 86.

Krystallsystem: monosymmetrisch.

$$a : b : c = 3\cdot691 : 1 : 2\cdot058,$$
$$\eta = 105°40'.$$

Formen: 100, 001, 110, 111.

	Gerechnet	Beobachtet
100.001 =	74°20′	*74°20′
{ 100.110	74 17	*74 17
{ 110.$\bar{1}$10	31 26	
{ 001.111	60 43	*60 43
{ 111.110	25 5	24 52
{ 110.00$\bar{1}$	94 12	94 8
100.111	69 24	69 24
111.$\bar{1}$1$\bar{1}$	65 20	

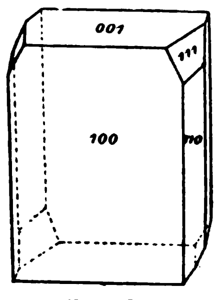


Fig. 28.

Die Krystalle sind tafelförmig durch das Vorherrschen der Fläche 100 und sind in der Richtung der *Z*-Axe verlängert.

Auf Fläche 100 sieht man im Polarisationsapparat nahezu senkrecht zu dieser Fläche eine der optischen Axen und erkennt, dass die Ebene dieser Axen senkrecht steht auf der Kante 100.001. Dies spricht für das monosymmetrische Krystallsystem im Gegen-

satze zu dem asymmetrischen. Die optischen Axen liegen
Gesagten zufolge in der Symmetrieebene.

Pimelinsäure (Isopropylbernsteinsäure), aus Campfer
dargestellt, krystallisirt nach Ditscheiner (Ann. Chem. Pl
Bd. 109, S. 168) und Zepharovich (diese Sitzungsber., B
I, S. 22) im asymmetrischen System.

Pimelinsäure (Isopimelinsäure), von Bauer und Sch
aus Amylenbromid dargestellt, krystallisirt nach Ditsch
(diese Sitzungsber., Bd. 77, II, S. 293) im rhombischen Sy

41. Pikrotin.

Siehe L. Barth und M. Kretschy, diese Sitzungsber., Bd. 81, II (1880)

Krystallsystem: rhombisch.

$$a : b : c = 0·9770 : 1 : 0·7015.$$

Formen: 010, 110, 101, 011, 012, 211, 212.

	Gerechnet	Beobachtet
110.010 =	45°40′	*45°40′
110.$1\bar{1}0$	88 20	
101.$\bar{1}01$	71 22	71 50
011.010	54 57	
011.$0\bar{1}1$	70 6	*70 6
012.010	70 0	70 —
012.$0\bar{1}2$	40 0	
011.012	15 9	
110.011	66 20	65 30
011.$\bar{1}01$	48 19	47 53
$\bar{1}01$.$\bar{2}\bar{1}1$	28 57	
$\bar{2}\bar{1}1$.$\bar{1}\bar{1}0$	36 24	36 28
$\bar{1}01$.$\bar{1}\bar{1}0$	65 21	64 40
212.010	74 6	
212.101	15 54	15 —
212.012	34 7	
212.$\bar{2}12$	68 14	
212.110	53 39	

	Gerechnet
$211.21\bar{1}$ =	64° 4′
$212.21\bar{2}$	102 44
211.212	19 20
211.012	43 37
$211.\bar{2}11$	99 14
211.010	68 9
$211.2\bar{1}1$	43 42

Die untersuchten Krystalle stammten aus zwei Krystallisationen. Die zuerst erhaltenen Krystalle waren vierseitige Prismen, gebildet durch die Flächen 110, aber mannigfach ver-

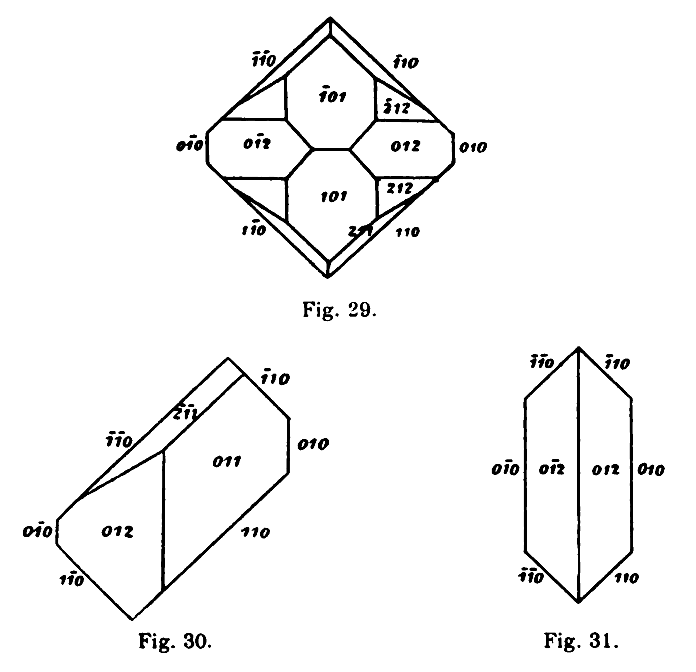


Fig. 29.

Fig. 30.

Fig. 31.

zogen, wie dies in den Projectionen Fig. 29 und 30 dargestellt ist. Bei den später untersuchten Krystallen waren auch noch die Flächen 010 sehr entwickelt, so dass sie ein plattenförmiges Aussehen hatten, Fig. 31.

Die Krystalle der ersten Art zeigen, durch eine Prismenfläche im Polarisationsapparate betrachtet, eine optische Axe am Rande des Gesichtsfeldes und die Axenebene senkrecht zur

Längsrichtung. Die Mitte des Gesichtsfeldes ist positiv und daher der Charakter der Elasticitätsaxe, welche der Y-Axe spricht, da die sichtbare optische Axe gegen den stum Winkel des Prismas liegt. Da der Prismenwinkel nahezu beträgt, so dürfte die den stumpfen Winkel halbirende X wohl die erste Mittellinie sein. Entsprechend dem Vo gehenden zeigten Krystalle der zweiten Art, durch die Flä 010 betrachtet, positiven Charakter, wobei die Axen aber au halb des Gesichtsfeldes lagen. Das Schema der optischen O tirung ist.

$$\mathfrak{c}\underline{\mathfrak{a}}\mathfrak{b}.$$

42. Pikrotoxin

$$C_{15}H_{16}O_6+H_2O.$$

Siehe L. Barth und M. Kretschy, diese Sitzungsber., Bd. 81 (1880),

Diese Verbindung wurde von Lohschmidt rhom gefunden mit einem Axenverhältniss

$$a:b:c = 0\cdot7481:1:1\cdot350.$$

Die Krystalle sind dünne Plättchen, gebildet von Flächen 110 und 001. Durch letztere Flächen betrachtet, ze sie, dass sie senkrecht zur Normale der optischen Axen und geben durch Drehung einer Quarzplatte Interferenzcu aus deren Wachsen folgt, dass die kleinere Elasticitätsaxe stumpfen Winkel des Prismas halbirt. Das optische Orientiru schema ist daher

$$\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{c}.$$

Benützt man den spitzen Winkel der Form 110 als Pr so erhält man zwei Bilder, von denen das parallel der K polarisirte weniger abgelenkt ist, was mit der vorhergehe Beobachtung stimmt. Für den Winkel eines solchen Pri fand ich

$$73°45' \text{ (}73°36' \text{ berechnet),}$$

für die Minima-Ablenkungen der beiden Strahlen aber

$$58°30' \text{ und } 73°55'.$$

Hieraus folgt

$$\alpha = 1 \cdot 5259$$
$$\beta = 1 \cdot 6030.$$

43. Pyridin-Platinchlorid

$(C_5H_5NHCl)_2PtCl_4$.

Siehe L. Haitinger, diese Sitzungsber., Bd. 86, II (1882), S. 608.

Meine ersten Messungen wurden unternommen, um die Identität der von Haitinger erhaltenen Krystalle mit den von Weidel und Hazura dargestellten nachzuweisen: die letzteren

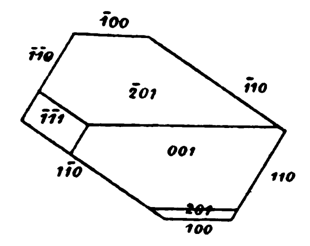


Fig. 32.

Krystalle wurden von A. Brezina gemessen (diese Sitzungsber., Bd. 56, II, S. 945). Ich habe später auch noch Krystalle untersucht, die ich von Prof. Weidel erhielt, und für ihre Winkel Werthe ermittelt, die vollkommen mit den Messungen Brezina's stimmen.

An einem Krystall, dessen Ansicht von oben in beistehender Figur gegeben ist, war auch die neue Fläche 201 an der oberen und unteren Seite gut ausgebildet.

Die folgenden Winkel konnten mit Genauigkeit bestimmt werden:

	Beobachtet	Berechnet nach Brezina
100.110 =	54° 5′	53°55′
100.001	83 52	84 0
100.201	36 26	36 10
$\bar{1}00.\bar{2}01$	40 53	40 49
$\bar{1}\bar{1}0.001$	91 52	92 15
$\bar{1}\bar{1}0.\bar{2}01$	62 35	64 40

44. Dipyridindicarbonsäure

$$C_{12}H_8N_2O_6 + 2H_2O.$$

Siehe Zd. H. Skraup und G. Vortmann, diese Sitzungsber., Bd. 86, II (
S. 324.

Krystallsystem: asymmetrisch.

$$a : b : c = 0 \cdot 5909 : 1 : 0 \cdot 9773,$$

$$\xi = 102°22', \ \eta = 98°51', \ \zeta = 84°12',$$

$$010.001 = 78°20', \ 001.100 = 82°12', \ 010.100 = 94°$$

Formen: 010, 001, 110, $1\bar{1}0$, 111, $1\bar{1}1$, $\bar{1}11$, $\bar{1}\bar{1}1$.

	Gerechnet	Beobachtet
010.001	= 78°20′	78°26′
010.110	62 9	
$110.1\bar{1}0$	61 43	61 40
$1\bar{1}0.0\bar{1}0$	56 8	
110.111	25 11	*25 11
111.001	51 40	*51 40
$001.\bar{1}\bar{1}1$	72 1	72 6
$\bar{1}\bar{1}1.\bar{1}\bar{1}0$	31 8	
$1\bar{1}0.1\bar{1}1$	27 47	*27 47
$1\bar{1}1.001$	61 30	*61 30
$001.\bar{1}11$	62 44	62 40
$\bar{1}11.\bar{1}10$	27 59	27 40
010.111	62 34	
$111.1\bar{1}1$	51 0	*51 0
$1\bar{1}1.0\bar{1}0$	66 26	66 59
$010.\bar{1}11$	53 50	
$\bar{1}11.\bar{1}\bar{1}1$	56 36	
$\bar{1}\bar{1}1.\bar{1}\bar{1}0$	69 34	
$1\bar{1}1.110$	58 30	58 16
$111.1\bar{1}0$	67 14	
$\bar{1}11.\bar{1}\bar{1}0$	71 40	
$\bar{1}\bar{1}1.\bar{1}10$	64 31	

Der Habitus der Krystalle ist gegeben durch das von den zwei Flächenpaaren 110 und 1̄10 gebildete Prisma, wozu noch das Flächenpaar 010 tritt. Die Enden des Prismas werden durch die übrigen Flächen in verschiedener Ausbildung gebildet. Beistehende Figur gibt die Projection auf eine Ebene senkrecht zur Z-Axe.

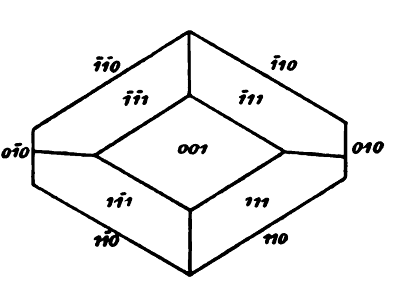


Fig. 33.

45. Resorcindisulfosaures Kali

$(SO_3K)_2(OH)_2C_6H_2 + H_2O$.

Siehe V. Tedeschi, diese Sitzungsber., Bd. 79, II (1879), S. 627.

Diese Substanz wurde auch von Prof. Ditscheiner krystallographisch untersucht, diese Sitzungsber., Bd. 83, II (1881), S. 1062. Seine Messungen stimmen mit dem von mir a. a. O. mitgetheilten Axensystem, doch scheint er bessere Krystalle zur Untersuchung gehabt zu haben. Ich habe daher mit den von Prof. Ditscheiner zur Berechnung benützten Winkeln die nicht ganz genaue Rechnung für die von mir gewählte Aufstellung wiederholt. Man erhält so:

Krystallsystem: monosymmetrisch.

$$a:b:c = 1\cdot3153:1:0\cdot6359,$$
$$\eta = 107°48'.$$

Formen: 100, 101, 1̄01, 110.

	Gerechnet	Beob. Dit.	Lang
100.101 =	50°21′	*50°21′	49°59′
101.1̄01	50 14	*50 14	50 14
1̄01.1̄00	79 25	79 30	79 43
110.100	51 24	*51 24	51 25
110.1̄10	77 12		
011.100	74 51		
011.01̄1	62 24		

	Gerechnet	Beobachtet	Lang
101.110 =	66°32′	66°34′	66°36′
110.01$\bar{1}$	76 1		
01$\bar{1}$.10$\bar{1}$	37 27	37 25	37 27
$\bar{1}$01.011	41 11	41 20	
011.110	55 22		55 15
110.10$\bar{1}$	83 27		83 28
$\bar{1}$01.110	96 33	96 42	

Die Ebene der optischen Axen ist parallel der Symme- ebene, wie man erkennt, wenn man die Krystalle durch Fläche 100 im Polarisationsapparat bei Na-Licht untersu Die Interferenzerscheinung ist gegen die spitze Kante 100. verschoben und zeigt positiven Charakter.

46. Isovanillin

$C_8H_8O_3$.

Siehe R. Wegscheider, diese Sitzungsber., Bd. 86, II (1882), S. 95

Krystallsystem: monosymmetrisch.

$$a : b : c = 0\cdot6370 : 1 : 0\cdot9228,$$
$$\eta = 96°9'.$$

Formen: 010, 001, 110, 101, 012.

	Gerechnet	Beobachtet
101.001 =	51°16′	*51°16′
110.010	57 39	
110.1$\bar{1}$0	64 42	*64 42
110.001	84 48	*84 48
012.010	65 21	
012.001	24 39	24 20
101.110	44 37	
110.01$\bar{2}$	80 3	
01$\bar{2}$.$\bar{1}$0$\bar{1}$	55 20	
110.$\bar{1}$0$\bar{1}$	135 23	135 30

Die Krystalle sind dünne Plättchen, parallel der Symme- ebene und etwas nach der X-Axe verlängert. Die Fläche

ist immer äusserst schmal, auch die Fläche 101 ist kaum vorhanden, doch sind die Krystalle sehr gut spaltbar nach dieser Fläche. Fig. 34 gibt eine Ansicht der Krystalle von oben.

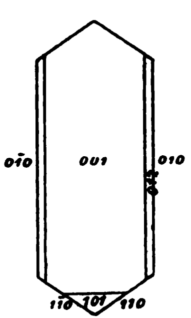


Fig. 34.

Das Vanillin wurde von Shadwell gemessen (Groth, Zeitschrift für Min. u. Kryst., Bd. 5 [1881], S. 313), und es zeigen die angegebenen Winkel einige Ähnlichkeit mit den vorstehenden Werthen.

Die beiden Bestimmungen lassen sich jedoch nicht einfach aufeinander beziehen.

Bestimmung der Lösungswärme eines Sa mittelst der Übersättigung und Theorie Übersättigung

von

O. Tumlirz,

Professor an der k. k. Universität in Czernowitz.

(Mit 2 Textfiguren.)

Bei meinen Untersuchungen über die Unterkühlun Flüssigkeiten, von welchen ich bereits einmal in diesen Sitz berichten[1] Mittheilung machte, habe ich naturgemäss au Übersättigung von Salzlösungen in Betracht gezogen und Anderem ganz besonders die Übersättigung der Lösunge krystallisirtem unterschwefligsaurem Natron in Wasser sucht, einerseits weil dieses Salz sich sehr leicht unterk lässt, und anderseits weil ich bereits in der angegebenen die specifische Wärme dieses Salzes für den festen und flü Zustand und seine Erstarrungswärme bestimmt habe. Bei Versuchen habe ich nun gefunden, dass man die Lös wärme eines Salzes mittelst der Übersättigung in eine einfachen Weise bestimmen kann.

Haben wir bei $t°$ C. eine gesättigte Lösung von kry sirtem unterschwefligsaurem Natron in Wasser hergeste soll das Verhältniss zwischen der Wassermenge und der gelösten Salzmenge mit v bezeichnet werden. Mulder hat Grösse v für mehrere Temperaturen bestimmt[2] und gefun

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. C, Abth. II. a. December 1891.

[2] Siehe: Gmelin-Kraut, Anorgan. Chemie, II, 1., S. 178.

für t......	16°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	47°
v......	0·618	0·561	0·487	0·415	0·354	0·288	0·222	0·196

Die Grössen v und t stehen, wie man leicht erkennen kann, in einem linearen Verhältniss zu einander, und zwar

$$v = 0{\cdot}829 - 0{\cdot}013535\, t \qquad ..1)$$

Berechnet man aus dieser Gleichung für die obigen Temperaturen das Verhältniss v, so ergibt sich

$v =$	0·612	0·558	0·491	0·423	0·355	0·288	0·220	0·193
$\delta =$	+0·006	+0·003	−0·004	−0·008	−0·001	±0·000	+0·002	+0·003

Ich habe in dem Folgenden immer die aus der Gleichung 1) fliessenden Werthe von v benützt.

Ich bestimmte ferner nach der in meiner obigen Arbeit angegebenen Methode die specifische Wärme der Lösungen von krystallisirtem Natriumhyposulfit in Wasser für verschiedene Werthe von v und erhielt

$v = 0{\cdot}832$,	($t = -$ 0°2 C.),	$c = 0{\cdot}763$	zwischen 2°9 u. 14°7 C.
0·695,	(+ 9·9),	0·748	» 19·4 » 26·6
0·543,	(+21·1),	0·736	» 17·5 » 22·4
0·543,	(+21·1),	0·745	» 21·8 » 32·8
0·423,	(+30·0),	0·704	» 21·3 » 40·6
0·288,	(+40·0),	0·701	» 29·6 » 41·1

Die in der Klammer stehenden Temperaturen bedeuten die Sättigungspunkte für die daneben stehenden v.

Eine Lösung von krystallisirtem Natriumhyposulfit in Wasser enthalte $Q\,g$ Wasser und $S\,g$ Salz und sei bei T° C. gesättigt. Alsdann ist

$$\frac{Q}{S} = v_T = 0{\cdot}829 - 0{\cdot}013535\, T$$

oder

$$S = \frac{Q}{v_T} = \frac{Q}{0{\cdot}829 - 0{\cdot}013535\, T},$$

woraus wir für die ganze Lösung

$$Q + S = \frac{1 + v_T}{v_T} \cdot Q = \frac{1{\cdot}829 - 0{\cdot}013535\, T}{0{\cdot}829 - 0{\cdot}013535\, T} \cdot Q$$

finden. Wir lassen jetzt die Lösung von dem Sättigungspun
bis auf $\tau°$ C. langsam erkalten. Wenn wir dann in die
sättigte Lösung einen ganz kleinen Krystall hineinwerfe
die Lösung heftig schütteln, so schiessen aus allen Punkte
Lösung Krystalle hervor, welche sich, wenn die Flüssigk
Ruhe gekommen ist, langsam setzen und einen schneea
Niederschlag bilden. Die Temperatur steigt dabei bis auf

Bei der Abkühlung ist der Lösung die Wärme

$$\frac{1+v_T}{v_T} Q . c_T . (T-\tau)$$

entzogen worden, wo c_T die mittlere specifische Wärme d
$T°$ gesättigten Lösung zwischen den Temperaturen T
bedeutet.

Nach der Auslösung der Übersättigung denken wi
dem Ganzen langsam Wärme zugeführt, und zwar so lan
dass die Auflösung des ausgefallenen Salzes mit der Ten
tursteigerung immer gleichen Schritt hält, d. h. hat die T
ratur den Werth $t°$ erreicht, so soll die Lösung die Salzr

$$\frac{Q}{v_t}$$

enthalten, also im Ganzen die Menge

$$Q + \frac{Q}{v_t} = \frac{1+v_t}{v_t} . Q = \frac{1 \cdot 829 - 0 \cdot 013535\, t}{0 \cdot 829 - 0 \cdot 013535\, t} \cdot Q$$

haben. Wird die Temperatur $t°$ in der angegebenen
um dt erhöht, dann wird eine Salzmenge dS gelöst, für w
die Gleichung

$$dS = -\frac{Q}{v_t^2} \frac{dv_t}{dt} dt = \frac{0 \cdot 013535\, Q}{v_t^2} dt$$

gilt. Die Wärmemenge, welche bei der Auflösung von d
braucht wird, nennen wir λdS und es ist

$$\lambda dS = \frac{0 \cdot 013535\, Q}{v_t^2} \lambda dt.$$

Gleichzeitig wird aber die Lösung und das noch fest
um dt erwärmt. Die Erwärmung der Lösung verlangt die W

$$\frac{1+v_t}{v_t} Q . c_t dt. \qquad ..3)$$

Das noch ungelöste Salz ist gleich

$$S - \frac{Q}{v_t} = \frac{Q}{v_T} - \frac{Q}{v_t} = \frac{0 \cdot 013535\, Q}{v_T v_t} (T-t).$$

Für die specifische Wärme des festen Natriumhyposulfits habe ich a. a. O. zwischen den Temperaturgrenzen 20° und 38° C. den Werth 0·409 erhalten; demnach verlangt die Erwärmung des festen Salzes um dt die Wärmemenge

$$\frac{0 \cdot 013535\, Q}{v_T v_t} . 0 \cdot 409 (T-t) dt. \qquad ..4)$$

Erreicht schliesslich die langsame Erwärmung die ursprüngliche Temperatur T, dann ist alles Salz gelöst und der frühere Zustand wieder hergestellt. Da wir bei diesem Kreisprocess die Arbeit der äusseren Druckkräfte vernachlässigen können, so haben wir die Gleichung

$$0 \cdot 013535\, Q \int_\theta^T \frac{\lambda\, dt}{v_t^2} + Q \int_\theta^T \frac{1+v_t}{v_t} c_t dt +$$

$$+ \frac{0 \cdot 013535 \times 0 \cdot 409}{v_T} . Q \int_\theta^T \frac{T-t}{v_t} dt = \frac{1+v_T}{v_T} Q c_T (T-\tau),$$

oder

$$\int_\theta^T \frac{\lambda\, dt}{v_t^2} = \frac{(1+v_T) . c_T (T-\tau)}{0 \cdot 013535\, v_T} - \frac{1}{0 \cdot 013535} \int_\theta^T \frac{1+v_t}{v_t} c_t dt -$$

$$- \frac{0 \cdot 409}{v_T} \int_\theta^T \frac{T-t}{v_t} dt.$$

Im ersten Integral auf der rechten Seite wollen wir für c_t die mittlere specifische Wärme zwischen θ und T einführen. Bezeichnen wir diese mit c, so ist

$$\int_\theta^T \frac{1+v_t}{v_t} c_t dt = c \int_\theta^T \frac{1+v_t}{v_t} dt = c \left(\frac{\log \text{nat} \frac{v_\theta}{v_T}}{0 \cdot 013535} + T - \theta \right).$$

Ferner ist

$$\int_\theta^T \frac{T-t}{0\cdot 829-0\cdot 013535\,t}\,dt = -\frac{v_T}{(0\cdot 013535)^2}\log\text{nat}\frac{v_\theta}{v_T} + 0$$

also

$$\int_\theta^T \frac{\lambda\,dt}{v_t^2} = \frac{c_T(1+v_T)(T-\tau)-(0\cdot 409+cv_T)(T-\theta)}{0\cdot 013535\,v_T} -$$

$$-\frac{c-0\cdot 409}{(0\cdot 013535)^2}\log\text{n}$$

Das links stehende Integral können wir gleich

$$\lambda_m\int_\theta^T \frac{dt}{v_t^2} = \lambda_m\cdot\frac{T-\theta}{v_T\,.\,v_\theta}$$

setzen, wo λ_m die Lösungswärme für eine zwischen $\theta°$ liegende Temperatur bedeutet. Mithin ist

$$\lambda_m = \frac{c_T(1+v_T)v_\theta}{0\cdot 013535}\cdot\frac{T-\tau}{T-\theta} - \frac{(0\cdot 409+cv_T)v_\theta}{0\cdot 013535} -$$

$$-\frac{(c-0\cdot 409)v_T v_\theta\log\text{na}}{(0\cdot 013535)^2(T-\theta)}$$

Erster Versuch.

Die Lösung enthielt 34·22 *g* Wasser und 118·77 *g* schwefligsaures Natron, hatte also das Mischungsverh 0·288 und den Sättigungspunkt 40°0 C. Nachdem die L auf τ = 18°5 C. erkaltet war, wurde die Übersättigun gelöst. Die Temperatur stieg auf θ = 30°0 C. Wir hab

T = 40°0 C. τ = 18°5 C. θ = 30°0 C

v_T = 0·288 v_τ = 0·578 v_θ = 0·422

λ_m = **34·32** cal.

Zweiter Versuch.

Dieselbe Lösung, wie im ersten Versuche, wur τ = 19°1 C. abgekühlt.

Bei der Auslösung der Übersättigung stieg die Temperatur auf $\theta = 30°7$ C.

$T = 40°0$ C. $\tau = 19°1$ C. $\theta = 30°7$ C.
$v_T = 0{\cdot}288$ $v_\tau = 0{\cdot}570$ $v_\theta = 0{\cdot}413$
$\lambda_m = \mathbf{36{\cdot}10}$ cal.

Dritter Versuch.

Die Lösung enthielt 33·08 *g* Wasser und 113·74 *g* unterschwefligsaures Natron, hatte also das Mischungsverhältniss 0·291 und den Sättigungspunkt 39°8 C. Nachdem die Lösung auf 17°0 C. erkaltet war, wurde die Übersättigung ausgelöst. Dabei stieg die Temperatur auf 29°3 C.

$T = 39°8$ C. $\tau = 17°0$ C. $\theta = 29°3$ C.
$v_T = 0{\cdot}291$ $v_\tau = 0{\cdot}599$ $v_\theta = 0{\cdot}432$
$\lambda_m = \mathbf{35{\cdot}74}$ cal.

Vierter Versuch.

Die Lösung enthielt 45·05 *g* Wasser und 120·14 *g* unterschwefligsaures Natron, hatte also das Mischungsverhältniss 0·375 und den Sättigungspunkt 33°5 C. Nachdem die Lösung bis auf 9°9 C. erkaltet war, wurde die Übersättigung aufgehoben. Die Temperatur stieg auf 21°1 C.

$T = 33°5$ C. $\tau = 9°9$ C. $\theta = 21°1$ C.
$v_T = 0{\cdot}375$ $v_\tau = 0{\cdot}695$ $v_\theta = 0{\cdot}543$
$\lambda_m = \mathbf{36{\cdot}15}$ cal.

Fünfter Versuch.

Die Lösung enthielt 52·25 *g* Wasser und 110·86 *g* unterschwefligsaures Natron, hatte also das Mischungsverhältniss 0·471 und den Sättigungspunkt 26°4 C. Nachdem die Lösung auf —0°2 C. erkaltet war, wurde die Übersättigung aufgehoben. Die Temperatur stieg auf 10°1 C.

$T = 26°4$ C. $\tau = -0°2$ C. $\theta = 10°1$ C.
$v_T = 0{\cdot}471$ $v_\tau = 0{\cdot}832$ $v_\theta = 0{\cdot}692$
$\lambda_m = \mathbf{36{\cdot}14}$ cal.

Wenn wir die erhaltenen Werthe zusammenstelle
erhalten wir

zwischen		und		ist λ_{m} =	
zwischen	10°1 C.	und	26°4 C.	ist λ_{m} =	36·14 cal.
	21·1		33·5		36·15
	29·3		39·8		35·74
	30·0		40·0		34·32
	30·7		40·0		36·10

Ziehen wir aus den drei letzten Bestimmungen das
— dasselbe ist 35·38 cal. — so entspricht diese Zahl eige
der Temperatur 35° C. Bei dieser Temperatur ist abe
Schmelzwärme des festen Natriumhyposulfits[1]

$$47 \cdot 23 - 0 \cdot 2075 \times (48 \cdot 1 - 35 \cdot 0) = 44 \cdot 51 \text{ cal.}$$

Die Differenz beträgt somit

$$44 \cdot 51 - 35 \cdot 38 = \mathbf{9 \cdot 13} \text{ cal.}$$

Es entsteht nun die Frage, wie wir uns diese Differe
erklären haben. Eine gegebene Wassermenge hat die E
schaft, eine Natriumhyposulfitmenge zu binden, welche be
constanten Druck einer Atmosphäre für jede Temperatu
ganz bestimmte Grösse hat, oder mit anderen Worter
Lösung des unterschwefligsauren Natrons in Wasser is
flüssige Verbindung, in welcher die gebundene Salzmeng
der Temperatur abhängt. Eine solche Lösung, z. B. die Lö
des ersten Versuches können wir uns auf die folgende V
hergestellt denken. In einem Kolben haben wir 118·77 *g* f
krystallisirtes Natriumhyposulfit von 48°1 C. und in d
zweiten Kolben 34·22 *g* Wasser ebenfalls von 48°1 C. V
wir jetzt dem festen Natriumhyposulfit 118·77×47·23 ca
führen, so verwandeln wir es in flüssiges Natriumhyposulf
der Temperatur 48°1 C. Nun denken wir uns das Wasse
dem zweiten Kolben langsam in den ersten gebracht.
Wasser wird sich, weil es leichter ist, zunächst oben bef
und anfangs von dem flüssigen Natriumhyposulfit durch
scharf ausgeprägte Grenzebene getrennt sein. An dieser G

[1] A. a. O. S. 1231.

sehen wir sehr bald die Mischung langsam vor sich gehen. Befindet sich das Ganze in einem Raume von der constanten Temperatur 48°1 C., so ist diese Mischung das Einzige, was eine Veränderung in den Flüssigkeiten herbeiführt. Nach einer sehr langen Zeit erhalten wir durch die Mischung eine vollständig homogene Lösung.

Wir stellen uns nun diesen Mischungsprocess folgendermassen vor. Auf ein Wassertheilchen, welches in der Grenzebene liegt, wirken zwei Kräfte; die eine Kraft rührt von den umliegenden Wassertheilchen her, die andere dagegen von den flüssigen Salztheilchen.

Ebenso wirken auf ein Salztheilchen in der Grenzebene zwei Kräfte, welche beziehungsweise von den Salztheilchen und Wassertheilchen herrühren. Da die Adhäsion die Cohäsion überwiegt, so werden die Wassertheilchen in das flüssige Salz und die Salztheilchen in das Wasser gezogen. Diese Bewegung, welche durch die zwischen den beiden Flüssigkeiten wirksamen Anziehungskräfte erfolgt, wird so lange dauern, bis für diese Kräfte stabiles Gleichgewicht eingetreten ist, d. h. bis die Resultirende aller auf ein Theilchen wirkenden Kräfte den Werth Null hat.

Und dies wird wiederum erst dann der Fall sein, wenn die Lösung durchaus homogen geworden ist.

Wir stellen uns demgemäss vor, dass in der homogenen Lösung unendlich viele gleich grosse, flüssige Salztheilchen ganz gleichmässig vertheilt sind, dass dieselben von einander durch das Wasser getrennt sind und dass jedes Salztheilchen das anliegende Wasser durch die Kräfte der Adhäsion bindet und verdichtet. Die Verdichtung führt zu der bei den Lösungen bekannten Contraction.

Was die Grösse der Salztheilchen anbelangt, so wird dieselbe offenbar von der Ordnung der molecularen Wirkungssphären sein und der folgenden Gleichgewichtsbedingung entsprechen.

Das Salzmolekül a an der Grenze (Fig. 1) wird von allen umliegenden Wassertheilchen angezogen, also nicht nur von den bei α liegenden Wassertheilchen, sondern auch von den bei β, γ und δ liegenden Theilchen. Je kleiner die eingeschlossene

Salzmenge ist, desto kleiner muss die Resultirende dieser
sein. Anderseits wird aber *a* noch von den anderen mi
schlossenen Salzmolekülen angezogen. Die Grösse der
schlossenen Salzmenge wird also bedingt sein durch die
heit der an der Oberfläche derselben wirkenden Cohäsion
Adhäsionskraft.[1]

Jedes Salztheilchen bildet mit seiner gebundenen W
sphäre ein zusammengesetztes Element und die Lösu
nichts anderes als ein Vielfaches dieser Elemente. Na
entspricht jedem Mischungsverhältniss eine bestimmte S
der Lösung. Je verdünnter die Lösung ist, desto kleiner
die eingeschlossenen Salztheilchen sein.

Ist die Lösung homogen geworden, dann herrsch
gesagt, für die inneren Kräfte stabiles Gleichgewicht.

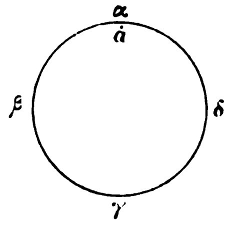


Fig. 1.

Mischung haben also die Adhä
kräfte Arbeit geleistet und dieser
entspricht eine bestimmte Wärme
Somit haben wir bei der Herst
der obigen Lösung die Schmelz
$47 \cdot 23 \times 118 \cdot 77$ cal. verbraucht u
der Arbeit der Bindungskräfte
valente Wärmemenge gewonne
Lösungswärme ist die Differenz beider. Die oben er
Differenz zwischen der Schmelzwärme und der Lösungs
nämlich

$$44 \cdot 51 - 35 \cdot 38 = 9 \cdot 13 \text{ cal.}$$

ist also nichts anderes, als die der Arbeit der Bind
kräfte äquivalente Wärmemenge.

An diese Betrachtungen möchte ich noch die Mitth
zweier Versuche anschliessen, welche ich wiederholt m
gleichen Ausgang angestellt habe. Wenn wir krystal
Natriumhyposulfit schmelzen und dann die Flüssigkeit
kühlen, so leitet auch der kleinste Krystall dieses
sofort die Auslösung des unterkühlten Zustandes ein.

[1] Wenn wir in der Zeichnung den Salztheilchen die Kugelform
haben, so ist das nur der Einfachheit halber geschehen, die Form d
fläche ist wahrscheinlich im Allgemeinen eine andere.

Thatsache ist so sicher, dass wir umgekehrt schliessen können: Kommt die unterkühlte Flüssigkeit mit einer zweiten Flüssigkeit in Berührung und tritt, mag die Berührung auch noch so lange dauern, die Erstarrung nicht ein, so kann in der zweiten Flüssigkeit kein fester Krystall des Natriumhyposulfits vorhanden sein.

Ich habe zunächst als zweite Flüssigkeit destillirtes Wasser gewählt. In dem Kolben I (Fig. 2) befindet sich unterkühltes Natriumhyposulfit, welches mit einer dünnen Schichte Olivenöl bedeckt ist, in dem Kolben II dagegen destillirtes Wasser. Bringt man einen reinen Streifen Filtrirpapier, so wie es die Figur zeigt, so in die beiden Kolben, dass das eine Ende ganz in das Wasser taucht und das andere sich an den Hals des anderen Kolbens oberhalb der unterkühlten Flüssigkeit anlegt, so wird das Filtrirpapier das destillirte Wasser aufsaugen und an der Wand des Kolbens I ganz langsam herabfliessen lassen. Die Unterkühlung wird dadurch nicht ausgelöst. Es breitete sich bei meinem Versuche zwischen dem Öl und dem Natriumhyposulfit eine Wasserschichte aus, welche bei dem angewandten Filtrirpapier in 18 Stunden ein Volumen annahm, das dem des Salzes ungefähr gleichkam. Trotzdem zwischen dem Wasser und der unterkühlten Flüssigkeit eine langsame Mischung vor sich ging, welche doch mit einer Bewegung der kleinsten Theilchen verbunden ist, wurde die Unterkühlung nicht ausgelöst. Bei dem zweiten Versuche war die Anordnung genau dieselbe, nur war das destillirte Wasser durch eine nicht gesättigte Lösung von Natriumhyposulfit in Wasser ersetzt. Die Lösung trat wie früher aus dem Filtrirpapier langsam heraus, floss die Wand herunter und breitete sich zwischen dem Öl und dem

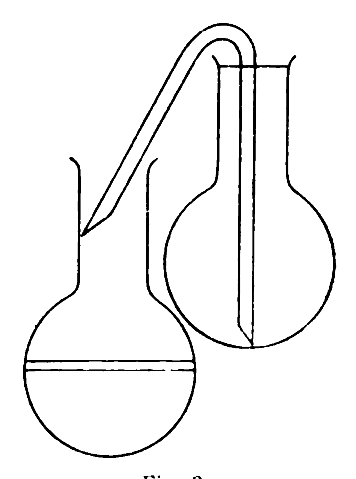


Fig. 2.

unterkühlten Natriumhyposulfit aus. Auch jetzt wurd
unterkühlte Flüssigkeit nicht zum Erstarren gebr
trotzdem sie an der Grenzfläche verdünnt wurde.

Für den Versuch ist unerlässlich, dass das Wasser
die Lösung durch das Filtrirpapier ganz langsam eintritt,
giesst man das Wasser oder die Lösung in Gestalt
Strahles in die unterkühlte Flüssigkeit, so wird die let
offenbar durch die heftige relative Bewegung ihrer Theil
sofort zum Erstarren gebracht.

Der angeführte Versuch führt zu dem Schluss, dass,
wir festes Salz im Wasser auflösen, bei dieser Lösun
feste Körper nicht in unendlich kleine Partikelchen zerlegt
die sich dann gleichmässig vertheilen, sondern es werden
Partikelchen verflüssigt.

Wenn die Lösung des krystallisirten Natriumhypos
in Wasser bei $t°$ C. gesättigt ist, so sind gerade alle bind
Kräfte befriedigt. Die Lösung enthalte $Q g$ Wasser und $S g$
Bringen wir eine neue Menge, z. B. $s g$ von dem festen Nat
hyposulfit in die Lösung, so wird diese nicht mehr a
Wollten wir diese Salzmenge auch zur Lösung bringen,
müssten wir die Temperatur auf einen Grad T erhöhen, w
der Sättigungspunkt für das Verhältniss $Q:(S+s)$ ist. Ist
bei $T°$ alles aufgelöst und lassen wir die Lösung wieder
erkalten, dann wird in der übersättigten Lösung bei $t°$ di
hinzugekommene Salzmenge s von den bindenden K
nicht mehr afficirt werden, sie wird vollkommen frei
Da sie flüssig ist und die Temperatur $t°$ C. unter dem Sch
punkt 48°1 C. des unterschwefligsauren Natrons liegt, so
sie sich in dem Zustande einer unterkühlten Flü
keit befinden. Eine übersättigte Lösung bei der Temp
$t°$ C. besteht also aus einer Mischung aus der bei $t°$ gesät
Lösung $(Q+S)$, welche als ein homogenes Individuum fü
zu betrachten ist, und aus der unterkühlten Flüssigk
welche reines, flüssiges, unterschwefligsaures Natron ist,
zwar ist die Mischung als ein Gemenge Lösung + flüssiges
zu betrachten.

Dass in diesem Gemenge das ungebundene flüssige
sich in Folge seines grösseren specifischen Gewichtes

setzt, sondern die übersättigte Lösung, auch wenn sie viele Wochen lang steht, immer ein homogenes Aussehen hat, lässt sich leicht erklären. Die flüssigen Salztheilchen sind von einander durch das Wasser getrennt; an der Grenze beider wirken die bindenden Kräfte; es können also die ungebundenen Theile der Salztheilchen nur im Innern derselben liegen. Dass bei dieser Anordnung die Verschiedenheit des specifischen Gewichtes keine Trennung des Gemenges bewirken kann, liegt auf der Hand.

Was die Natur der ungebundenen und unterkühlten flüssigen Salztheile anbelangt, so haben wir darüber dieselbe Anschauung, welche wir in der angeführten Arbeit in Bezug auf die unterkühlten Flüssigkeiten näher auseinandergesetzt haben.

Da in einer übersättigten Lösung die unterkühlten flüssigen Salztheilchen nicht unmittelbar aneinander grenzen, sondern durch eine wässerige Lösung von einander getrennt sind, so muss die Auslösung der Übersättigung einen anderen Verlauf zeigen als die Auslösung der Unterkühlung eines flüssigen Salzes. Lassen wir in eine unterkühlte Flüssigkeit einen sehr kleinen Krystall fallen, so setzen sich an ihn sofort neue Krystalle an, und dieses Krystallgefüge wächst so rasch, dass die Unterkühlung im Verlaufe von einigen Secunden überall aufgehoben ist. Dabei steigt die Temperatur sofort auf den Erstarrungspunkt. Wenn wir dagegen in eine ruhige übersättigte Lösung einen ganz kleinen Krystall fallen lassen, so setzen sich an denselben zunächst sehr kleine Krystalle an. Die auftretende Erstarrungswärme erzeugt eine beträchtliche, durch ihre Schlieren erkennbare Strömung nach aufwärts, welche ganz kleine Kryställchen in die Höhe treibt. Oben angelangt, fallen diese Krystalle wieder zu Boden, um dort neue Krystallisationscentra zu bilden. Nach einiger Zeit, wenn die am Boden liegenden Krystalle ziemlich gross geworden sind, sieht man keine Kryställchen mehr aufsteigen, dafür aber die Säulen langsam wachsen; es bilden sich grosse und schöne Krystalle. Dieser Erstarrungsprocess dauert ziemlich lang, und auch die Temperatur steigt sehr langsam. Als ich die Lösung, welche ich im ersten und zweiten Versuche verwendete, bis

21·6° C. abkühlte und dann die Übersättigung in der bes benen Weise auslöste, verging bis zum Überschreiten Temperaturmaximums (29·3° C.) nahezu eine Stunde. B oben angeführten messenden Versuchen habe ich die sättigung, wie schon erwähnt, in der Weise ausgelöst, ich die Lösung, nachdem ein sehr kleiner Krystall eing worden war, sogleich sehr heftig schüttelte. Dadurch sch aus allen Punkten der Lösung kleine Krystalle hervor, di dann, als die Lösung zu Ruhe gekommen war, langsam s und einen schneeartigen Bodensatz bildeten. Die Temp erreichte dabei ziemlich rasch das Maximum.

Ist die hier durchgeführte Anschauung über die Cor tion der übersättigten Lösungen richtig, dann muss der fol Schluss gelten. Eine Lösung von unterschwefligsaurem N in Wasser sei bei $T°$ C. gesättigt und enthalte $Q\,g$ Wasse $S_T\,g$ Salz.

$$\frac{Q}{S_T} = v_T, \quad S_T = \frac{Q}{v_T}.$$

Wird die Lösung bis $\tau°$ C. abgekühlt und dadurch sättigt, so bindet die Wassermenge Q die Salzmenge S_τ es ist

$$S_\tau = \frac{Q}{v_\tau}.$$

Somit ist die ungebundene Salzmenge s gegeben du

$$s = S_T - S_\tau = \frac{Q}{v_T} - \frac{Q}{v_T} = 0\cdot013535\,\frac{Q}{v_T v_\tau}\,(T-\tau).$$

Wenn nun flüssiges Natriumhyposulfit von der Me sich bei der Temperatur $\tau°$ C. im unterkühlten Zustande be und dann die Unterkühlung ausgelöst wird, so steigt die peratur sofort auf 48·1° C., und es erstarrt dabei die M ms, wo

$$m = \frac{C}{\Lambda}\,(48\cdot1-\tau)$$

ist. C bedeutet hier die specifische Wärme der unterkü Flüssigkeit ($C = 0\cdot6165$) und Λ die Erstarrungswärm

48·1° C. ($\Lambda = 47 \cdot 23$ cal.). Die Menge, welche flüssig bleibt, hat die Grösse

$$s - ms = (1-m)s.$$

Wir denken uns jetzt den erstarrten Theil ms und den flüssigen Theil $(1-m)s$, jeden für sich, auf $\theta°$ C. abgekühlt. Dadurch erhalten wir die Wärme

$$W'_1 = ms \times 0 \cdot 409 \times (48 \cdot 1 - \theta) + \\ + (1-m)s \times 0 \cdot 6165 \times (48 \cdot 1 - \theta) \text{ cal.}$$

oder ausgeführt

$$W'_1 = 0 \cdot 006581 \times \frac{Q}{v_T v_\tau} (T - \tau)(48 \cdot 1 - \theta)(1 + 0 \cdot 00557\,\tau) \text{ cal.}$$

Da bei der Temperatur $\theta°$ C. die Salzmenge

$$S_\theta = \frac{Q}{v_\theta}$$

gebunden wird, also $S_T - S_\theta$ ungebunden ist, so fällt, wenn die Übersättigung bei $\theta°$ C. ausgelöst wird, die Menge $S_T - S_\theta$ als festes Salz aus. Bei unserer Operation war bisher die Menge ms erstarrt; wir werden also von dem oben betrachteten flüssigen Salze $(1-m)s$ bei der Temperatur $\theta°$ C. noch die Menge

$$S_T - S_\theta - ms = S_T - S_\theta - m(S_T - S_\tau) = (1-m)S_T - S_\theta + mS_\tau$$

zur Erstarrung bringen müssen. Ist Λ_θ die Erstarrungswärme des Natriumhyposulfits bei der Temperatur $\theta°$ C.,

$$\Lambda_\theta = 47 \cdot 23 - 0 \cdot 2075 (48 \cdot 1 - \theta) \text{ cal.},$$

so gewinnen wir dabei die Wärme

$$W'_2 = \Lambda_\theta \left[\frac{Q}{v_T} - \frac{Q}{v_\theta} - m \left(\frac{Q}{v_T} - \frac{Q}{v_\tau} \right) \right] \\ = 0 \cdot 013535\, Q \Lambda_\theta \left(\frac{T - \theta}{v_T v_\theta} - m \frac{T - \tau}{v_T v_\tau} \right) \text{ cal.}$$

Wenn also das unterkühlte flüssige Salz s von der Temperatur $\tau°$ durch den bezeichneten Process in den erwähnten Zustand von der Temperatur $\theta°$, bei dem die Menge $S_T - S_\theta$ fest

und $S_0 - S_\tau$ flüssig ist, übergeht, so gewinnen wir die W
$W'_1 + W'_2$.

Ein Theil dieser Wärme hebt die Lösung $Q + S_\tau$, w
bei $\tau°$ gesättigt war, von der Temperatur $\tau°$ auf die Temp
$\theta°$, und zwar ist dies der Theil

$$W'_3 = (Q + S_\tau)\int_\tau^\theta c_t dt \text{ cal.},$$

welchen wir in der Form

$$W'_3 = Q \cdot \frac{1+v_\tau}{v_\tau} \cdot \frac{c_\tau + c_\theta}{2}(\theta - \tau) \text{ cal.}$$

schreiben können. Hat die Lösung die Temperatur $\theta°$ er
so sind auch die bindenden Kräfte des Wassers um
solchen Betrag gestiegen, dass die Wassermenge Q aus
noch den flüssigen Rest $S_0 - S_\tau$ des unterkühlten Natrium
sulfits bindet. Indem nun schliesslich die festen Theile au
Salztheilchen heraustreten und miteinander grössere Kry
bilden, geht jene Bindungsarbeit verloren, welche bei de
lösung der Salzmenge $S_T - S_0$ von den Adhäsionskräfte
leistet worden ist. Dieser Arbeit ist die Wärme

$$W_4 = (S_T - S_0) \times 9 \cdot 13 = 0 \cdot 013535 \times 9 \cdot 13\, Q \frac{T - \theta}{v_T v_\theta} \text{ ca}$$

äquivalent. Da dieser Wärmeverbrauch durch den Re
Wärmegewinnes gedeckt werden muss, so muss die Glei

$$W_1 + W_2 = W_3 + W_4$$

bestehen. Wir wollen nun im Folgenden diese Gleichung, v
aus unserer Anschauung über die Natur der übersättigten
lösungen abgeleitet ist, an der Hand unserer Versuche p

Erster Versuch.

$T = 40°0$ C.	$\tau = 18°5$ C.	$\theta = 30°0$ C.
$v_T = 0 \cdot 288$	$v_\tau = 0 \cdot 578$	$v_\theta = 0 \cdot 422$

$$W_1 = 16 \cdot 96\, Q \qquad W_3 = 22 \cdot 79\, Q$$
$$W_2 = 18 \cdot 76 \qquad W_4 = 10 \cdot 13$$
$$W_1 + W_2 = 35 \cdot 72\, Q \qquad W_3 + W_4 = 32 \cdot 92\, Q$$

Zweiter Versuch.

$T = 40°0$ C. $\tau = 19°1$ C. $\theta = 30°7$ C.
$v_T = 0\cdot288$ $v_\tau = 0\cdot570$ $v_\theta = 0\cdot413$

$$W_1 = 16\cdot09\,Q \qquad W_3 = 23\cdot12\,Q$$
$$W_2 = 17\cdot51 \qquad W_4 = 9\cdot62$$
$$W_1 + W_2 = 33\cdot60\,Q \qquad W_3 + W_4 = 32\cdot74\,Q$$

Dritter Versuch.

$T = 39°8$ C. $\tau = 17°0$ C. $\theta = 29°3$ C.
$v_T = 0\cdot291$ $v_\tau = 0\cdot599$ $v_\theta = 0\cdot432$

$$W_1 = 17\cdot74\,Q \qquad W_3 = 23\cdot78\,Q$$
$$W_2 = 17\cdot68 \qquad W_4 = 10\cdot32$$
$$W_1 + W_2 = 35\cdot42\,Q \qquad W_3 + W_4 = 34\cdot10\,Q$$

Vierter Versuch.

$T = 33°5$ C. $\tau = 9°9$ C. $\theta = 21°1$ C.
$v_T = 0\cdot375$ $v_\tau = 0\cdot695$ $v_\theta = 0\cdot543$

$$W_1 = 16\cdot99\,Q \qquad W_3 = 20\cdot27\,Q$$
$$W_2 = 8\cdot90 \qquad W_4 = 7\cdot54$$
$$W_1 + W_2 = 25\cdot89\,Q \qquad W_3 + W_4 = 27\cdot81\,Q$$

Fünfter Versuch.

$T = 26°4$ C. $\tau = -0°2$ C. $\theta = 10°1$ C.
$v_T = 0\cdot471$ $v_\tau = 0\cdot832$ $v_\theta = 0\cdot692$

$$W_1 = 16\cdot49\,Q \qquad W_3 = 17\cdot12\,Q$$
$$W_2 = 3\cdot50 \qquad W_4 = 5\cdot95$$
$$W_1 + W_2 = 19\cdot99\,Q \qquad W_3 + W_4 = 23\cdot07\,Q$$

Stellen wir die erhaltenen Resultate zusammen, so haben wir

$W_1 + W_2$	$W_3 + W_4$
35·72 Q	32·92 Q
33·60	32·74
35·42	34·10
25·89	27·81
19·99	23·07
Summe = 150·62	Summe = 150·64

Aus dem Vergleich der beiden Summen geht hervor, unsere Anschauung im Grossen und Ganzen vollkommen rechtfertigt ist, nämlich die Anschauung, dass die Übers gung einer Salzlösung darin besteht, dass in ei jeden der von dem Wasser gebundenen flüss Salztheilchen ein Theil von den bindenden Krä frei wird und den Zustand des unterkühlten flüss Salzes annimmt.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CII. BAND. VIII. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.


STANFORD LIBRARIES

XX. SITZUNG VOM 12. OCTOBER 1893.

Der nunmehrige Vicepräsident der Akademie Herr Prof. E. Suess übernimmt den Vorsitz, indem er die Classe bei Wiederaufnahme der Sitzungen nach den akademischen Ferien begrüsst und dieselbe bittet, ihm das als langjährigem Secretär geschenkte Wohlwollen nun auch als Vorsitzendem erhalten zu wollen.

Zugleich spricht derselbe dem Herrn Intendanten Hofrath Ritter v. Hauer für die seit dem Ableben des Herrn Vicepräsidenten Hofrath J. Stefan geführten Geschäfte des Vorsitzenden den verbindlichsten Dank aus und heisst die neueingetretenen Mitglieder Prof. A. Schrauf und Prof. H. Weidel herzlich willkommen.

Hierauf gibt der Vorsitzende Nachricht von dem am 9. October l. J. erfolgten Ableben des inländischen correspondirenden Mitgliedes dieser Classe, Herrn Hofrathes Dionys Stur, emerit. Directors der k. k. geologischen Reichsanstalt in Wien.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide über diesen Verlust durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Herr Hofrath Director J. Hann empfiehlt sich als nunmehriger Secretär der Classe gleichfalls dem wohlwollenden Entgegenkommen und dem Vertrauen seitens der Herren Mitglieder und geht dann über zur Mittheilung der Einsendungen und Berichte an die Classe.

Zunächst legt derselbe das im Auftrage Sr. k. u. k. Hoheit des durchlauchtigsten Herrn Erzherzogs Ludwig Salvator, Ehrenmitgliedes der kaiserl. Akademie, von der Buchdruckerei

Heinr. Mercy in Prag übersendete Werk von »Die L
schen Inseln. I. Vulcano« vor; ferner

die im Laufe der Ferien erschienenen akadem
Publicationen, und zwar:

Den 43. Jahrgang des Almanach der kaiserl. Aka
für das Jahr 1893; ferner von den

Sitzungsberichten der Classe, Jahrgang 1893, B
Abtheilung I, Heft IV—V (April—Mai); Abtheilung II. a
III—IV (März—April) und Heft V—VI (Mai—Juni); Abth
II. b, Heft V—VII (Mai—Juli);

Monatshefte für Chemie, Jahrgang 1893, B
Heft VI (Juni), Heft VII (Juli) und Heft VIII (August).

Für die diesjährigen Wahlen sprechen ihren Dank
Herr Prof. Dr. Ferdinand Lippich in Prag für die
zum wirklichen Mitgliede; die Herren k. u. k. Oberstlieu
R. Daublebsky v. Sterneck in Wien und Prof. Dr
Stolz in Innsbruck für ihre Wahl zu correspondirende
gliedern im Inlande; ferner Herr Director Giovanni V
Schiaparelli in Mailand für die Wahl zum ausländ
Ehrenmitgliede und die Herren Prof. Dr. Heinrich He
Bonn und Gabriel Auguste Daubrée zu Paris für die W
ausländischen correspondirenden Mitgliedern dieser Clas

Das k. k. Ministerium des Inneren übermittelt d
der niederösterreichischen Statthalterei vorgelegten Ta
über die in der Winterperiode 1892/93 am Donaustro
Gebiete des Kronlandes und am Wiener Donaucanale
gehabten Eisstandsverhältnisse.

Die Association belge de Chimiste (Secti
Chimie biologique) in Brüssel ladet die kaiserliche Aka
zur Theilnahme an dem Internationalen Congres
angewandte Chemie ein, welcher am 4. August 18
Brüssel eröffnet werden wird.

Der Secretär berichtet, dass die diesjährige wissens
liche Expedition S. M. Schiffes »Pola«, welche am 16. Ju
Centralhafen von Pola verlassen hat, nach vollbrachter
wöchentlicher Fahrt am 5. October morgens, bei dem

Gesundheitszustande der Mitglieder des wissenschaftlichen Stabes, sowie des Schiffsstabes und der Bemannung, wieder in diesen Hafen eingelaufen ist.

Zugleich legt der Secretär einen von dem Mitgliede der Expedition, Prof. J. Luksch, aus Corfu eingesendeten vorläufigen Bericht über die während der diesjährigen Expedition ausgeführten physikalisch-oceanographischen Untersuchungen zur Veröffentlichung in den Sitzungsberichten vor.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. J. Wiesner übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: »Über ombrophile und ombrophobe Pfanzenorgane«.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. E. Mach übersendet eine Arbeit von med. stud. Ludwig Mach in Prag: »Über ein Interferenzrefractometer«. (II. Mittheilung.)

Ferner übersendet Herr Regierungsrath Mach eine Arbeit des Supplenten J. Wanka an der k. u. k. Marine-Akademie in Fiume: »Über Condensationsschwingungen«.

Das w. M. Herr Prof. L. Pfaundler übersendet eine Arbeit aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz von Dr. H. Luggin: »Über das Potential der Metalle bei sehr kurz dauernder Berührung mit Elektrolyten«.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. Dr. Freih. v. Ettingshausen in Graz übersendet eine Abhandlung für die Denkschriften, betitelt: »Die Formelemente der europäischen Tertiärbuche (*Fagus Feroniae* Ung.).«

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer in Wien übersendet folgende drei Abhandlungen:

1. »Über ein Theorem des Herrn Baker.«
2. »Eine Anwendung der Zahlentheorie auf die Integralrechnung.«
3. »Das Additionstheorem der Functionen $C_n^\nu(x)$.«

Das c. M. Herr Prof. K. Senhofer übersendet eine Arbeit aus dem chemischen Laboratorium der k. k. Universität zu Innsbruck: »Über einige Abkömmlinge der *s*-Disulfobenzoësäure (1 : 3 : 5)« von K. Hopfgartner.

Heinr. Mercy in Prag übersendete Werk von »Die Li
schen Inseln. I. Vulcano« vor; ferner

die im Laufe der Ferien erschienenen akademi
Publicationen, und zwar:

Den 43. Jahrgang des Almanach der kaiserl. Aka
für das Jahr 1893; ferner von den

Sitzungsberichten der Classe, Jahrgang 1893, Bd
Abtheilung I, Heft IV—V (April—Mai); Abtheilung II. a,
III—IV (März—April) und Heft V—VI (Mai—Juni); Abthe
II. b, Heft V—VII (Mai—Juli);

Monatshefte für Chemie, Jahrgang 1893, Bd
Heft VI (Juni), Heft VII (Juli) und Heft VIII (August).

Für die diesjährigen Wahlen sprechen ihren Dank

Herr Prof. Dr. Ferdinand Lippich in Prag für die
zum wirklichen Mitgliede; die Herren k. u. k. Oberstlieut
R. Daublebsky v. Sterneck in Wien und Prof. Dr.
Stolz in Innsbruck für ihre Wahl zu correspondirenden
gliedern im Inlande; ferner Herr Director Giovanni Vi
Schiaparelli in Mailand für die Wahl zum ausländis
Ehrenmitgliede und die Herren Prof. Dr. Heinrich Her
Bonn und Gabriel Auguste Daubrée zu Paris für die Wa
ausländischen correspondirenden Mitgliedern dieser Class

Das k. k. Ministerium des Inneren übermittelt di
der niederösterreichischen Statthalterei vorgelegten Tal
über die in der Winterperiode 1892/93 am Donaustrom
Gebiete des Kronlandes und am Wiener Donaucanale
gehabten Eisstandsverhältnisse.

Die Association belge de Chimiste (Sectio
Chimie biologique) in Brüssel ladet die kaiserliche Aka
zur Theilnahme an dem Internationalen Congres
angewandte Chemie ein, welcher am 4. August 18
Brüssel eröffnet werden wird.

Der Secretär berichtet, dass die diesjährige wissens
liche Expedition S. M. Schiffes »Pola«, welche am 16. Ju
Centralhafen von Pola verlassen hat, nach vollbrachter
wöchentlicher Fahrt am 5. October morgens, bei dem b

Gesundheitszustande der Mitglieder des wissenschaftlichen Stabes, sowie des Schiffsstabes und der Bemannung, wieder in diesen Hafen eingelaufen ist.

Zugleich legt der Secretär einen von dem Mitgliede der Expedition, Prof. J. Luksch, aus Corfu eingesendeten vorläufigen Bericht über die während der diesjährigen Expedition ausgeführten physikalisch-oceanographischen Untersuchungen zur Veröffentlichung in den Sitzungsberichten vor.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. J. Wiesner übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: »Über ombrophile und ombrophobe Pfanzenorgane«.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. E. Mach übersendet eine Arbeit von med. stud. Ludwig Mach in Prag: »Über ein Interferenzrefractometer«. (II. Mittheilung.)

Ferner übersendet Herr Regierungsrath Mach eine Arbeit des Supplenten J. Wanka an der k. u. k. Marine-Akademie in Fiume: »Über Condensationsschwingungen«.

Das w. M. Herr Prof. L. Pfaundler übersendet eine Arbeit aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz von Dr. H. Luggin: »Über das Potential der Metalle bei sehr kurz dauernder Berührung mit Elektrolyten«.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. Dr. Freih. v. Ettingshausen in Graz übersendet eine Abhandlung für die Denkschriften, betitelt: »Die Formelemente der europäischen Tertiärbuche (*Fagus Feroniae* Ung.).«

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer in Wien übersendet folgende drei Abhandlungen:

1. »Über ein Theorem des Herrn Baker.«
2. »Eine Anwendung der Zahlentheorie auf die Integralrechnung.«
3. »Das Additionstheorem der Functionen $C_n^\nu(x)$.«

Das c. M. Herr Prof. K. Senhofer übersendet eine Arbeit aus dem chemischen Laboratorium der k. k. Universität zu Innsbruck: »Über einige Abkömmlinge der *s*-Disulfobenzoësäure (1 : 3 : 5)« von K. Hopfgartner.

Heinr. Mercy in Prag übersendete Werk von »Die Li
schen Inseln. I. Vulcano« vor; ferner

die im Laufe der Ferien erschienenen akademi
Publicationen, und zwar:

Den 43. Jahrgang des Almanach der kaiserl. Aka
für das Jahr 1893; ferner von den

Sitzungsberichten der Classe, Jahrgang 1893, Bd
Abtheilung I, Heft IV—V (April—Mai); Abtheilung II. a,
III—IV (März—April) und Heft V—VI (Mai—Juni); Abth
II. b, Heft V—VII (Mai—Juli);

Monatshefte für Chemie, Jahrgang 1893, Bd
Heft VI (Juni), Heft VII (Juli) und Heft VIII (August).

Für die diesjährigen Wahlen sprechen ihren Dank

Herr Prof. Dr. Ferdinand Lippich in Prag für die
zum wirklichen Mitgliede; die Herren k. u. k. Oberstlieut
R. Daublebsky v. Sterneck in Wien und Prof. Dr.
Stolz in Innsbruck für ihre Wahl zu correspondirenden
gliedern im Inlande; ferner Herr Director Giovanni Vi
Schiaparelli in Mailand für die Wahl zum ausländi
Ehrenmitgliede und die Herren Prof. Dr. Heinrich Her
Bonn und Gabriel Auguste Daubrée zu Paris für die Wa
ausländischen correspondirenden Mitgliedern dieser Clas

Das k. k. Ministerium des Inneren übermittelt di
der niederösterreichischen Statthalterei vorgelegten Ta
über die in der Winterperiode 1892/93 am Donaustro
Gebiete des Kronlandes und am Wiener Donaucanale
gehabten Eisstandsverhältnisse.

Die Association belge de Chimiste (Sectio
Chimie biologique) in Brüssel ladet die kaiserliche Aka
zur Theilnahme an dem Internationalen Congres
angewandte Chemie ein, welcher am 4. August 18
Brüssel eröffnet werden wird.

Der Secretär berichtet, dass die diesjährige wissens
liche Expedition S. M. Schiffes »Pola«, welche am 16. Ju
Centralhafen von Pola verlassen hat, nach vollbrachter
wöchentlicher Fahrt am 5. October morgens, bei dem b

Gesundheitszustande der Mitglieder des wissenschaftlichen Stabes, sowie des Schiffsstabes und der Bemannung, wieder in diesen Hafen eingelaufen ist.

Zugleich legt der Secretär einen von dem Mitgliede der Expedition, Prof. J. Luksch, aus Corfu eingesendeten vorläufigen Bericht über die während der diesjährigen Expedition ausgeführten physikalisch-oceanographischen Untersuchungen zur Veröffentlichung in den Sitzungsberichten vor.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. J. Wiesner übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: »Über ombrophile und ombrophobe Pfanzenorgane«.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. E. Mach übersendet eine Arbeit von med. stud. Ludwig Mach in Prag: »Über ein Interferenzrefractometer«. (II. Mittheilung.)

Ferner übersendet Herr Regierungsrath Mach eine Arbeit des Supplenten J. Wanka an der k. u. k. Marine-Akademie in Fiume: »Über Condensationsschwingungen«.

Das w. M. Herr Prof. L. Pfaundler übersendet eine Arbeit aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz von Dr. H. Luggin: »Über das Potential der Metalle bei sehr kurz dauernder Berührung mit Elektrolyten«.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. Dr. Freih. v. Ettingshausen in Graz übersendet eine Abhandlung für die Denkschriften, betitelt: »Die Formelemente der europäischen Tertiärbuche (*Fagus Feroniae* Ung.).«

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer in Wien übersendet folgende drei Abhandlungen:

1. »Über ein Theorem des Herrn Baker.«
2. »Eine Anwendung der Zahlentheorie auf die Integralrechnung.«
3. »Das Additionstheorem der Functionen $C_n^\nu(x)$.«

Das c. M. Herr Prof. K. Senhofer übersendet eine Arbeit aus dem chemischen Laboratorium der k. k. Universität zu Innsbruck: »Über einige Abkömmlinge der *s*-Disulfobenzoësäure (1 : 3 : 5)« von K. Hopfgartner.

Das c. M. Herr Geheimrath Prof. F. Zirkel in Le
übersendet eine Abhandlung von Dr. Luka Dimitrov, bet
»Beiträge zur geologischen und petrographisc
Kenntniss des Vitoša-Gebietes in Bulgarien«.

Herr Prof. Dr. V. Hilber sendet über seine im Auf
der kaiserl. Akademie in diesem Sommer angetretene
logische Reise nach Thessalien folgende Berichte:

1. »Zur Geologie Nordgriechenlands.« (Trik
23. August 1893.)
2. »Geologische Übersicht des Pindus.« (Pa
7. October 1893.)
3. »Geologischer Reisebericht aus Südmacedoni
(Patras, 7. October 1893.)

Der Secretär legt noch folgende eingesendete Abh
lungen vor:

1. »Die Architectur der kindlichen Skoliose«,
Prof. Dr. C. Nicoladoni in Innsbruck.
2. »Tetractinelliden der Adria«, von Prof. Dr.
Lendenfeld in Czernowitz.
3. »Über triadische Hydrozoen vom östlichen
kan und ihre Beziehungen zu jüngeren Form
von Prof. Dr. G. Steinmann in Freiburg i. Br.
4. »Beitrag zur Chemie unserer Lebens- und Gen
mittel«, von Prof. Dr. V. Vedrödi in Debreczin.
5. »Untersuchung einer zur Erdölreinigung
wendeten Natronlauge«, von Herrn R. Zaloziec
Lemberg.
6. »Der Erdstrom«, von Herrn J. Zangerl in Kl
(Niederösterreich).
7. »Einige Constructionen bezüglich der Sch
bungsflächen«, von J. Sobotka in Prag.

Ferner legt der Secretär behufs Wahrung der Priorität

1. Ein versiegeltes Schreiben von dem Privatdocenten
Theodor Gross in Berlin, mit der Aufschrift: »Ein e
trolytischer Versuch über den Schwefel.«
2. Eine offene Mittheilung von F. J. Popp, Lehrer in F
haupt (Böhmen), betitelt: »Mathematische Princi

3. Ein versiegeltes Schreiben des quiesc. k. k. Bezirkshauptmanns Emanuel Puchberger in Wien, mit der Aufschrift: »Die allgemeine Integration der linearen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung zwischen zwei Variablen.«

Das w. M. Herr Hofrath V. v. Lang übergibt eine ihm von Herrn Victor Schumann in Leipzig eingesandte Arbeit, welche den Titel führt: »Über ein neues Verfahren zur Herstellung ultraviolett empfindlicher Platten«.

Der Secretär überreicht eine Abhandlung des Prof. J. M. Pernter in Innsbruck unter dem Titel: »Zur Erklärung des täglichen Ganges der Windgeschwindigkeit«.

Ferner macht der Secretär Mittheilungen über den gegenwärtigen Stand der magnetischen Vermessungen 1. betreffs der neuen magnetischen Aufnahme der im Reichsrathe vertretenen Königreiche und Länder; 2. betreffs der magnetischen Aufnahme der ungarischen Länder.

Zugleich übergibt derselbe einen vorläufigen Bericht des k. u. k. Linienschiffs-Lieutenants W. Kesslitz, ddo. Pola, 25. August l. J. über die unter dessen Leitung in diesem Sommer durchgeführte magnetische Vermessung des Occupationsgebietes.

Herr Prof. Dr. Ed. Lippmann in Wien überreicht eine Arbeit: »Über ein neues Monojodalkylderivat.«

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Erzherzog Ludwig Salvator, Die Liparischen Inseln. I. Vulcano. Prag, 1893; Folio.

Le Prince Albert Ier, Prince de Monaco, Résultats de Campagnes Scientifiques accomplies sur Son Yacht »l'Hirondelle«. Fascicule V. Bathyphysa Grimaldii (nova species). Siphonophore bathypélagique de l'Atlantique Nord (avec une Planche) par Maurice Bedot; — Fascicule VI. Contribution à l'étude des Holothuries de l'Atlan-

tique Nord (avec deux Planches) par E. von Marenz
Publiés sous Sa direction avec le concours de M
Baron Jules de Guerne, chargé des Travaux
giques à bord. Imprimerie de Monaco, 1893; 4°.

Observations of the Transit of Venus, 9. Dece
1874; made at stations in New South Wales (illus
with photographs and drawings). Under the direct
H. C. Russel, Government Astronomer. Publishe
Authority of Her Majesty's Government in New
Wales. Sydney, 1892; 4°.

Nachtrag zum akadem. Anzeiger vom 13. Juli
Nr. XIX:

Herr Prof. Ed. Lippmann in Wien überreicht ein
ihm und F. Fleissner ausgeführte Arbeit: »Über das
chinin und Nichin«.

Über das Potential der Metalle bei sehr kurz dauernder Berührung mit Elektrolyten[1]

von

H. Luggin.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität Graz.

(Mit 2 Textfiguren.)

1. Das Potential eines Metalles in einem Elekrolyten ist im Allgemeinen keine Constante, es pflegt mindestens kurze Zeit nach dem Eintauchen zu schwanken, selbst wenn man sorgfältigst gereinigtes Material zur Berührung bringt.

Diese zeitlichen Veränderungen wurden oft untersucht, man hat die Potentiale in recht verschiedenen Intervallen notirt, aber meines Wissens sind noch nie mit festen Metallen bei so kurzer Berührungszeit, wie dies hier geschieht, Versuche vorgenommen worden.

Nur bei Quecksilber vermochte man diese Zeit noch weiter herabzumindern, indem man das Metall mit grosser Geschwindigkeit aus capillaren Öffnungen in den Elektrolyten einfliessen liess und dabei den austretenden Quecksilberstrahl so justirte, dass der continuirliche Theil des Strahles die Flüssigkeitsoberfläche nur mit seinem Endpunkte berührte.

2. Die auf solche Weise mit Tropfelektroden gewonnenen Resultate veranlassten die vorliegende Untersuchung. Es zeigte sich nämlich, dass das Potential frisch gebildeter Quecksilberoberflächen bei fortgesetzter Berührung mit Elektrolyten continuirlich bis zu bestimmten Grenzwerthen steigt; dass man

---

[1] Ein Auszug dieser Arbeit ist bereits im akad. Anzeiger vom 21. Juli 1892 enthalten, die Versuche waren damals bis auf ein paar Controlversuche beendet.

aber auch durch Verkleinern der Berührungsdauer cons
Resultate zu erzielen vermag, so dass eine gute Tropfelek
in ein und demselben Elektrolyten ein ganz bestimmtes,
Endzustande der dauernden Berührung oft sehr abweiche
Potential besitzt.

Das so beobachtete Anfangspotential ist nach einer
pretation, die H. v. Helmholtz[1] den Erscheinungen gab,
sehr wichtige Grösse, es ist das Potential der Flüssigkeit s

Nach diesem Physiker müssen an der Grenzfläch
Berührung stehender Leiter, wenn sie verschiedenes Pot
haben, elektrische Doppelschichten bestehen, welche
Gesetzen der Elektrostatik entsprechend Anziehung un
stossung ausüben und die Grenzfläche der Leiter Spannu
unterwerfen, die beim Quecksilber als capillarelektr
Phänomene zu Tage treten.

König,[2] Ostwald,[3] Paschen[4] haben, ihre Meth
immer weiter verbessernd, den Beweis erbracht, dass gute T
elektroden aus Quecksilber gleiches Potential haben wi
das Maximum polarisirte (also nach Helmholtz von
Doppelschicht befreite) Quecksilberoberflächen. Gründe für
gegen Helmholtz's Ansicht über Tropfelektroden treffen
auch die Doppelschichten-Theorie der capillarelektris
Erscheinungen.

Es ist gewiss nicht selbstverständlich, dass bei Berüh
von Metall und Flüssigkeit zuerst ein Zustand der Pote
gleichheit beobachtbar sein müsse. Gibt man auch zu,
im Innern des Elektrolyten noch das Coulomb'sche G
gelte, so könnten die Doppelschichten doch so schnell ge
werden, dass die rascheste Beobachtung nichts wahrnimm
das Potential einer vollkommen blanken und daher energi
Reaction unterliegenden Oberfläche.[5] Wenn man aber ei

[1] Helmholtz, Wissenschaftl. Abhandl. *2*, 925 (1881).

[2] König, Wied. Ann., *16*, 1 (1882).

[3] Ostwald, Zeitschr. f. phys. Chem., *1*, 583 (1887).

[4] Paschen, Wied. Ann., *41*, 42 (1890); *43*, 568 (1891).

[5] Diese Anschauung haben Quincke, Exner und Tuma und B
vertreten. — Quincke, Pogg. Ann., *153*, 175, 1874. — Exner und T
Rep. d. Phys., *25*, 142 (1889). — Brown, Phil. Mag., 27, 387 (188
Ebenso Warburg, Wied. Ann., *41*, 1 (1890).

annimmt, dass die Tropfelektroden das Potential des Elektrolyten besitzen, so wird man für feste Metalle bei ähnlich kurzer Berührungsdauer ein Gleiches voraussetzen dürfen; denn es ist nicht einzusehen, warum feste Metalle, besonders edle Metalle wie Silber und Platin, ihre Doppelschichten schneller bilden sollten als Quecksilber.

Die Ähnlichkeit zwischen den Tropfströmen und Strömen, die beim ungleichzeitigen Eintauchen von Metallen entstehen, ist schon oft betont worden, auch hat Paschen[1] mit einem rotirenden Platin- und Zinkrädchen Versuche angestellt, welche die Vermuthung zu bestätigen schienen.

3. Ich war demnach nicht darauf gefasst, das Potential der festen Metalle sofort nach dem Eintauchen meistens wenig abweichend von dem bei längerer Benetzung beobachteten zu finden. Man hat übrigens auch an Tropfelektroden, bei denen das Quecksilber fremde Metalle enthielt, stets Potentiale wahrgenommen, die vom Potential des ruhenden Amalgams nicht stark abwichen. Erst bei Tropfelektroden von so geringem Zinkgehalt, dass das Potential des Amalgams um fast 0·1 Volt niedriger war als das des reinen Zinkes, gab eine Paschen-sche Amalgamstrahlelektrode[2] ein nur um 0·1 Volt niedrigeres Potential als eine solche von Quecksilber (Ähnliches für Cadmium).

Es ist freilich noch eine ganz andere Auffassung der an festen Metallen beobachteten Phänomene möglich. Man könnte annehmen, dass jedes Metallstück sich an der Luft sofort mit einer Wasserhaut überziehe, dass also bei allen nachstehend beschriebenen Versuchen feuchte, bereits mit der Doppelschicht versehene Elektroden zur Berührung mit den Elektrolyten gebracht wurden.

Wie bei allen derartigen Versuchen mit blank gemachten Metalloberflächen haben jedenfalls auch hier atmosphärische Einflüsse eine Rolle gespielt, ich werde aber am Schlusse der Abhandlung (unter 9.) Gründe beibringen, die mich nicht glauben lassen, dass der Charakter der Erscheinungen durch

---

[1] Paschen, Wied. Ann., *41*, 69 (1890).

[2] Paschen, Wied. Ann., *43*, 568 (1891).

eine der Oberfläche anhaftende Wasserschicht entstellt wo
sei.

4. Zunächst lasse ich eine Beschreibung des Mechani
folgen, der die doppelte Bestimmung trug:

a) Das Eintauchen des Metallstückes in die Flüssigke
besorgen, während das Metallstück mit dem Elektrometer
bunden war.

b) Gleich darauf die leitende Verbindung Metall—Ele
meter zu lösen, so dass das Elektrometer, nunmehr isolir
Ladung anzeigte, welche es beim Eintauchen des Me
erhalten hatte.

Hiezu diente ein Hiecke'scher Fallapparat, der fü
vorliegenden Zweck geeignet umgebaut wurde. Ein Gew
stück, das an einem dünnen Drahte hieng, konnte freiger
werden, indem man den Draht durch einen Strom absch
es fiel dann etwa $1 \cdot 5\,m$ tief und hatte im Falle die nöt
Umschaltungen zu besorgen. Am Ende des Falles wurde e
einer Bremsvorrichtung aufgenommen, die den Stoss
sprechend milderte.

Dieses Gewichtstück trug auf vollkommen isolir
Stütze eine massiv aus Messing construirte Gabel *G* (F
von der gezeichneten Form. Die Gabel ragte mit ihren
zontal gestellten Zinken über
Gewichtstück hinaus; ein f
äusserst leicht bewegliches Ku
band führte von ihr frei durc
Luft zu einem Quadrantenele
meter.

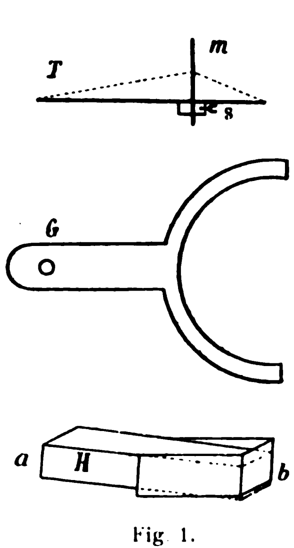


Fig. 1.

Vor dem Versuch wurde
Gabelzinken durch ein Brücken
T überbrückt, ein leichtes Mes
streifchen, das auf seiner oberen
eine verticale Versteifungsrippe (
tirt gezeichnet) und auf der Unte
ein etwas seitlich angebrachtes M
klötzchen trug. Klötzchen und
singstreifen waren von einer
$1^1/_2\,mm$ weiten verticalen Bol

durchsetzt; ein Schräubchen *s* ermöglichte es, den Drahtstift *m* aus dem zu untersuchenden Material in der Bohrung so zu befestigen, dass er etwa 1·5 *mm* nach unten aus der Bohrung herausragte.

Während das Gewichtstück mit der Gabel ungehindert fallen konnte, bis es auf der Bremsvorrichtung aufschlug, gelangte die Brücke *T* schon früher an eine Hemmung *H* und wurde von der Gabel getrennt. Der Draht *m* stiess nämlich auf ein parallelepipedisches, etwas schräg gegen den Horizont geneigtes Glasstück auf, und zwar am höheren Ende *a*; das etwas tiefere Ende *b* des Parallelepipeds war auf drei Seiten von aufgekitteten Glasplatten eingefasst, so dass ein flacher keilförmiger Trog gebildet wurde. Die ganze obere Seite des Parallelepipeds war mit einem Streifchen von dünnstem Cigarettenpapier belegt. Der Trog war mit ein paar Tropfen der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt, die stets das ganze Papierstreifchen durchfeuchtete.

Ein Metalldraht aus dem gleichen Material wie *m* führte vom Trog zur Erde.

Der Augenblick, wo der Stift *m* das Papier berührte und das Stück *T* noch gleichzeitig auf der Gabel aufruhte, reichte zur Ladung des Elektrometers hin. Dasselbe nahm eine Ladung an, die dem Potential des Drahtes *m* im ersten Augenblicke der Benetzung entspricht, und es behielt diese Ladung lange fast unverändert bei.

5. Das Elektrometer — ein Thomson'sches Originalinstrument — hatte das eine Quadrantenpaar zur Erde abgeleitet, das andere Paar mit der Gabel verbunden. Vor und nach jeder Messungsreihe wurde das Instrument mit einem Clark geaicht. Wird ein solches Instrument nur momentan mit einer Elektricitätsquelle verbunden, so ist der Ausschlag bedeutend geringer als bei dauernder Verbindung — jedenfalls absorbiren die Stützen einen Theil der Quadrantenladung. Indem ich die Capacität des Elektrometers durch ein paar vortrefflich isolirte Condensatorplatten vergrösserte, erzielte ich, dass die Ausschläge nur um etwa 20% zu klein ausfielen. Die betreffende Correctionsgrösse wurde bei jeder Messungsreihe aufs Neue ermittelt, indem ich bei einzelnen Versuchen die zu messende

elektromotorische Kraft durch ein bekanntes Potentia
Clark) vergrösserte oder verkleinerte; es wurden meis
bis sechs Versuche mit und ebensoviele ohne Zuscha
eines Clark ausgeführt.

Bei derartigen Arbeiten ist es besonders nöthig, di
stellung durch leitende Schirme vor äusseren Influenzir
zu schützen, selbst den Fussboden in der Nähe des App
leitend zu machen. Die Bestandtheile des Fallapparates
grossentheils mit Stanniol überzogen, die gläserne Hem
so weit nöthig mit Glycerin überstrichen, so dass die
für die Gabel am Fallgewicht eigentlich der einzig
lator war.

Wenn das Fallgewicht ohne aufgesetztes *T*-Stück zu
fiel, durfte das Elektrometer keine Ladung annehmen,
musste es nach dem Fallversuche das Potential Null aufw
wenn die Hemmung statt mit getränktem Papier mit zu
abgeleitetem Stanniol bedeckt wurde.

Der recht beträchtliche Widerstand des getränkten P
spielte bei der geringen Capacität des Elektrometers un
zugeschalteten Condensators keine merkliche Rolle. Es m
aber dafür gesorgt werden, dass der Übergangswide
zwischen der Gabel und dem Brückenstücke nicht zu
ausfiel, denn wenn das Gewicht im Falle begriffen ist,
das Brückenstück nicht mehr durch die Schwere auf
Unterlage. Darum wurden Klebwachskügelchen zu etwa 0
starken Fäden ausgewalzt und kurze Stücke dieser Fäde
über die Enden der Brücke *T* gelegt, so dass sie dieselb
der Gabel niederpressten.

Die Gabel und der kürzere Arm des Brückenstückes
an der gemeinsamen Berührungsstelle mit Platin beleg
längere Arm war am Ende so wie der betreffende Th
Gabel mit Schellack überzogen (bei einigen Versuchen w
ganze Gabelzinke aus Hartgummi).

6. Das getränkte Papier war nur 0·07 *mm* dick,
Schicht konnte der Draht durchdringen, bis er auf die Hem
aufstiess, dazu brauchte er (aus der Fallgeschwindigkeit *V*
berechnet) 0·000014 Secunden, dann folgte noch ein
Augenblick, in dem sich der Stoss durch den Draht u

kürzeren Brückenarm fortpflanzte, hierauf hörte der Contact mit der Gabel auf.

Die angegebene Ziffer gibt eine untere Grenze für den Zeitraum der gegenseitigen Berührung von Metall und Elektrolyt, auf den sich die Elektrometerangabe bezieht.

Eine obere Grenze wurde durch directe Messung gewonnen Der Fallapparat wurde nämlich dazu benützt, einen Condensator von bestimmter Capacität durch vorübergehende Verbindung mit der Erde theilweise zu entladen; bei diesem Versuche war das getränkte Papier auf der Hemmung durch ein zur Erde abgeleitetes Stanniolblatt ersetzt.

Aus der Capacität des Condensators (0·1 Mikrofarad), aus dem (durch bekannte Widerstände vermehrten) Widerstande der durch den Fallapparat zwischen Condensator und Erde hergestellten Verbindung (1340 Ohm) und dem Verhältniss 0·617 des nach dem Fallversuche beobachteten Potentials zum ursprünglich vorhandenen ergab sich die Zeit der Schliessung gleich 0·000065 Secunden. Ich bezeichne diese Zeit als eine obere Grenze für die gesuchte Berührungsdauer: denn für diesen Versuch waren die Übergangswiderstände viel zu bedeutend, um noch ein sicheres Resultat zu ermöglichen, wenn ich das Brückenstück in der gewohnten Weise auf der Gabel befestigte; ich musste vielmals grössere Wachsmassen verwenden, dadurch sank der Widerstand im Fallapparat auf rund 400 Ω (aus Versuchen berechnet, bei denen verschiedene bekannte Widerstände zugeschaltet wurden), dadurch wurde aber jedenfalls auch die Berührungsdauer verlängert.

7. Die vollkommensten Tropfelektroden wurden von Paschen[1] verwendet, bei ihnen war die Zeit der Berührung zwischen Quecksilber und Elektrolyt höchstens 0·0000123 Secunden, das ist jedenfalls eine noch viel kleinere Zeit. Derselbe Physiker hat auch Messungen angestellt, wie sich das Potential des Quecksilbers mit der Berührungszeit ändert.

Ich entnehme seiner Abhandlung die Daten der folgenden Tabelle:

---

[1] Paschen, Wied. Ann., *41*, 801 (1890).

Elektrolyt	τ = 0·001"	τ = 0·002"	τ = 1·5"	τ = 3"	Elektrom. [illegible] Hg—Elekt[illegible]
$ZnSO_4$ conc.	0·083	0·101	0·699	0·713	0·685 [illegible]
H_2SO_4 conc.	0·215	0·314	0·806	0·857	0·977
HCl verd.	0·601	0·967	0·975	0·988	0·582
$CuSO_4$ conc.	0·231	0·248	0·622	0·846	0·269

Darin bezeichnet die erste Colonne den Elektrolyten letzte Colonne gibt die »Endladung« d. h. das Potential ruhenden Quecksilberoberfläche, bezogen auf eine Strahl trode (dies der Name, den Paschen seinen Tropfelektr gibt); die Colonnen 2, 3, 4, 5 geben in Bruchtheilen der ladung und für die am Kopf angegebenen Berührungszeiten Potential einer Quecksilberoberfläche, bezogen auf eine St elektrode. Man sieht also, dass das Potential einer Quecksi oberfläche selbst nach 0·002 Secunden meistens noch Anfangszustande viel näher ist als dem Endzustande.[1]

8. Ich lasse zunächst einige Ziffern folgen, welche i unter (4) und (5) beschriebenen Weise gewonnen wurden, bemerke nur zuvor, dass die Oberflächen der Fallelektr

[1] Anmerkung. Wenn man ruhendes Quecksilber auf das Max polarisirt, so ändert es, wie ich mich mehrfach überzeugte, sein Potenti langsamer, als hier angegeben wird.

Man könnte durch diesen und andere Umstände zur Annahme ve werden, dass die Tropfelektroden ihr so stark negatives Potential der ra Dehnung der Oberfläche verdanken. Es lässt sich aber einfach zeigen, Quecksilberoberflächen, die gar nicht gedehnt werden, doch auch sofort der Benetzung ähnliche Potentiale haben.

Ich liess Quecksilber aus einem 1·5 *m* hohen Rohre durch eine Spitze in verdünnte Schwefelsäure fallen und stellte dabei die Spitze so dass der Quecksilberstrahl sich schon in der Luft in Tröpfchen auflöst erst ein paar Centimeter tiefer die Schwefelsäure erreichte. Wurde nu Platindraht etwa 2 *cm* unter der Oberfläche in den Regen der Quecks tröpfchen gebracht, so ging sein ursprünglich stark positives Potential in ein negatives von —0·2 Volt (auf ruhendes Quecksilber bezogen) über

Wenn man die Säure abheberte, so dass ihre Oberfläche dem I immer näher rückte, so erreichte das negative Potential den dreifache vierfachen Werth.

vor jedem Versuche mit destillirtem Wasser abgespült, durch gelindes Erwärmen getrocknet und dann blank gefeilt wurden (natürlich jedes Metall mit einer separaten Feile). Metallstaub, der manchmal vom Feilen her auf der Oberfläche blieb, wurde mit frisch über der Flamme getrocknetem Filtrirpapier entfernt.

$V_\tau - V_T$ gibt den Betrag, um den das Potential V_τ einer momentan zur Berührung gebrachten Elektrode höher ist, als das V_T einer dauernd in die Flüssigkeit tauchenden.

Ich erhielt für Kupfer in Kupfersulfat (conc.)

$$V_\tau - V_T = -0 \cdot 032 \pm 0 \cdot 003 \text{ Volt;}$$

Silber in Salzsäure (conc. Säure auf $^1/_8$ verdünnt)

$$V_\tau - V_T = -0 \cdot 055 \pm 0 \cdot 012 \text{ Volt;}$$

Silber in Natriumcarbonat (conc. Lösung auf $^1/_8$ verdünnt)

$$V_\tau - V_T = -0 \cdot 049 \pm 0 \cdot 015 \text{ Volt.}$$

Die weiteren Versuche wurden mit etwas veränderter Anordnung durchgeführt.

Die Metalldrähte, welche in das Brückenstück eingesetzt wurden, ragten nämlich nach unten ein paar Centimeter weit vor; bei den biegsamen Metallen Pb, Ag, Pt wurde ein entsprechend langer Neusilberdraht in das Brückenstück eingeklemmt, an dessen Ende ein wenige Millimeter langes Stück des zu untersuchenden Metalles angelöthet wurde.

Die Reinigung wurde bei Zn, Al, Ag in der oben beschriebenen Weise vorgenommen; das Platin wurde nur abgespült und dann ausgeglüht; der Stahldraht war glashart gemacht, seine Seitenflächen waren mit Schellack überzogen, er wurde unmittelbar vor dem Versuche in passender Länge abgebrochen, so dass er stets mit frischer Bruchfläche auf die Hemmung fiel.

Als Hemmung diente eine kreisrunde, horizontale Glasplatte von etwa $1^1/_2$ *cm* Durchmesser, die von einem etwas weiteren verticalen Glasrohr umschlossen war. Die Anordnung hatte den Vortheil, dass das Brückenstück beim Aufschlagen nicht von der Hemmung fortgeschleudert wurde, dass also das Metall des Drahtes *m* mit der Hemmung und folglich auch mit

der Flüssigkeit in Berührung blieb; ich konnte nun nach been
Elektrometerablesung von V_τ das Potential V_T des Drahte
dauernder Benetzung bestimmen.

Die Potentiale beziehen sich bei den Versuchen
Schwefelsäure auf in Schwefelsäure tauchende Bleidr
bei denen mit Salzsäure auf in die Säure tauchende S
drähte.

Die Säuren wurden aus concentrirter Säure durch
dünnung auf $^1/_8$ der ursprünglichen Concentration herge

Bei den mit α bezeichneten Versuchen lag mit S
getränktes Papier auf der Hemmung, bei den mit β bezeich
reichte die Flüssigkeit bis über die Hemmung und war
die Fallhöhe geringer, so dass die Flüssigkeit das fal
Metall 0·01 Secunden lang benetzte, bis die Verbindung
dem Elektrometer unterbrochen wurde.

Die Werthe der zweiten und vierten Colonne für die P
tiale der dauernd benetzten Metalle sind der Vollständi
halber wiedergegeben; ich lege wenig Werth darauf, zuma
nur das Silber für rein halte.

		Schwefelsäure verd.		Salzsäure verd.	
		$V_T - V_{Blei}$	$V_\tau - V_T$	$V_T - V_{Silber}$	$V_\tau - V_T$
1 α	Zn	−0·442 Volt	+0·053±0·005	−1·015	+0·048±0·005
2 α	Al	−0·152	−0·304±0·022	−0·830	−0·227±0·035
β			−0·080±0·019		
3 α	Fe (Stahl)	+0·0991	+0·324±0·034	−0·424	+0·419±0·017
β			+0·115±0·017		
4 α	Pb	0·000	+0·042±0·042	−0·507	+0·021±0·005
β			+0·028±0·030		
5 α	Ag	+0·867	−0·039±0·027	0·000 [1]	−0·055±0·012
β			+0·008±0·022		
6 α	Pt	+1·114	+0·098±0·010	+0·494	+0·223±0·028
β			+0·099±0·007		

[1] Der Werth ist den vorhergehenden Angaben entnommen.

Hier handelt es sich um die in Colonne 3 und 5 angegebenen Veränderungen des Potentials $V_{\text{:}} - V_T$, welche mit den Ziffern der sechsten Colonne bis zu gewissem Grade harmoniren sollten. Colonne 6 enthält nämlich die Potentialdifferenzen,[1] welche zufolge der Helmholtz'schen Theorie den Metallen in normalen Lösungen normal dissociirter Salze zukommen. Die Zahlen sind vom Metall zur Flüssigkeit gerechnet, so dass das Potential des Metalles gleich Null gesetzt ist. Nach der Theorie sollte $V_{\text{:}}$ das Potential der Flüssigkeit selbst sein; das Potential V_T des Metalles bei dauernder Berührung mit der Flüssigkeit weicht allerdings in den vorliegenden Fällen oft stark vom Potential des Metalles in normalen Lösungen seiner normal dissociirten Salze ab.

9. Ich könnte einem Versuche nicht beistimmen, diese Widersprüche durch die Annahme zu erklären, dass Metalle an der Luft immer feucht, also schon mit einer Doppelschichte versehen seien.

Ich habe nämlich Elektrolyte in kurz dauernde Berührung mit Quecksilber, das schon längere Zeit der Luft ausgesetzt war, gebracht und bei den Versuchen nichts bemerkt, was auf das Vorhandensein einer Doppelschicht auf der scheinbar trockenen Fläche schliessen liesse.

Eine Zinkspange *Z*, über welche ein auf der unteren Fläche kreisrunder Knopf aus Hartgummi geschoben war, wurde als Brückenstück verwendet; der Knopf *K* war mit in Schwefelsäure (concentrirte Säure wurde auf ein Zehntel verdünnt) getränktem Papier überzogen, das bis an das Zink reichte. Ein eiserner Napf *N*, dessen Boden mit Platin ausgekleidet war und in dem ein flacher Ebonitring von 2·5 *mm* innerem Durchmesser steckte, diente als Hemmung. Der cylindrische Raum im Innern des Ringes wurde so mit Quecksilber gefüllt, dass die Kuppe eben merklich vorsah.

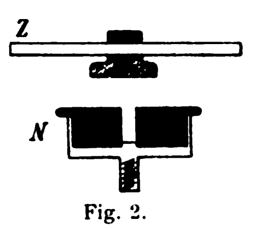


Fig. 2.

Der Napf war zur Erde abgeleitet. Wenn das Brückenstück auf der Hemmung dauernd auflag, musste das Zink eine Ladung

[1] Aus Ostwald's Lehrbuch, 2. Bd., 946, entnommen.

zeigen, die der Combination $Zn|H_2SO_{4\,verd.}|Hg_{ruhend}$ entsp
Da auch zwischen dem Elektrometer und dem Kupferban
zur Gabel führte, eine gleiche, aber entgegengesetzt geri
Combination $Zn|H_2SO_{4\,verd.}|Hg_{ruhend}$ dauernd eingefügt v
gab das Elektrometer keinen Ausschlag, wenn man
solchen Umständen das Zink des Brückenstückes durch
Draht mit der Gabel verband.

Anders bei Fallversuchen, also bei nur momentane
rührung des Brückenstückes mit dem Quecksilber des N
Hier trat am Quecksilber eine elektromotorische Kraf
0·78 Volt im Sinne des Tropfstromes auf, wenn man troc
Quecksilber im Napf hatte (selbst ein vorübergehende
hauchen der Quecksilberkuppe schien das Resultat nic
ändern).

Wurde das Quecksilber schon vor dem Versuch
Schwefelsäure befeuchtet, so gab das Elektrometer 0·56
die Dehnung des Quecksilbers spielte also bei den Vers
auch eine Rolle.

Die Berührungszeiten lagen unter 0·002 Secunde
Abweichungen unter den gewonnenen Potentialwerthen v
so bedeutend, dass ich viele Versuche machen musste. El
statische Einflüsse waren vermieden, da ich den Ebonitna
dem Einfüllen des Quecksilbers stets durch eine Flamme

Wenn statt des Quecksilbers Zinkamalgam im Napf
blieb der Tropfstrom aus und Fall- und Dauerversuch
gleiche Werthe.

Es war noch eine weitere Prüfung der vorliege
Frage möglich: Gesättigte Lösung von Cyankalium er
einen schwachen, entgegengesetzt gerichteten Tropfstro
Schwefelsäure, man nimmt vom Standpunkte der Helmh
schen Theorie an, dass Quecksilber und KCn fast gle
Potential hätten und dass hier die Doppelschicht ausna
weise auf Seite des Quecksilbers negativ und auf Seite
Lösung positiv sei. Wäre also Quecksilber an der Luft b
mit einer Doppelschicht behaftet, so müsste es dieselb
Benetzung mit Cyankalium gegen eine entgegengesetz
richtete vertauschen, und das derart benetzte Queck

müsste gegen dauernd in Cyankalium befindliches um mindestens +0·9 Volt positiv sein.

Fallversuche ergaben aber für trockenes Quecksilber im Mittel um 0·074 Volt niedrigere Potentiale als für vorher schon mit Cyankalium benetztes. Auch bei diesen Versuchen schwankten die Resultate beträchtlich.

10. Wenn man Zweifeln gegen die Richtigkeit der Doppelschichtentheorie unzugänglich ist, so muss man zur Annahme greifen, dass die Capacität der Doppelschichten beim Quecksilber ungleich grösser sei als bei den andern Metallen, derlei ad hoc construirte Annahmen mussten der Theorie schon in zahlreichen Fällen helfen.

Von einem andern Gesichtspunkte aus wäre eine Verschiedenheit zu erwarten je nachdem, ob das benetzte Metall durch nascirenden Wasserstoff reducirt wird oder nicht. Die stark elektronegativen Metalle werden sich nämlich unter gleichzeitiger Wasserstoffentwicklung ungehemmt lösen, so dass die Concentrationsverhältnisse auf der Oberfläche und hiemit die Potentialdifferenz Flüssigkeit—Metall alsbald stationär werden, wenn nicht absorbirte Gase oder secundäre, langsamer verlaufende chemische Processe Potentialschwankungen herbeiführen. Bei der erstgenannten Classe der Metalle aber müsste der Lösungsprocess aufhören, sowie sich die ersten Spuren von freiem Wasserstoff bemerkbar machen, dies ist der Fall der Quecksilbertropfelektrode. Die festen Metalle Silber und Platin zeigen die Erscheinung nicht, wahrscheinlich verhindert der von der Oberfläche absorbierte Sauerstoff die Bildung freien Wasserstoffs.

11. Durch die vorliegende Untersuchung wurden die Potentiale von verschiedenen festen Metallen (darunter auch von zwei Edelmetallen) nach sehr kurz dauernder Berührung mit Elektrolyten ermittelt.

Die Berührungszeiten sind vergleichbar mit den Zeiten, welche bei den Quecksilber-Tropfelektroden in Frage kommen.

Die gewonnenen Resultate stehen mit Allem, was man nach der Doppelschichtentheorie auf Grund der Versuche mit Tropfelektroden erwarten durfte,

in einem entschiedenen Widerspruch, der nur
willkürliche Hypothesen beseitigt werden könn

Zum Schlusse erlaube ich mir noch Herrn Pro
Pfaundler, dem Vorstande des physikalischen Institute
mir die Mittel zur vorliegenden Untersuchung freun
zur Verfügung stellte, meinen aufrichtigen Dank
sprechen.

Eine Anwendung der Zahlentheorie auf die Integralrechnung

von

Leopold Gegenbauer,

c. M. k. Akad.

Ich werde in den folgenden Zeilen ein Beispiel für die Ermittelung von eigentlichen bestimmten Integralen auf Grund der Definition derselben, sowie für die Zurückführung von solchen auf andere mit Hilfe von arithmetischen Betrachtungen mittheilen und sodann zeigen, wie sich unter Benützung von Überlegungen, welche der Zahlentheorie entnommen sind, gewisse vielfache Integrale mit unendlichem Integrationsintervalle auf einfache reduciren lassen.

I.

Das eigentliche bestimmte s-fache Integral

$$\int\int\cdots\int f(x_1, x_2\ldots x_s)\, dx_1\, dx_2\ldots dx_s,$$

in welchem die Integration über alle Punkte einer gegebenen stetigen s-fachen Mannigfaltigkeit auszudehnen ist, ist bekanntlich seiner Definition nach der Grenzwerth der s-fachen Summe

$$\sum_{r_1, r_2, \ldots, r_s = 1}^{r_1 = n_1,\, r_2 = n_2, \ldots, r_s = n_s} \delta^{(1)}_{r_1}\delta^{(2)}_{r_2}\ldots\delta^{(s)}_{r_s} f(x^{(1)}_{r_1}, x^{(2)}_{r_2}, \ldots, x^{(s)}_{r_s}),$$

in welcher $x^{(1)}_{r_1}, x^{(2)}_{r_2}, \ldots, x^{(s)}_{r_s}$ irgend eine Stelle des erwähnten Bereiches ist und unter den auftretenden Stellen sämmtliche

Punkte der die Grenze des Bereiches bildenden $(s-1)$-
Mannigfaltigkeit vorkommen, bei unbegrenzter Abnahm
jeden Zahl

$$\delta_{r_\lambda}^{(\lambda)} = x_{r_\lambda+1}^{(\lambda)} - x_{r_\lambda}^{(\lambda)} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, s)$$

und kann demnach aus dieser Summe mit jedem beli
Grade der Annäherung berechnet werden. Die genaue E
lung des Werthes eines solchen Integrales mit Hilfe de
angeführten Definitionsgleichung ist bisher nur in einer ä
geringen Anzahl von Fällen gelungen und demnach dü
nicht ohne Interesse sein, ein etwas allgemeineres neu
artiges Beispiel anzugeben, bei dessen Behandlung der Z
theorie angehörige Hilfsmittel zur Verwendung gelangen,
derselbe eine Verknüpfung zwischen zwei bisher noch
oft in Zusammenhang gebrachten Partien der Mathematik
Dies soll in diesem Abschnitte geschehen.

1. Lässt sich die ganze nicht negative Zahl n als S
der r^{ten} Potenzen von $s+1$ beliebigen ganzen, dem Int
$\alpha\ldots\beta$ angehörigen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{s+1}$ darstellen, s

$$\sqrt[r]{n-x_1^r-x_2^r-\ldots-x_s^r}$$

eine in dem erwähnten Bereiche liegende ganze Zahl und

$$\left[\sqrt[r]{n-x_1^r-x_2^r-\ldots-x_s^r}\right]-\left[\sqrt[r]{n-1-x_1^r-x_2^r-\ldots-x_s^r}\right]$$

während diese Differenz für alle übrigen ganzzahligen Sy
$x_1, x_2, \ldots, x_s$, deren Elemente zwischen α und β liege
Werth o hat.

Es stellt demnach der Ausdruck

$$F_{s+1}(n) = \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s} f(x_1, x_2, \ldots, x_s) \Big\{\Big[\sqrt[r]{n-x_1^r-x_2^r-\ldots-}$$

$$-\Big[\sqrt[r]{n-1-x_1^r-x_2^r-\ldots-x_s^r}\Big]\Big\}+r$$

in welchem die Summation bezüglich $x_1, x_2, \ldots, x_s$ üb
der Bedingung

$$x_1^r+x_2^r+\ldots+x_s^r \leqq n$$

genügenden ganzzahligen Systeme von s Werthen des Bereiches $\alpha \ldots \beta$ auszudehnen ist und η den Werth 1 oder 0 hat, je nachdem 0 zu den zulässigen Werthen von $x_1, x_2, \ldots, x_s$ gehört oder nicht, die Summe der Werthe vor, welche die willkürliche Function $f(y_1, y_2, \ldots, y_s)$ annimmt, wenn für ihr Argumentensystem alle bei den oben erwähnten Darstellungen von n zu verwendenden Werthsysteme in der dortigen Reihenfolge gesetzt werden.

Schreibt man in dieser Relation für n der Reihe nach n, $n-1$, $n-2$, ..., 2, 1, und addirt die so entstehenden Gleichungen, so ergibt sich die Beziehung

$$\Phi_{s+1}(n) = \sum_{x=1}^{x=n} F_{s+1}(x) =$$

$$= \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s} f(x_1, x_2, \ldots, x_s)\left[\sqrt[r]{n - x_1^r - x_2^r - \ldots - x_s^r}\right] + \eta\Phi_s(n) =$$

$$= \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s} f(x_1, x_2, \ldots, x_s)\sqrt[r]{n - x_1^r - x_2^r - \ldots - x_s^r} +$$

$$+ \eta\Phi_s(n) - \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s} \varepsilon_{x_1, x_2, \ldots, x_s} f(x_1, x_2, \ldots, x_s), \qquad 1)$$

wo für die Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_s$ die oben angegebene Summationsbedingung gilt und

$$0 \leqq \varepsilon_{x_1, x_2, \ldots, x_s} < 1$$

ist.

Ist nun $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ eine homogene Function von der Dimension t, wo t eine nicht negative (nicht nothwendig ganze) Zahl vorstellt, so wird

$$|\Phi_s(n)| = An^{\frac{t+s}{r}}$$

$$\left|\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s} \varepsilon_{x_1, x_2, \ldots, x_s} f(x_1, x_2, \ldots, x_s)\right| = Bn^{\frac{t+s}{r}},$$

wo A und B für keinen Werth von n ins Unendliche wachsen können, und daher hat man die Beziehung

$$\Phi_{s+1}(n) = n^{\frac{t+s+1}{r}} \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s} f\left(\frac{x_1}{\sqrt[r]{n}}, \frac{x_2}{\sqrt[r]{n}}, \ldots, \frac{x_s}{\sqrt[r]{n}}\right) \cdot$$

$$\cdot \sqrt[r]{1 - \frac{x_1^r + x_2^r + \ldots + x_s^r}{n}} \; \frac{1}{n^{\frac{s}{r}}} + C$$

wo C für alle Werthe von n endlich bleibt. Aus derselbe
falls $\alpha = 0$, $\beta = +\infty$ wird, durch Übergang zur Grenze
unbegrenzt wachsendes n die Relation

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Phi_{s+1}(n)}{n^{\frac{t+s+1}{r}}} =$$

$$= \iint \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_s) \sqrt[r]{1 - x_1^r - x_2^r - \ldots - x_s^r} \, dx_1 dx_2 \ldots d$$

in welcher die Integration über alle nicht negativen Wer
Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_s$ zu erstrecken ist, welc
Bedingung

$$x_1^r + x_2^r + \ldots + x_s^r < 1$$

erfüllen.

Ist speciell $t = 0$, $r = s+1$, so gibt die linke Se
letzten Gleichung die sogenannte mittlere Anzahl de
stellungen einer ganzen (nicht negativen) Zahl durc
Summe der r^{ten} Potenzen von r nicht negativen ganzen
dar und man hat daher für diese den Ausdruck

$$\iint \ldots \int \sqrt[r]{1 - x_1^r - x_2^r - \ldots - x_{s+1}^r} \, dx_1 dx_2 \ldots dx_r$$

mit den Integrationsbedingungen

$$x_\lambda \geqq 0 \; (\lambda = 1, 2, \ldots r-1); \; x_1^r + x_2^r + \ldots + x_{r-1}^r < 1$$

2. Es sei nun speciell

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_s) = x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_s^{r_s}; \; \alpha = 0, \beta = \infty,$$

wo $r_1, r_2, \ldots, r_s$ beliebige nicht negative Zahlen vorstelle
dann ist

$$\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s} f(x_1, x_2, \ldots, x_s)\left[\sqrt[r]{n - x_1^r - x_2^r - \ldots - x_s^r}\right] =$$

$$= \sum_{x_s = 0}^{x_s = [\sqrt[r]{n-1}]} x_s^{r_s} \left(\sum_{x'_1, x'_2, \ldots, x'_{s-1}} x_1'^{r_1} x_2'^{r_2} \ldots x_{s-1}'^{r_{s-1}} \left[\sqrt[r]{(n - x_s^r) - x_1'^r - x_2'^r - \ldots - x_{s-1}'^r}\right]\right),$$

wo für jeden bestimmten Werth $x_s^{(o)}$ von x_s die Summation bezüglich $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{s-1}$ über alle der Bedingung

$$x_1'^r + x_2'^r + \ldots + x_{s-1}'^r < n - x_s^{(o)r}$$

genügenden ganzzahligen nicht negativen Werthsysteme auszudehnen ist und daher hat man in diesem Falle die Beziehung

$$\Phi_{s+1}(n) = \sum_{x=0}^{x = [\sqrt[r]{n}]} x^{r_s} \Phi_s(n - x^{r_s}) + D n^{\frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_{s-1} + s}{r}} =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{\Phi_s(n)}{n^{\frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_{s-1} + s}{r}}} \sum_{x=0}^{x = [\sqrt[r]{n}]} x^{r_s} (n - x^{r_s})^{\frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_{s-1} + s}{r}} +$$

$$+ D_1 n^{\frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_{s-1} + s}{r}}, \qquad 3)$$

wo D und D_1 für alle Werthe von n endlich sind.

Aus dieser Gleichung folgt auf dem früher eingeschlagenen Wege sofort die Relation

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Phi_{s+1}(n)}{n^{\frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_s + s + 1}{r}}} =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{\Phi_s(n)}{n^{\frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_{s-1} + s}{r}}} \int_0^1 x^{r_s} (1 - x^r)^{\frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_{s-1} + s}{r}}, \qquad 4)$$

welche unmittelbar zu der Formel

$$\int\int\ldots\int x_1^{r_1}x_2^{r_2}\ldots x^{r_s}\sqrt[r]{1-x_1^r-x_2^r-\ldots x_s^r}\,dx_1dx_2\ldots dx_s =$$

$$= \int_0^1 x^{r_s}(1-x^r)^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_{s-1}+s}{r}}dx\,.$$

$$.\int_0^1 x^{r_{s-1}}(1-x^r)^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_{s-2}+s-1}{r}}dx\,.$$

$$.\int_0^1 x^{r_{s-2}}(1-x^r)^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_{s-3}+s-2}{r}}dx\ldots\int_0^1 x^{r_1}\sqrt[r]{1-x^r}\,dx$$

$$(x_\lambda \geqq 0,\ \lambda = 1, 2,\ldots, s;\ x_1^r+x_2^r+\ldots+x_s^r < 1)$$

führt, die unter Benützung der bekannten Beziehung

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}dx = \frac{1}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)\Gamma\left(\frac{q}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{n}\right)}$$

die Relation

$$\int\int\ldots\int x_1^{r_1}x_2^{r_2}\ldots x_s^{r_s}\sqrt[r]{1-x_1^r-x_2^r-\ldots-x_s^r}\,dx_1dx_2\ldots dx_r =$$

$$= \frac{1}{n^s}\frac{\Gamma\left(\frac{r_1+1}{r}\right)\Gamma\left(\frac{r_2+1}{r}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{r_s+1}{r}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{r_1+r_2+\ldots+r_s+s+1}{r}\right)}$$

$$x_\lambda \geqq 0,\ \lambda = 1, 2,\ldots, s;\ x_1^r+x_2^r+\ldots+x_s^r < 1)$$

liefert. Dieselbe ist ein specieller Fall der von Liouville im 4. Bande des »Journal des mathématiques pures et appliquées« gegebenen Verallgemeinerung des bemerkenswerthen Dirichlet'schen vielfachen Integrales.

3. Die letzte Relation kann man bei ganzzahligen Werthen von r_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, s)$ auch in folgender Weise herleiten. Setzt man voraus, dass

$$\Phi_s(n) = An^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_{s-1}+s}{r}} + Bn^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_{s-1}+s-1}{r}}$$

ist, wo A von n unabhängig und B für alle Werthe von n endlich ist, so hat man nach der im Anfange der vorigen Nummer gegebenen Erörterung

$$\Phi_{s+1}(n) = A \sum_{x=0}^{x=[\sqrt[r]{n}]} x^{r_s}(n-x^r)^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_{s-1}+s}{r}} +$$

$$+ B_1 n^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_{s-1}+s}{r}} = A n^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_{s-1}+s}{r}} .$$

$$. \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \frac{(-1)^\mu}{n^\mu} \binom{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_{s-1}+s}{r}}{\mu} S_{r\mu+r_s}([\sqrt[r]{n}]) +$$

$$+ B_1 n^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_{s-1}+s}{r}} ,$$

wo

$$1^\varkappa + 2^\varkappa + \ldots + m^\varkappa = S_\varkappa(m)$$

gesetzt wurde. Nun ist aber bekanntlich

$$S_\varkappa(m) = \frac{m^{\varkappa+1}}{\varkappa+1} + \frac{m^\varkappa}{2} + \binom{\varkappa}{2} \frac{B_1}{\varkappa-1} m^{\varkappa-1} - \binom{\varkappa}{4} \frac{B_2}{\varkappa-3} m^{\varkappa-3} + \ldots$$

und daher kann man die letzte Gleichung auch in folgender Form schreiben

$$\Phi_{s+1}(n) = A n^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_s+s+1}{r}} \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} (-1)^\mu \binom{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_{s-1}+s}{r}}{\mu} .$$

$$. \frac{1}{r_\mu + r_s + 1} + B_2 n^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_s+s}{r}} =$$

$$= \frac{A n^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_s+s+1}{r}}}{r_s+1} F\left(-\frac{r_1+r_2+\ldots r_{s-1}+s}{r}, \frac{r_s+1}{r},\right.$$

$$\left.\frac{r_s+1}{r}+1, 1\right) + B_2 n^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_s+s}{r}} ,$$

aus welcher auf Grund der Formel

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}$$

unmittelbar die Beziehung

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Phi_{s+1}(n)}{n^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_s+s+1}{r}}} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{r_s+1}{r}\right)\Gamma\left(\frac{r_1+r_2+\ldots+r_{s-1}+s}{r}+1\right)}{r\Gamma\left(\frac{r_1+r_2+\ldots+r_s+s+1}{r}+1\right)} \cdot \lim_{n=\infty} \frac{\Phi_s(n)}{n^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_{s-1}+s}{r}}}$$

folgt, die zu der Relation

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Phi_{s+1}(n)}{n^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_s+s+1}{r}}} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{r_2+1}{r}\right)\Gamma\left(\frac{r_3+1}{r}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{r_s+1}{r}\right)\Gamma\left(\frac{r_1+2}{r}+1\right)}{r^{s-1}\Gamma\left(\frac{r_1+r_2+\ldots+r_s+s+1}{r}+1\right)} \lim_{n=\infty} \frac{\Phi_2(n)}{n^{\frac{r_1+2}{r}}}$$

führt, wo nach den früheren Auseinandersetzungen

$$\Phi_2(n) = \sum_{x=0}^{x=[\sqrt[r]{n}]} x^{r_1}\left[\sqrt[r]{n-x^r}\right] + S_{r_1}([\sqrt[r]{n}]),$$

$$= \sum_{x=0}^{x=[\sqrt[r]{n}]} x^{r_1}\left[\sqrt[r]{n-x^r}\right] + An^{\frac{r_1+1}{r}}$$

ist, wenn A eine für jedes n endliche Grösse vorstellt. Die auf der rechten Seite dieser Gleichung befindliche Summe lässt sich leicht in eine andere verwandeln, welche zur Bestimmung des asymptotischen Werthes von $\Phi_2(n)$ tauglich ist. Betrachtet man nämlich die Summe

$$\sum_{x=0}^{x=[\sqrt[r]{n}]} S_{r_1}\left(\left[\sqrt[r]{n-x^r}\right]\right),$$

so erkennt man, dass in derselben die $r_1$te Potenz einer dem Bereiche $0 \ldots \sqrt[r]{n}$ angehörigen ganzen Zahl x_0 so oft vorkommt, als es ganzzahlige Werthe x dieses Intervalles gibt, für welche

$$\sqrt[r]{n - x^r} \geqq x_0$$

ist, d. i. also $[\sqrt[r]{n-x^r}]$-mal und demnach ist

$$\Phi_2(n) = \sum_{x=0}^{x=[\sqrt[r]{n}]} S_{r_1}([\sqrt[r]{n-x_0^r}]) + An^{\frac{r_1+1}{r}}$$

$$= \frac{n^{\frac{r_1+1}{r}}}{r_1+1} \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \frac{(-1)^\mu}{n^\mu} \binom{\frac{r_1+1}{r}}{\mu} S_{r\mu}([\sqrt[r]{n}]) + A_1 n^{\frac{r_1+1}{r}}$$

$$= \frac{n^{r_1+2}}{r_1+1} \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} (-1)^\mu \binom{\frac{r_1+1}{r}}{\mu} \frac{1}{r\mu+1} + A_2 n^{\frac{r_1+1}{r}}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{r_1+1}{r}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right)}{r\Gamma\left(\frac{r_1+2}{r}+1\right)} n^{\frac{r_1+2}{r}} + A_2 n^{\frac{r_1+1}{r}}. \qquad 4)$$

Man hat also schliesslich

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Phi_{s+1}(n)}{n^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_s+s+1}{r}}} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{r_1+1}{r}\right)\Gamma\left(\frac{r_2+1}{r}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{r_s+1}{r}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right)}{r^s\Gamma\left(\frac{r_1+r_2+\ldots+r_s+s+1}{r}+1\right)},$$

wodurch die am Ende der letzten Nummer abgeleitete Formel neuerdings bewiesen ist.

Aus 4) folgt weiters einerseits die Integralbeziehung

$$\int_0^1 x^{r_1}(1-x^r)^{\frac{1}{r}}\,dx = \frac{1}{r_1+1}\int_0^1 (1-x^r)^{\frac{r_1+1}{r}}\,dx,$$

anderseits für $r_1 = r-2$ die bemerkenswerthe specielle Relation

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=0}^{x=[\sqrt[r]{n}]} x^{r-2}\left[\sqrt[r]{n-x^r}\right]}{n} = \frac{\pi}{r^2 \sin \frac{\pi}{r}},$$

aus welcher sich für $r = 2$ das folgende arithmetische Theorem ergibt:

Die mittlere Anzahl der Darstellungen einer ganzen Zahl durch die binäre quadratische Form (1, 0, 1) ist gleich π.

4. Ist $r = 2$, so kann man bei der Bestimmung von $\Phi_s(n)$ für ganzzahlige r_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, s)$ die Benützung unendlicher Reihen leicht vermeiden. Da nämlich

$$r_1+r_2+\ldots+r_s+s = 2\rho+\varepsilon \quad (\varepsilon = 0, 1)$$

ist, so hat man die Relation

$$\Phi_{s+1}(n) = \lim_{n=\infty} \frac{\Phi_s(n)}{n^{\frac{r_1+r_2+\cdots+r_{s-1}+s}{r}}} \sum_{x=0}^{x=[\sqrt[r]{n}]} x^{r_s}(n-x^2)^\rho \,.$$

$$\cdot \left[\sqrt{n-x^2}\right]^\varepsilon + A_1 n^{\rho+\frac{\varepsilon}{2}},$$

welche für $\varepsilon = 0$ unmittelbar die früher gefundene Beziehung liefert, während für $\varepsilon = 1$ die Existenz derselben von dem Bestehen einer entsprechenden Formel für die Anzahl $\Phi_2^{(0)}(n)$ der Darstellungen von n als Summe der Quadrate von zwei ganzen nicht negativen Zahlen abhängt.

Nun ist aber bekanntlich die Anzahl der Darstellungen einer ganzen Zahl n durch die binäre quadratische Form (1, 0, 1) gleich dem vierfachen Überschusse $4\varepsilon_1(n)$ der Anzahl derjenigen ungeraden Theiler von n, welche die Form $4s+1$ besitzen, über die Anzahl der übrigen, und demnach hat die Gesammtanzahl dieser Darstellungen für das ganze Intervall $1\ldots n$ den Werth

$$4\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]\eta(x),$$

wo $\eta(x)$ gleich 0, +1 oder −1 ist, je nachdem x gerade, von der Form $4s+1$ oder von der Form $4s-1$ ist, da diese Summe offenbar gleich

$$\sum_{x,y=1}^{x,y=n} \varepsilon\left(\frac{n}{xy}\right)\eta(x) = \sum_{x=1}^{x=n} \varepsilon\left(\frac{n}{x}\right)\left(\sum_{d_x} \eta(d_x)\right) = \sum_{x=1}^{x=n} \varepsilon_1(x)$$

ist, wenn $\varepsilon(\alpha)$ gleich 0 oder 1 wird, je nachdem α kleiner als 1 ist oder nicht, und die Summation bezüglich d_x über alle Theiler von x ausgedehnt wird. Nun ist ferner

$$\sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right]\eta(x) = n\sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{\eta(x)}{x} - n\sum_{x=[\sqrt{n}]+1}^{x=\infty} \frac{\eta(x)}{x} -$$

$$- \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]} \varepsilon_x\eta(x) + \sum_{x=[\sqrt{n}]+1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right]\eta(x) \quad (0 \leqq \varepsilon_x < 1)$$

und daher hat man, da

$$\sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{\eta(x)}{x} = \frac{\pi}{4}$$

$$\left|\sum_{x=[\sqrt{n}]+1}^{x=\infty} \frac{\eta(x)}{x}\right| < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\left|\sum_{x=1}^{n=[\sqrt{n}]} \varepsilon_x\eta(x)\right| < \sqrt{n}$$

$$\sum_{x=[\sqrt{n}]+1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right]\eta(x) = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]} H\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right) - [\sqrt{n}]\,H([\sqrt{n}])$$

ist, wo

$$H(r) = \sum_{x=1}^{x=r} \eta(x)$$

gesetzt wurde, wesshalb

$$\left|\sum_{x=[\sqrt{n}]+1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right] \eta(x)\right| < 2\sqrt{n}$$

wird, die Relation

$$\Phi_2^{(0)}(n) = \frac{\pi n}{4} + A_2\sqrt{n},$$

deren hier gegebene Ableitung ich im Wesentlichen schon im 49. Bande der Denkschriften der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften mitgetheilt habe; dieselbe wurde hier nur der Vollständigkeit wegen aufgenommen. Der eben angegebene Ausdruck von $\Phi_2^{(0)}(n)$ zeigt, dass der in den vorausgehenden Entwicklungen abgeleitete Werth von $\lim_{n=\infty} \frac{\Phi_{s+1}(n)}{n^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_s+s+1}{r}}}$ bei den in diesem Abschnitte gemachten speciellen Voraussetzungen giltig ist.

II.

Die Form r^{ter} Ordnung der r Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_r$ $(a_1, a_2, \ldots, a_s;\ x_1, x_2, \ldots, x_r)$ sei so beschaffen, dass durch sie, falls $x_\lambda \geqq \alpha_\lambda$ ($\lambda = 1, 2, \ldots, r$; α_λ ganzzahlig) alle nicht negativen ganzen Zahlen und nur solche darstellbar sind, und es sei $\chi(n)$ die Anzahl derjenigen Darstellungen der ganzen Zahl n durch dieselbe, für welche die Variablen die eben angeführte Bedingung erfüllen. Alsdann lässt sich bekanntlich stets eine Function $\psi(x)$ so bestimmen, dass die über alle Theiler d von n erstreckte Summe

$$\sum_d \psi(d) = \chi(n)$$

ist; dieselbe ist nämlich durch die Gleichung

$$\psi(n) = \sum_d \chi\left(\frac{n}{d}\right) \mu(d)$$

gegeben, wo die zahlentheoretische Function $\mu(x)$ den Werth 0 hat, wenn x nicht ganzzahlig oder durch ein Quadrat (ausser 1)

theilbar ist, in allen anderen Fällen aber gleich $(-1)^{\tilde{\omega}(x)}$ wird, wenn $\tilde{\omega}(x)$ die Anzahl der Primtheiler von x vorstellt. Es gibt daher

$$\sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right] \psi(x)$$

die Anzahl der erwähnten Darstellungen aller ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots n$ an und demnach ist, falls sich diese Summe auf die Gestalt

$$n \sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{\psi(x)}{x} + a$$

bringen lässt, wo

$$\lim_{n=\infty} \frac{a}{n} = 0$$

ist,

$$\alpha = \sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{\psi(x)}{x}$$

die mittlere Anzahl der Darstellungen einer ganzen Zahl in der genannten Form.

Es soll nun unter Benützung der eben gemachten Erörterungen das r-fache Integral

$$\int_{\alpha_1}^{\infty}\int_{\alpha_2}^{\infty} \cdots \int_{\alpha_r}^{\infty} f((a_1, a_2, \ldots, a_s;\ x_1, x_2, \ldots, x_r))\, dx_1 dx_2 \ldots dx_r$$

unter gewissen Voraussetzungen über die Natur der Functionen f und ψ auf Grund der Definitionsgleichung in ein einfaches transformirt werden.

Aus der Definitionsgleichung

$$\int_{\alpha_1}^{\infty}\int_{\alpha_2}^{\infty} \cdots \int_{\alpha_r}^{\infty} f((a_1, a_2, \ldots, a_s;\ x_1, x_2, \ldots x_r))\, dx_1 dx_2 \ldots dx_r =$$

$$= \lim_{\varepsilon=0,\, n_1, n_2, \ldots, n_r=\infty} \sum_{\lambda_1=\alpha_1, \lambda_2=\alpha_2, \ldots, \lambda_r=\alpha_r}^{\lambda_1=n_1, \lambda_2=n_2, \ldots, \lambda_r=n_r} \varepsilon f(\varepsilon(a_1, a_2, \ldots, a_s;\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s))$$

folgt, falls die Function f so beschaffen ist, dass die Glieder der auf der rechten Seite stehenden r-fachen Summe in beliebiger Weise in Gruppen zusammengefasst werden können, durch Vereinigung aller Terme, in denen

$$(a_1, a_2, \ldots, a_s; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) = n$$

ist, die Beziehung

$$\int_{\alpha_1}^{\infty}\int_{\alpha_2}^{\infty}\cdots\int_{\alpha_r}^{\infty} f((a_1, a_2, \ldots, a_s; x_1, x_2, \ldots, x_r))\, dx_1 dx_2 \ldots dx_s =$$
$$= \lim_{\varepsilon=0,\, n=\infty} \sum_{m=0}^{m=n} \varepsilon f(\varepsilon m) \left(\sum_{d_m} \psi(d_m)\right),$$

welche, falls auch in ihr die beliebige Zusammenfassung der Terme erlaubt ist, sofort in die folgende übergeht

$$\int_{\alpha_1}^{\infty}\int_{\alpha_2}^{\infty}\cdots\int_{\alpha_1}^{\infty} f((a_1, a_2, \ldots, a_s; x_1, x_2, \ldots, x_r))\, dx_1 dx_2 \ldots dx_r =$$
$$= \alpha \int_0^{\infty} f(y)\, dy.$$

Als specielle Fälle dieser Formel mögen die folgenden Relationen angeführt werden

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(ax^2 + bxy + cy^2)\, dx\, dy =$$
$$= \left(\frac{\pi}{2\sqrt{4ac - b^2}} + \frac{b}{4ac - b^2}\right) \int_0^{\infty} f(y)\, dy,$$
$$(a > 0,\ c > 0;\ 4ac - b^2 > 0),$$

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty} f(x_1^r + x_2^r + \ldots + x_r^r)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_r =$$
$$= \left\{\Gamma\left(1 + \frac{1}{r}\right)\right\}^r \int_0^{\infty} f(y)\, dy,$$

welche ein specieller Fall der bekannten von Raabe in seiner im 28. Bande des Journals für die reine und angewandte Mathematik von Crelle enthaltenen Abhandlung »Reduction des

p-fachen Integrales $\int_0^{\infty (p)} \varphi(a_1 x_1^{n_1} + a_2 x_2^{n_2} + \ldots + a_p x_p^{n_p}) x_1^{r_1 - 1}$.
$.x_2^{r_2-1} \ldots x_p^{r_p-1} dx_1 dx_2 \ldots dx_p$« aufgestellten Beziehung ist.

Schreibt man in der vorletzten von diesen Gleichungen einmal für b $-b$, das anderemal für x oder y $-x$ beziehungsweise $-y$, so erhält man offenbar zwei Doppelintegrale, welche sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Man erkennt demnach, dass das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(ax^2 + bxy + cy^2)\,dx\,dy \quad (a > 0,\ c > 0,\ 4ac - b^2 > 0)$$

für alle Formen einer negativen Discriminante denselben Werth hat.

Das Additionstheorem der Functionen $C_n^\nu(x)$

von

Leopold Gegenbauer,

c. M. k. Akad.

In einer in den »Transactions of the Royal Society of Edinburgh«[1] enthaltenen Abhandlung, betitelt »On the transformation of Laplace's coëfficients« hat Herr Plarr vermittelst eines Summationsverfahrens für factorielle Ausdrücke, welches, wie in dem betreffenden Referate im »Jahrbuche über die Fortschritte der Mathematik« mit Recht hervorgehoben wird, nothwendig ein schwieriges und verwickeltes ist, die Gleichung

$$P_n(xx_1-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi) =$$
$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} a_\lambda (x^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}(x_1^2-1)^{\frac{\lambda}{2}} P_n^{(\lambda)}(x) P_n^{(\lambda)}(x_1)\cos\lambda\varphi$$

direct ermittelt, eine einfache Bestimmung der in dieser Relation auftretenden Constanten, bei welcher die angegebene Entwicklungsform als bekannt angenommen wird, findet sich in der in den »Proceedings of the Royal Irish Academy«[2] enthaltenen Note des Herrn Tarlington »On the determination of the numerical factors of Laplace's coëfficients«. Dass unter der eben erwähnten Voraussetzung auch die numerischen Coëfficienten in der entsprechenden Darstellung der eine Verallgemeinerung der Kugelfunctionen bildenden Functionen $C_n^\nu(x)$, welche entweder als Coëfficienten der Entwicklung von

[1] A. a. O. 34. Band, S. 19—43.

[2] A. a. O. 6. Band, 189—191.

$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\nu}$ nach steigenden Potenzen von α, oder als die mit den Factoren $\frac{2^n\Pi(n+\nu-1)}{\Pi(\nu-1)\Pi(n)}$ $(n=0, 1, 2,\ldots)$ versehenen Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung der hypergeometrischen Reihe

$$x^{-1}F(1, \frac{1}{2}, \nu+1, x^{-2}) = \int_{-1}^{+1}\frac{(1-y^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}dy}{y-x}$$

definirt werden können, sich ungemein leicht bestimmen lassen, ersieht man einerseits aus meiner in der zweiten Abtheilung des 70. Bandes der Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kais. Akademie der Wissenschaften veröffentlichten Ableitung derselben,[1] anderseits geht dies auch aus den folgenden Entwicklungen deutlich hervor. Da nicht nur das durch die obige Gleichung ausgedrückte Additionstheorem der Kugelfunctionen, sondern auch das Analogon desselben für die Functionen $C_n^\nu(x)$ bisher, mit Ausnahme der Plarr'schen Ermittelung des ersteren, meines Wissens stets mit Hilfe der partiellen Differentialgleichung, welcher die Functionen $P_n(xx_1-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi)$, beziehungsweise $C_n^\nu(xx_1-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi)$ genügen, abgeleitet wurde, so will ich in den folgenden Zeilen einen neuen, äusserst einfachen Beweis desselben angeben, bei welchem diese Gleichung ausser Betracht bleibt. Der besseren Übersicht wegen mögen die hierbei zur Verwendung gelangenden Sätze und Relationen aus der Theorie der Functionen $C_n^\nu(x)$ zunächst zusammengestellt werden.

I. Entwickelt man die Determinante n^{ter} Ordnung

$$\varphi_n(x) = \begin{vmatrix} x, & 1, & 0, 0, \ldots, & 0, & 0 \\ \frac{1}{2(\nu+1)}, & x, & 1, 0, \ldots, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{2\nu+1}{2(\nu+1)(\nu+2)}, & x, 1, \ldots, & 0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, 0, \ldots, & \frac{(n-1)(n+2\nu-2)}{4(n+\nu-2)(n+\nu-1)}, & x \end{vmatrix},$$

[1] »Über einige bestimmte Integrale«, A. a. O. S. 433—443.

welche bekanntlich den n^{ten} Näherungsnenner der eben erwähnten regulären Kettenbruchentwicklung vorstellt, nach den Elementen der letzten Horizontalreihe, so findet man die Beziehung

$$n\,C_n^\nu(x) - 2(n+\nu-1)\,x\,C_{n-1}^\nu(x) + (n+2\nu-2)\,C_{n-2}^\nu(x) = 0, \qquad 1)$$

welche in Verbindung mit der Relation

$$\psi_0(x) = C_0^\nu(x) = 1$$

zu den Gleichungen

$$C_n^\nu(\pm 1) = (\pm 1)^n \frac{\Pi(n+2\nu-1)}{\Pi(n)\,\Pi(2\nu-1)}$$

$$C_n^\nu(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^\lambda \frac{\Pi(n+\nu-\lambda-1)(2x)^{n-2\lambda}}{\Pi(\lambda)\,\Pi(n-2\lambda)\,\Pi(\nu-1)}$$

führt, aus deren letzter unmittelbar die Formeln

$$[C_n^\nu(x)]^{(r)} = \frac{2^r\,\Pi(n+\nu-1)}{\Pi(\nu-1)}\,C_{n-r}^{\nu+r}(x) \qquad 2)$$

$$2\nu(1-x^2)\,C_{n-1}^{\nu+1}(x) = (n+2\nu-1)\,C_{n-1}^\nu(x) - n\,x\,C_n^\nu(x) \qquad 3)$$

$$\left[(1-x^2)^{\frac{2\nu+1}{2}}\,C_{n-1}^{\nu+1}(x)\right]' = -\frac{n(n+2\nu)}{2\nu}\,(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,C_n^\nu(x)$$

folgen. Mit Hilfe der letzten von diesen Gleichungen kann man für jede Function $\varphi(x)$, welche eine im Intervalle $-1\ldots+1$ stetige n^{te} Ableitung besitzt, die Beziehung

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x)(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,C_n^\nu(x)\,dx =$$

$$= \frac{2^n\,\Pi(n+\nu-1)\,\Pi(n+2\nu-1)}{\Pi(n)\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(2n+2\nu-1)} \int_{-1}^{+1} \varphi^{(n)}(x)\,(1-x^2)^{\frac{2n+2\nu-1}{2}}\,dx \qquad 4)$$

ableiten, aus welcher sich die Gleichungen

$$\int_{-1}^{+1} x^{n-s}\,C_n^\nu(x)(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{+1} x^{n+2s-1}\,C_n^\nu(x)\,(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,dx = 0 \qquad 5)$$

$$\int_{-1}^{+1} x^{n-2s} C_n^\nu(x)(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} dx =$$

$$= \frac{\Pi(n+2s)\Pi(n-1)\Pi(n+2\nu-1)}{2^{n+2s+1}\Pi(s)\Pi(n)\Pi(n+\nu+s)} \left[\frac{2^\nu\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^2$$

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} C_n^\nu(x) C_m^\nu(x) dx =$$

$$= \frac{2^{2\nu-1}\Pi(n-2\nu-1)}{\Pi(n)(n+\nu)} \left[\frac{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1}\right]^2 \delta_{n,m}.$$

$$(\delta_{n,m} = 0,\ n \gtrless m;\ \delta_{n,n} = 1) \qquad 6)$$

und speciell wegen

$$\left[\frac{1}{\nu} C_n^\nu(x)\right]_{\nu=0} = \frac{2\cos(n \arccos x)}{n} \qquad (n>0)$$

$$\left[\frac{1}{\nu} C_o^\nu(x)\right]_{\nu=0} = 1$$

$$\int_0^\pi \cos nx \cos mx\, dx = \frac{2}{\pi}\delta_{n,m}$$

durch Specialisirung ergeben, deren letzte übrigens unmittelbar aus einer bekannten Eigenschaft der Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung des Integrales

$$\int_a^b \frac{f(y)dy}{y-x}$$

folgt.

II. Ist nun

$$C_n^\nu(xx_1-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} A_\lambda C_\lambda^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos\varphi),$$

so besteht auf Grund der Relation 6) die Beziehung

$$A_\lambda = \frac{\Pi(\lambda)(2\lambda+2\nu-1)}{3^{2\nu-1}\Pi(\lambda+2\nu-2)}\left[\frac{\Pi(2\nu-2)}{\Pi(\nu-1)}\right]^2 \cdot$$

$$\cdot \int_0^\pi C_n^\nu(xx_1-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi) C_\lambda^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos\varphi)\sin^{2\nu-1}\varphi\, d\varphi,$$

welche nach 2) und 4) übergeht in

$$A_\lambda = \frac{(-1)^\lambda \Pi(2\nu-2)(2\lambda+2\nu-1)}{2^{2\nu-1}[\Pi(\nu-1)]^2}(x^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}(x_1^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}.$$

$$.\int_0^\pi C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(xx_1-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi)\sin^{2\lambda+2\nu-1}\varphi\, d\varphi. \quad 7)$$

Für $\nu = \frac{1}{2}$ hat man nach der obigen Bemerkung

$$A_\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi P_n(xx_1-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi)\cos n\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{(-1)^\lambda \lambda}{\pi}(x^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}(x_1^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}\int_0^\pi C_{n-\lambda}^{\lambda+\frac{1}{2}}(xx_1-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi).$$

$$.\sin^{2\lambda}\varphi\, d\varphi.$$

Bedenkt man, dass alle Glieder des auf der linken Seite der Gleichung 7) stehenden Integrales, in denen $\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}$ zu einer ungeraden Potenz erhoben wird, nach 2) verschwinden, so erkennt man, dass derselbe eine ganze symmetrische Function von x und x_1 ist, welche in Bezug auf jede der Veränderlichen den Grad $n-\lambda$ nicht übersteigt — dass dieser Grad wirklich erreicht wird, kann sofort durch Bestimmung des Coëfficienten von $(xx_1)^{n-\lambda}$ gezeigt werden — und daher lässt sich dasselbe in eine nach den Functionen $C_\varkappa^{\nu+\lambda}(x)$ fortschreitende Reihe von folgender Gestalt entwickeln

$$\int_0^\pi C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(xx_1-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi)\sin^{2\nu+2\lambda-1}\varphi\, d\varphi =$$

$$= \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-\lambda} f_\varkappa(x_1)C_\varkappa^{\nu+\lambda}(x),$$

wo die Functionen $f_\varkappa(x_1)$ ganze Functionen von x_1 von nicht höherem als dem Grade $n-\lambda$ sind.

Berücksichtigt man, dass für $x_1 = \pm 1$ diese Gleichung sich in die folgende

$$(\pm 1)^{\nu-\lambda}\frac{[2^{\nu+\lambda}\Pi(\nu+\lambda-1)]^2}{2\Pi(2\lambda+2\nu-1)}C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(x) = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-\lambda} f_\varkappa(\pm 1)C_\varkappa^{\nu+\lambda}(x)$$

verwandelt, so ersieht man, dass

$$f_{n-\lambda}(\pm 1) = (\pm 1)^{n-\lambda} \frac{[2^{\nu+\lambda}\Pi(\nu+\lambda-1)]^2}{2\Pi(2\lambda+2\nu-1)}, \; f_\varkappa(\pm 1) = 0 \; (\varkappa < n-\lambda)$$

und demnach

$$\int_0^\pi C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(xx_1 - \sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi)\sin^{2\lambda+2\lambda-1}\varphi\, d\varphi =$$
$$= f_{n-\lambda}(x_1)\, C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(x) + (x_1^2-1)\, G(x, x_1)$$

ist, wo $G(x, x_1)$ eine ganze Function von x_1 von nicht höherem als dem Grade $n-\lambda-2$ ist.

Aus dieser Gleichung folgt sofort

$$(\lambda = n) \quad \int_0^\pi C_0^{\nu+n}(xx_1 - \sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi)\sin^{2\nu+2n-1}\varphi\, d\varphi =$$
$$= \frac{[2^{n+\nu}\Pi(n+\nu-1)]^3}{2\Pi(2n+2\nu-1)}\, C_0^{\nu+n}(x)\, C_0^{\nu+n}(x_1)$$

$$(\lambda = n-1) \quad \int_0^\pi C_1^{\nu+n-1}(xx_1 - \sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi).$$
$$.\sin^{2\nu+2n-3}\varphi\, d\varphi = (\alpha x_1 + \beta)\, C_1^{n+\nu-1}(x).$$

Setzt man in dieser Formel $x = +1$, so entsteht die Beziehung

$$\alpha x_1 + \beta = \frac{[2^{n+\nu-1}\Pi(n+\nu-2)]^2}{2\Pi(2n+2\nu-2)}\, C_1^{\nu+n-1}(x_1),$$

welche zeigt, dass $\beta = 0$ und demnach

$$\int_0^\pi C_1^{\nu+n-1}(xx_1 - \sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi)\sin^{2\nu+2n-3}\varphi\, d\varphi =$$
$$= \frac{(2^{n+\nu-1}\Pi(n+\nu-2)]^2}{2\Pi(2n+2\nu-2)}\, C_1^{\nu+n-1}(x)\, C_1^{\nu+n-1}(x_1)$$

ist. Auf Grund dieser zwei Relationen lässt sich aber sofort die allgemeine Beziehung

$$\int_0^\pi C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(xx_1 - \sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi)\sin^{2\nu+2\lambda-1}\varphi\, d\varphi =$$
$$= \frac{[2^{\lambda+\nu}\Pi(\lambda+\nu-1)]^2\Pi(n-\lambda)}{2\Pi(n+\lambda+2\nu-1)}\, C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(x)\, C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(x_1) \quad 8)$$

beweisen.

Nach 1) ist nämlich

$$\int_0^\pi C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(xx_1-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi)\sin^{2\nu+2\lambda-1}\varphi\,d\varphi =$$

$$=\frac{1}{n-\lambda}\Big\{2(n+\nu-1)\int_0^\pi (xx_1-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\ \mathrm{co}$$

$$.\,C_{n-\lambda-1}^{\nu+\lambda}(xx_1-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi)\sin^{2\nu+2\lambda-1}\varphi$$

$$-(n+\lambda+2\nu-2)\int_0^\pi C_{n-\lambda-2}^{\nu+\lambda}(xx_1-\sqrt{x_2-1}\sqrt{x_1^2-1}\ \mathrm{c}$$

$$.\sin^{2\nu+2\lambda-1}\varphi\,d\varphi\Big\}$$

oder, falls die Relation 8) für alle $n-\lambda$ nicht erreich ganzzahligen, nicht negativen Werthe des unteren Inde beliebigen oberen) von $C_x^{\prime}(x)$ besteht,

$$\int_0^\pi C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(xx_1-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi)\sin^{2\lambda+2\nu-1}\varphi\,d\varphi =$$

$$=\frac{1}{n-\lambda}\Big\{\Big[\frac{(n+\nu-1)(n-\lambda-1)}{n+\lambda+2\nu-2}xx_1\,C_{n-\lambda-1}^{\nu+\lambda}(x)\,C_{n-\lambda-1}^{\nu+\lambda}(x_1)-$$

$$-\frac{n+\lambda+2\nu-2}{2}C_{n-\lambda-2}^{\nu+\lambda}(x)\,C_{n-\lambda-2}^{\nu+\lambda}(x_1)\Big].$$

$$.\,\frac{\Pi(n-\lambda-2)[2^{\lambda+\nu}\Pi(\lambda+\nu-1)]^2}{\Pi(n+\lambda+2\nu-3)}-2(n+\nu-1)\sqrt{x^2-1}\sqrt{}$$

$$.\int_0^\pi C_{n-\lambda-1}^{\nu+\lambda}(xx_1-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi)\sin^{2\lambda+2\nu-1}\varphi$$

Nun ist aber

$$\cos\varphi=\frac{1}{2\nu+2\lambda-1}C_1^{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}(\cos\varphi)$$

und daher nach 4)

$$\int_0^\pi C_{n-\lambda-1}^{\nu+\lambda}(xx_1-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi)\cos\varphi\sin^{2\nu+2\lambda-1}$$

$$=(x^2-1)(x_1^2-1)\int_0^\pi C_{n-\lambda-2}^{\nu+\lambda+1}(xx_1-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\ \mathrm{c}$$

$$.\sin^{2\nu+2\lambda+1}\varphi\,d\varphi,$$

so dass also die letzte Gleichung auf Grund von 8) übergeht in

$$\int_0^\pi C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(xx_1-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi)\sin^{2\lambda+2\nu-1}\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{\Pi(n-\lambda-2)[2^{\lambda+\nu}\Pi(\lambda+\nu-1)]^2}{(n-\lambda)\Pi(n+\lambda+2\nu-3)}\left\{\frac{(n+\nu-1)(n-\lambda-1)}{n+\lambda+2\nu-2}\,.\right.$$

$$.\, xx_1 C_{n-\lambda-1}^{\nu+\lambda}(x)\, C_{n-\lambda-1}^{\nu+\lambda}(x_1) - \frac{n+\lambda+2\nu-2}{2}\,.$$

$$.\, C_{n-\lambda-2}^{\nu+\lambda}(x)\, C_{n-\lambda-2}^{\nu+\lambda}(x_1) + \frac{4(n+\nu-1)(\lambda+\nu)^2}{(n+\lambda+2\nu-2)(n+\lambda+2\nu-1)}\,.$$

$$\left..\,(x^2-1)(x_1^2-1)\, C_{n-\lambda-2}^{\nu+\lambda+1}(x)\, C_{n-\lambda-2}^{\nu+\lambda+1}(x_1)\right\}.$$

Da der auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Ausdruck, wie man mit Hilfe der Gleichungen 1) und 3) leicht zeigt, für jede Wurzel ξ der Gleichung

$$C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(x) = 0$$

verschwindet, so ist er durch das Product $C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(x)\, C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(x_1)$ theilbar, und demnach besteht, da derselbe in Bezug auf x und x_1 vom Grade $n-\lambda$ ist, die Beziehung

$$\int_0^\pi C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(xx_1-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi)\sin^{2\lambda+2\nu-1}\varphi\, d\varphi =$$

$$= a\, C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(x)\, C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(x_1),$$

in welcher, wie die Substitution $x = 1$ zeigt, die Constante a den in der Formel 8) angegebenen Werth hat. Da nun diese Formel für $n-\lambda = 0, 1$ gilt, so besteht sie allgemein.

Man hat demnach die Relation

$$C_n^\nu(xx_1-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi) =$$

$$= \frac{\Pi(2\nu-2)}{[\Pi(\nu-1)]^2}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}(-1)^\lambda\,\frac{4^\lambda\Pi(n-\lambda)[\Pi(\nu+\lambda-1)]^2}{\Pi(n+2\nu+\lambda-1)}\,.$$

$$.\,(x^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}(x_1^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}\, C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(x)\, C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(x_1)\, C_\lambda^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos\varphi),$$

welche das Additionstheorem der Functionen $C_n^\nu(x)$ ausspricht.

Ich will bei dieser Gelegenheit noch bemerken, das
von Herrn R. Fujisawa in seiner Mittheilung »Note on a
formula in spherical harmonics«[1] abgeleitete Formel

$$C_n^1(\cos x) - C_{n-2}^1(\cos x) = 2 \cos nx,$$

welche unmittelbar zur Relation

$$C_n^1(\cos x) = \frac{\sin (n+1)x}{\sin x}$$

führt, als specieller Fall in der von mir aufgestellten Re

$$C_n^{\nu+1}(x) - C_{n-2}^{\nu+1}(x) = \frac{n+\nu}{\nu} C_n^\nu(x)$$

enthalten ist, aus welcher, falls $x > 1$ ist, die der Fujisa
schen analoge Gleichung

$$C_n^1 (\text{coshyp } x) - C_{n-2}^1 (\text{coshyp } x) = 2 \text{ coshyp } nx$$

folgt.

---

[1] Schriften der mathematischen Gesellschaft in Tokio, 4. Band,
S. 7—8.

Über ein Theorem des Herrn Baker

von

Leopold Gegenbauer,

c. M. k. Akad.

Vereinigt man in der Entwicklung der m^{ten} Potenz des Polynoms $a_1+a_2+\ldots+a_r$, wo m eine ganze positive Zahl vorstellt, alle Glieder, in denen die Exponenten von s Grössen $a_\varkappa$ ($\varkappa=1,2,\ldots,r$) den Werth 0 haben, für $s=0,1,2,\ldots,r-1$, so erhält dieselbe folgende Gestalt

$$(a_1+a_2+\ldots+a_r)^m=\sum_{s=0}^{s=r-1}\left(\sum_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}} f_{r-s}(a_{\varkappa_1},a_{\varkappa_2},\ldots,a_{\varkappa_{r-s}})\right)$$

wo die Summation bezüglich $\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}$ über alle Combinationen $(r-s)^{\text{ter}}$ Classe ohne Versetzung und ohne Wiederholung der Elemente $1,2,\ldots,r$ auszudehnen ist und die symmetrische Function $f_{r-s}(x_1,x_2,\ldots,x_{r-s})$ der $r-s$ Grössen x_λ ($\lambda=1,2,\ldots,r-s$) durch die Gleichung

$$f_{r-s}(x_1,x_2,\ldots,x_{r-s})=$$
$$=\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{r-s-1}=1}^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{r-s-1}=m-r+s+1}\frac{m!}{\lambda_1!\lambda_2!\ldots\lambda_{r-s-1}!(m-\lambda_1-\lambda_2-\ldots-\lambda_{r-s-1})!}.$$
$$.x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\ldots x_{r-s-1}^{\lambda_{r-s-1}}x_{r-s}^{m-\lambda_1-\lambda_2-\ldots-\lambda_{r-s-1}}$$

definirt ist, welche zeigt, dass für $s<r-m$

$$f_{r-s}(x_1,x_2,\ldots,x_{r-s})=0$$

wird.

Auf Grund dieser Darstellung leitet man leicht die Relation

$$f_r(a_1, a_2, \ldots, a_r) =$$
$$= \sum_{s=0}^{s=r-1} (-1)^s \left(\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}} (a_{\varkappa_1} + a_{\varkappa_2} + \ldots + a_{\varkappa_{r-s}})^m \right)$$

ab, welche für den speciellen Fall $r > m$ schon von Herrn R. W. Christie in seiner im 20. Bande der Proceedings of the London Mathematical Society (S. 119—121) enthaltenen Mittheilung »A theorem in combinations« aufgestellt und auf specielle Fälle angewendet wurde und von welcher Herr H. F. Baker[1] für $r \geqq m$ im 21. Bande derselben Zeitschrift zeigte, dass sie ein specieller Fall des folgenden allgemeinen Theorems ist:

Sind $a_1, a_2, \ldots, a_r$ irgendwelche Grössen und ist $f_{r-s}(x_1, x_2, \ldots, x_{r-s})$ eine symmetrische Function von $x_1, x_2, \ldots, x_{r-s}$, so folgt aus der Beziehung

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_r) =$$
$$= \sum_{s=0}^{s=r-1} \left(\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}} f_{r-s}(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s}}) \right) + f_0(0),$$

in welcher die Summation bezüglich $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}$ über alle Combinationen $(r-s)^{\text{ter}}$ Classe ohne Versetzung und ohne Wiederholung der Elemente $1, 2, \ldots, r$ auszudehnen ist, die Relation

$$f_r(a_1, a_2, \ldots, a_r) =$$
$$= \sum_{s=0}^{s=r-1} (-1)^s \left(\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}} F(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s}}) \right) + (-1)^r F(0).$$

Nimmt man in diesen zwei Gleichungen für $a_1, a_2, \ldots, a_r$ die Primtheiler $p_1, p_2, \ldots, p_r$ einer durch kein Quadrat (ausser 1)

[1] »On Euler's Φ-function«. A. a. O. S. 30—32. Den Inhalt der angezogenen Arbeiten kenne ich nur durch die bezüglichen Referate im Jahrbuche über die Fortschritte der Mathematik. Das Baker'sche Theorem wurde von mir etwas allgemeiner gefasst als a. a. O. geschieht.

theilbaren ganzen Zahl n und für jedes $f_{r-s}(p_1, p_2, \ldots, p_{r-s})$ dieselbe beliebige Function $f(p_1 p_2 \ldots p_{r-s})$ des Productes der Argumente, so erhält man die beiden in der Zahlentheorie längst für ein allgemeines n aufgestellten correspondirenden Beziehungen

$$F(n) = \sum_d f(d)$$

$$f(n) = \sum_d F\left(\frac{n}{d}\right) \mu(d),$$

in denen die Summation über alle Theiler d von n zu erstrecken ist.

Das eben angeführte Theorem stellt daher, wie übrigens auch Herr Baker schon durch den Titel seiner Arbeit andeutet, ein Analogon eines arithmetischen Satzes im Gebiete der symmetrischen[1] Functionen dar. In der That liegt, da jede ganze Zahl als ein Product von Primzahlpotenzen, also allgemeiner als eine Function derselben dargestellt werden kann — dass dieselbe symmetrisch ist, hat, wie sich zeigen wird, für die beabsichtigte Untersuchung keine Bedeutung — von vorneherein die Vermuthung nahe, dass ein grosser Theil derjenigen Theoreme der Zahlentheorie, welche in letzter Linie auf der eben erwähnten Darstellung fussen, Analoga im Gebiete der Functionen von mehreren Veränderlichen haben werden. Zu diesen Sätzen gehören u. A. alle jene, welche sich auf solche nach den Theilern einer ganzen Zahl n fortschreitende Summen beziehen, in denen weder die Grösse der einzelnen Elemente, noch deren Form in Bezug auf einen bestimmten Modul eine Rolle spielt, und zwar werden jedem von diesen Theoremen zwei allgemeinere im Gebiete der Functionen von mehreren Veränderlichen entsprechen, da die genannten Theiler einerseits,

[1] Dass die Symmetrie der vorkommenden Functionen keine nothwendige Bedingung zum Bestehen der erwähnten Theoreme ist, ergibt sich schon daraus, dass das im Anfange angeführte Theorem bestehen bleibt, wenn in demselben a_x durch $c_x a_x$ und folglich x_x durch $c_x x_x$ $(x = 1, 2, \ldots, r)$ ersetzt wird, obwohl die auftretenden Functionen in Bezug auf die a_x $(x = 1, 2, \ldots, r)$ nicht mehr sämmtlich symmetrisch sind.

falls n durch kein Quadrat (ausser 1) theilbar ist, als aus einer für jeden einzelnen besonderen Anzahl derselben Elemente zusammengesetzt, anderseits als aus einer für alle gleichen Anzahl von Elementen, die für jeden einzelnen besondere sind (verschiedene Potenzen der Primfactoren einschliesslich der nullten), gebildet angesehen werden können.

In der vorliegenden Mittheilung mag nun eine Reihe von derartigen Beziehungen der beiden Kategorien ermittelt werden, da dieselben nicht nur an sich interessant sind, sondern durch sie auch die entsprechenden Sätze der Zahlentheorie an Durchsichtigkeit gewinnen.

§. 1. Mit $\varkappa_{\alpha_1}, \varkappa_{\alpha_2}, \ldots, \varkappa_{\alpha_\beta}$ möge irgend eine der Combinationen β^{ter} Classe ohne Wiederholung der Zahlen $1, 2, \ldots, r$ bezeichnet werden, in welcher die Elemente der Grösse nach aufeinanderfolgen, und es werde die über alle derartigen Combinationen der bezüglichen Classe ausgedehnte Summe

$$\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}} f^{(\rho)}_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}}(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s}}) \,.$$

$$. f^{(\sigma)}_{\varkappa_{r-s+1}, \varkappa_{r-s+2}, \ldots, \varkappa_r}(a_{\varkappa_{r-s+1}}, a_{\varkappa_{r-s+2}}, \ldots, a_{\varkappa_r}) =$$

$$= \sum_{\varkappa_{r-s+1}, \varkappa_{r-s+2}, \ldots, \varkappa_r} f^{(\rho)}_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}}(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s}}) \,.$$

$$. f^{(\sigma)}_{\varkappa_{r-s+1}, \varkappa_{r-s+2}, \ldots, \varkappa_r}(a_{\varkappa_{r-s+1}}, a_{\varkappa_{r-s+2}}, \ldots, a_{\varkappa_r}),$$

in welcher $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_r$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, r$ ist und wo unter den Functionen $f^{(\rho)}_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}}(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots a_{\varkappa_{r-s}})$, $f^{(\sigma)}_{\varkappa_{r-s+1}, \varkappa_{r-s+2}, \ldots, \varkappa_r}(a_{\varkappa_{r-s+1}}, a_{\varkappa_{r-s+2}}, \ldots, a_{\varkappa_r})$ bei gleichen oberen und verschiedenen unteren Indices auch gleiche vorkommen können, mit $f^{(\rho, \sigma)}_{r-s}(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ bezeichnet und zur Abkürzung

$$\sum_{s=0}^{s=r} f^{(\rho, \sigma)}_{r-s}(a_1, a_2, \ldots, a_r) = F^{(\rho, \sigma)}(a_1, a_2, \ldots, a_r)$$

gesetzt.

Vereinigt man nun in der Summe

$$\sum_{s=0}^{s=r}\Big(\sum_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}} f^{(\sigma)}_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}}(a_{\varkappa_1},a_{\varkappa_2},\ldots,a_{\varkappa_{r-s}})\,. \\ .\,F^{(\rho,\sigma)}(a_{\varkappa_{r-s+1}},a_{\varkappa_{r-s+2}},\ldots,a_{\varkappa_r})\Big) =$$

$$=\sum_{s=0}^{s=r}\Big(\sum_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}} f^{(\sigma)}_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}}(a_{\varkappa_1},a_{\varkappa_2},\ldots,a_{\varkappa_{r-s}})\,. \\ .\sum_{t=0}^{t=s}\Big(\sum_{\varkappa_{r-s+1},\varkappa_{r-s+2},\ldots,\varkappa_{r-t}} f^{(\rho)}(a_{\varkappa_{r-s+1}},a_{\varkappa_{r-s+2}},\ldots,a_{\varkappa_{r-t}})\,. \\ .\,f^{(\sigma)}_{\varkappa_{r-t+1},\varkappa_{r-t+2},\ldots,\varkappa_r}(a_{\varkappa_{r-t+1}},a_{\varkappa_{r-t+2}},\ldots,a_{\varkappa_r})$$

alle Glieder, in denen $t=t_0$ und $\varkappa_{r-t_0+1},\varkappa_{r-t_0+2},\ldots,\varkappa_r$ das bestimmte Werthsystem $\varkappa^{(0)}_{r-t_0+1},\varkappa^{(0)}_{r-t_0+2},\ldots,\varkappa^{(0)}_r$ ist, so erhält man für das Aggregat derselben den Ausdruck

$$f^{(\sigma)}_{\varkappa^{(0)}_{r-t_0+1},\varkappa^{(0)}_{r-t_0+2},\ldots,\varkappa^{(0)}_r}(a_{\varkappa^{(0)}_{r-t_0+1}},a_{\varkappa^{(0)}_{r-t_0+2}},\ldots,a_{\varkappa^{(0)}_r})\,. \\ .\sum_{s=0}^{s=r-t_0}\Big(\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{r-t_0-s}} f^{(\sigma)}_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{r-t_0-s}}(a_{\lambda_1},a_{\lambda_2},\ldots,a_{\lambda_{r-t_0-s}})\,. \\ .\,f^{(\rho)}_{\lambda_{r-t_0-s+1},\lambda_{r-t_0-s+2},\ldots,\lambda_{r-t_0}}(a_{\lambda_{r-t_0-s+1}},a_{\lambda_{r-t_0-s+2}},\ldots,a_{r-t_0})\Big),$$

wo $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{r-t_0}$ eine Permutation der von $\varkappa^{(0)}_{r-t_0+1},\varkappa^{(0)}_{r-t_0+2},\ldots,\varkappa^{(0)}_r$ verschiedenen Elemente der Reihe $1,2,\ldots,r$ ist, oder also

$$f^{(\sigma)}_{\varkappa^{(0)}_{r-t_0+1},\varkappa^{(0)}_{r-t_0+2},\ldots,\varkappa^{(0)}_r}(a_{\varkappa^{(0)}_{r-t_0+1}},a_{\varkappa^{(0)}_{r-t_0+2}},\ldots,a_{\varkappa^{(0)}_r})\,. \\ .\,F^{(\rho,\sigma)}(a_{\lambda'_1},a_{\lambda'_2},\ldots,a_{\lambda'_{r-t_0}}),$$

wenn mit $\lambda'_1,\lambda'_2,\ldots,\lambda'_{r-t_0}$ die natürliche Anordnung der Zahlen $\lambda_\varkappa$ $(\varkappa=1,2,\ldots,r-t_0)$ bezeichnet wird. Da sich auf demselben Wege bei der Ordnung nach den Functionen

$$(f^{(\rho)}_{\varkappa_{r-t+1},\varkappa_{r-t+2},\ldots,\varkappa_r}(a_{\varkappa_{r-t+1}},a_{\varkappa_{r-t+2}},\ldots,a_{\varkappa_r})$$

der Ausdruck

$$f^{(\rho)}_{\varkappa^{(0)}_{r-t_0+1},\varkappa^{(0)}_{r-t_0+2},\ldots,\varkappa^{(0)}_r}(a_{\varkappa^{(0)}_{r-t_0+1}},a_{\varkappa^{(0)}_{r-t_0-2}},\ldots,a_{\varkappa^{(0)}_r})\,. \\ .\,F^{(\sigma,\sigma)}(a_{\lambda'_1},a_{\lambda'_2},\ldots,a_{\lambda'_{r-t_0}})$$

ergibt, so erhält man schliesslich die Gleichung

$$\sum_{s=0}^{s=r}\Bigg(\sum_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}} f^{(\tau)}_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}}(a_{\varkappa_1},a_{\varkappa_2},\ldots,a_{\varkappa_{r-s}})\,.\,F^{(\rho,\sigma)}(a_{\varkappa_{r-s+1}},a_{\varkappa_{r-s+2}},\ldots,a_{\varkappa_r})\Bigg)=$$

$$=\sum_{s=0}^{s=r}\Bigg(\sum_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}} f^{(\sigma)}_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}}(a_{\varkappa_1},a_{\varkappa_2},\ldots,a_{\varkappa_{r-s}})\,.\,F^{(\rho,\tau)}(a_{\varkappa_{r-s+1}},a_{\varkappa_{r-s+2}},\ldots,a_{\varkappa_r})\Bigg)=$$

$$=\sum_{s=0}^{s=r}\Bigg(\sum_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}} f^{(\rho)}_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}}(a_{\varkappa_1},a_{\varkappa_2},\ldots,a_{\varkappa_{r-s}})\,.\,F^{(\sigma,\tau)}(a_{\varkappa_{r-s+1}},a_{\varkappa_{r-s+2}},\ldots,a_{\varkappa_r})\Bigg), \qquad 1)$$

durch welche folgender Satz ausgesprochen wird:

Ist $\varkappa_{\alpha_1},\varkappa_{\alpha_2},\ldots,\varkappa_{\alpha_\beta}$ eine der Combinationen β^{ter} Classe ohne Wiederholung der Elemente $1,2,\ldots,r$, in welcher die Elemente in der natürlichen Ordnung aufeinanderfolgen und sind

$$f^{(\rho)}_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_\lambda}(a_{\varkappa_1},a_{\varkappa_2},\ldots,a_{\varkappa_\lambda}),\ f^{(\sigma)}_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_\lambda}(a_{\varkappa_1},a_{\varkappa_2},\ldots,a_{\varkappa_\lambda}),$$
$$f^{(\tau)}_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_\lambda}(a_{\varkappa_1},a_{\varkappa_2},\ldots,a_{\varkappa_\lambda})$$

willkürliche Functionen von den angeführten λ der Grössen $a_1,a_2,\ldots,a_r$, von denen einige oder auch alle zu demselben oberen Index gehörigen gleich sein können, so ist die Summe

$$\sum_{s=0}^{s=r}\Bigg(\sum_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}} f^{(\rho)}_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}}(a_{\varkappa_1},a_{\varkappa_2},\ldots,a_{\varkappa_{r-s}})\,.\,\Bigg(\sum_{t=0}^{t=s}\Bigg(\sum_{\varkappa_{r-s+1},\varkappa_{r-s+2},\ldots,\varkappa_{r-t}} f^{(\rho)}_{\varkappa_{r-s+1},\varkappa_{r-s+2},\ldots,\varkappa_{r-t}}(a_{\varkappa_{r-s+1}},a_{\varkappa_{r-s+2}},\ldots,a_{\varkappa_{r-t}})\,.\,f^{(\tau)}_{\varkappa_{r-t+1},\varkappa_{r-t+2},\ldots,\varkappa_r}(a_{\varkappa_{r-t+1}},a_{\varkappa_{r-t+2}},\ldots,a_{\varkappa_r})\Bigg)\Bigg)\Bigg),$$

in welcher die auf die Zahlen $\varkappa_\lambda$ bezüglichen Summationen über alle genannten Combinationen der bezüglichen Classe

auszudehnen sind und $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_r$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, r$ ist, eine symmetrische Function von ρ, σ, τ.

Man erkennt sofort, dass man auf demselben Wege auch allgemein zeigen kann, dass

$$\sum_{s_1=0}^{s_1=r}\Bigg(\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s_1}} f^{(\rho_1)}_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s_1}}(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s_1}}) \cdot$$

$$\cdot\Bigg(\sum_{s_2=0}^{s_2=s_1}\Bigg(\sum_{\varkappa_{r-s_1+1}, \varkappa_{r-s_1+2}, \ldots, \varkappa_{r-s_2}} f^{(\rho_2)}_{\varkappa_{r-s_1+1}, \varkappa_{r-s_1+2}, \ldots, \varkappa_{r-s_2}}(a_{\varkappa_{r-s_1+1}}, a_{\varkappa_{r-s_1+2}}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s_2}}) \cdot$$

$$\cdot\Bigg(\sum_{s_3=0}^{s_3=s_2}\Bigg(\sum_{\varkappa_{r-s_2+1}, \varkappa_{r-s_2+2}, \ldots, \varkappa_{r-s_3}} f^{(\rho_3)}_{\varkappa_{r-s_2+1}, \varkappa_{r-s_2+2}, \ldots, \varkappa_{r-s_3}}(a_{\varkappa_{r-s_2+1}}, a_{\varkappa_{r-s_2+2}}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s_3}}) \ldots$$

$$\ldots\Bigg(\sum_{s_{\tau-1}=0}^{s_{\tau-1}=s_{\tau-2}}\Bigg(\sum_{\varkappa_{r-s_{\tau-2}+1}, \varkappa_{r-s_{\tau-2}+2}, \ldots, \varkappa_{r-s_{\tau-1}}}$$

$$f^{(\rho_{\tau-1})}(a_{\varkappa_{r-s_{\tau-2}+1}}, a_{\varkappa_{r-s_{\tau-2}+2}}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s_{\tau+1}}}) f^{(\rho_\tau)}(a_{\varkappa_{r-s_{\tau-1}+1}}, a_{\varkappa_{r-s_{\tau-1}+2}}, \ldots, a_{\varkappa_r})\Bigg)\Bigg)\ldots\Bigg)\Bigg)\Bigg)$$

eine symmetrische Function von $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_\tau$ ist.

Die in den vorstehenden Zeilen abgeleitete allgemeine Formel soll nun auf einige besonders interessante specielle Fälle angewendet werden.

α) Die Function $\mu(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_\lambda})$ sei gleich $+1$ oder -1, je nachdem die Anzahl λ der Argumente gerade oder ungerade ist. Aus dieser Definition folgen sofort die Beziehungen:

$$\sum_{s=0}^{s=r}\left(\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}} \mu(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s}})\right) = \sum_{s=0}^{s=r}(-1)^{r-s}\binom{r}{r-s}$$

$$= \begin{cases} 1 & (r=0) \\ 0 & (r>0) \end{cases}$$

$$\sum_{s=0}^{s=r}\left(\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}} \mu(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s}})\,\mu(a_{\varkappa_{r-s+1}}, a_{\varkappa_{r-s+2}}, \ldots, a_{\varkappa_r})\right) =$$

$$= (-2)^r$$

und daher folgt aus I) der specielle Satz:

Ist $\varkappa_{\alpha_1}, \varkappa_{\alpha_2}, \ldots, \varkappa_{\alpha_\beta}$ irgend eine der Combinationen β^{ter} Classe ohne Wiederholung der Elemente $1, 2, \ldots, r$, in welcher die Zahlen in der natürlichen Ordnung aufeinanderfolgen und sind $f_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\lambda}(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_\lambda})$ willkürliche Functionen von den angeführten λ unter den Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_r$, welche zum Theile oder sämmtlich gleich sein können, setzt man ferner

$$\sum_{s=0}^{s=r}\left(\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}} f_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}}(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s}})\right) = F(a_1, a_2, \ldots, a_r)$$

$$\sum_{s=0}^{s=r}\left(\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}} (-1)^s f_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}}(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s}})\right) =$$

$$= \bar{F}(a_1, a_2, \ldots, a_r),$$

wo die auf die Zahlen $\varkappa_\lambda$ bezüglichen Summationen über alle Combinationen $(r-s)^{\text{ter}}$ Classe der genannten Art auszudehnen sind, so bestehen die Relationen

$$f_{1,2,\ldots,r}(a_1, a_2, \ldots, a_r) = \sum_{s=0}^{s=r}\left(\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}} (-1)^s \right.\,.$$

$$\left. .\, F(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s}})\right) = \sum_{s=0}^{s=r}\left(\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}} \bar{F}(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s}})\right)$$

$$\sum_{s=0}^{s=r}\left(\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}} (-2)^s f_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}}(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s}})\right) =$$

$$= \sum_{s=0}^{s=r} \left(\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}} (-1)^s \overline{F}(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s}}) \right).$$

Der erste Theil der vorletzten Relation ist die von den nicht unumgänglich nothwendigen Voraussetzungen befreite Baker'sche Formel.

β) Es sei

$$\omega(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_\lambda}) = \varkappa^\lambda,$$

alsdann wird

$$\sum_{s=0}^{s=r} \left(\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}} \omega(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s}}) \right) = (\varkappa + 1)^r$$

$$\sum_{s=0}^{s=r} \left(\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}} \omega(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s}}) \, \mu(a_{\varkappa_{r-s+1}}, a_{\varkappa_{r-s+2}}, \ldots, a_{\varkappa_r}) \right) =$$
$$= (\varkappa - 1)^r$$

und daher folgt aus I) das specielle Theorem:

Ist $\varkappa_{\alpha_1}, \varkappa_{\alpha_2}, \ldots, \varkappa_{\alpha_\beta}$ irgend eine der Combinationen β^{ter} Classe ohne Wiederholung der Elemente $1, 2, \ldots, r$, in welcher die Zahlen in der natürlichen Ordnung aufeinanderfolgen, und sind $f_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\lambda}(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_\lambda})$ willkürliche Functionen von den angeführten λ unter den Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_r$, welche zum Theile oder sämmtlich gleich sein können, setzt man ferner

$$\sum_{s=0}^{s=r} \left(\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}} f_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}}(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s}}) \right) = F(a_1, a_2, \ldots, a_r)$$

$$\sum_{s=0}^{s=r} \left(\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}} (-1)^s f_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}}(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s}}) \right) =$$
$$= \overline{F}(a_1, a_2, \ldots, a_r)$$

$$\sum_{s=0}^{s=r} \left(\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}} \varkappa^s f_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}}(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s}}) \right) =$$
$$= F_1(a_1, a_2, \ldots, a_r)$$

wo die auf die Zahlen $\varkappa_\lambda$ bezüglichen Summationen über alle Combinationen $(r-s)^{\text{ter}}$ Classe der genannten Art auszudehnen sind, so bestehen die Relationen

$$\sum_{s=0}^{s=r}\left(\sum_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}}(\varkappa+1)^s f_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}}(a_{\varkappa_1},a_{\varkappa_2},\ldots,a_{\varkappa_{r-s}})\right)=$$

$$=\sum_{s=0}^{s=r}\left(\sum_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}}\varkappa^s F(a_{\varkappa_1},a_{\varkappa_2},\ldots,a_{\varkappa_{r-s}})\right)=$$

$$=\sum_{s=0}^{s=r}\left(\sum_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}}F_1(a_{\varkappa_1},a_{\varkappa_2},\ldots,a_{\varkappa_{r-s}})\right)$$

$$\sum_{s=0}^{s=r}\left(\sum_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}}(\varkappa-1)^s f_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}}(a_{\varkappa_1},a_{\varkappa_2},\ldots,a_{\varkappa_{r-s}})\right)=$$

$$=\sum_{s=0}^{s=r}\varkappa^s\left(\sum_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}}\bar{F}(a_{\varkappa_1},a_{\varkappa_2},\ldots,a_{\varkappa_{r-s}})\right)=$$

$$=\sum_{s=0}^{s=r}(-1)^s\left(\sum_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}}F_1(a_{\varkappa_1},a_{\varkappa_2},\ldots,a_{\varkappa_{r-s}})\right).$$

§. 2. Die willkürliche Function $f(a_1^{\nu_1}, a_2^{\nu_2}, \ldots, a_r^{\nu_r})$ der r Grössen $a_1^{\nu_1}, a_2^{\nu_2}, \ldots, a_r^{\nu_r}$ möge kurz mit $f(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$ bezeichnet werden; es seien ferner die ganzen Zahlen

$\nu_\lambda = \rho_\lambda \alpha + \varepsilon_\lambda$ $(0 \leqq \varepsilon_\lambda \leqq \alpha - 1;\ \lambda = 1, 2, \ldots, r;\ \alpha$ ganzzahlig, positiv)

und es werde

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r=0}^{\lambda_1=\rho_1,\lambda_2=\rho_2,\ldots,\lambda_r=\rho_r} f^{(\rho)}_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r).$$

$$f^{(\sigma)}_{\rho_1-\lambda_1\alpha,\rho_2-\lambda_2\alpha,\ldots,\rho_r-\lambda_r\alpha}(\nu_1-\lambda_1\alpha,\nu_2-\lambda_2\alpha,\ldots,\nu_r-\lambda_r\alpha)$$

$$=F_\alpha^{(\rho,\sigma)}(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_r)$$

gesetzt, wo $f^{(\rho)}_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)$, $f^{(\sigma)}_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)$ und $f^{(\tau)}_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)$, welche Functionen sofort benützt werden sollen, willkürliche Functionen der Grössen $a_1^{\lambda_1}, a_2^{\lambda_2}, \ldots, a_r^{\lambda_r}$ vorstellen, von denen selbstverständlich mehrere oder alle zu denselben oberen und verschiedenen unteren Indexsystemen gehörige gleich sein können.

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \rho_1, \lambda_2 = \rho_2, \ldots, \lambda_r = \rho_r} f^{(\tau)}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)\, F^{(\rho, \sigma)}_{\alpha}(\nu_1 - \lambda_1\alpha, \nu_2 - \lambda_2\alpha, \ldots, \nu_r - \lambda_r\alpha) =$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r;\, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r = 0}^{\lambda_1 = \rho_1, \lambda_2 = \rho_2, \ldots, \lambda_r = \rho_r;\, \mu_1 = \rho_1 - \lambda_1, \mu_2 = \rho_2 - \lambda_2, \ldots, \mu_r = \rho_r - \lambda_r} f^{(\tau)}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)\, f^{(\rho)}_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r)\,.$$

$$. f^{(\rho)}_{\nu_1 - (\lambda_1 + \mu_1)\alpha, \nu_2 - (\lambda_2 + \mu_2)\alpha, \ldots, \nu_r - (\lambda_r + \mu_r)\alpha}(\nu_1 - (\lambda_1 + \mu_1)\alpha, \nu_2 - (\lambda_2 + \mu_2)\alpha, \ldots, \nu_r - (\lambda_r + \mu_r)\alpha) \qquad 1)$$

alle Glieder, in denen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ das bestimmte Werthsystem $\mu_1^{(0)}, \mu_2^{(0)}, \ldots, \mu_r^{(0)}$ ist, so erhält man für das Aggregat derselben den Ausdruck

$$f^{(\rho)}_{\mu_1^{(0)}, \mu_2^{(0)}, \ldots, \mu_r^{(0)}}(\mu_1^{(0)}, \mu_2^{(0)}, \ldots, \mu_r^{(0)}) \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \rho_1 - \mu_1^{(0)}, \lambda_2 = \rho_2 - \mu_2^{(0)}, \ldots, \lambda_r = \rho_r - \mu_r^{(0)}} f^{(\tau)}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)\,.$$

$$. f^{(\sigma)}_{\nu_1 - (\lambda_1 + \mu_1^{(0)})\alpha, \nu_2 - (\lambda_2 + \mu_2^{(0)})\alpha, \ldots, \nu_r - (\lambda_r + \mu_r^{(0)})\alpha}(\nu_1 - (\lambda_1 + \mu_1^{(0)})\alpha, \nu_2 - (\lambda_2 + \mu_2^{(0)})\alpha, \ldots, \nu_r - (\lambda_r + \mu_r^{(0)})\alpha) =$$

$$= f^{(\rho)}_{\mu_1^{(0)}, \mu_2^{(0)}, \ldots, \mu_r^{(0)}}(\mu_1^{(0)}, \mu_2^{(0)}, \ldots, \mu_r^{(0)})\, F^{(\tau, \sigma)}_{\alpha}(\nu_1 - \mu_1^{(0)}\alpha, \nu_2 - \mu_2^{(0)}\alpha, \ldots, \nu_r - \mu_r^{(0)}\alpha)$$

und daher hat man die Relation

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \rho_1, \lambda_2 = \rho_2, \ldots, \lambda_r = \rho_r} f^{(\tau)}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)\, F^{(\rho, \sigma)}_{\alpha}(\nu_1 - \lambda_1\alpha, \nu_2 - \lambda_2\alpha, \ldots, \nu_r - \lambda_r\alpha) =$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \rho_1, \lambda_2 = \rho_2, \ldots, \lambda_r = \rho_r} f^{(\rho)}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)\, F^{(\tau, \sigma)}_{\alpha}(\nu_1 - \lambda_1\alpha, \nu_2 - \lambda_2\alpha, \ldots, \nu_r - \lambda_r\alpha), \qquad II)$$

welche zeigt, dass die auf der linken Seite derselben stehende Summe eine symmetrische Function von ρ und τ ist.

Vereinigt man ferner in 1) alle Glieder, in denen
$\lambda_2+\mu_2, \ldots, \lambda_r+\mu_r$ das bestimmte Werthsystem $\rho_1-\beta_1^{(0)}$,
$\ldots, \rho_r-\beta_r^{(0)}$ ist, so ergibt sich für deren Aggregat der A

$$f^{(\sigma)}_{\beta_1^{(0)}\alpha+\varepsilon_1, \beta_2^{(0)}\alpha+\varepsilon_2, \ldots, \beta_r^{(0)}\alpha+\varepsilon_r}(\beta_1^{(0)}\alpha+\varepsilon_1, \beta_2^{(0)}\alpha+\varepsilon_2, \ldots, \beta_r^{(0)}\alpha+\varepsilon_r$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r=0}^{\lambda_1=\rho_1-\beta_1^{(0)}, \lambda_2=\rho_2-\beta_2^{(0)}, \ldots, \lambda_r=\rho_r-\beta_r^{(0)}} f^{(\tau)}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2,$$

$$. f^{(\rho)}_{\rho_1-\beta_1^{(0)}-\lambda_1, \rho_2-\beta_2^{(0)}-\lambda_2, \ldots, \rho_r-\beta_r^{(0)}-\lambda_r}(\rho_1-\beta_1^{(0)}-\lambda_1, \rho_2-\beta_2^{(0)}-\lambda_2, \ldots, \rho$$

$$= f^{(\sigma)}_{\beta_1^{(0)}\alpha+\varepsilon_1, \beta_2^{(0)}\alpha+\varepsilon_2, \ldots, \beta_r^{(0)}\alpha+\varepsilon_r}(\beta_1^{(0)}\alpha+\varepsilon_1, \beta_2^{(0)}\alpha+\varepsilon_2, \ldots, \beta_r^{(0)}$$

$$. F_1^{(\tau,\rho)}(\rho_1-\beta_1^{(0)}, \rho_2-\beta_2^{(0)}, \ldots,$$

und daher hat man die Relation

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r=0}^{\lambda_1=\rho_1, \lambda_2=\rho_2, \ldots, \lambda_r=\rho_r} f^{(\tau)}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r).$$

$$. F_\alpha^{(\rho,\sigma)}(\nu_1-\lambda_1\alpha, \nu_2-\lambda_2\alpha, \ldots, \nu_r-$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots}^{\lambda_1=\rho_1, \lambda_2=\rho}$$

$$f^{(\sigma)}_{\alpha\lambda_1+\varepsilon_1, \alpha\lambda_2+\varepsilon_2, \ldots, \alpha\lambda_r+\varepsilon_r}(\alpha\lambda_1+\varepsilon_1, \alpha\lambda_2+\varepsilon_2, \ldots,$$

$$. F_1^{(\tau,\rho)}(\rho_1-\lambda_1, \rho_2-\lambda_2, \ldots, \rho_r-\lambda$$

Ist speciell $\alpha = 1$, so hat man das Theorem:

Sind $f^{(\rho)}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(a_1^{\lambda_1}, a_2^{\lambda_2}, \ldots, a_r^{\lambda_r})$, $f^{(\sigma)}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(a_1^{\lambda_1}, a_2^{\lambda_2},$
$f^{(\tau)}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(a_1^{\lambda_1}, a_2^{\lambda_2}, \ldots, a_r^{\lambda_r})$ $(\lambda_\varkappa = 1, 2, \ldots, \nu_\varkappa;\ \varkappa = 1, 2, \ldots$
kürliche Functionen der Grössen $a_1^{\lambda_1}, a_2^{\lambda_2}, \ldots, a_r^{\lambda_r}$, unt
auch mehrere oder alle zu demselben oberen und versc
unteren Indexsystemen gehörige gleich sein können, b
man ferner die Function $f_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(a_1^{\lambda_1}, a_2^{\lambda_2}, \ldots, a_r^{\lambda_r})$
$f_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ und setzt endlich

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r=0}^{\lambda_1=\nu_1, \lambda_2=\nu_2, \ldots, \lambda_r=\nu_r} f^{(\rho)}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r).$$

$$. f^{(\sigma)}_{\nu_1-\lambda_1, \nu_2-\lambda_2, \ldots, \nu_r-\lambda_r}(\nu_1-\lambda_1, \nu_2-\lambda_2, \ldots, \nu_r-\lambda_r) = F_1^{(\rho,\sigma)}(\nu$$

wo $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$ beliebige ganze positive Zahlen sind, so ist die Summe

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} f^{(\tau)}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \,.\, F_1^{(\rho, \sigma)}(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r)$$

eine symmetrische Function der Indices ρ, σ, τ.

Nimmt man speciell für $a_1, a_2, \ldots, a_r$ die Primtheiler $p_1, p_2, \ldots, p_r$ der ganzen Zahl $n = p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \ldots p_r^{\nu_r}$, sind ferner die Functionen $f^{(\rho)}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$, $f^{(\sigma)}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$, $f^{(\tau)}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ willkürliche Functionen des Productes $a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_r^{\lambda_r}$ und haben endlich alle Functionen mit demselben oberen Index bei beliebigem unteren Indexsystem denselben Werth $f^{(\rho)}(x)$, beziehungsweise $f^{(\sigma)}(x)$, beziehungsweise $f^{(\tau)}(x)$, so entsteht aus II) und III) die zahlentheoretische Relation

$$\sum_{n} f^{(\rho)}(\Delta_\alpha) \left(\sum_{\frac{n}{\Delta_\alpha^\alpha}} f^{(\sigma)}(\Delta'_\alpha) f^{(\tau)}\left(\frac{n}{\Delta_\alpha^\alpha \Delta'^\alpha_\alpha}\right) \right) =$$

$$= \sum_{n} f^{(\sigma)}(\Delta_\alpha) \left(\sum_{\frac{n}{\Delta_\alpha^\alpha}} f^{(\rho)}(\Delta'_\alpha) f^{(\tau)}\left(\frac{n}{\Delta_\alpha^\alpha \Delta'^\alpha_\alpha}\right) \right) =$$

$$= \sum_{n} f^{(\tau)}\left(\frac{n}{\Delta_\alpha^\alpha}\right) \left(\sum_{\Delta_\alpha} f^{(\rho)}(d) f^{(\sigma)}\left(\frac{\Delta_\alpha}{d}\right) \right),$$

in welcher die Summation nach Δ_α^α, beziehungsweise Δ'^α_α über alle Theiler der an das bezügliche Summenzeichen angehängten Zahl auszudehnen ist, welche α^{te} Potenzen sind, während die auf d bezügliche sich über alle Theiler von Δ_α erstreckt. Diese bemerkenswerthe Gleichung hat Herr Egorof[1] in einer im 16. Bande der Schriften der mathematischen Gesellschaft in Moskau enthaltenen zahlentheoretischen Abhandlung aus dem von den Herren Cesaro und Bugajef schon früher abgeleiteten speciellen Fall derselben

---

[1] Matematiczki Swornik, 16. Bd., S. 236—255. (In russischer Sprache.)

$$\sum_n f^{(\rho)}(d)\Big(\sum_{\frac{n}{d}} f^{(\sigma)}(d')f^{(\tau)}\Big(\frac{n}{d}\Big)\Big)=$$

$$=\sum_n f^{(\sigma)}(d)\Big(\sum_{\frac{n}{d}} f^{(\rho)}(d')f^{(\tau)}\Big(\frac{n}{d'}\Big)\Big)=$$

$$=\sum_n f^{(\tau)}(d)\Big(\sum_{\frac{n}{d}} f^{(\rho)}(d')f^{(\sigma)}\Big(\frac{n}{d}\Big)\Big),$$

wo die Summationen sich auf alle Theiler der an das betreffende Summenzeichen angehängten Zahl beziehen, ermittelt.

Die aufgestellten allgemeinen Formeln sollen nun auf einige interessante specielle Fälle angewendet werden.

α) Die Function $\mu(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$ der Grössen $a_1^{\nu_1}, a_2^{\nu_2}, \ldots, a_r^{\nu_r}$ habe den Werth 0, wenn auch nur einer der ganzzahligen, nicht negativen Exponenten $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$ grösser als 1 ist, und sie sei gleich $(-1)^{\bar{\omega}(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)}$ in allen anderen Fällen, wo $\bar{\omega}(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$ gleich der Anzahl derjenigen unter den Zahlen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$ ist, welche grösser als Null sind. Aus dieser Definition folgen sofort die Beziehungen

$$\mu(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\lambda-\kappa}, 0, 0, \ldots, 0, \nu_\lambda, \nu_{\lambda+1}, \ldots, \nu_r) =$$
$$= \mu(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\lambda-\kappa}, \nu_\lambda, \nu_{\lambda+1}, \ldots, \nu_r)$$
$$\mu(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r) = \mu(\nu_1)\mu(\nu_2)\ldots\mu(\nu_r)$$

und demnach ist die r-fache Summe

$$\mu_\alpha(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1=\rho_1, \lambda_2=\rho_2, \ldots, \lambda_r=\rho_r} \mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$$
$$= \prod_1^r {}_{\kappa} \{1 + \mu^{\eta_\kappa}(1)\},$$

wo η_κ gleich 0 oder 1 ist, je nachdem ρ_κ gleich Null oder grösser als Null ist; dieselbe hat also den Werth 0, wenn auch nur eine der Zahlen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$ $\alpha-1$ überschreitet, während sie in allen anderen Fällen gleich 1 ist. Nimmt man speciell $\alpha = 1$, so ersieht man, dass die Summe

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$$

stets gleich Null ist, ausser wenn sämmtliche Zahlen $\nu_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, r$) den Werth 0 haben, in welchem Falle sie gleich 1 wird. Die angegebene Definition der Function μ_α $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$ zeigt auch, dass

$$\mu_\alpha(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r) = \mu_\alpha(\nu_1)\mu_\alpha(\nu_2) \ldots \mu_\alpha(\nu_r)$$

ist.

Berücksichtigt man ferner, dass

$$\sum_{\lambda_\sigma = 0}^{\lambda_\sigma = \rho_\sigma} \mu(\nu_\sigma - \lambda_\sigma \alpha)$$

den Werth $+1$, -1 oder 0 besitzt, je nachdem ν_σ die Form $\rho_\sigma \alpha$ $\rho_\sigma \alpha + 1$ oder $\rho_\sigma \alpha + \varepsilon$ ($\varepsilon > 1$) hat, so erkennt man leicht, dass die durch die Summe

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \rho_1, \lambda_2 = \rho_2, \ldots, \lambda_r = \rho_r} \mu(\nu_1 - \lambda_1 \alpha, \nu_2 - \lambda_2 \alpha, \ldots, \nu_r - \lambda_r \alpha)$$

definirte Function $\lambda_\alpha(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$ gleich Null ist, wenn auch nur eine der Zahlen $\nu_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, r$) nach dem Modul α einer von 0 oder 1 verschiedenen Zahl congruent ist, und den Werth $(-1)^\tau$ in allen anderen Fällen hat, wenn τ die Anzahl der Zahlen $\nu_\varkappa$ von der zuletzt genannten Form ist. Hieraus folgt sofort, dass

$$\lambda_\alpha(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r) = \lambda_\alpha(\nu_1)\lambda_\alpha(\nu_2) \ldots \lambda_\alpha(\nu_r)$$

ist.

Setzt man nun in II) und III) speciell

$$f^{(2)}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) = 1;\ \mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \text{ (für jedes Werthsystem } \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r),$$

$$f^{(3)}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) = \mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r);\ 1,$$

so wird

$$F^{(\rho, 3)}_\alpha(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r) = \lambda_\alpha(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r);\ \mu_\alpha(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$$

und man erhält daher das Theorem:

Sind $f_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(a_1^{\lambda_1}, a_2^{\lambda_2}, \ldots, a_r^{\lambda_r})$ willkürliche Functionen der Grössen $a_1^{\lambda_1}, a_2^{\lambda_2}, \ldots, a_r^{\lambda_r}$, welche selbstverständlich auch zum Theile oder in ihrer Gesammtheit gleich sein können, bezeichnet man dieselben ferner zur Abkürzung mit $f_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ und setzt

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \sigma_1, \lambda_2 = \sigma_2, \ldots, \lambda_r = \sigma_r} f_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) = F(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r)$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \left[\frac{\sigma_1}{\alpha}\right], \lambda_2 = \left[\frac{\sigma_2}{\alpha}\right], \ldots, \lambda_r = \left[\frac{\sigma_r}{\alpha}\right]} f_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) .$$

$$. \mu(\sigma_1 - \lambda_1\alpha, \sigma_2 - \lambda_2\alpha, \ldots, \sigma_r - \lambda_r\alpha) = \bar{F}_\alpha(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r),$$

so bestehen die Relationen

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \rho_1, \lambda_2 = \rho_2, \ldots, \lambda_r = \rho_r} f_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) .$$

$$. \lambda_\alpha(\nu_1 - \lambda_1\alpha, \nu_2 - \lambda_2\alpha, \ldots, \nu_r - \lambda_r\alpha) =$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \rho_1, \lambda_2 = \rho_2, \ldots, \lambda_r = \rho_r} \bar{F}_\alpha(\nu_1 - \lambda_1\alpha, \nu_2 - \lambda_2\alpha, \ldots, \nu_r - \lambda_r\alpha) =$$

$$= \prod_{\lambda = 1}^{r} \mu(\varepsilon_\lambda) \, F(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r) \; (\nu_\lambda = \alpha\rho_\lambda + \varepsilon_\lambda).$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \rho_1, \lambda_2 = \rho_2, \ldots, \lambda_r = \rho_r} f_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) .$$

$$. \mu_\alpha(\nu_1 - \lambda_1\alpha, \nu_2 - \lambda_2\alpha, \ldots, \nu_r - \lambda_r\alpha) =$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \rho_1, \lambda_2 = \rho_2, \ldots, \lambda_r = \rho_r} \mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \, F(\nu_1 - \lambda_1\alpha, \nu_2 - \lambda_2\alpha, \ldots, \nu_r - \lambda_r\alpha) =$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \rho_1, \lambda_2 = \rho_2, \ldots, \lambda_r = \rho_r} \bar{F}_1(\rho_1 - \lambda_1, \rho_2 - \lambda_2, \ldots, \rho_r - \lambda_r),$$

und speciell für $\alpha = 1$

$${}_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r}(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r) =$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) F(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r) =$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \overline{F}_1(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r),$$

eine Gleichung, deren erster Theil das Analogon der Baker-schen Formel im Gebiete der Relationen zweiter Kategorie bildet.

β) Auf Grund der bisherigen Erörterungen hat man die Gleichungen

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)\, \mu(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r) =$$

$$= \prod_{\sigma=1}^{r} \sum_{\lambda_\sigma = 0}^{\lambda_\sigma = \nu_\sigma} \mu(\lambda_\sigma)\, \mu(\nu_\sigma - \lambda_\sigma),$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \lambda_\alpha(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) = \prod_{\sigma=1}^{r} \sum_{\lambda_\sigma = 0}^{\lambda_\sigma = \nu_\sigma} \lambda_\alpha(\lambda_\sigma),$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) .$$

$$. \mu_\alpha(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r) = \prod_{\sigma=1}^{r} \sum_{\lambda_\sigma = 0}^{\lambda_\sigma = \nu_\sigma} \mu(\lambda_\sigma)\, \mu_\alpha(\nu_\sigma - \lambda_\sigma),$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \rho_1, \lambda_2 = \rho_2, \ldots, \lambda_r = \rho_r} \mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) .$$

$$. \lambda_\alpha(\nu_1 - \lambda_1 \alpha, \nu_2 - \lambda_2 \alpha, \ldots, \nu_r - \lambda_r \alpha) = \prod_{\sigma=1}^{r} \sum_{\lambda_\sigma = 0}^{\lambda_\sigma = \rho_\sigma} \mu(\lambda_\sigma) \lambda_\alpha(\nu_\sigma - \lambda_\sigma \alpha),$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \mu_\alpha(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) .$$

$$. \lambda_\alpha(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r) = \prod_1^r \sum_{\lambda_\sigma = 0}^{\lambda_\sigma = \nu_\sigma} \mu_\alpha(\lambda_\sigma) \lambda_\alpha(\nu_\sigma - \lambda_\sigma),$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \rho_1, \lambda_2 = \rho_2, \ldots, \lambda_r = \rho_r} \mu_\alpha(\nu_1 - \lambda_1 \alpha, \nu_2 - \lambda_2 \alpha, \ldots, \nu_r - \lambda_r \alpha) =$$

$$= \prod_1^r \sum_{\lambda_\sigma = 0}^{\lambda_\sigma = \rho_\sigma} \mu_\alpha(\nu_\sigma - \lambda_\sigma \alpha).$$

Nun ist aber

$$\sum_{\lambda_\sigma = 0}^{\lambda_\sigma = \nu_\sigma} \mu(\lambda_\sigma) \mu(\nu_\sigma - \lambda_\sigma) = \begin{cases} 0 & (\nu_\sigma > 2) \\ 1 & (\nu_\sigma = 2, 0), \\ -2 & (\nu_\sigma = 1) \end{cases}$$

$$\sum_{\lambda_\sigma = 0}^{\lambda_\sigma = \nu_\sigma} \mu(\lambda_\sigma) \mu_\alpha(\nu_\sigma - \lambda_\sigma) = \mu(\rho_\sigma(\rho_\sigma - 1)\alpha + \varepsilon_\sigma + 1)$$

$$\sum_{\lambda_\sigma = 0}^{\lambda_\sigma = \nu_\sigma} \lambda_\alpha(\lambda_\sigma) = \begin{cases} 1 & (\nu_\sigma = \rho_\sigma \alpha) \\ 0 & (\nu_\sigma = \rho_\sigma \alpha + \varepsilon_\sigma, \ \varepsilon_\sigma > 0) \end{cases},$$

$$\sum_{\lambda_\sigma = 0}^{\lambda_\sigma = \rho_\sigma} \mu(\lambda_\sigma) \lambda_\alpha(\nu_\sigma - \lambda_\sigma \alpha) = \begin{cases} 0 & (\varepsilon_\sigma > 1) \\ (-1)^{\varepsilon_\sigma} \sum\limits_{\lambda_\sigma = 0}^{\lambda_\sigma = \rho_\sigma} \mu(\lambda_\sigma) & (\varepsilon_\sigma \leqq 1), \end{cases}$$

$$\sum_{\lambda_\sigma = 0}^{\lambda_\sigma = \nu_\sigma} \mu_\alpha(\lambda_\sigma) \lambda_\alpha(\nu_\sigma - \lambda_\sigma) = \begin{cases} \sum\limits_{\lambda_\sigma = 0}^{\lambda_\sigma = \varepsilon_\sigma} \lambda_\alpha(\lambda_\sigma) & (\nu_\sigma < \alpha) \\ \sum\limits_{\lambda_\sigma = (\rho_\sigma - 1)\alpha + \varepsilon_\sigma + 1}^{\lambda_\sigma = \rho_\sigma \alpha + \varepsilon_\sigma} \lambda_\alpha(\lambda\ ) & (\rho_\sigma \geqq 1) \end{cases}$$

und daher

$$\sum_{\lambda_\sigma = 0}^{\lambda_\sigma = \nu_\sigma} \mu_\alpha(\lambda_\sigma) \lambda_\alpha(\nu_\sigma - \lambda_\sigma) = \begin{cases} 0 & (\nu_\sigma > 0) \\ 1 & (\nu_\sigma = 0) \end{cases},$$

$$\sum_{\lambda_\sigma=0}^{\lambda_\sigma=\rho_\sigma} \mu_\alpha(\nu_\sigma-\lambda_\sigma\alpha) = \mu_\alpha(\varepsilon_\sigma),$$
$$= 1$$

und demnach hat man die Beziehungen

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1=\nu_1, \lambda_2=\nu_2, \ldots, \lambda_r=\nu_r} \mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)\,\mu(\nu_1-\lambda_1, \nu_2-\lambda_2, \ldots, \nu_r-\lambda_r) =$$
$$= \begin{cases} 0 \\ (-2)^\tau \end{cases},$$

je nachdem unter den Zahlen $\nu_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, r$) solche vorkommen, welche grösser als 2 sind oder nicht, wenn τ die Anzahl derjenigen unter den genannten Zahlen ist, welche den Werth 1 haben,

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1=\nu_1, \lambda_2=\nu_2, \ldots, \lambda_r=\nu_r} \lambda_\alpha(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases},$$

je nachdem sämmtliche Zahlen $\nu_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, r$) Vielfache von α sind oder nicht,

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1=\rho_1, \lambda_2=\rho_2, \ldots, \lambda_r=\rho_r} \mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)\,\lambda_\alpha(\nu_1-\lambda_1\alpha, \nu_2-\lambda_2\alpha, \ldots, \nu_r-\lambda_r\alpha) =$$
$$= \mu(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1=\nu_1, \lambda_2=\nu_2, \ldots, \lambda_r=\nu_r} \mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)\,\mu_\alpha(\nu_1-\lambda_1, \nu_2-\lambda_2, \ldots, \nu_r-\lambda_r) =$$
$$= \begin{cases} \mu(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r) \\ 0 \end{cases},$$

je nachdem sämmtliche Zahlen $\nu_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, r$) durch α theilbar sind oder nicht,

$(\nu_1-\lambda_1, \nu_2-\lambda_2, \ldots, \nu_r-\lambda_r) =$

$$= \qquad \sum_{\sigma=1}^{\sigma=r} \nu_\sigma > 0 \qquad ,$$

$\nu_\sigma = 0;\ \sigma = 1, 2, \ldots, r)$

$\ldots \nu_r-\lambda_r x) = 1.$

... der Reihe nach

$= \ldots \mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r);$

$\mu_x(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r);\ 1,$

$= \ldots \lambda_x(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r);$

$\lambda_x(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r);$

$\mu_x(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r),$

ein $\nu_x > 2$;

$x = 1, 2, \ldots, r$; τ Anzahl ... ν_x, welche gleich 1 sind);

$x = 1, 2, \ldots, r)$

$\mu(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r);$

$\varepsilon_x = 0;\ x = 1, 2, \ldots, r)$

$$\sum_{x=1}^{x=r} \varepsilon_x > 0 \qquad ;$$

$$\sum_{\sigma=1}^{\sigma=r} \nu_\sigma > 0 \qquad ;\ 1$$

$\nu_\sigma = 0;\ \sigma = 1, 2, \ldots, r)$

und daher hat man das Theorem:

Sind $f_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(a_1^{\lambda_1}, a_2^{\lambda_2}, \ldots, a_r^{\lambda_r})$ beliebige Functionen der willkürlichen Grössen $a_1^{\lambda_1}, a_2^{\lambda_2}, \ldots, a_r^{\lambda_r}$, welche selbstverständlich auch zum Theile oder in ihrer Gesammtheit gleich sein können, bezeichnet man dieselben ferner zur Abkürzung mit $f_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ und setzt

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \sigma_1, \lambda_2 = \sigma_2, \ldots, \lambda_r = \sigma_r} f_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) = F(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r),$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \left[\frac{\sigma_1}{\alpha}\right], \lambda_2 = \left[\frac{\sigma_2}{\alpha}\right], \ldots, \lambda_r = \left[\frac{\sigma_r}{\alpha}\right]} f_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \,.$$
$$. \mu(\sigma_1 - \lambda_1 \alpha, \sigma_2 - \lambda_2 \alpha, \ldots, \sigma_r - \lambda_r \alpha) = \bar{\bar{F}}_\alpha(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r),$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \left[\frac{\sigma_1}{\alpha}\right], \lambda_2 = \left[\frac{\sigma_2}{\alpha}\right], \ldots, \lambda_r = \left[\frac{\sigma_r}{\alpha}\right]} f_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \,.$$
$$. \mu_\beta(\sigma_1 - \lambda_1 \alpha, \sigma_2 - \lambda_2 \alpha, \ldots, \sigma_r - \lambda_r \alpha) = F_{\alpha, \beta}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r),$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \left[\frac{\sigma_1}{\alpha}\right], \lambda_2 = \left[\frac{\sigma_1}{\alpha}\right], \ldots, \lambda_r = \left[\frac{\sigma_r}{\alpha}\right]} f_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \,.$$
$$. \lambda_\beta(\sigma_1 - \lambda_1 \alpha, \sigma_2 - \lambda_2 \alpha, \ldots, \sigma_r - \lambda_r \alpha) = \bar{F}_{\alpha, \beta}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r),$$

so hat man die Beziehungen

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \varepsilon(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)(-2)^{\tau(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)} \,.$$
$$. f_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) =$$
$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \bar{F}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r),$$

wo $\tau(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ die Anzahl derjenigen Zahlen $\lambda_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, r)$ vorstellt, welche gleich 1 sind, und $\varepsilon(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ den Werth 0 oder 1 hat, je nachdem unter den genannten Zahlen $\lambda_\varkappa$ welche vorkommen, die 2 überschreiten oder nicht,

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \left[\frac{\nu_1}{\beta}\right], \lambda_2 = \left[\frac{\nu_2}{\beta}\right], \ldots, \lambda_r = \left[\frac{\nu_r}{\beta}\right]} f_{\beta\lambda_1, \beta\lambda_2, \ldots, \beta\lambda_r}(\beta\lambda_1, \beta\lambda_2, \ldots, \beta\lambda_r) =$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \lambda_\beta(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) F(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r) =$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \overline{F}_{1,\beta}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r).$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \left[\frac{\nu_1}{\beta}\right], \lambda_2 = \left[\frac{\nu_2}{\beta}\right], \ldots, \lambda_r = \left[\frac{\nu_r}{\beta}\right]}$$

$$f_{\nu_1 - \lambda_1\beta, \nu_2 - \lambda_2\beta, \ldots, \nu_r - \lambda_r\beta}(\nu_1 - \lambda_1\beta, \nu_2 - \lambda_2\beta, \ldots, \nu_r - \lambda_r\beta)\mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) =$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) F_{1,\beta}(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r) =$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \mu_\alpha(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) F(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r).$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \rho_1, \lambda_2 = \rho_2, \ldots, \lambda_r = \rho_r} f_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) .$$

$$. \mu(\nu_1 - \lambda_1\alpha, \nu_2 - \lambda_2\alpha, \ldots, \nu_r - \lambda_r\alpha) =$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \rho_1, \lambda_2 = \rho_2, \ldots, \lambda_r = \rho_r} \mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \overline{F}_{\alpha,\alpha}(\nu_1 - \lambda_1\alpha, \nu_2 - \lambda_2\alpha, \ldots, \nu_r - \lambda_r\alpha) =$$

$$= \prod_{\varkappa=1}^{r} \lambda_\alpha(\varepsilon_\varkappa) \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \rho_1, \lambda_2 = \rho_2, \ldots, \lambda_r = \rho_r} F(\rho_1 - \lambda_1, \rho_2 - \lambda_2, \ldots, \rho_r - \lambda_r).$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \rho_1, \lambda_2 = \rho_2, \ldots, \lambda_r = \rho_r} f_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) =$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \rho_1, \lambda_2 = \rho_2, \ldots, \lambda_r = \rho_r} F_{\alpha,\alpha}(\nu_1 - \lambda_1\alpha, \nu_2 - \lambda_2\alpha, \ldots, \nu_r - \lambda_r\alpha).$$

$$f_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_r}(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_r)=$$

$$=\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r=0}^{\lambda_1=\nu_1,\lambda_2=\nu_2,\ldots,\lambda_r=\nu_r}\mu_\alpha(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)\bar{F}_{1,\alpha}(\nu_1-\lambda_1,\nu_2-\lambda_2,\ldots,\nu_r-\lambda_r)=$$

$$=\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r=0}^{\lambda_1=\nu_1,\lambda_2=\nu_2,\ldots,\lambda_r=\nu_r}\lambda_\alpha(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)F_{1,\alpha}(\nu_1-\lambda_1,\nu_2-\lambda_2,\ldots,\nu_r-\lambda_r).$$

γ) Die Function $\alpha(a_1^{\nu_1}, a_2^{\nu_2},\ldots, a_r^{\nu_r})$ der willkürlichen Grössen $a_1^{\nu_1}, a_2^{\nu_2},\ldots, a_r^{\nu_r}$ habe den Werth 0, wenn entweder alle Exponenten $\nu_\varkappa(\varkappa=1,2,\ldots,r)$ gleich 0 sind, oder auch nur einer derselben grösser als 2 ist, oder endlich wenn mehr als zwei von ihnen die Einheit überschreiten, sie sei gleich $(-1)^{\bar{\omega}(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_r)}f(a_\varkappa)$, wenn $\nu_\varkappa=2$ und alle anderen Exponenten kleiner als 2 sind, und besitze endlich in allen anderen Fällen den Werth $(-1)^{\bar{\omega}(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_r)+1}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=\tau}f(a_{\varkappa_\sigma})$, wenn die Zahlen $\nu_{\varkappa_1},\nu_{\varkappa_2},\ldots,\nu_{\varkappa_\tau}$ gleich 1, die übrigen aber gleich Null sind.

Nach dieser Definition ist

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r=0}^{\lambda_1=\nu_1,\lambda_2=\nu_2,\ldots,\lambda_r=\nu_r}\alpha(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)=$$

$$=\sum_{\sigma=1}^{\sigma=\tau}f(a_{\varkappa_\sigma})\left\{1-\binom{\tau-1}{1}+\binom{\tau-1}{2}-\ldots+(-1)^{\tau-1}\right\}+$$

$$+\sum_{\rho=1}^{\rho=\beta}f(a_{\varkappa_\sigma})\left\{-1+\binom{\tau-\beta}{1}-\binom{\tau-\rho}{2}+\ldots-(-1)^{\tau-\beta}\right\},$$

wenn nur die Zahlen $\nu_{\varkappa_1},\nu_{\varkappa_2},\ldots,\nu_{\varkappa_\tau}$ grösser als Null sind und unter diesen $\nu_{\varkappa_1},\nu_{\varkappa_2},\ldots,\nu_{\varkappa_\beta}$ die Einheit überschreiten, und daher hat man die Relation

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r=0}^{\lambda_1=\nu_1,\lambda_2=\nu_2,\ldots,\lambda_r=\nu_r}\alpha(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)=\begin{cases}f(a_\varkappa) & (\nu_\varkappa=1,\nu_\lambda=0\quad\lambda\gtrless\varkappa)\\ 0 & \left(\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=r}\nu_\varkappa\gtrless 1\right)\end{cases}.$$

Setzt man nun in II) und III)

$$\alpha = 1$$

$$f^{(\rho)}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) = \alpha(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r),$$

$$f^{(\sigma)}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) = 1,$$

so wird

$$F^{(\rho,\sigma)}_{\alpha}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) = \begin{cases} f(a_\varkappa) & (\lambda_\varkappa = 1;\ \lambda_\rho = 0, \rho \gtrless \varkappa) \\ 0 & \left(\sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=r} \lambda_\varkappa \gtrless 1\right) \end{cases}$$

und daher hat man den Satz:

Sind $f_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(a_1^{\lambda_1}, a_2^{\lambda_2}, \ldots, a_r^{\lambda_r})$ beliebige Functionen der willkürlichen Grössen $a_1^{\lambda_1}, a_2^{\lambda_2}, \ldots, a_r^{\lambda_r}$, welche auch zum Theile oder insgesammt gleich sein können, bezeichnet man dieselben ferner zur Abkürzung mit $f_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ und setzt

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} f_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) = F(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} f_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) . \alpha(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r) = F_1(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r),$$

so besteht die Beziehung

$$f_{\nu_1 - 1, \nu_2, \ldots, \nu_r}(\nu_1 - 1, \nu_2, \ldots, \nu_r) f(a_1) + f_{\nu_1, \nu_2 - 1, \nu_3, \ldots, \nu_r}(\nu_1, \nu_2 - 1, \nu_3, \ldots, \nu_r) . f(a_2) + \ldots + f_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{r-1}, \nu_r - 1}(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{r-1}, \nu_r - 1) f(a_r) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \alpha(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) . F(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} F_1(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r).$$

δ) Man hat ferner

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \lambda(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) 2^{\tilde{\omega}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)} = \prod_1^r \sum_{\lambda_\sigma = 0}^{\lambda_\sigma = \nu_\sigma} \lambda(\lambda_\sigma) 2^{\tilde{\omega}(\lambda_\sigma)} \quad (\lambda(m) = \lambda_2(m))$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \lambda(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) 2^{\bar\omega(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r)} = \prod_1^r {}_\sigma \sum_{\lambda_\sigma = 0}^{\lambda_\sigma = \nu_\sigma} \lambda(\lambda_\sigma) 2^{\bar\omega(\nu_\sigma - \lambda_\sigma)}$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \lambda(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) 2^{\bar\omega(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) + \bar\omega(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r)} = \prod_1^r {}_\sigma \sum_{\lambda_\sigma = 0}^{\lambda_\sigma = \nu_\sigma} \lambda(\lambda_\sigma) 2^{\bar\omega(\lambda_\sigma) + \bar\omega(\nu_\sigma - \lambda_\sigma)}$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) 2^{\bar\omega(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r)} = \prod_1^r {}_\sigma \sum_{\lambda_\sigma = 0}^{\lambda_\sigma = \nu_\sigma} \mu(\lambda_\sigma) 2^{\bar\omega(\nu_\sigma - \lambda_\sigma)}$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \mu_2(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) . \lambda(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r) 2^{\bar\omega(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r)} = \prod_1^r {}_\sigma \sum_{\lambda_\sigma = 0}^{\lambda_\sigma = \nu_\sigma} \mu_2(\lambda_\sigma) \lambda(\nu_\sigma - \lambda_\sigma) 2^{\bar\omega(\lambda_\sigma + \nu_\sigma)}.$$

Nun ist aber

$$\sum_{\lambda_\sigma = 0}^{\lambda_\sigma = \nu_\sigma} \lambda(\lambda_\sigma) 2^{\bar\omega(\lambda_\sigma)} = (-1)^{\nu_\sigma}$$

$$\sum_{\lambda_\sigma = 0}^{\lambda_\sigma = \nu_\sigma} \lambda(\lambda_\sigma) 2^{\bar\omega(\nu_\sigma - \lambda_\sigma) + \bar\omega(\lambda_\sigma)} = \begin{cases} 0 & (\nu_\sigma > 0) \\ 1 & (\nu_\sigma = 0) \end{cases}$$

$$\sum_{\lambda_\sigma = 0}^{\lambda_\sigma = \nu_\sigma} \lambda(\lambda_\sigma) 2^{\bar\omega(\nu_\sigma - \lambda_\sigma)} = 1$$

$$\sum_{\lambda_\sigma = 0}^{\lambda_\sigma = \nu_\sigma} \mu(\lambda_\sigma) 2^{\bar\omega(\nu_\sigma - \lambda_\sigma)} = \mu_2(\nu_\sigma)$$

$$\sum_{\lambda_\sigma=0}^{\lambda_\sigma=\nu_\sigma} \mu_2(\lambda_\sigma)\,\lambda(\nu_\sigma-\lambda_\sigma)\,2^{\ddot{\omega}(\nu_\sigma-\lambda_\sigma)} = \mu(\nu_\sigma)$$

und demnach hat man die Beziehungen

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r=0}^{\lambda_1=\nu_1,\,\lambda_2=\nu_2,\ldots,\,\lambda_r=\nu_r} \lambda(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)\,2^{\ddot{\omega}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)} = \lambda(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_r)$$

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r=0}^{\lambda_1=\nu_1,\,\lambda_2=\nu_2,\ldots,\,\lambda_r=\nu_r} \lambda(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)\,2^{\ddot{\omega}(\nu_1-\lambda_1,\nu_2-\lambda_2,\ldots,\nu_r-\lambda_r)} = 1$$

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r=0}^{\lambda_1=\nu_1,\,\lambda_2=\nu_2,\ldots,\,\lambda_r=\nu_r} \lambda(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)\,2^{\ddot{\omega}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)+\ddot{\omega}(\nu_1-\lambda_1,\nu_2-\lambda_2,\ldots,\nu_r-\lambda_r)} =$$

$$= \begin{cases} 1 & \left(\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=r} \nu_\varkappa = 0\right) \\ 0 & \left(\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=r} \nu_\varkappa > 0\right) \end{cases}$$

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r=0}^{\lambda_1=\nu_1,\,\lambda_2=\nu_2,\ldots,\,\lambda_r=\nu_r} \mu(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)\,2^{\ddot{\omega}(\nu_1-\lambda_1,\nu_2-\lambda_2,\ldots,\nu_r-\lambda_r)} =$$

$$= \mu_2(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_r)$$

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r=0}^{\lambda_1=\nu_1,\,\lambda_2=\nu_2,\ldots,\,\lambda_r=\nu_r} \mu_2(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)\,.$$

$$.\,\lambda(\nu_1-\lambda_1,\nu_2-\lambda_2,\ldots,\nu_r-\lambda_r)\,2^{\ddot{\omega}(\nu_1-\lambda_1,\nu_2-\lambda_2,\ldots,\nu_r-\lambda_r)} = \mu(\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_r),$$

auf Grund deren man aus II) und III) das folgende specielle Theorem ableitet:

Sind $f_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r}(a_1^{\lambda_1}, a_2^{\lambda_2}, a_r^{\lambda_r})$ beliebige Functionen der willkürlichen Grössen $a_1^{\lambda_1}, a_2^{\lambda_2},\ldots, a_r^{\lambda_r}$, von denen mehrere oder auch alle zu verschiedenen Indexsystemen gehörige gleich sein können, bezeichnet man dieselben ferner zur Abkürzung mit $f_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)$ und setzt

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r=0}^{\lambda_1=\nu_1,\,\lambda_2=\nu_2,\ldots,\,\lambda_r=\nu_r} f_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r) = F(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_r)$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \lambda(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) . f_{\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r}(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r) = \bar{F}(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} 2^{\bar{\omega}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)} . f_{\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r}(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r) = F'(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \lambda(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) 2^{\bar{\omega}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)} . f_{\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r}(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r) = F_1(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) . f_{\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r}(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r) = F_2(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \mu_2(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) . f_{\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r}(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r) = F_3(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r),$$

so hat man die Relationen

$$\bar{F}(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} F_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) . \lambda(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r) 2^{\bar{\omega}(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r)} =$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} F_1(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$$

$$F(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \lambda(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) .$$

$$. F'(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} 2^{\ddot{\omega}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)} .$$

$$. \overline{F}(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r)$$

$$f_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r}(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} 2^{\ddot{\omega}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)} .$$

$$. F_1(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \lambda(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) .$$

$$. 2^{\ddot{\omega}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)} F'(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r)$$

$$F_3(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} 2^{\ddot{\omega}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)} .$$

$$. F_2(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \nu_r - \lambda_r) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) .$$

$$. F'(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r)$$

$$F_2(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \mu_2(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) .$$

$$. F_1(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \lambda(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) .$$

$$. 2^{\ddot{\omega}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)} F_3(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r) .$$

Zur Erklärung des täglichen Ganges der Windgeschwindigkeit

von

J. M. Pernter.

Die Erscheinung, um die es sich hier handelt, tritt nicht in der ganzen Atmosphäre in einheitlich gleicher Weise auf. Aus den Beobachtungen auf Berggipfeln wissen wir, dass dort das Maximum in den Nachtstunden, das Minimum um die Mittagszeit auftritt; in der Niederung hingegen ist gerade das Umgekehrte der Fall: das Maximum fällt auf die Mittagsstunden, das Minimum in die Nacht.

Die Erklärung, welche Köppen hiefür gegeben hat, ist bekannt.[1] Tagsüber steigt erwärmte Luft vom Erdboden in die Höhe und sinkt kalte aus den oberen Schichten herab. Diese Thatsache benützt Köppen in folgender Weise zur Erklärung der fraglichen Erscheinung. Die aufsteigende Luft besitzt infolge der Reibung, welche an der Erdoberfläche den horizontalen Strömungen hinderlich entgegentritt, eine beträchtlich geringere Geschwindigkeit als die Luft in höheren Schichten; sie muss daher, oben angekommen, durch den Einfluss ihres geringeren Bewegungsmomentes auf die allgemeine Bewegung der oberen Schichten verzögernd einwirken. Da dieses Aufsteigen von Luft der untersten Schichten gerade zur wärmsten Tageszeit am stärksten ist, so würde sich daraus das mittägige Minimum der Windgeschwindigkeit in der Höhe erklären. Umgekehrt sinkt rascher bewegte Luft als Ersatz in die tieferen Schichten hinab und wird durch ihr grösseres Bewegungsmoment beschleunigend auf die langsamer bewegten unteren Schichten einwirken.

[1] Vor ihm hat schon Espy diese Erscheinung auf dieselbe Weise erklärt.

So würde es sich erklären, dass, fast gleichzeitig mit dem Minimum in den Höhen, in den unteren Schichten das Maximum der Windgeschwindigkeit auftritt.

Die Grundlage der Espy-Köppen'schen Hypothese: die Thatsache aufsteigender erwärmter und niedersinkender kälterer Luft zur Zeit der Erwärmung der Erdoberfläche, ist sicher geeignet, als Ausgangspunkt für die Erklärung der fraglichen Erscheinung zu dienen. Allein der eigentliche erklärende Theil der Hypothese scheint mir die gewünschte Erklärung nicht zu liefern.

Es fragt sich vor Allem um die Grössenverhältnisse, und zwar: 1. um die Grösse der Verzögerung, welche in den thatsächlichen, beobachteten Windgeschwindigkeiten auftritt; 2. um die Höhe, bis zu welcher die Convectionsströme in der freien Atmosphäre hinaufreichen.

Der tägliche Gang der Windgeschwindigkeit auf Berggipfeln belehrt uns über die Grösse der Schwankung derselben tagsüber. Ich habe in der Abhandlung: »Die Windverhältnisse auf dem Sonnblick und einigen anderen Gipfelstationen« (Denkschriften der kaiserl. Akademie, Bd. LVIII, S. 303) den täglichen Gang für Pikes Peak, Sonnblick, Säntis, Obir zusammengestellt, und für den Eiffelthurm entnehme ich denselben, um gleichzeitige Werthe für Paris zu haben, aus der Meteorol. Zeitschrift, Bd. 25, S. 25; man kann daraus die Tagesamplituden erhalten. Die letzteren sind in Kilometern pro Stunde:

	Pikes Peak	Sonnblick	Säntis	Obir	Eiffelthurm
Max.	37·7	31·1	29·0	20·5	31·5
Min.	25·9	27·6	24·7	16·5	20·0
6^h a.	35·6	29·4	27·6	18·8	25·8 (5^h a. 27·0)
Mittel	32·0	29·7	27·3	18·2	25·7

Für Pic du Midi und Puy de Dôme standen mir 24stündige Beobachtungen nicht zur Verfügung, und überdies sind die Werthe nur aus der Schätzung der Windstärke zu entnehmen. Rechnet man die letzteren für das Minimum und für die Morgenstunden in Kilometer pro Stunde um, so erhält man:

Pic du Midi	7^h a.: 23·5,	Min.: 18·6
Puy de Dôme	6^h a.: 39·0,	Min.: 35·3

Wie ich mehrfach in der erwähnten Abhandlung darauf hingewiesen habe, sind die Angaben von Puy de Dôme ganz eigenthümlich und in jeder Beziehung auffallend; doch glaube ich, dass die Amplitude, wie sie hier angegeben, noch am ehesten vertrauenswürdig sein dürfte.

Die Frage stellt sich nun folgendermassen: Lässt sich die Grösse der Verminderung der Windgeschwindigkeit bis zum Minimum des täglichen Ganges als Wirkung der Verzögerung durch die aufsteigende erwärmte Luft erklären?

Die Vorgänge, welche hiebei in Betracht kommen, entziehen sich leider einer exacten Berechnung; allein wir können doch jedenfalls einen oberen Grenzwerth erhalten, der uns über die Möglichkeit oder Unmöglichkeit und über die Zulänglichkeit der obigen Erklärung entscheidende Auskunft gewährt.

Nehmen wir die für die Zulänglichkeit günstigsten extremsten Bedingungen an. An einem schönen heiteren Sommertage sei die Temperatur des Morgens unten 15° C. und in der Höhe des Eiffelthurmes ebenfalls 15° C., so dass die mittlere Temperatur dieser 300 *m* mächtigen Luftschichte auch 15° C. betrage. Zur Zeit der grössten Erwärmung sei die Temperatur unten auf 30° C., in der Höhe des Eiffelthurmes, in der freien Atmosphäre also, auf 24° C. gestiegen, so dass nun die mittlere Temperatur der 300 *m* mächtigen Luftschichte 27° C. beträgt. Über jedem Quadratmeter der Grundfläche ist dann ein Luftvolumen von $300 \times 0 \cdot 004 \times 12 = 14 \cdot 4\, m^3$ [1] in die obere (über 300 *m* gelegene) Schichte hinaufgeführt worden. Um dieses Volumen in Gewicht (Masse) auszudrücken, berechnen wir aus der Annahme eines Druckes von 758 *mm* und bei 30° C., einer Feuchtigkeit von 60%, also einem Dampfdrucke von 19 *mm*, für unten das specifische Gewicht zu 1·136; oben wird dann der Druck 732·4 *mm* sein und bei der Temperatur von 24° C., sowie dem Dampfdrucke von 19 *mm* das specifische Gewicht 1·123. Nehmen wir das Mittel hieraus als das specifische Gewicht der ganzen fraglichen Luftsäule, so stellen die obigen $14 \cdot 4\, m^3$ ein Gewicht (Masse) von 16·265 *kg* dar.

---

[1] $300\,\alpha(t_1 - t_2)$; α zu 0·004 genommen, um dem Wasserdampfe Rechnung zu tragen.

Diese Luftmasse strömt allmälig von 6^h a. bis 1^h p. in die über 300 *m* gelegene Schichte hinauf. Da aber bei diesem Aufströmen ein theilweises Herabsinken von Luft aus höheren Schichten gleichzeitig auftritt, so wollen wir dem dadurch Rechnung tragen, dass wir die extreme Annahme machen, dass etwa doppelt soviel Luft von unten hinaufströme, d. h. 32·5 *kg* oder 32500 *g*. Die Zeit, während welcher der aufsteigende Luftstrom dieselben wegführt, dauert wenigstens 6 Stunden, d. h. 21.600 Secunden. In der Secunde wird daher im Durchschnitte 1·5 *g* auf die Fläche eines Quadratmeters der Schichte in 300 *m* Höhe von unten zugeführt.

Man sieht sofort, dass diese geringe Masse langsamer bewegter Luft nur eine kleine Verzögerung der oberen schneller fliessenden Luft bewirken kann. Nehmen wir selbst an, dass alle Luft von unten mit der ausserordentlich geringen Geschwindigkeit behaftet heraufkomme, welche in Paris gleichzeitig mit den Beobachtungen am Eiffelthurme gemessen wurde; man fand für Paris: Maximum 11·5, Minimum 5·3; 6^h a. 5·9; Mittel 8·3 *km* pro Stunde. Theilen wir die Atmosphäre in lauter Schichten von einem Meter Mächtigkeit und suchen wir dann die Verzögerung zu berechnen, welche die Schichte in 300 *m* Höhe durch den Hinzutritt von 1·5 *g* unterer Luft von der Geschwindigkeit, wie sie in Paris gemessen wurde, erleidet.

Diese Berechnung wollen wir nach folgendem Beispiele ausführen. Denken wir uns einen Strom, dessen Geschwindigkeit bedeutend sein möge; die Ursache seiner Geschwindigkeit ist eine constante und unveränderliche, nämlich das Gefälle seines Stromlaufes. Dieser Strom habe einen (oder viele) Nebenfluss von beträchtlich geringerer Geschwindigkeit und kleinerer Wassermasse. Durch die Mischung der letzteren mit dem rascher fliessenden Wasser des Hauptstromes wird dessen Geschwindigkeit verringert. Bedeutet m_1 und m_2 die Wassermasse des Haupt- und des Nebenflusses, v_1 die Geschwindigkeit des ersteren, v_2 die Geschwindigkeit des letzteren in der Richtung des Hauptflusses, so wird die nach der Mischung resultirende Geschwindigkeit sein: $v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$. Da aber die Ursache der ursprünglichen Geschwindigkeit des Hauptstromes eine constante und

unveränderliche ist, so muss die Verzögerung durch den Zufluss in jedem Momente sich erneuern, um zu bewirken, dass die Geschwindigkeit constant von v_1 auf v herabgedrückt bleibe. Jede Unterbrechung im Zuflusse des Nebenflusses hätte zur Folge, dass die Geschwindigkeit des Hauptstromes wieder auf v_1 sich erhöhe. Ist aber der Zufluss continuirlich, so genügt es, das Product der pro Secunde zugeführten Menge und der Geschwindigkeit des Nebenflusses zum Producte der pro Secunde vom Hauptstrome vorbeigeführten Menge und seiner Geschwindigkeit zu addiren und durch die Summe dieser Mengen zu dividiren, um die durch die Mischung entstehende constante Verzögerung zu erhalten.

Die Anwendung auf unseren Fall liegt auf der Hand; nur in einem Punkte könnte ein Zweifel herrschen, nämlich in Bezug auf die Mächtigkeit der oberen Schichte, die in die Rechnung einzuführen ist. Wir haben zwar oben bemerkt, dass wir jede Schichte einen Meter mächtig annehmen, und ich halte dafür, dass es allerdings richtig wäre, bei unserer Rechnung diese Schichtenmächtigkeit einzuführen. Allein das würde auch für die Hypothese, deren Zulänglichkeit wir untersuchen, so ungünstig sein, dass sie sofort als unrichtig sich erweisen würde. Da ich aber überall die extremsten Bedingungen zu Gunsten der besagten Hypothese angenommen habe, will ich dies auch hier thun und die Mächtigkeit der oberen Schichte, mit welcher sich die aufsteigende Luft mischt, nur zu 1 *dm* annehmen; vielleicht scheint dies Manchen auch das Richtige.

Wir finden dann in 300 *m* Höhe nach den Druck- und Temperaturverhältnissen, die wir oben angegeben haben, die Dichte der Luft zu 1·123, folglich die Masse für den Quadratmeter Grundfläche und 1 *dm* Höhe (100 dm^3 = 100 *l* Luft) zu 112·3 *g*.

Die Geschwindigkeiten nehmen wir für 6^h a., was den wirklichen Verhältnissen besser entspricht als das Maximum, und für die untersuchte Hypothese günstigere Resultate liefern muss. Man könnte vielleicht das Tagesmittel nehmen, doch ist 6^h a. rationeller und weicht im Übrigen das Tagesmittel nicht allzusehr von 6^h a. ab; in unserem Falle ist jedenfalls 6^h a wieder für die Köppen'sche Hypothese günstiger als das Tagesmittel.

Die Geschwindigkeiten in Metern pro Secunde sind dann: $v_1 = 7 \cdot 1$ (25·8 *km* p. St.) und $v_2 = 1 \cdot 6$ (5·9 *km* p. St.). Die Masse m_2 ist 1·5 *g*, m_1 aber ist $7 \cdot 1 \times 112 \cdot 3 = 797 \cdot 3$ *g*. Hieraus ergibt sich $v = 7 \cdot 08$ m. p. s. Somit eine Verminderung der Geschwindigkeit $v_1 - v = 0 \cdot 02$ *m* p. s. oder 0·07 *km* p. St.

Nehmen wir aber an, dass die aufsteigende Luft zur Zeit der stärksten Convection die 10fache Masse, also 15 *g* durch jeden Quadratmeter führe. Wir erhalten dann $v = 7 \cdot 0$ und $v_1 - v = 0 \cdot 1$ m. p. s. oder 0·36 *km* p. St.

Sollte Jemand glauben, man dürfte die Mächtigkeit des oberen Hauptstromes nur zu 1 *cm* annehmen, so muss ich vorerst feststellen, dass ich dafür halte, selbst mit der Annahme von 1 *dm* viel zu weit gegangen zu sein. Denn der Convectionsstrom nach oben muss ja doch wohl in die Schichten eindringen, ja dieselben zum Theile durchdringen, soll er überhaupt in eine irgend nennenswerthe Höhe hinaufreichen. Mir ist es somit sicher, dass eigentlich jedenfalls eine Mächtigkeit von 1 *m* für die Rechnung anzunehmen ist. Wir sind also schon in obiger Rechnung viel zu weit gegangen, indem wir die Mächtigkeit auf 1 *dm* reducirten.

Doch selbst bei der ganz unzulässigen Annahme der Mächtigkeit von 1 *cm* und der übertriebenen Annahme der verzehnfachten Massenzufuhr von 15 *g* pro Secunde durch die Convection finden wir immer noch nur $v = 6 \cdot 0$ *m* p. s., also $v_1 - v = 1 \cdot 1$ *m* p. s. oder 4 *km* p. St., während unsere Tabelle im Eingange hiefür den Werth von $25 \cdot 8 - 20 \cdot 0 = 5 \cdot 8$ *km* p. St. ergibt.

Selbst die unzulässigsten Annahmen zu Gunsten der Köppen'schen Hypothese genügen somit nicht, die Thatsache, um die es sich handelt, zu erklären.

Wollte man nun die Rechnung für grössere Höhen weiterführen, so könnte man nicht mehr die Geschwindigkeit der untersten Schichten in die Berechnung für das v einführen. Wenn nämlich die Luft in der Höhe von 300 *m* im Durchschnitte nie unter 20 *km* p. St. Geschwindigkeit besitzt, so ist für die höheren Schichten beim Luftaustausche wenigstens diese Zahl als die horizontale Geschwindigkeit der aufsteigenden Luft einzuführen. Wir sehen nun aus der eingangs angeführten Tabelle, dass in der Höhe des Eiffelthurmes die Geschwindig-

keit des Windes nahe dieselbe ist wie auf dem Säntis (2500 *m*) und eine längere Beobachtungsreihe, die ich in der Arbeit: »Die Windverhältnisse auf dem Sonnblick etc.« mittheilte, ergibt eine fast völlige Gleichheit: Säntis 27·3, Eiffelthurm 27·1 *km* p. St. als Mittelwerth. Hieraus folgt, dass Luft von der Geschwindigkeit von 27·1 auf dem Eiffelthurme, wenn sie in die Höhe von 2500 *m* sich erhebt, wo eine Windgeschwindigkeit von 27·3 herrscht, eine Verminderung der Geschwindigkeit nicht herbeiführen kann. Wäre die letztere Geschwindigkeit auch in der freien Atmosphäre in 2500 *m* Höhe gemessen, so wäre der Schluss unausweichlich, dass die Köppen'sche Hypothese die tägliche Periode der Windgeschwindigkeit in grösseren Höhen schon gar nicht zu erklären vermag.

Unsere obige Berechnung und die letzteren Bemerkungen zusammengenommen dürften nun aber hinreichen, zu zeigen, dass die Köppen'sche Hypothese nicht im Stande ist, eine befriedigende Erklärung der Erscheinung der täglichen Periode der Windgeschwindigkeit auf Berggipfeln zu liefern.

Es wirft sich nun überdies die Frage auf, ob der aufsteigende Convectionsstrom überhaupt in genügend grosse Höhen in der freien Atmosphäre hinaufreicht, um die Ursache eines solchen Ganges der täglichen Windgeschwindigkeit sein zu können, wie er auf Berggipfeln auftritt.

Es ist leider bei Behandlung dieser Frage unsere Unkenntniss der Function, welche den Zusammenhang zwischen der Druckabnahme in der Atmosphäre, d. h. der Höhe und der Temperaturabnahme ausdrückt, ein Hinderniss, dass wir eine genaue Berechnung der Höhe, bis zu welcher der aufsteigende Convectionsstrom reicht, durchführen können. Ein Versuch, hiebei die Mendelejeff'sche Formel $\left(t = c+(t_0-c\frac{p}{p_0}\right)$ zu benützen, erwies die Untauglichkeit dieser Formel für unsere Zwecke. Es war bei der geringen Temperaturabnahme, welche in dieser Formel zum Ausdrucke kommt, vorauszusehen, dass mit derselben die Höhe des Convectionsstromes viel zu niedrig sich ergeben müsse — nur ein paar hundert Meter unter extrem günstigen Bedingungen. Es fehlt uns eine sichere Grundlage, auf welche wir eine begründete Annahme über das Temperatur-

gefälle mit der Höhe zur Zeit der mittäglichen Überhitzung der unteren Schichten stützen können.

Für uns handelt es sich nun um solche ganz heitere Tage, wo eine Trübung über den ausgedehnten Ebenen der Niederung nicht eintritt, der aufsteigende Luftstrom also keine Condensationen bildet, da ja gerade diese heiteren Tage die fragliche Schwankung in der Windgeschwindigkeit am deutlichsten zum Ausdrucke bringen. Rührt das mittägliche Minimum oben von dem Aufstiege der unteren Luft her, so muss letztere gerade an ganz heiteren Tagen in die verlangten Höhen aufsteigen. Wir könnten daher die Einbeziehung des Einflusses der Condensation auf die Höhe des Convectionssstromes umgehen. Allein auch dann stellen sich einer exacten Rechnung zu grosse Schwierigkeiten entgegen.

Eine angenäherte Rechnung lässt sich immerhin führen. Man kann nämlich leicht zeigen, dass, da die aufsteigende Luft in jener Höhe zur Ruhe kommen muss, in welcher sie die gleiche Dichte besitzt wie die umgebende Luft der freien Atmosphäre, diese Höhe dann erreicht ist, wenn die Temperatur des aufsteigenden Luftstromes gleich ist derjenigen in der umgebenden freien Atmosphäre. Sei ρ_1, t_1, p_1 Dichte, Temperatur und Luftdruck des Morgens, ρ_2, t_2, p_2 des Mittags; wir haben dann

$$\rho_1 = \frac{\rho_0}{p_0} p_1 (1 - \alpha t_1)$$

$$\rho_2 = \frac{\rho_0}{p_0} p_2 (1 - \alpha t_2)$$

und allgemein $\rho = \frac{\rho_0}{p_0} p (1 - \alpha t)$; daher

$$\rho = \frac{\rho_1}{p_1} p \frac{1 - \alpha t}{1 - \alpha t_1}.$$

Man kann nun t ausdrücken mit Hilfe der Temperaturabnahme in der ruhenden freien Atmosphäre des Morgens. Bedeutet β den Werth der Temperaturabnahme per 100 *m* und h die Höhe in Hunderten von Metern, so wird $t = t' - \beta_1 h$ und wir haben

$$\rho = \frac{\rho_1}{p_1} p \frac{1-\alpha(t'-\beta_1 h)}{1-\alpha t_1};$$

ebenso

$$\rho = \frac{\rho_2}{p_2} p \frac{1-\alpha(t''-\beta_2 h)}{1-\alpha t_2};$$

und durch Gleichsetzung

$$\frac{1-\alpha(t'-\beta_1 h)}{1-\alpha(t''-\beta_2 h)} = 1; \quad t'-\beta_1 h = t''-\beta_2 h.$$

Durch Auflösung des letzten Ausdruckes nach h könnten wir sofort die Höhe, bis zu welcher der Convectionsstrom reicht, erhalten, wenn wir von β_1 und β_2 sichere Kenntniss hätten.

Was β_2 betrifft, so ist dasselbe für unsere Voraussetzung, dass keine Condensation eintreten soll, gleich Eins. Allein über β_1 ist es in hohem Grade schwer, eine begründete Annahme zu machen. Im Allgemeinen nimmt man die Temperaturabnahme in der freien Atmosphäre zu 0·5° per 100 *m* an. Allein des Morgens an schönen heiteren Tagen, meist in einem Barometermaximum gelegen, wird jedenfalls eine beträchtlich geringere Temperaturabnahme obwalten, etwa 0·3—0·4° C. per 100 *m*.

Nehmen wir nun wieder unseren extremen Fall von früher: es herrsche des Morgens eine Temperatur von 15° C., des Mittags von 30°. Die unteren Luftschichten sollen sich nicht eher heben, als bis sie voll auf 30° C. erwärmt sind und dann mit einemmale aufsteigen. Herrscht dann in der freien Atmosphäre noch das Temperaturgefälle der Morgenstunden, so können wir 15° C. als Fusstemperatur nehmen und haben für $\beta_1 = 0{\cdot}5$

$$15-0{\cdot}5h = 30-h$$

$$15 = \frac{1}{2}h; \quad 30 = h,$$

somit eine Höhe von 3000 *m*.

Man beachte, dass wir diese Höhe nur durch Einführung ganz unerlaubt extrem günstiger Bedingungen erhalten haben, dass daher — ohne Condensation — diese Höhe vom Convectionsstrome nie erreicht werden wird. Um der Wirklichkeit

näher zu kommen, würde man wohl müssen bei einer Morgentemperatur von 15° C. eine stärkste Erwärmung auf höchstens 25° C. annehmen und für β_1 den Werth 0·4 setzen, wo man dann etwa 1700 *m* als die grösste Höhe dieses Convectionsstromes finden würde.

Allein auch diese Höhe dürfte in Wirklichkeit nur selten erreicht werden — soweit es sich um die freie Atmosphäre handelt. Der thatsächliche Verlauf ist ja ein ganz anderer als der eben angenommene. Die Luft der unteren Schichten bleibt nicht bis zur höchsten Erwärmung unten und steigt dann erst in die Höhe, sondern sie beginnt sofort aufzusteigen, sobald sie nur wenig erwärmt ist und ein ununterbrochenes Aufsteigen dünner Stromfäden von der untersten Schichte in die nächst höhere, von dieser dann, nachdem sie selbst ein wenig höher erwärmt ist, in die nächst höhere u. s. w., wird während der ganzen Dauer der Erwärmung sich abspielen; so kann die Convection nur langsam in immer höhere Schichten vordringen. In der Natur dieses Vorganges liegt es, dass die Höhe, welche die Convection thatsächlich erreicht, ganz beträchtlich hinter der oben unter übermässig einer grossen Höhe des Convectionsstromes günstigen, aber in der Natur nicht vorhandenen Bedingungen berechneten zurückbleibt. Wenn man die Höhe der Convection an ganz heiteren Tagen aus der Höhe beurtheilen darf, in welcher sich an anderen Tagen die Condensation zu bilden beginnt, so könnte man dieselbe auf etwa 1400 *m* im Maximum abschätzen; da dies bekanntlich die Höhe der Basis der Haufenwolken in unseren Breiten ist.

Dies gilt nun allerdings nur für die freie Atmosphäre. Auf Berggipfeln verhält es sich ganz anders. Hier bringen die Thalwinde die Luft von unten hinauf. An den Berglehnen strömt die Luft hinauf infolge der Unterschiede der Druckverhältnisse an denselben gegenüber der freien Atmosphäre in Verbindung mit dem durch die Erwärmung verursachten Auftriebe, wie dies Hann in vollendeter Weise erklärt hat. Hier reichen daher die Strömungen von unten als Thalwinde bis auf die Höhe der Gipfel, und es hängt die Intensität dieser Strömungen hauptsächlich von der Lage der Thäler und der Berglehnen ab. Dass die aufsteigende Luft an Berggipfeln höher hinaufreicht als in

der freien Atmosphäre, dafür geben uns die Wolkenbildungen an denselben deutlich Zeugniss. Wenn der ganze Himmel herrlich blau und ganz heiter bleibt den ganzen Tag über, bilden sich während der Zeit der Erwärmung über und auch an den Berggipfeln Haufenwolken, oft ganz leichte Cumuli, oft hoch aufgethürmte Berge von Cumuli, die dann nach dem Aufhören der aufsteigenden Strömung sich wieder auflösen. Dies spielt sich über und an Berggipfeln ab, während in der freien Atmosphäre jede Spur von Trübung fehlt.

Aus alledem glaube ich mit Recht auf das ernstlichste bezweifeln zu müssen, dass in der freien Atmosphäre der Convectionsstrom in eine irgend beträchtliche Höhe hinaufreicht.

Es wäre nun zwar, nachdem wir früher gezeigt hatten, dass selbst unter der Annahme eines aufsteigenden Stromes von grösserer Höhe das Minimum der Windgeschwindigkeit daraus nicht zu erklären ist, nicht absolut nothwendig gewesen, die Höhe des Convectionsstromes in der freien Atmosphäre zu erörtern; es schien mir aber zur Vollständigkeit und zum tieferen Einblicke in die thatsächlichen Vorgänge in der Atmosphäre, welche für diese Frage in Betracht kommen können, zu gehören, dass ich darauf einging.

Wenn nun auf diese Art, wie Köppen es sich zu denken scheint, das Aufsteigen erwärmter und Niedersinken kälterer Luft nicht geeignet ist, die Erklärung für den täglichen Gang der Windgeschwindigkeit der höheren Schichten der freien Atmosphäre zu geben, so gilt dasselbe, wenngleich in geringerem Masse, auch für den täglichen Gang der Windgeschwindigkeit an der Erdoberfläche. Hier wäre nur noch beizufügen, dass es zweifellos ist, dass viel weniger Luft herabsinkt als aufsteigt. Denn die Volumvermehrung der Luft der unteren Schichten infolge der Erwärmung bedeutet vor Allem ein Abgeben eines Theiles an die oberen Schichten, und da das Endresultat des Erwärmungsprocesses mit dieser Volumvermehrung schliesst, so wird jedenfalls beträchtlich mehr Luft nach oben abgegeben worden sein als herabgesunken ist.

Wenn nun aber die Köppen'sche Auffassung des Vorganges, wie durch diese eigenartige Convection das Minimum

der Windgeschwindigkeit in der Höhe und das Maximum in der Niederung zu Stande kommen soll, wohl offenbar zu verlassen sein wird, so folgt daraus noch nicht, dass die Convection überhaupt nicht die Ursache der zu erklärenden fraglichen Erscheinung sei. Ich halte vielmehr dafür, dass dieselbe allerdings als Ausgangspunkt für diese Erklärung zu dienen hat und werde nunmehr den Versuch machen, dieselbe mit Herbeiziehung eines Momentes zu geben, das bei der Convection, wie sie in der Natur thatsächlich sich abspielt, auftritt.

Bei der allmäligen Erwärmung der unteren Luftschichten bilden sich eine Unzahl von fadenförmigen Luftströmchen, welche in die nächst höhere Schichte emporsteigen; neben diesen sinkt — wie wohl nicht zu bezweifeln — auch Luft von der oberen Schichte herab. Dieser Vorgang pflanzt sich von Schichte zu Schichte nach oben fort und schliesslich wird eine Verbindung dieser Schichten hergestellt sein in der Weise, dass jede obere Schichte mit der unteren durch Strömchen aufsteigender Luft und dazwischen niedersinkender wie durch ganz dünne Klammern verbunden ist. Ich hebe hervor, dass man sich dies nicht für die ganze Höhe der Convection als ein System von aufsteigenden Strömchen und dazwischen niedersinkender Luft vorstellen darf, sondern von so vielen Systemen, als übereinander gelagerte Luftschichten gedacht werden müssen, welche allmälig im Laufe der Erwärmung mit in die Convection einbezogen werden.

Die Folge dieser Verklammerung der übereinanderliegenden Luftschichten wird das Auftreten einer beträchtlichen Reibung sein, welche vor der Entwickelung der Convection nicht bestanden hat. Es ist bekannt, dass die Reibung von Luft an Luft bei glatten Trennungsflächen so ganz belanglos ist, dass sie nicht in Betracht kommt. Anderseits aber haben Helmholtz und Oberbeck darauf hingewiesen, dass die Reibung sehr beträchtlich wird, wenn übereinanderfliessende Luftschichten von verschiedener Geschwindigkeit in irgendwelcher Weise ineinandergreifen. Dies ist besonders der Fall, wenn dieses Ineinandergreifen in der Weise geschieht, die wir eben beschrieben haben.

Wir wissen, dass man bei Behandlung der Bewegungsprobleme der Atmosphäre, sobald man wirkliche Verhältnisse zu

rechnen versucht, auf recht bedeutende Reibungscoëfficienten stösst, die geradezu überraschen.

Hierauf möchte ich nun die Erklärung des Minimums der Windgeschwindigkeit in den höheren Schichten und des gleichzeitigen Maximums an der Erdoberfläche zur Mittagszeit gründen. Es ist ja zweifellos eine nothwendige Folge der eben dargestellten Vorgänge bei der Convection im Laufe der Erwärmung, dass eine beträchtliche Reibung der Bewegung der höheren Schichten hindernd entgegenwirken wird. Dadurch wird eine Verminderung der Windgeschwindigkeit erzielt, welche zur Zeit der lebhaftesten Convection, d. h. etwa um die Zeit der grössten Erwärmung, das Minimum der Windgeschwindigkeit in den höheren Schichten herbeiführen wird.

Leider ist es bisher nicht gelungen, über die Grösse der Reibung, die auf diese Weise entsteht, sichere Angaben zu erhalten. Wir wissen nur, dass sie sehr bedeutend sein muss. Aus dem Vergleiche der theoretischen Werthe, welche bei Behandlung der allgemeinen Circulation der Atmosphäre unter Vernachlässigung der Reibung erhalten werden, mit den wirklich beobachteten Geschwindigkeiten ergibt sich, dass die infolge des Ineinandergreifens von Luftströmungen entstandene Reibung eine Herabdrückung der Geschwindigkeit um ein Drittel und mehr bewirkt. Wenn auch hiebei eine andere Art dieses Ineinandergreifens als die eben beschriebene eintreten dürfte, so wird es doch nicht mehr überraschen, wenn in unserem Falle eine Verminderung der Geschwindigkeit um etwa zwei Zehntel des ursprünglichen Werthes sich ergibt. So haben wir für den Eiffelthurm um 6^h a. die Geschwindigkeit von 25·8 *km* p. St. und das Minimum 20·0 *km* p. St., also eine Herabdrückung der Geschwindigkeit um 5·8 *km* p. St., d. h. um etwa 22 Procent. Setzt man die Reibung dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional, so würde dies für den Reibungscoëfficienten k, wenn wir die Geschwindigkeit in Metern pro Secunde ausdrücken

$$1 \cdot 6 = k \times (7 \cdot 1)^2; \quad k = 1 \cdot 6 : (7 \cdot 1)^2$$
$$k = 0 \cdot 03.$$

(Im absoluten Masse *cm* s. hätte man 0·0003 erhalten.)

Dieser grosse Werth für k stimmt ziemlich mit denjenigen überein, welche man, wie oben bemerkt, für die Reibung bei der allgemeinen Circulation der Atmosphäre aus den thatsächlich beobachteten Geschwindigkeiten der oberen Luftschichten erhält.

Das Minimum der Windgeschwindigkeit im täglichen Gange der oberen Luftschichten in der freien Atmosphäre (Eiffelthurm) dürfte sonach in obiger Weise seine volle Erklärung finden.

Was aber das Maximum der Windgeschwindigkeit gegen die Mittagsstunde an der Erdoberfläche betrifft, so erklärt sich dasselbe aus der gleichen Ursache ganz naturgemäss. Durch die Verbindung, welche die vielen Luftströmchen der Convection von Schichte zu Schichte herstellen, muss ebenso sehr, wie eine Verzögerung der rascher fliessenden oberen Luft, auch eine Vergrösserung der Geschwindigkeit der unteren Luftströmungen verursacht werden; denn die Luft der letzteren wird durch die hergestellte Verklammerung mit der oberen von dieser mit fortgerissen werden.

Dieses scheint mir somit die einfache und naturgemässe Erklärung des täglichen Ganges der Windgeschwindigkeit in der freien Atmosphäre, sowohl für die oberen Luftschichten als an der Erdoberfläche, zu sein. In der Nacht kommt nur das allgemeine Druckgefälle zur Wirkung und erzeugt eine bestimmte Windgeschwindigkeit in der freien Atmosphäre, welche an der Erdoberfläche, infolge der beträchtlichen Reibung an derselben, bedeutend herabgedrückt wird, je nach der Unebenheit der Bodenverhältnisse; zwischen den Luftschichten besteht nur die belanglose Reibung von Luft an Luft. Während der Nacht ändert sich daher die Geschwindigkeit fast gar nicht. Sobald die Erwärmung beginnt, sinkt oben, und zwar, je länger sie dauert, in immer höheren Schichten, die Geschwindigkeit und fällt rasch zum Minimum des Mittags herab, während sie unten zum Maximum anwächst, infolge des Mitreissens der unteren Luftschichten durch die oberen. Sobald die Convection aufhört, stellt sich sehr bald der erstere Zustand wieder her.

Nach dem, was ich als meine Ansicht über die Höhe des Convectionsstromes oben dargelegt habe, halte ich dafür, dass der tägliche Gang der Windgeschwindigkeit, wenigstens an

heiteren Tagen, so wie wir ihn noch auf dem Eiffelthurme vorfinden, nicht sonderlich hoch in die freie Atmosphäre hinaufreichen werde. Doch wird auch höher hinauf ein täglicher Gang der Windgeschwindigkeit vorhanden sein, aber ein ganz anderer. Ich habe in meiner schon citirten Arbeit über »die Windverhältnisse auf dem Sonnblick u. s. w.« versucht, zu zeigen, dass dieser Gang für die verschiedenen Windrichtungen ein verschiedener sein müsse, so dass die Ostwinde ihr Maximum des Morgens, die Südwinde des Mittags, die Westwinde des Abends haben sollten. Ich glaubte dies auch für die Berggipfel wahrscheinlich. Nach den weiter oben gegebenen Erörterungen muss ich letztere Ansicht als irrig bezeichnen. Auf Berggipfeln, wo die heraufströmenden Thalwinde, gerade auch an heiteren Tagen, die oben herrschenden Strömungen aus welcher Weltgegend immer stets um die Mittagsstunde am meisten schwächen, wird die Erscheinung derjenigen gleich oder ähnlich sein müssen, welche in geringeren Höhen der freien Atmosphäre, z. B. auf dem Eiffelthurme, infolge der Convection bestehen.

Über ein neues Verfahren zur Herstellung ultraviolettempfindlicher Platten

von

Victor Schumann in Leipzig.

Einleitung.

In einer früheren Untersuchung[1] habe ich das Spectrum elektrischer Entladungen weit über die bisherige Grenze des Ultravioletten (185·2 μμ) hinaus, bis in die Nähe der Wellenlänge 100 μμ verfolgt. Die Beobachtung geschah auf photographischem Wege, bis zur Wellenlänge 182 μμ mit Bromsilbergelatine, von hier bis zur Wellenlänge 100 μμ mit einer Platte, die ich für diesen Zweck nach einem neuen Verfahren präparirt hatte.

Die Strahlen jenseits der Wellenlänge 182 μμ bleiben allen bisher angewandten Beobachtungsmethoden der Spectroskopie gegenüber wirkungslos. Sie sind nur wahrnehmbar mit genannter Platte, mit Flussspathprisma und ebensolchen Linsen und mit evacuirtem Spectralapparat.

Das Herstellungsverfahren dieser Platte ist das Ergebniss einer noch nicht abgeschlossenen Untersuchung, die ich im ersten Theile der genannten Abhandlung[2] nur kurz erwähnt habe. Es liefert Plattenüberzüge von gewünschter Feinheit und Empfindlichkeit, Schichten, die für die neuen Strahlen empfindlicher sind als für das übrige Spectrum, und die aus diesem Grunde, wie ich später zeigen werde, ihrem Zweck in doppelter Beziehung entsprechen.

---

[1] »Über die Photographie der Lichtstrahlen kleinster Wellenlängen«, diese Sitzungsberichte, Bd. CII, Abth. II. a., 1893, S. 415—475, 625—694.

[2] Ebenda, S. 472—475.

Weniger befriedigt die neue Platte in anderer Hinsicht: sie krankt zur Zeit noch an grösseren und kleineren Oberflächenfehlern, die sich nur durch geeignete Belichtungsdauer und durch gewissenhafte Beobachtung bestimmter Vorsichtsmassregeln beim Hervorrufen des Bildes zurückhalten lassen. Sobald man aber diese Vorsicht ausser Acht lässt, entwickeln sich zahlreiche Flecke von verschiedener Intensität und Grösse, die das Bild überwuchern und ihm seine sonst so vorzügliche Schärfe nehmen. Dies die verbesserungsbedürftige Seite meines Verfahrens und zugleich der Hauptgrund, der mich bisher von dessen Veröffentlichung abgehalten hat. Zwar hoffe ich diesen Plattenfehler noch beseitigen zu können, doch wird, neueren Versuchen zufolge, dazu mehr Zeit erforderlich sein, als meine früheren Beobachtungen voraussetzen liessen.

Unter solchen Umständen könnte es kommen, dass die Freigabe meines Verfahrens, die nach meiner ursprünglichen Absicht nicht vor dessen Verbesserung geschehen sollte, in unbestimmte Ferne rückte, was mit dem Endzweck meiner Untersuchung, der Spectroskopie das neue Strahlengebiet möglichst bald zugänglich zu machen, nicht in Einklang stände.

Hierzu hat sich nun noch der folgende Umstand gesellt.

Der genannte Bericht über meine Untersuchungen der kleinsten Lichtwellen hat nach seinem Erscheinen in Fachkreisen eine so freundliche Aufnahme[1] gefunden, dass der Erforschung des neuen Strahlengebietes schon jetzt regere Betheiligung gesichert zu sein scheint. Dies gilt insonderheit von den Bestrebungen, die sich die Erweiterung unserer moleculartheoretischen Erkenntniss auf spectralem Wege zur Aufgabe gestellt haben. Es mag daran erinnert werden, dass die Vorarbeiten hierzu, die vorerst nur auf die Ermittlung eines gesetzmässigen Zusammenhanges zwischen den Linien eines Elementes und zwischen den Spectren verschiedener Elemente abzielen, bis jetzt einen umso gedeihlicheren Fortgang erkennen liessen, je mehr sie sich der bisherigen Grenze des Ultravioletten näherten. Je kürzer die Wellenlänge des betreffenden Beobachtungsgebietes war, um so markanter trat diese Gesetz-

[1] Chemical News, Vol. 68, No. 1757—1760, 1762, 1766 (1893).

mässigkeit zu Tage. Es lässt sich hiernach auch erwarten, dass das neue Strahlengebiet mit seinen ungleich kleineren Wellenlängen reiches Beobachtungsmaterial zur Vervollständigung, doch auch zur Verificirung der bisher gewonnenen Ergebnisse bieten werde, um so mehr, als die Untersuchung einer ganzen Reihe von Grundstoffen, die in der genannten Richtung bisher resultatlos verlief, auf diesen Theil des Spectrums allein angewiesen ist. Den Beobachtungen dieser Art dürfte die neue Platte schon vor ihrer Verbesserung ein willkommenes Hilfsmittel werden. Und diese sind es denn auch, die mich in erster Reihe veranlasst haben, meine ursprüngliche Absicht fallen zu lassen und mein Verfahren bereits jetzt der Öffentlichkeit zu übergeben.

Der nachstehende Bericht behandelt meine hierauf bezüglichen Arbeiten. Diese umfassen eine Reihe von Versuchen, die in Folge der nicht unbeträchtlichen Schwierigkeiten, denen die dazu erforderliche Aufnahme des Spectrums in gasverdünntem Raume anfänglich begegnete, grossen Aufwand an Zeit und Mühe verursacht haben. Ich habe mich darum in den Fällen, wo mir die Verificirung des ersten Ergebnisses entbehrlich schien, mit einmaliger Ausführung des betreffenden Versuches begnügt. Diese Ergebnisse sind selbstverständlich minderwerthig, und es wäre vielleicht besser, wenn ich sie mit Stillschweigen überginge. Mein Bericht wäre jedoch alsdann so lückenhaft ausgefallen, dass mir ihre Aufnahme in denselben immer noch als das kleinere von beiden Übeln erschien. Ich werde sie aber in der Folge passend kennzeichnen, damit der vielleicht zweifelhafte Werth des einen oder des anderen von ihnen nicht auf das Hauptergebniss der Untersuchung übertragen werden könne.

Spectrographische Vorarbeiten.

Das ultraviolette Spectrum war bisher bis zur Wellenlänge 185·2 μμ bekannt. Im Jahre 1890 gelang es mir auf photographischem Wege noch kleinere Lichtwellen nachzuweisen. Ich erreichte dabei die Wellenlänge 182 μμ. Weiterhin versagte die photographische Platte. Ob aus Mangel an

Empfindlichkeit oder wegen ungenügender Energie des Lichtquells, war ohneweiters nicht festzustellen. Die einzige Möglichkeit, hierüber Aufschluss zu erlangen, bot das Mass der Lichtdurchlässigkeit der einzelnen Bestandtheile des Plattenüberzuges. Ich hatte hierzu Gelatinetrockenplatten benutzt, die Gelatine und Bromsilber enthielten.

Trockene Gelatine absorbirt, wie ich zuerst gezeigt habe,[1] die ultravioletten Strahlen energisch und um so beträchtlicher, je brechbarer sie sind. So schwächt selbst ein Häutchen von nur 0·00004 *mm* Dicke die Strahlen der Wellenlänge 185·2 μμ noch in sichtlichem Masse. Der Überzug einer Gelatineplatte ist aber mindestens 500mal dicker. Strahlen kleiner Wellenlänge können demnach nie in grössere Tiefe der lichtempfindlichen Schicht einer solchen Platte eindringen, mithin auch nie die zur Erzeugung eines dichten Bildes erforderliche Menge Haloidsilber reduciren. Hieraus liess sich schliessen, dass die Gelatine an der Abnahme der Intensität meiner Spectralaufnahmen nicht unbetheiligt war, und dass eine Schicht reinen Bromsilbers einen besseren Effect gegeben hätte.

Reines Bromsiber hält die Lichtstrahlen ebenfalls energisch zurück, doch ist es nach meinen Aufnahmen[2] für die Wellenlängen 210 μμ bis 185 μμ etwas durchlässiger als für das übrige Spectrum. Dieser kleine Unterschied war im vorliegenden Falle nebensächlich. Weit wichtiger war der Verlauf der Extinction, der photochemisch oder photothermisch erfolgen konnte. Das Absorptionsspectrum gab hierüber keinen Aufschluss. Darüber konnte allein das photographische Verhalten des reinen Bromsilbers entscheiden.

Ich überzog zu diesem Zwecke eine Glasplatte mit einer dünnen Schichte von Bromsilber, das mit überschüssigem Bromalkali gefällt worden war, trocknete sie und nahm damit das Spectrum eines zwischen Aluminiumdrähten überspringenden Flaschenfunkens mit einem Prisma und Linsen aus Quarz photographisch auf. Die Entwicklung geschah, wie bei Gelatineplatten, mit Pyrogallus, Soda und Bromkalium. Die dickver-

[1] Siehe diese Sitzungsberichte, Bd. CII, Abth. II. a., S. 457—464 (1893).
[2] Ebenda, S. 464—466.

schleierte Platte zeigte ein continuirliches Spectrum, das sich in ungeminderter Intensität als tiefschwarzes, ringsum von einem lichten Saume eingefasstes Wirkungsband bis zur Wellenlänge 182 μμ erstreckte. Die Continuität dieses Bandes war lediglich eine Folge der Verbreiterung sämmtlicher Linien, einer Erscheinung, der man auch bei Gelatineplatten von sehr hoher Empfindlichkeit begegnet.

Nach dieser Aufnahme schloss ich, dass es der in der Gelatineemulsion enthaltenen Bromsilbermodification keineswegs an Empfindlichkeit für die brechbarsten Strahlen, noch diesen an photochemischer Energie fehle, sondern dass dieser Empfindlichkeitsmangel der Bromsilbergelatine eine Folge der Schwächung der Strahlen sei, die diese auf ihrem Wege zum Bromsilber durch die Gelatine erlitten. Hiernach liess sich erwarten, dass die Empfindlichkeit der Bromsilbertrockenplatte für die genannten Strahlen steigen würde, bei Verminderung des Gelatinegehaltes, bei Vertauschung der Gelatine mit einem lichtdurchlässigeren Bindemittel, oder endlich bei Ausschluss jedes Bindemittels. Dies galt zunächst nur für das gewählte Beobachtungsgebiet, das bei der Wellenlänge 182 μμ endete. Ich wiederholte daher den Versuch für das stärker abgelenkte Nachbargebiet, gebrauchte jedoch die Vorsicht, die Luft zwischen Lichtquell und Platte, die ich schon vorher als ein bedenkliches Absorbens für kleine Lichtwellen[1] erkannt hatte, bis auf eine Schicht von wenigen Millimeter Dicke zu vermindern. Dabei ergab sich, dass jenseits 182 μμ ein strahlenreiches Gebiet existirt, und dass auch zu dessen Aufnahme das reine Bromsilber hinreichend empfindlich ist.

Diese Aufnahmen auf reinem Bromsilber bilden die Grundlage zur Herstellung meiner ultraviolettempfindlichen Platte, wovon der nachstehende Theil meines Berichtes handelt.

Herstellung ultraviolettempfindlicher Platten.

Ich habe diese auf dreierlei Weise versucht: durch Begiessen mit Emulsion, durch Baden in Silbernitrat- und

---

[1] Siehe diese Sitzungsberichte, Bd. CII, Abth. II. a. S. 466—469.

Bromkaliumlösung, durch Überziehen mit gefälltem Bromsilber.

A. Durch Begiessen mit Emulsion.

Meine Versuche, mit Bromsilberemulsion eine ultraviolettempfindliche Platte herzustellen, haben zu keinem brauchbaren Resultate geführt. Sie sollen darum auch nur der Vollständigkeit halber erwähnt werden.

Ich hoffte mit Bromsilberemulsion, die zwei- bis dreimal so viel Bromsilber enthielt wie gewöhnlich, einen gelatinearmen Plattenüberzug zu erlangen, der den Strahlen das Eindringen in grössere Tiefe gestattet und danach zu einem intensiveren Bilde geführt hätte, als dies bei gewöhnlicher Bromsilbergelatine möglich ist. Ich erzielte aber das gerade Gegentheil hiervon: das Bromsilber fiel regelmässig, ehe noch die aufgegossene Emulsion erstarrt war, zu Boden, so dass die oberste Schicht des Plattenüberzuges, die hier allein in Betracht kommt, beinahe bloss aus Gelatine bestand. Platten dieser Art waren, aus den vorher erörterten Gründen, für die brechbarsten Strahlen noch unempfindlicher als gewöhnliche Trockenplatten.

Ein Versuch, die Gelatine durch Agar-Agar zu ersetzen, verlief noch ungünstiger: der Plattenüberzug zerfiel, sobald er erstarrte, in kleinere und grössere Partikel, eine Erscheinung, die mich schon vor Jahren an der Verwendung des Agar-Agar zu Emulsionszwecken gehindert hatte.

B. Durch Baden in Silbernitrat- und in Bromkaliumlösung.

Badet man eine mit Gelatine überzogene Platte in Silbernitrat- und danach in Bromkaliumlösung, so bekommt man einen bromsilberhaltigen Plattenüberzug, dessen Oberfläche aus gelatinefreiem Bromsilber besteht. Beim Belichten einer solchen Platte treffen die Strahlen zuerst das gelatinefreie und danach das von Gelatine eingeschlossene Bromsilber. Von dieser gelatinefreien Bromsilberschicht versprach ich mir für die Aufnahme der kleinsten Wellenlängen eine gute Wirkung.

Ich begoss eine nivellirte Glasplatte mit einer dreiprocentigen Gelatinelösung, badete sie, nachdem der Überzug erstarrt war, einige Minuten in einer fünfprocentigen Silbernitratlösung, liess sie ablaufen, reinigte Rücken und Ränder mit Fliesspapier,

badete sie beim Dunkelkammerlicht ebensolange in einer dreiprocentigen Bromkaliumlösung und wusch sie, die präparirte Seite nach unten gekehrt, bei wiederholtem Wasserwechsel in einer tiefen Abdampfschale aus. Nach dem Trocknen wurde sie dem Spectrum des Aluminiums exponirt und darauf mit Pyrogallus, Soda und Bromkalium entwickelt.

Die getrocknete, unbelichtete Platte opalisirte, war stellenweise mehr, stellenweise weniger durchsichtig und zeigte eine Menge unregelmässig verlaufender Streifen. — Beim Hervorrufen des Bildes verschleierte sie vollständig und arbeitete nur dann klar, wenn der Entwickler stark verdünnt wurde. Doch waren die Linien in allen Fällen, auch wenn die Platte verschleierte, scharf gezeichnet und intensiver als auf Bromsilberemulsion. Das photographische Maximum der Platte bildeten bei Belichtung mit Aluminiumlicht die beiden Linien von 186·0 μμ und 185·2 μμ. Beide entwickelten sich regelmässig weit früher als das übrige Spectrum.

Emulsionsgelatineplatten verhielten sich gerade umgekehrt: bei ihnen kamen die genannten Linien stets zuletzt zum Vorschein.

Die Gelatinebadeplatte verdient demnach beim Photographiren der brechbarsten Strahlen vor der Gelatineemulsionsplatte den Vorzug.

Meine Aufnahmen endigen diesmal schon mit der Wellenlänge 185·2 μμ. Die Ursache ihres bescheidenen Umfanges dürfte jedoch nicht in der Platte, sondern vielmehr darin zu suchen sein, dass ihre Belichtung unter dem Einflusse einer in den Gang der Strahlen eingeschalteten Luftschicht erfolgt war, die, wie bereits hervorgehoben wurde, für das brechbarste Ultraviolett wenig durchlässig ist.

Die Gesammtempfindlichkeit der trockenen Gelatinebadeplatte war von mässiger Höhe, und ihre Steigerung, die wünschenswerth war, bot nicht unwesentliche Schwierigkeiten. Ich habe mich darum mit einmaliger Anwendung dieses Verfahrens begnügt und bin, auch ohne die Platten den Strahlen jenseits der Wellenlänge 185·2 μμ exponirt zu haben, zu dem letzten der genannten Verfahren übergegangen, das auch in anderer Hinsicht bessere Erfolge in Aussicht stellte.

C. Durch Überziehen mit gefälltem Bromsilber.

Mischt man Silbernitrat- und Bromkaliumlösungen, so entsteht ein flockiger Niederschlag von Bromsilber. Anders verhalten sich sehr verdünnte Lösungen. Sie liefern bei überschüssigem Bromkalium einen ungemein feinen Niederschlag, der anfänglich suspendirt bleibt und sich erst bei wochenlangem Stehen absetzt.

Zusatz von einigen Tropfen Ammoniak vergrössert den Niederschlag und beschleunigt das Absetzen.

Legt man auf den Boden des Absetzungsgefässes eine Glasplatte, so lagert sich das Bromsilber in gleichdicker Schicht auf ihr ab, und trocknet, nachdem man die darüberstehende Flüssigkeit mit einem Heber abgezogen hat, in kurzer Zeit zu einem glanzlosen, gelblichen Überzuge auf, der aus reinem Bromsilber mit einer kleinen Menge der in der Absetzungsflüssigkeit gelösten Salze (KNO_3 und KBr) besteht, die sich durch Auswässern beseitigen lassen. Eine solche Platte verträgt das Entwickeln, bedingungsweise sogar das Fixiren ohne Nachtheil.

Dies in groben Umrissen das Verfahren, wonach ich seit Jahren die Platten herstelle, die mir zur Auffindung des Spectralgebietes zwischen den Wellenlängen 182 μμ und 100 μμ verholfen haben.

I. Vorbereitung der Platte zum Überziehen mit Bromsilber.

Behandelt man eine Platte der vorgenannten Art mit Fixirnatron, dann schwimmt der grösste Theil des entwickelten Bildes davon, sobald der Rest des gelblichen Plattengrundes, das nichtreducirte Bromsilber, verschwindet. Diesem Übelstande lässt sich vorbeugen, wenn man

a) die Bromsilberschichte sehr dünn herstellt,

b) die Glasplatte vor dem Absetzen des Bromsilbers mit einem Bindemittel überzieht,

c) das Bromsilber selbst mit einem Bindemittel versieht.

a) Bei dicker Schicht ruht das entwickelte Bild auf einer Lage ungefärbten Bromsilbers, an dessen Stelle beim Fixiren eine ebenso dicke Flüssigkeitsschicht tritt, die es dicht über der

Glasplatte schweben macht. Bewegt man die Schale, so zerreisst das aus einem Häutchen bestehende Bild und schwimmt davon. Bei dünner Schicht entwickelt sich der grösste Theil des Bildes durch die ganze Schicht hindurch. Die Fixage hat dann mehr neben als unter dem reducirten Silber zu wirken, so dass der unterspülte Theil des Häutchens von dem übrigen, fest mit dem Glase in Verbindung gebliebenen, am Wegschwimmen gehindert wird. Gleichwohl ist eine Bromsilberschicht ohne Bindemittel nicht zu empfehlen. Auch bei mässiger Dicke verlangt sie nach beendetem Fixiren sehr aufmerksame Behandlung.

Dort, wo die Anwendung eines Bindemittels für den Plattenüberzug nicht erlaubt ist,[1] sollte man das Fixiren lieber unterlassen. Die Platten halten sich, im Finstern aufbewahrt, lange Zeit in unveränderter Farbe. Müssen sie unter allen Umständen fixirt werden, dann empfiehlt es sich, vorher ein Gelatinebad anzuwenden. Das verleiht auch der fertigen Platte eine grössere Widerstandsfähigkeit.

Das fixirte Bild einer dünnen Schicht aus reinem Silberhaloid auf blankem Glase ist kraftlos und sehr empfindlich gegen mechanische Eindrücke.

b) Überzieht man die zu sensibilisirende Glasplatte mit Gelatine, so hält sie auch eine dickere Schicht aus reinem Bromsilber so fest, dass sie die Behandlung mit Fixirnatron ohne Nachtheil verträgt.

Ich verwende zu diesem Überzuge eine zweiprocentige warme Gelatinelösung, die ich in reichlicher Menge auf die sorgfältig geputzte und vorgewärmte Platte giesse, herumfliessen und über eine ihrer Ecken weglaufen lasse. Die Platte wird an einem staubfreien Orte, auf Fliesspapier, die präparirte Seite nach unten gekehrt, zum Trocknen aufgestellt, und bald danach mit Bromsilber überzogen.

Die Bromsilberschicht ist gegen Unregelmässigkeiten des Gelatineüberzuges sehr empfindlich. Staubtheilchen, zerplatzte Bläschen, Flächenunebenheiten, stören die Ablagerung des

[1] Dieser Fall kann bei Ermittlung des spectralen Verhaltens von reinem Silberhaloid eintreten.

Bromsilbers und geben zur Entstehung einer Menge von Plattenfehlern Anlass, die in der Mehrzahl erst nach dem Hervorrufen zu Tage treten. Das Überziehen mit Gelatine muss daher mit grosser Sorgfalt geschehen. Vor Allem sind Blasen zu vermeiden. Jedes auch noch so kleine Bläschen des Überzuges zerplatzt beim Trocknen und an seiner Stelle tritt häufig die blanke Glasfläche zu Tage, die sich später auf der entwickelten Platte in gewissen Fällen — davon wird später die Rede sein — in Folge geringerer Empfindlichkeit des darauf abgesetzten Bromsilbers, von ihrer Umgebung abhebt.

Der Gelatineüberzug soll so dünn als möglich sein. Je dünner er ist, desto weniger kehren seine nie ganz zu vermeidenden Dickenunterschiede in der Bromsilberschicht wieder, desto fester haftet das Bild am Glase, desto weniger färbt sich die Gelatine im Entwickler.

Ein weiterer, allerdings nur bei ganz kleinen Platten bemerkbarer Vortheil ist der, dass sich die Platte, die von der präparirten Seite her geschnitten werden muss, um so sauberer und um so exacter auf vorgeschriebenes Mass schneiden lässt, je dünner das Gelatinehäutchen ist.[1]

c) Versieht man das Bromsilber selbst mit einem Bindemittel, dann ist der Gelatineüberzug der Platte entbehrlich. Dies geschieht in zweckentsprechender Weise, wenn das Bromsilber aus gelatinehaltigen Lösungen gefällt wird. Die Bromsilbertheilchen sind in diesem Falle, wie längst bekannt ist, gelatinehaltig und haften, wie ich zuerst beobachtete, auf Glas aufgetragen und getrocknet, ungemein fest.

Der Gelatinegehalt meiner Bromsilberflüssigkeit variirte zwischen 1 : 18.000 und 1 : 1550. Über seinen Einfluss auf die Lichtempfindlichkeit der Platte später.

Es sei jedoch schon hier erwähnt, dass ich neuerdings, aus später anzuführenden Gründen, auch für gelatinehaltiges Bromsilber nur Platten mit Gelatineüberzug verwende.

---

[1] Die Rückseite zu schneiden, wobei die präparirte Fläche auf das Schneidebrett zu liegen käme, verbietet die Verletzlichkeit der Bromsilberschicht. Gelatineplatten lassen sich bekanntlich von der Rückseite her aus dem genannten Grunde weit besser schneiden.

II. Herstellung des Bromsilbers.

a) Ohne Gelatine. Bromsilber, als feiner, sich allmälig absetzender Niederschlag, verlangt zu seiner Bildung stark verdünnte Lösungen und grossen Überschuss von Bromkalium. — Ich löse 2·8 *g* Bromkalium in 4 *l* destillirtem Wasser und 2·0 *g* Silbernitrat in 100 cm^3 destillirtem Wasser und giesse bei Dunkelkammerlicht die Silberlösung in kleinen Portionen in die öfters umgeschüttelte Bromsalzlösung. Man bekommt so eine ziemlich durchsichtige und im durchfallenden Lichte röthlich gefärbte Flüssigkeit, die nach dem Filtriren zum Absetzenlassen des Bromsilbers fertig ist. Ich verwende in diesem Falle nie das ganze Bromsilber, sondern begnüge mich mit dem Quantum, das in ein bis zwei Tagen zu Boden fällt. Wollte man warten, bis die über der Platte stehende Flüssigkeit ganz klar wäre, dann wären dazu Wochen erforderlich.

Die Flüssigkeit mit dem Niederschlage wird sichtlich dichter, sobald man Ammoniak zusetzt. Auch setzt sich das Bromsilber schneller als vorher ab; es genügen dann 10 bis 15 Stunden dazu. Zu vorgenannter Flüssigkeitsmenge gebe ich zu diesem Zwecke 30 cm^3 Ammoniak.

b) Mit Gelatine. Zu vorgenanntem Flüssigkeitsquantum des Bromkaliums gebe ich 0·2 *g* harte Emulsionsgelatine, verflüssige sie durch Erwärmen und verfahre im Übrigen wie vorher. Auch hier wirkt Ammoniakzusatz auf die Entstehung und das Absetzen des Niederschlages günstig.

Alle diese Verfahren liefern ein wenig empfindliches Bromsilber. Das gilt selbst dann noch, wenn es aus heissen Lösungen gefällt wird. Grössere Empfindlichkeit verlangt anhaltende Behandlung des suspendirten Bromsilbers in der Wärme. Hierzu eignet sich die starkverdünnte Lösung wenig. Besser kommt man mit einer gelatinearmen Emulsion zum Ziele. Verdünnt man diese in entsprechendem Masse mit heissem Wasser, dann lässt auch sie ihr Bromsilber allmählig fallen. Es ist ebenfalls gelatinehaltig, gibt aber einen empfindlicheren Plattenüberzug als das aus sehr verdünnter Lösung gefällte.

Meine Emulsion hierzu hat folgende Zusammensetzung:

$A \begin{cases} 12\,g \text{ Bromkalium,} \\ 2\,g \text{ Emulsionsgelatine,} \\ 200\,cm^3 \text{ destillirtes Wasser.} \end{cases}$

$B \begin{cases} 15\,g \text{ Silbernitrat,} \\ 200\,cm^3 \text{ destillirtes Wasser.} \end{cases}$

A wird in der Wärme gelöst und *B*, das ebenfalls zu erwärmen ist, bei Dunkelkammerlicht allmählig in kleinen Portionen hinzugefügt. Während des Mischens der beiden Lösungen muss *A* öfters tüchtig durchgeschüttelt werden.

Schon die ungereifte Emulsion kann zum Absetzenlassen verwendet werden, nur fallen die Platten dann kaum empfindlicher als in den vorhergehenden Fällen aus. Grössere Empfindlichkeit verlangt anhaltendes Erwärmen der Emulsion, Kochen, Behandlung mit Ammoniak, kurz dasselbe Verfahren, das man bei Bromsilbergelatine gewöhnlicher Zusammensetzung zu gleichem Zwecke anwendet. (Ausführliches über die Steigerung der Empfindlichkeit von Bromsilbergelatine bietet die einschlägige Literatur des modernen Trockenplattenprocesses.) Die einzige Abweichung ist die, dass die Emulsion während des Reifens, wobei sich wegen des kleinen Gehaltes an Gelatine viel Bromsilber zu Boden setzt, oft durchgeschüttelt werden muss.

$100\,cm^3$ dieser Emulsion mit $4\,l$ heissem Wasser verdünnt, durchgeschüttelt und mehrmals durch Fliesspapier filtrirt, geben eine gute Absetzflüssigkeit. Da mit dem Bromsilber zugleich feine Verunreinigungen, als Staubtheilchen etc. durch das Filter gehen, so ist es rathsam, die Flüssigkeit vor dem Gebrauch einige Stunden stehen zu lassen, damit wenigstens die schwereren von ihnen von der Platte ferngehalten werden. Durch diese Vorsicht wird der Entstehung einer Menge, wenn auch meist nur mikroskopisch kleiner Plattenfehler vorgebeugt.

Man kann nun das Bromsilber auch aus der ungleich gelatinereicheren Bromsilberemulsion der gewöhnlichen Trockenplatte gewinnen, wenn man sie mit einer hinreichenden Menge heissen Wassers verdünnt und danach verfährt wie vorher. Auch diese Platten entwickeln für das Ultraviolett erhöhte

Empfindlichkeit. Meine hierauf bezüglichen Beobachtungen erstrecken sich jedoch nur bis zur Wellenlänge 170 $\mu\mu$. Ich bezweifle jedoch nicht, dass diese Platten auch jenseits 170 $\mu\mu$ brauchbar sind.

Die Verwendung gewöhnlicher Gelatineemulsion kann nur dort in Betracht kommen, wo die ultraviolettempfindliche Platte mit kleinstem Aufwand an Zeit, Mühe und Mitteln hergestellt werden soll. Wo es sich um wenige Versuche handelt, wo man vielleicht nur das Verhalten der neuen Platte kennen lernen will, empfiehlt es sich, das Bromsilber dem Überzug käuflicher Trockenplatten zu entnehmen. Man schneidet zu diesem Zwecke eine solche Platte in Streifen von 1—2 *cm* Breite, stellt sie in eine mit heissem Wasser (0·5—0·6 *l* auf eine Platte von 13 *cm* und 18 *cm*) gefüllte Flasche, schüttelt, sobald die Emulsionsschicht geschmolzen ist, den Flascheninhalt tüchtig durch, filtrirt, lässt ihn einige Zeit (eine Stunde) ruhig stehen und giesst ihn in das Absetzungsgefäss, auf dessen Boden eine zweite, mit der präparirten Seite nach oben gekehrte Trockenplatte liegt.[1]

III. Steigerung der Ultraviolettempfindlichkeit des Bromsilbers.

Die Empfindlichkeit des Bromsilbers für die Strahlen jenseits der Wellenlänge 220 $\mu\mu$ lässt sich durch Zusatz von Jodsilber steigern. Gleich der Bromsilbergelatineplatte kann auch die ultraviolettempfindliche Platte durch Jodsilber verbessert werden. Ich habe Plattenüberzüge versucht, die auf 100 Theile Bromsilber 5, 10, 20 Theile Jodsilber enthielten und damit durchgängig bessere Resultate erzielt, als mit reinem Bromsilber.

Das Jodsilber erhöht aber nicht bloss die Empfindlichkeit, sondern auch die Intensität und Klarheit. Dies gilt jedoch nur, wenn Brom- und Jodsilber gleichzeitig aus derselben Lösung gefällt werden. Ein Gemisch der beiden,

---

[1] Verfügt man über blanke Glasplatten passender Grösse, so sind diese, schon der Wohlfeilheit halber, der Trockenplatte vorzuziehen, denn der Aufnahme des Ultravioletten gewährt der Emulsionsüberzug unter der Bromsilberschicht keinerlei Vortheile. Aber häufig sind solche gar nicht, oder doch nicht in gebrauchsfertiger Verfassung zur Hand, und in solchem Falle empfiehlt sich die Verwendung einer Trockenplatte.

unabhängig von einander gefällten Niederschläge gibt Platten von sehr mässiger Empfindlichkeit. Reines Bromjodsilber ist hiernach, je nach der Art seiner Darstellung, auch gegen die Strahlen jenseits der Wellenlänge 220 $\mu\mu$ ebenso verschieden empfindlich, als es Bromjodsilbergelatine gegen das übrige Spectrum ist.[1]

Ich gebe nachstehend die Vorschrift zur Herstellung der ultraviolettempfindlichen Bromjodplatten, die sich bei meinen Aufnahmen der Strahlen kleinster Wellenlängen besser als alle übrigen Platten bewährt haben.

A { 6 *g* Bromkalium,
0·6 *g* Jodkalium,
1 *g* Emulsionsgelatine,
100 cm^3 destillirtes Wasser.

B { 8·1 *g* Silbernitrat,
100 cm^3 destillirtes Wasser.

Nach dem Schmelzen der aufgequollenen Gelatine beide Lösungen erwärmt auf 50° bis 60° C., *B* in sehr kleinen Portionen bei Dunkelkammerlicht in *A* gegossen, währenddem öfters und tüchtig durchgeschüttelt, $^1/_2$ Stunde in kochendes Wasser gestellt, auch dabei häufig geschüttelt, bis auf 40° C. abkühlen lassen, 4 cm^3 Ammoniak zugefügt, wieder geschüttelt, $^1/_2$ Stunde entweder noch weiter abkühlen lassen oder im Wasserbade von nicht über 40° C. erwärmt, danach 64 cm^3 der Flüssigkeit in 4 *l* warmes Wasser (nicht über 40° C.) gegossen, durchgeschüttelt, filtrirt und nach ein- bis zweistündigem ruhigen Stehen das Jodbromsilber auf die in vorgenannter Weise mit Gelatine präparirten Platten absetzen lassen. Die Platten müssen nach dem Trocknen eine zeitlang in stehendem

---

[1] Mit Platten, die ungefähr 10 Gewichtstheile Jodsilber auf 100 Gewichtstheile Bromsilber enthielten, habe ich bessere Resultate als mit irgend einer anderen Platte erzielt. Die Aufnahme der brechbarsten Strahlen des neuen Spectralgebietes gelang mir nur mit Bromjodsilberplatten. Es mag jedoch nicht unerwähnt bleiben, dass zwischen deren Herstellung und Belichtung ein Zeitraum von einem Jahre lag, innerhalb welcher Zeit sie durch Nachreifen die besonders hohe Empfindlichkeit erlangt haben konnten.

oder doch in ruhig fliessendem Wasser, das im ersten Falle öfters zu erneuern ist, ausgewaschen werden.

IV. Das Absetzen des Bromsilbers.

Zum Absetzenlassen des Bromsilbers benutze ich Entwicklungsschalen. Solche aus gepresstem Glase verdienen ihres planen Bodens halber den Vorzug. Die Bodenfläche soll mindestens um 1 *cm* länger sein als die Platte. Nach gründlicher Reinigung (Schwefelsäure) wird die Schale auf $^3/_4$ ihrer Tiefe mit der filtrirten Bromsilberflüssigkeit gefüllt und die von beiden Seiten mit einem weichen Pinsel abgestäubte Platte so hineingelegt, dass sie von der vorderen Schalenwand mindestens 1 *cm* absteht. Das Absetzen des Bromsilbers erfordert je nach seiner Herstellung verschieden lange Zeit. Sobald die Ränder der Platte durch die darüberstehende Flüssigkeit hindurch sichtbar werden, ist es Zeit, die Schale zu entleeren und die Platte zu trocknen. Sie wird hierzu etwas nach vorne geneigt und die Flüssigkeit mit einem, bis auf die vor der Platte befindliche Bodenfläche reichenden Heber abgezogen. An der Plattenkante entlang bleibt nachher immer noch eine Flüssigkeitswulst. Sie lässt sich leicht mit einem Streifen Fliesspapier beseitigen, den man, doch ohne dabei den Überzug zu berühren, an der Kante hinführt. Erst jetzt darf die Platte aus der Schale herausgenommen werden. Hiebei zeigt nun das Bromsilber, sobald es Gelatine enthält, die sonderbare Erscheinung, dass es sich beim Berühren mit dem Finger von der Berührungsfläche aus auf ungefähr 2 *cm* im Umkreise zurückzieht und wahrscheinlich die Entstehung von Oberflächenfehlern veranlasst. Die Platte soll daher beim Herausnehmen aus der Schale nur am Rande und an der unteren Fläche erfasst, ausserdem nach Möglichkeit horizontal gehalten werden. Sie ist liegend, an einem staubfreien Orte, am besten in einem Trockenschranke, wie er für Gelatineplatten benutzt wird, zu trocknen. Wenige Stunden genügen dazu. — Stehend trocknet die Platte weit schneller. Allein die Schicht zerreisst dabei leicht und schiebt sich stellenweise zusammen, auch kommt es vor, dass gröbere Partikel des Überzuges abwärts rollen und Furchen hinter-

lassen, die sich als durchsichtige, von intensiven Rändern umsäumte Linien im Negativ entwickeln.

V. Die trockene Platte.

a) Vor der Belichtung.

Beim Trocknen wird der Plattenüberzug für die optischhellen Strahlen merklich durchlässiger. Dies gilt besonders von gelatinehaltigem Bromsilber. Ich habe Platten gehabt, die im feuchten Zustande nur durchscheinend, nach dem Trocknen hingegen für die Strahlen meines Dunkelkammerlichtes (Stearinkerzenlicht durch dreifache Lage braunen Seidenpapiers filtrirt) vollständig durchsichtig waren.

Nach dem Trocknen haftet gelatinehaltiges Bromsilber sehr fest an der Platte, reines Bromsilber auf Gelatineüberzug schon weniger gut, besonders bei dicker Schicht, und reines Bromsilber auf blanker Glasfläche bildet einen so lockeren Überzug, dass seine Anwendung zur photographischen Aufnahme grossen Schwierigkeiten begegnet. Gleichwohl lassen sich auch seine Platten, nachdem sie einmal getrocknet worden sind, stehend im Wasserbade behandeln, was zur Beseitigung der im Plattenüberzuge zurückgebliebenen Kaliumverbindungen hier ebenso nöthig ist, wie bei den übrigen Präparaten.

Gegen mechanische Eindrücke ist der Überzug sehr empfindlich. Selbst das Abstäuben mit dem Pinsel verträgt er nicht ohne Nachtheil. Gegen senkrechten Druck ist er im Allgemeinen weniger empfänglich. Beim Schneiden mit dem Diamant kann man das Lineal direct auf die empfindliche Seite legen, ohne Verletzung der Schicht befürchten zu müssen. Bei noch stärkerem Drucke ändern manche Plattenüberzüge ihr Verhalten. Ich schliesse dies daraus, dass sie die mit einem weichen Gummistempel aufgedruckten Plattennummern stets intensiv schwarz entwickeln, während dasselbe Signirverfahren in allen anderen Fällen glasklare Ziffern liefert.

Die Farbe des Plattenüberzuges ist bei Bromsilber weiss mit einem Stich ins Gelbe, bei einem Gemisch aus Bromsilber (100 Theile) und Jodsilber (5 Theile) etwas gelblicher, bei gleichzeitig aus derselben Lösung gefälltem Bromsilber (100

Theile) und Jodsilber (5 Theile) citronengelb und bei 10 Theilen Jodsilber hell orangegelb.

Reines Silberhaloid gibt einen matten Überzug, gelatinehaltiges einen mattglänzenden. Bei Dunkelkammerlicht betrachtet, erscheint er gewöhnlich tadellos. Nur der Rand macht eine Ausnahme: er weist grössere und kleinere Streifen auf. Anders bei Tageslicht. Da bemerkt man nicht selten Schlieren, unregelmässige Ablagerungen des Niederschlages. Beim Entwickeln des Bildes erscheinen diese als intensive Flecke, sobald man gewisse Vorsichtsmassregeln ausser Acht lässt. Ausserdem enthält die Schicht, mag man bei ihrer Herstellung auch noch so sorgfältig zu Werke gegangen sein, kleine Staubtheilchen, die unter dem Mikroskop stören, ja zuweilen die Brauchbarkeit der Aufnahme gefährden. Zum Glück tritt dieser Fall nur dann ein, wenn das Linienbild, bei Anwendung sehr feiner und kurzer Spaltöffnung, mit Unreinigkeiten zusammenfällt und dadurch an Zuverlässigkeit einbüsst.

b) Die photochemische Färbung.

Meine Beobachtungen beschränken sich hier auf gelatinehaltige Schichten, und auch bei diesen nur auf einige in directem Sonnenlicht angestellte Versuche. Sonnenlicht gegenüber verhält sich der Plattenüberzug je nach seiner Zusammensetzung verschieden.

Bromsilber färbt sich anfänglich grünblau und geht, ohne grössere Intensität zu erlangen, in graublau über. Belichtet man nur einen Theil der Platte, so erscheint dieser von einer grünblauen Aureole umgeben, eine Folge der totalen Reflexion, der die Strahlen auf der Rückseite der Platte ausgesetzt sind. Ein Gemisch aus Brom- und Jodsilber färbt sich weit intensiver als reines Bromsilber. Es wird graublau und zeigt nur eine unbedeutende Aureole. Das gleichzeitig gefällte Bromjodsilber nimmt eine noch intensivere graublaue Farbe an und lässt gar keine Aureole erkennen.

c) Die photographische Färbung.

Die Färbung im Entwickler ist bei der ultraviolettempfindlichen Platte, wie allenthalben in der Photographie, vor den

photochemischen Färbung gänzlich verschieden. Die Entwicklung erfolgte nur mit Pyrogallus und Soda. Bei normaler Belichtung färbt sich der Bromsilberüberzug schwarzgrau, der Bromjodsilberüberzug schwarzbraun. Doch lassen sich beide bedingungsweise durch geeignete Abstimmung des Entwicklers noch dunkler und intensiver hervorrufen. Darüber später.

Belichtet man energisch, dann erscheint das Bild zuweilen hellbraun und ist dunkelbraun umsäumt. Steigert man die Lichtwirkung noch weiter — ich habe hiezu 25 *cm* Magnesiumband 1—2 *cm* vor der mit einem durchlöcherten Schirm bedeckten Platte abgebrannt — dann tritt Solarisation ein. Die belichtete Stelle erscheint durchsichtig, beinahe glasklar, inmitten einer umfangreichen Aureole. Besteht der Überzug aus gleichzeitig gefälltem Bromjodsilber — ich habe Platten versucht, die 5, 10, 20 Theile AgJ auf 100 Theile AgBr enthielten —, so solarisirt er nicht. Die belichtete Fläche ist dann intensiv geschwärzt und hebt sich markant von ihrer weit lichtdurchlässigeren Umgebung ab. Das war selbst noch der Fall, als ich die Belichtungsdauer verlängerte. Alle diese Versuche wurden mit gelatinehaltigen Platten angestellt. Ich habe darauf auch agar-agarhaltiges Bromsilber[1] untersucht und gefunden, dass dieses noch etwas früher als gelatinehaltiges solarisirt.

d) Das Entwickeln.

Es geschah einzig und allein mit Pyrogallus und Soda. Die Lösungen wurden nach Eder's Vorschrift[2] hergestellt.

---

[1] Es war aus einer Emulsion hergestellt worden, die 1% Agar-Agar enthielt. Die Bereitung der Flüssigkeit zum Absetzen des Bromsilbers gelingt hier nicht ohne weiteres. Ausführliche Mittheilung hierüber behalte ich mir für später vor.

[2] Siehe Eder, »Die Photographie mit Bromsilbergelatine und Chlorsilbergelatine«, IV. Aufl., Halle, bei W. Knapp, 1890, S. 294:

»I. 100 *g* schwefligsaures Natron, krystallisirt, 500 *g* Wasser, 14 *g* Pyrogallol und 6 Tropfen Schwefelsäure, um die alkalische Reaction des Natriumsulfits theilweise zu neutralisiren. (s. S. 114.)

II. 50 *g* krystallisirtes kohlensaures Natron (von calcinirter, wasserfreier Soda nimmt man die Hälfte), 500 *g* Wasser.

Das schwefligsaure Natron wird in kaltem, destillirten Wasser mittelst Umschüttelns in circa 2 Minuten gelöst, dann Schwefelsäure und schliesslich

Der Entwickler darf nur in starkverdünnter Lösung angewandt werden. Anderenfalls bekommt die Platte Flecke und Schleier. Ich verwende je 1 Raumtheil Pyrogallus- und Sodalösung, 3—6 Raumtheile gewöhnliches Wasser und etwas Bromkalium. Das Bild erscheint darin in 20—30 Secunden und ist in 2—3 Minuten fertig. Entwickelt man länger, so stellt sich ungeachtet der starken Verdünnung des Entwicklers, Schleier ein, zuweilen schon früher. Soll das Bild glasklar bleiben, dann muss die Platte, sobald die Verschleierung beginnt, sofort mit Wasser abgespült und bald nachher fixirt werden. Dieser Moment trat bei meinen Aufnahmen häufig schon nach 90- bis 100-secundenlangem Entwickeln ein. Ist das Bild in dieser Zeit noch nicht vollständig erschienen, so ist die Aufnahme bei entsprechend verlängerter Belichtungsdauer zu wiederholen. Nie aber wolle man das Fehlende durch forcirte Entwicklung zu erlangen suchen.

Nur bei Beobachtung dieser Vorsicht ist mit der ultraviolettempfindlichen Platte ein klares Bild zu erzielen.

Bei Spectralaufnahmen, die besonders zarte Zeichnung erfordern, insonderheit bei Auflösung dichtstehender Linien, befolge ich seit Kurzem ein etwas verändertes Entwicklungsverfahren. Ich richte mich dabei nicht mehr danach, was auf der Platte erscheint — das würde sich schon desshalb verbieten, weil die Linien wegen ihrer ungewöhnlichen Feinheit beim Entwickeln nicht zu erkennen sind —, sondern lasse die Platte eine gewisse Zeit, die ich nach Erfahrung abmesse, im Entwicklerbade. Allerdings komme ich dabei nie mit einer einzelnen Aufnahme aus. Gewöhnlich genügt das erste Negativ, das ich auf diese Weise erhalte, noch nicht, da seine Linien meist zu breit und nahestehende Linien noch gar nicht oder nur unvollständig getrennt sind. In solchem Falle wiederhole ich die Aufnahme. Während ich aber dabei an der ursprünglichen Belichtungsdauer unverändert festhalte, kürze ich die Entwicklung um einige Secunden ab. Auf diese Weise erlange

---

das Pyrogallol zugesetzt, das sich fast momentan löst; ebenso löst sich das kohlensaure Natron bald in dem kalten destillirten Wasser.«

ich, manchmal allerdings erst nach einer dritten oder vierten Aufnahme, Linienbilder von einer Feinheit, wie ich sie mit gewöhnlicher Entwicklung nie erhalte. Dieses Verfahren ist etwas zeitraubend, allein die Schönheit der resultirenden Negative lohnt den grösseren Aufwand an Zeit und Mühe in reichlichem Masse.

Der Schleier der Platte kann durch Bromkalium zurückgehalten werden. Doch ist dabei Vorsicht nöthig: Bromkalium übt einen wesentlichen Einfluss auf die Grösse der Silberpartikel aus, die das Negativ ausmachen, auf das sogenannte Korn der Platte. Ich nehme 5 bis 10 Tropfen Bromkalium (1 : 10) auf 60—180 cm^3 Wasser, 20 cm^3 Pyrogallus und 20 cm^3 Soda.

Bei Gelatineemulsion nimmt man an, dass das Korn der Emulsion dem Korne des Bildes an Grösse gleiche. Wenn das schon bei dieser nicht in aller Strenge zutrifft, wie die mikroskopische Prüfung lehrt, so ist es bei ultraviolettempfindlichen Platten noch weniger der Fall.

Das Negativkorn der ultraviolettempfindlichen Platte ist in den meisten Fällen eine Vereinigung von mehreren, manchmal sogar von sehr vielen Emulsionskörnern, die zusammen einen schwarzbraunen Klumpen von verschiedener Form und Grösse bilden. Die Grösse dieses Klumpens hängt von der Beschaffenheit des Plattenüberzuges und von der Zusammensetzung des Entwicklers ab. Sie wird durch Jodsilber begünstigt, mehr noch durch Bromkalium im Entwickler. Im Allgemeinen gibt Bromjodsilber im bromkaliumhaltigen Entwickler das grössere Negativkorn, Bromsilber in bromkaliumfreiem Entwickler das feinere.

Wie sehr die Grösse des Kornes zuweilen vom Bromkalium abhängig ist, zeigt folgender ungewöhnliche Fall. Ich schnitt eine Bromjodplatte in drei Theile und entwickelte, ohne vorher belichtet zu haben, den ersten Theil ohne Bromkalium, den zweiten mit einer kleinen Menge Bromkalium, den letzten mit fünfmal soviel, und jeden so lange, bis sich kräftiger Schleier einstellte. Die drei Platten zeigen auf glasklarem Grunde der Reihe nach 0·02 *mm*, 0·14 *mm*, 0·27 *mm* grosses Negativkorn, daneben allerdings auch viele kleinere Körner. Alle diese

Körner haben die Gestalt einer Scheibe, und ihr gegenseitiger Abstand wächst mit ihrem Durchmesser. Diese Platten, insbesondere die grobkörnigen, machen ganz den Eindruck, als ob das Bromsilber, das vorher den glasklaren Plattengrund bedeckte, zur Bildung der grossen Klumpen verwendet worden sei. Ob und inwieweit die Löslichkeit des Bromsilbers in Bromkalium an der Kornvergrösserung betheiligt gewesen ist, muss ich dahingestellt lassen, da ich mich nicht weiter mit diesem Gegenstand beschäftigt habe.

Auf die Gestaltung des meistentheils eckigen oder scheibenförmigen Negativkornes scheint die Gelatine nicht ohne Einfluss zu sein, denn agar-agarhaltiges Bromsilber gab mir grobe, moosförmige Gebilde.

Die Grösse des Negativkornes einer mit bromkaliumhaltigem Entwickler hervorgerufenen Bromjodplatte hängt ferner von der Art der Ursache ab, die den Zerfall des entwicklungsfähigen Silberhaloides einleitete. Unbelichtet gibt die bis zur Verschleierung (chemischer Schleier) entwickelte Platte das gröbste Korn, belichtet das feinste, mitten darinnen steht das Korn, das die einem mässigen Druck ausgesetzte, lichtempfindliche Schicht entwickelt.

Unterlässt man es, die Platte nach dem ersten Trocknen zu waschen, dann führt sie stets eine kleine Menge Bromkalium aus der Silberflüssigkeit mit sich, daneben freilich auch Kaliumnitrat. In diesem Falle treten mehr oder weniger beim Entwickeln die Erscheinungen auf, die sonst dem Bromkaliumzusatz folgen. Wie sich Kaliumnitrat beim Hervorrufen verhält, habe ich nicht untersucht. Freies Jodkalium hat man in der lichtempfindlichen Schicht nicht zu befürchten, da es beim Fällen der Silberhaloide vollständig in Jodsilber und Kaliumnitrat umgesetzt wird, ehe sich Bromsilber ausscheiden kann.

Versetzt man den Entwickler mit Jodkalium, dann erscheint das Bild überraschend schnell, doch selten ohne Schleier. Unterbricht man die Entwicklung nicht rechtzeitig, dann wächst der Schleier, bis das Bild in der Aufsicht verschwindet, obgleich es seiner ungewöhnlichen Intensität halber in der Durchsicht noch gut sichtbar bleibt. In den meisten Fällen beginnt der Schleier am Rande der Platte

so dass die Plattenmitte auch nach dem Fixiren durchsichtiger ist.

Die Schnelligkeit, mit der das Bild erscheint, und seine grosse Intensität, derenzufolge im Entwickler mehr Details als auf einer minder intensiven Platte sichtbar sind, verleiteten mich anfänglich zu der Annahme, dass Jodkalium eine nennenswerthe Abkürzung der Belichtungszeit zulasse. Vergleichsaufnahmen zeigten aber, dass dieser Gewinn mässig ist. Von grösserer Bedeutung ist die Steigerung der Intensität. Allein die mit Jodkalium entwickelten Linien haben so unsaubere Ränder, dass sie zu scharfen Ausmessungen weniger geeignet sind. Ihr Korn ist vergrössert und, zum Theil schon des verschleierten Plattengrundes halber, nie scharf umgrenzt. Im anderen Falle liessen sich Platten, denen es an Intensität fehlt, die unter dem Mikroskop zu durchsichtig sind, als dass sie sichere Einstellung gestatteten, durch Entwicklung mit KJ ihrem Zweck besser anpassen, als es gegenwärtig möglich ist.

Der Jodkaliumzusatz zum Entwickler darf nur sehr klein sein, wenn sich die Platte nicht in wenig Secunden mit einem so dicken Schleier bedecken soll, dass vom Bilde höchstens die hellsten Lichter wahrnehmbar bleiben. Ich verwende eine Lösung von 1 : 100 und nehme davon auf je 3 cm^3 Pyrogalluslösung 1—2 Tropfen.

Bromkalium hemmt die Schleierwirkung des Jodkaliums, doch nur mässig. Mit 6 Tropfen KBr (1 : 20) auf 3 cm^3 Pyrogallus vermochte ich den Schleier, wie er einem Tropfen KJ (1 : 100) folgt, nur schwach zurückzuhalten.

Chlorkalium mindert den Schleier, doch auch die Empfindlichkeit und Intensität. Die Nachtheile überwiegen leider die Vortheile. So wenigstens bei Bromsilber, worauf sich meine Beobachtungen in diesem Falle allein beziehen. (Einmaliger Versuch.)

Gelatinehaltiger Entwickler führt zu einem feinkörnigen Bilde, hemmt auch die Schleierbildung. Gegen das Ende der Entwicklung kann man Bromkalium zusetzen, ohne Kornvergrösserung befürchten zu müssen. Ist das Bromkalium von Anfang an zugegen, dann erlangt das Bild grössere Klarheit, kommt aber langsam heraus. Enthält die Platte Jodsilber, so

wächst das Korn unter dem Einflusse des KBr. — Mein Entwickler enthielt auf 3 cm^3 Pyrogallus 2 cm^3 Gelatinelösung (1:50). (Einmaliger Versuch.)

Ammoniak, als Vorbad angewandt, erhöht die Empfindlichkeit und Intensität des Bromsilbers. Die Linien werden klarer, der Plattengrund lichter, obschon er grössere Flecken als ungebadet zeigt. Wesentlichen Nutzen gewährt diese Art des Sensibilisirens nicht, da das Baden (15 Minuten in 150 cm^3 Wasser und 1 cm^3 Ammoniak) und das darauffolgende Trocknen ziemlich zeitraubend sind. (Einmaliger Versuch.)

Das Gesammtresultat meiner Entwicklungsversuche kann ich dahin zusammenfassen, dass starkverdünntem Entwickler mit wenig Bromkalium, bei reichlicher Expositions-, aber kurzer Hervorrufungsdauer allenthalben der Vorzug gebürt.

e) Das Fixiren.

Es geschieht in einer Lösung von Fixirnatron (1:4) und geht weit schneller von statten als bei der gewöhnlichen Trockenplatte. Meine kleinen Platten zur Photographie des Spectrums in gasverdünntem Raume fixiren schon in wenigen Secunden. Nur wenn sie Jodsilber enthalten, sind Minuten dazu erforderlich. Jodbromsilberplatten sollten immer horizontal und mit der Bildseite nach unten im Fixirer liegen, damit die silberhaltige Lösung rasch zu Boden sinken und frischer, wirksamerer Platz machen könnte. Dieser Forderung entsprechen in ausgezeichneter Weise Abdampfschalen, die, passende Grösse vorausgesetzt, noch den Vortheil bieten, dass die Platte, wie sie auch liegen möge, nur an den Ecken und Kanten, nie aber auf der Bildfläche mit der Schale in Berührung kommen kann, sich auch ohne Schädigung sicher erfassen und aus dem Bade nehmen lässt, ein bei sehr kleinen Formaten nicht zu unterschätzender Vortheil. Ich wende gern zwei Bäder an, das zweite zum Nachfixiren. Das nachfixirte Negativ braucht nicht so gründlich ausgewaschen zu werden und hält sich besser. Nach einigem Gebrauch arbeitet das Bad langsamer, besonders beim Fixiren jodhaltiger Schichten. In diesem Falle ist es zu erneuern.

Platten ohne Bindemittel verlangen, wenn das Bild nicht davonschwimmen soll, sehr vorsichtige Behandlung. Hier muss natürlich die Bildseite nach oben liegen. Hat sich alles Bromsilber gelöst, dann saugt man die Fixage am besten mit einem Heber ab. Die Schale darf nicht bewegt, höchstens zuletzt etwas geneigt werden, was zum Ablaufen des auf der Platte verbliebenen Flüssigkeitsrestes zweckmässig ist. Die gleiche Vorsicht ist bei dem darauffolgenden Auswässern nothwendig. Wo es zulässig ist, kann man solche Schichten nach dem Entwickeln durch ein Gelatinebad befestigen. Dadurch wird das Fixiren wesentlich erleichtert.

f) Das Auswässern nach dem Entwickeln und nach dem Fixiren.

Hat die Platte einen Gelatineüberzug und ist zugleich das Bromsilber gelatinehaltig, dann verträgt sie einen ziemlich kräftigen Wasserstrahl ohne jeden Nachtheil. In jedem Falle kann sie unbedenklich in flott fliessendem Wasser gewaschen werden. Grössere Vorsicht ist nöthig, wenn der Gelatineüberzug fehlt, oder wenn das Bromsilber keine Gelatine enthält, zumal wenn es in dicker Schicht vorhanden ist. Hier ist stehendes Wasser vorzuziehen. Im Allgemeinen sitzt der Überzug fester, als man denken sollte.

Nach dem Entwickeln wässere ich nur wenige Secunden, und wo es sich um plötzliche Unterbrechung der Entwicklung handelt, tauche ich die Platte ungewaschen in die Fixage. Die fixirte Platte halte ich 1—2 Minuten in den Wasserstrahl. Das genügt vollständig, um das Fixirnatron zu beseitigen. Grössere Formate — ich arbeite nur mit sehr kleinen — werden etwas mehr Zeit beanspruchen. Auf Fliesspapier trocknen meine Plättchen in 2—3 Minuten. Das sich kurz nach dem Aufstellen am unteren Rande ansammelnde Wasser geht nur zum Theil in das Fliesspapier über. Den Rest schleudere ich ab oder lasse ihn von einem Streifen Fliesspapier aufsaugen, den ich am Plattenrande entlangführe.

Man hüte sich, die Bildseite mit dem Finger oder sonst wie zu berühren, so lange sie noch nass ist. Denn so widerstands-

fähig wie sie sich auch dem Wasserstrahle gegenüber erweist, so verletzlich ist sie doch in diesem Falle.

Soll die Platte recht rasch trocknen, was zur besseren Beurtheilung der Bildschärfe beim Focussiren erwünscht ist, dann halte ich sie gleich nach dem Abschleudern des Wassers in nächste Nähe des heissen Ofens oder des Lampencylinders. Ein Schmelzen der Schicht, wie bei Gelatineemulsion, hat man hier nicht zu befürchten.

g) Das Negativbild.

Es bildet ein glanzloses Relief von schwarzgrauer oder schwarzbrauner Farbe. Beim Berühren mit dem Finger, noch mehr mit einem harten Gegenstande, wird es silberglänzend. Schon beim Abstäuben mit einem weichen Pinsel bekommt es häufig silberblinkende Linien. Enthält das Bromsilber keine Gelatine, dann ist die Bildfläche noch weit empfindlicher und die Anwendung des Pinsels zum Abstäuben ganz ausgeschlossen.[1] Durch einen Überzug aus Lack oder Gelatine lässt sich das Bild widerstandsfähiger machen, doch nicht ohne zugleich die Schärfe zu mindern. Das gilt wenigstens von Linienspectren. Die Verhältnisse liegen hier anders als bei der gewöhnlichen Trockenplatte: bei ihr befindet sich das Bild in der Gelatineschicht, bei der neuen Platte erscheint es gleichsam als ein Silberstäbchen auf dem Gelatineüberzug. Die Silberpartikel, die dieses Stäbchen ausmachen, liegen bei den besseren meiner Aufnahmen dicht auf- und nebeneinander. Daher auch deren ausgezeichnete Schärfe unter dem Mikroskop. Sobald nun Lack über die Stäbchen läuft, bildet sich eine Wulst, die selbstverständlich auf die Definition des Linienrandes, worauf es ja ankommt, nicht ohne nachtheiligen Einfluss bleiben kann.

h) Die Verstärkung.

Feinkörnigen Platten fehlt es zuweilen an Intensität. In diesem Falle sind sie zu verstärken. Ich hoffte anfänglich die

[1] Die Silberschicht auf gelatineüberzogener Platte gibt, mit dem Polirstahl bearbeitet, schon nach wenigen Strichen eine silberglänzende Fläche, die sich so widerstandsfähig erweist, dass sie mit Leder und Pariser Roth bis zum Hochglanz polirt werden kann.

Silberverstärkung mit Vortheil anwenden zu können. Die Versuche damit haben aber meinen Erwartungen nicht entsprochen. Dagegen habe ich durch Baden der Platte in Quecksilberchlorid (1:50), gründliches Waschen, nachfolgende Behandlung mit verdünntem Ammoniak (1:10) und abermaliges Waschen zufriedenstellende Ergebnisse erlangt.

Im Allgemeinen ist die Verstärkung bei Spectronegativen nicht zu empfehlen, weil sie mehr oder weniger ihren ursprünglichen Charakter und an Sauberkeit einbüssen. Das Bild sollte jederzeit die erforderliche Dichtigkeit mit aus dem Entwickler bringen.

i) Die Lichtempfindlichkeit.

Es liegen mir zur Zeit nur wenige Beobachtungen darüber vor. Zur eingehenden Behandlung dieses Gegenstandes fehlte mir bis vor Kurzem der nöthige Vacuumapparat. Was von meinen Ergebnissen für diesen Bericht von Belang ist, gebe ich nachstehend.

Bromsilber wird, wie bereits hervorgehoben wurde, durch Jodsilber und Gelatine lichtempfindlicher. Dasselbe tritt ein, wenn es sich auf Gelatine absetzt, wenn also das Bromsilberkorn nur einseitig von Gelatine berührt wird. Seine Empfindlichkeit erfährt hierdurch eine beträchtliche Steigerung.

Ich überzog blanke Glasplatten halbseitig mit Gelatine und liess Bromsilber in der vorgenannten Weise darauf absetzen. Die eine Hälfte dieses Plattenüberzuges bestand alsdann aus einem mit Bromsilber überzogenen Gelatinehäutchen, die andere aus Bromsilber allein. Beide Hälften berührten sich in einer geraden Linie, die bei Aufnahme des Spectrums das Wirkungsband der Länge nach halbirte. Jede Belichtung lieferte zwei den Hälften des Überzuges entsprechende vollständige Spectra. Dem Sonnenspectrum exponirt, erwies sich die Gelatinehälfte sicher vier- bis fünfmal so empfindlich als die Glashälfte.[1]

[1] Enthält der nasse Gelatineüberzug Blasen, dann tritt, wenn sie zerplatzen, die blanke Glasfläche zu Tage, und das sich darauf ablagernde Bromsilber bleibt in Folge verminderter Empfindlichkeit in der Entwicklung zurück und veranlasst die Bildung heller Punkte und kreisförmiger Flecke. Gelatinehaltiges Bromsilber zeigt diesen Übelstand nicht.

Diese Aufnahmen wurden wiederholt mit Bromsilber, das in Gegenwart von Ammoniak und mit anderem, das aus gelatinehaltiger Lösung gefällt worden war. Auch wurde auf die Dicke der Bromsilberschicht Rücksicht genommen. Bei dem mit Ammoniak behandelten Bromsilber trat wieder derselbe Unterschied der Plattenhälften zu Tage wie vorher, bei dem gelatinehaltigen hingegen blieb der Gelatineüberzug, wie zu erwarten war, wirkungslos. Die Erklärung dafür liegt nahe: das Bromsilber ist hier von Gelatine durchsetzt und umhüllt und dadurch die Sensibilisirung so umfangreich, dass die weit schwächere Wirkung des Gelatinehäutchens der Platte ohne sichtbaren Einfluss bleibt. Dieselbe Erscheinung zeigt sich bei gelatinefreiem Bromsilber, sobald es in dicker Schicht zur Belichtung gelangt. Wesshalb ist ebenfalls leicht einzusehen: die photochemische Wirkung der Lichtstrahlen erstreckt sich in diesem Falle nur auf den oberen Theil der Schicht, der nicht, wie die direct auf den Plattenüberzug abgelagerten Bromsilberpartikel, unter dem brombindenden Einfluss (H. W. Vogel) der Gelatine stehen. Und in diesem Falle müssen sich die beiden Hälften ganz gleich verhalten.

Dem Sonnenlicht gegenüber ist die neue Platte wenig empfindlich. In einer Seehöhe von 120 *m* (Beobachtungsort Leipzig) erreichte ich mit ihr bei Junisonne die Wellenlänge 293·97 μμ, mit hochempfindlicher Trockenplatte unter denselben Aufnahmebedingungen schon im dritten Theil der Expositionsdauer die Wellenlänge 293·70 μμ.[1]

Bei so anhaltender Belichtung (40 Minuten), wie hierzu nöthig war, bricht das Spectrum der ultraviolettempfindlichen Platte als undurchsichtiges Wirkungsband scharf bei der Wellenlänge 297·38 μμ ab, und läuft von da an in klaren Linien auf schleierfreiem Plattengrunde bis zur Wellenlänge 293·97 μμ weiter. Dieser glasklare Grund in der Umgebung des brech-

[1] Beide Linien gehören bereits der von Herrn Oskar Simony entdeckten Verlängerung des ultravioletten Sonnenspectrums an. Ihre Wellenlängen entnehme ich der nach Simony'schen Originalphotogrammen von Herrn A. Cornu in den Comptes rendus (t. CXI, Sitzung vom 22. December 1890) veröffentlichten Zeichnung dieses sich bis zur Wellenlänge 292·22 μμ erstreckenden Spectralbezirkes.

barsten Sonnenultraviolett ist ein Vorzug der neuen Platte. Unter gleichen Umständen gibt die gewöhnliche Platte dicken Schleier, worin die brechbarsten Linien zuerst an Deutlichkeit verlieren, und wenn man sie durch fortgesetzte Belichtung schärfer zu photographiren versucht, sogar ganz verschwinden. Die Beobachtung des brechbarsten Sonnenlichtes wird durch diesen Übelstand der gewöhnlichen Platte beträchtlich erschwert. Und gleichwohl verdient sie wegen ihrer grösseren Empfindlichkeit hiebei immer noch den Vorzug.

Die neue Platte kann nur dort in Frage kommen, wo sie sich durch Intensität und Empfindlichkeit zugleich auszeichnet. Das ist erst von der Wellenlänge 220 $\mu\mu$ an der Fall. Von hier an steigt ihre Empfindlichkeit. Doch ist ihre grössere Leistungsfähigkeit mehr auf ihre ungewöhnliche Intensität und auf den Umstand gegründet, dass sie, infolge ihrer geringen Empfindlichkeit für die minderabgelenkten Strahlen, unbehindert lange belichtet werden kann, ohne, wie es die gewöhnliche Trockenplatte thut, dick zu verschleiern. Die Ursache dieses Schleiers ist das aus dem Innern des Prismas und der Linsen des Spectralapparates stammende zerstreute Licht, das der Hauptsache nach aus den Strahlen besteht, wofür Bromsilbergelatineemulsion vielmal empfindlicher ist als reines Bromsilber.

Nachdem die Gelatine meine Aufnahmen der minderabgelenkten Strahlen des neuen Spectralgebietes so sichtlich begünstigt hatte, lag keine Veranlassung vor, sie bei Erschliessung des übrigen Spectrums bis zur Wellenlänge 100 $\mu\mu$ fallen zu lassen. Erst an der Wirkungsgrenze der angewandten Platte erregte ihre Gegenwart mein Bedenken. Die Umstände haben mir leider bisher nicht gestattet, der Lösung dieser Frage näher zu treten. Über das Verhalten des reinen Bromsilbers gegenüber der Wellenlänge 100 $\mu\mu$ soll erst die Fortsetzung meiner Plattenversuche Aufschluss geben, die, wie die folgende Überlegung zeigt, nicht ohne Aussicht auf Erfolg ist.

Berücksichtigt man nämlich, dass Gelatine schon in einer Dicke von nur 0·00004 *mm* die Strahlen der Wellenlänge 185·2 $\mu\mu$ empfindlich schwächt, und dass sie wahrscheinlich in noch viel dünnerer Schicht bei der Wellenlänge 182·0 $\mu\mu$ alle photographische Wirkung der gewöhnlichen Trockenplatte

aufhebt, dass anderseits der Verlauf ihrer Absorptionscurve zwischen 220 μμ und 182 μμ auf keine Zunahme, wohl aber auf eine Verminderung ihrer Durchlässigkeit für die Strahlen des stärker abgelenkten Nachbargebietes schliessen lässt, so muss es fast überraschen, dass die Aufnahme des umfangreichen Gebietes der kleinsten Wellenlängen, wie ich mir den zwischen 185·2 μμ und 100 μμ liegenden Spectrumtheil zu bezeichnen erlaubt habe, in Gegenwart von Gelatine ausführbar ist. Eine Erklärung hiefür dürfte allein in dem sensibilisirenden Einfluss der Gelatine zu finden sein, der möglicherweise im Wettstreit mit der Absorption die Oberhand behält und erst dort unterliegt, wo der Wirkungsbereich der neuen Platte endet.

Unter solchen Umständen lässt sich erwarten, dass die Erschliessung des unbekannten Strahlengebietes jenseits der Wellenlänge 100 μμ dem reinen Silberhaloid vorbehalten ist. Doch wird die Gelatine auch hiebei kaum entbehrlich sein, da sie als Unterguss angewandt, das einzige zulässige Mittel zur Steigerung der Empfindlichkeit bildet.

k) Die Haltbarkeit der Platte.

Ich habe in verschiedener Weise hergestellte Platten Jahr und Tag aufbewahrt, um sie von Zeit zu Zeit auf ihre Haltbarkeit zu prüfen. Sie lagen unverpackt in einem lichtdichten Schranke. Gegen den Einfluss der Atmosphärilien waren sie sonach nicht geschützt. Nach meinen an Gelatineemulsion gemachten Erfahrungen befürchtete ich, dass sich alsbald Unregelmässigkeiten an ihrem Überzuge, vor allem grösserer Schleier am Rande, stärkeres Hervortreten der Oberflächenfehler einstellen würde. Aufnahmen damit haben jedoch das Gegentheil gelehrt. Die Platten arbeiteten nach dem Aufbewahren eher reiner als kurz nach ihrer Herstellung; einzelne Sorten waren auch empfindlicher geworden. Vergleichende Versuche mit dem Sensitometer fehlen mir noch. Meine Erfahrung gründet sich allein auf die photographische Aufnahme der neuen Strahlen jenseits 185 μμ. Hienach ist die neue Platte ebenso haltbar wie die gewöhnliche Trockenplatte. Verglichen mit solchen, die mit Silberoxydammoniakemulsion überzogen sind, erweist sie sich sogar vielmal haltbarer.

Über die Verwendung der ultraviolettempfindlichen Platte.

Die Platte war von Haus aus zur Photographie des Spectrums bestimmt. Dazu hat sie auch bisher allein gedient. Was sie leistet, geht aus den vorstehenden Mittheilungen, noch mehr aus meinem früheren Bericht hervor, doch nicht minder, was ihr noch fehlt. Ich habe ihre Licht- und Schattenseiten ebenmässig hervorgehoben. Denn ich möchte nicht mehr versprochen haben, als sie zuverlässig zu bieten vermag. Enttäuschungen bei ihrer Verwendung halte ich darum für gänzlich ausgeschlossen.

Als Massstab für ihre gegenwärtige Leistungsfähigkeit können die Spectra 11 und 12 (Taf. V) des eben genannten Berichtes[1] angesehen werden. Doch ist dabei zu berücksichtigen, dass die Definition dieser Spectra durch Krystallfehler des angewandten Flussspathprismas gelitten hat, so dass dieselbe Platte, dem Beugungsspectrum exponirt, ein klareres Bild gegeben hätte. Den Beweis hierfür haben meine mehr als 300mal vergrösserten Gitteraufnahmen der Strahlen 162 $\mu\mu$ geliefert.

Die Schärfe meiner Aufnahmen hat hie und da zu dem Glauben verleitet, dass die neue Platte der Astrophotographie Vortheile gewähren könne. Hierauf gerichtete Bestrebungen dürften jedoch zwei bedenklichen Hindernissen begegnen: dem Mangel an Empfindlichkeit und der Bildung scheibenförmigen Negativkornes.

Für die Lichtstrahlen, womit es die Astrophotographie zu thun hat, ist die bisher benutzte Platte mehrmals empfindlicher als die neue. An eine Verwendung dieser wäre demnach nur bei entsprechend verlängerter Belichtung zu denken. Die Astrophotographie braucht aber das gerade Gegentheil: Verkürzung der Belichtungsdauer. Ferner das von chemischem Schleier herrührende, scheibenförmige Negativkorn, wovon bereits vorhin ausführlich die Rede war. Es ist dem Bilde eines Sternes so ähnlich, dass z. B. einzelne meiner Platten ganz das Aussehen einer Aufnahme des gestirnten Himmels haben. Unter

[1] Siehe diese Sitzungsberichte, Bd. CII, Abth. II. a,: »Über die Photographie der Lichtstrahlen kleinster Wellenlängen«, II. Theil, mit 5 Tafeln und 5 Textfiguren. S. 625—694. (1893)

solchen Umständen wären bei Sternaufnahmen Irrthümer kaum zu vermeiden. Denn auch die Vorsichtsmassregeln, die man bisher zum Kennzeichen der Plattenfehler angewandt hat, würden, weil das genannte Korn häufig sehr zahlreich auftritt, nicht zu dem gewünschten Erfolge führen. Beide Übelstände überwiegen aber den Vortheil der grösseren Bildschärfe in so fühlbarem Maasse, dass die neue Platte der Astrophotographie nicht empfohlen werden kann.

Und der Berufsphotographie? Noch weniger. Das einzige, wozu sie hier Verwendung finden könnte, wären Strichreproductionen. Die vortreffliche Schärfe, womit sie lineare Gebilde wiedergibt, ihre absolute Undurchsichtigkeit, würden ihr hiezu gewiss den ersten Rang sichern, wenn die Herstellung tadelloser Plattenüberzüge von grösserem Umfange nicht nur bedeutenden Schwierigkeiten begegnete, sondern auch zu zeitraubend und kostspielig wäre, um rentiren zu können.

Zur Landschafts- und Portraitphotographie, obgleich ich sie hiezu noch nicht benutzt habe, ist sie aus den eben genannten Gründen, aber mehr noch des Mangels an Halbtönen halber, ganz unbrauchbar.

Sie entspricht vorläufig nur ihrer ursprünglichen Bestimmung: der Beobachtung der Lichtstrahlen jenseits der Wellenlänge 220 $\mu\mu$. Hiefür aber ist sie gegenwärtig noch unersetzlich.

Über eine algebraische Theorie der Schaaren nichtadjungirter Berührungscurven, welche zu einer algebraischen Curve gehören

von

Wilhelm Weiss,

Assistent für Mathematik an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 13. Juli 1893.)

Die Arbeit, welche ich mir hiemit der hohen Akademie vorzulegen erlaube, ist eine Fortsetzung der in diesen Sitzungsberichten, Bd. XCIX unter gleichem Titel erschienenen Abhandlung. Es werden in derselben zum erstenmale die Systeme nichtadjungirter Berührungscurven einer algebraischen Curve untersucht, wenn neben den gewöhnlichen auch nur erst die einfachsten höheren Singularitäten, nämlich dreifache Punkte mit getrennten Tangenten, auftreten. Es ist leicht zu sehen und bekannt, dass auch schon hiezu der gegenwärtige Stand der Theorie der Abel'schen Functionen nicht hinreicht, weil das zugehörige Umkehrproblem ein allgemeineres ist. Die Behandlung ist algebraisch, und die Resultate dürften schon desshalb nicht ganz ohne Interesse sein, weil aus ihnen hervorgeht, wie sehr anders diese Systeme von Berührungscurven durch einen dreifachen Punkt beeinflusst werden, als etwa durch drei getrennte Doppelpunkte, welche ja in mancher anderen Hinsicht (Classe, Geschlecht u. s. w.) dem dreifachen Punkte äquivalent sind.

Es sei $f(s,z) = 0$ die Grundcurve und $z = 0$, $s = 0$ ein dreifacher Punkt von f mit getrennten Tangenten

$$f(s,z) \equiv (f_{30}z^3 + f_{31}z^2s + f_{32}zs^2 + f_{33}s^3) + f_4 + f_5 + \dots$$

$\mathfrak{A}^{(0)}(s,z)$ sei eine Curve, welche den dreifachen Punkt nicht enthält, f in einer Gruppe G_{2Q} berührt (in Q Punkten) und noch

in einer Restgruppe G_R schneidet. Das Ziel der folgenden Untersuchung ist dann im Wesentlichen die Bestimmung der Gesammtheit $\mathfrak{A}$ aller Curven gleicher Ordnung und Art wie $\mathfrak{A}^{(0)}$, welche durch G_R gehen.

Es mögen $A^{(0)}(s,z) = 0$; $A(s,z) = 0$ und

$$P(s,z) \quad \lambda_0 P^{(0)} + \lambda_1 P^{(1)} + \lambda_2 P^{(2)} + \ldots \lambda_2 P^{(q)} = 0$$

dieselbe Bedeutung haben wie in §. 5 der Abhandlung I. Sollen in den Berührungsgruppen von A Curven $\mathfrak{A}$ berühren, so muss nach §. 5, Gleichung 3) die Identität bestehen:

$$\mathfrak{A}^{(0)} P^2 = \mathfrak{A} A^{(0)\,2} + \mathfrak{B} f,$$

welche in der Umgebung von $s = 0$, $z = 0$ die Identität

$$\mathfrak{A}^{(0)} P^2 = \mathfrak{A}'(s,z) A^{(0)\,2} + \mathfrak{B}'(s,z) f$$

zur nothwendigen und hinreichenden Voraussetzung hat.

Da im vorliegenden Falle $\sigma = 0$ ist, tritt die l. c. §. 5 angegebene Vereinfachung ein, so dass die Bedingungsidentität die folgende ist:

$$P^2 = \mathfrak{A}'(s,z) A^{(0)\,2} + \mathfrak{B}'(s,z) f, \qquad 1)$$

$\mathfrak{A}'(s,z)$, $\mathfrak{B}'(s,z)$ sind Potenzreihen.

Zum Bestehen dieser Identität an der Stelle $s = 0$, $z = 0$ sind nach der allgemeinen Theorie durch die Parameter λ von P. $\frac{1}{2}\, 3.(3-1) = 3$ Bedingungsgleichungen zu erfüllen.

Soll der vorliegende Specialfall auch durch die Bezeichnung ersichtlich sein, so hat man:

$$(P_2 + P_3 + \ldots)^2 = (\mathfrak{A}'_0 + \mathfrak{A}'_{10} z + \mathfrak{A}'_{11} s + \ldots)(A_2^{(0)} + A_3^{(0)} + \ldots)^2 + \\ + (\mathfrak{B}'_{10} z + \mathfrak{B}'_{11} s + \mathfrak{B}'_{20} z^2 + \mathfrak{B}'_{21} zs + \ldots)(f_3 + f_4 + \ldots). \qquad 1)$$

Die drei Bedingungsgleichungen ergeben sich aus:

$$(P_{20} z^2 + P_{21} zs + P_{22} s^2)^2 = \mathfrak{A}'_0 (A_{20}^{(0)} z^2 + A_{21}^{(0)} zs + A_{22}^{(0)} s^2)^2 + \\ + (\mathfrak{B}'_{10} z + \mathfrak{B}'_{10} s)(f_{30} z^3 + f_{31} z^2 s + f_{32} zs^2 + f_{33} s^3) \qquad 2)$$

und

$$2P_2P_3 \equiv (\mathfrak{A}'_{10}z+\mathfrak{A}'_{11}s)A_2^{(0)2}+2\mathfrak{A}'_0A_2^{(0)}A_3^{(0)}+$$
$$+(\mathfrak{B}'_{10}z+\mathfrak{B}'_{11}s)(f_{40}z^4+f_{41}z^3s+f_{42}z^2s^2+f_{43}zs^3+f_{44}s^4)+$$
$$+(\mathfrak{B}'_{20}z^2+\mathfrak{B}'_{21}zs+\mathfrak{B}'_{22}s^2)(f_{30}z^3+f_{31}z^2s+f_{32}zs^2+f_{33}s^3). \quad 3)$$

Die Gleichung 2) liefert zwei der Bedingungsgleichungen; denn sollen die Constanten $\mathfrak{A}'_0$, $\mathfrak{B}'_{10}$, $\mathfrak{B}'_{11}$ so bestimmt werden können, dass 2) eine Identität wird, so ergeben sich für dieselben durch Coëfficientenvergleichung fünf Gleichungen und also durch Elimination zwei Bedingungen für die Grössen $P_{20}^2 \ldots P_{20}P_{21} \ldots$.

Beide Gleichungen sind in den Parametern der Schaar P quadratisch, da P_{20}, P_{21}, P_{22} dieselben linear enthalten. Die Identität 3) gibt die letzte Bedingung, da zur Bestimmung der fünf Constanten $\mathfrak{A}'_{10}$, $\mathfrak{A}'_{11}$, $\mathfrak{B}'_{20}$, $\mathfrak{B}'_{21}$, $\mathfrak{B}'_{22}$ sechs lineare Gleichungen vorliegen.

Auch diese Bedingungsgleichung ist in den λ quadratisch, da sie die Producte $P_{20}P_{30}\ldots$ linear enthält.

Die Untersuchung dieser drei Bedingungsgleichungen bildet den Kernpunkt der vorliegenden Behandlungsweise der Berührungsschaaren. Die Berührungsgruppen der nichtadjungirten Berührungsschaar $\mathfrak{A}$ sind offenbar zwar specielle, aber doch lineare Schaaren. Gerade diese Schaaren werden auch durch jene Curven P ausgeschnitten, deren Parameter jenen drei Bedingungen genügen. Darum ist a priori einzusehen, dass jede der quadratischen Bedingungsgleichungen in zwei Linearfactoren zerfallen muss, und nur die wirkliche Zerfällung kann als abschliessende Erledigung angesehen werden.

Die beiden aus 2) folgenden Bedingungsgleichungen gestalten sich, sammt ihrer Zerlegung in Linearfactoren, wesentlich einfacher, wenn man die drei Wurzeln der Form:

$$f_{30}z^3+f_{31}z^2s+f_{32}zs^2+f_{33}s^3=0$$

einführt. Diese seien w_1, w_2, w_3.

Dann geht 2) über in:

$$(P_{20}w_i^2+P_{21}w_i+P_{22})^2=\mathfrak{A}'_0(A_{20}^{(0)}w_i^2+A_{21}^{(0)}w_i+A_{22}^{(0)})$$
$$i=1,2,3.$$

Führt man noch die Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} P_{20}\,w_i^2+P_{21}\,w_i+P_{22} &= P_2(w_i)\\ A_{20}^{(0)}\,w_i^2+A_{21}^{(0)}\,w_i+A_{22}^{(0)} &= A_2^{(0)}(w_i)\\ P_{30}\,w_i^3+P_{31}\,w_i^2+P_{32}\,w_i+P_{33} &= P_3(w_i)\\ A_{30}^{(0)}\,w_i^3+A_{31}^{(0)}\,w_i^2+A_{32}^{(0)}\,w_i+A_{33}^{(0)} &= A_3^{(0)}(w_i), \end{aligned}$$

so erhält man

$$\begin{aligned} P_2^2(w_1) &= \mathfrak{A}_0'(A_2^{(0)}(w_1))^2\\ P_2^2(w_2) &= \mathfrak{A}_0'(A_2^{(0)}(w_2))^2\\ P_2^2(w_3) &= \mathfrak{A}_0'(A_2^{(0)}(w_3))^2. \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich durch Elimination von $\mathfrak{A}_0'$ die beiden Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} P_2^2(w_1)(A_2^{(0)}(w_2))^2 - P_2^2(w_2)(A_2^{(0)}(w_1))^2 &= 0\\ P_2^2(w_1)(A_2^{(0)}(w_3))^2 - P_2^2(w_3)(A_2^{(0)}(w_1))^2 &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

welche unmittelbar in Linearfactoren zerlegt werden können und das folgende System bilden:

$$\begin{aligned} P_2(w_1)A_2^{(0)}(w_2)+\varepsilon\, P_2(w_2)A_2^{(0)}(w_1) &= 0\\ P_2(w_1)A_2^{(0)}(w_3)+\varepsilon' P_2(w_3)A_2^{(0)}(w_1) &= 0\\ \varepsilon = \pm 1 \qquad \varepsilon' &= \pm 1. \end{aligned} \tag{4'}$$

Die Identität 3), welche die letzte der drei Bedingungsgleichungen liefert, wird bei Einführung der w_i und der obigen Bezeichnungen durch das folgende System ersetzt:

$$\begin{aligned} 2P_2(w_i)P_3(w_i) = (\mathfrak{A}_{10}'w_i+\mathfrak{A}_{11}')(A_2^{(0)}(w_i))^2+2\mathfrak{A}_0'A_2^{(0)}(w_i)A_3^{(0)}(w_i)+\\ +(\mathfrak{B}_{10}'w_i+\mathfrak{B}_{11}')f_4(w_i)\\ i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

worin

$$f_4(w_i) = f_{40}w_i^4+f_{41}w_i^3+f_{42}w_i^2+f_{43}w_i+f_{44}.$$

Die Gleichung selbst folgt unmittelbar durch Elimination von $\mathfrak{A}_{10}'$, $\mathfrak{A}_{11}'$, wenn man nur noch irgend drei Gleichungen hinzunimmt, die bei der Behandlung der Identität 2) als zur Bestimmung von $\mathfrak{A}_0'\mathfrak{B}_{10}'\mathfrak{B}_{11}'$ geeignet erkannt sind. So erweist es sich von Vortheil, die folgende Combination von sechs Gleichungen zu benützen:

$$2P_2(w_i)P_3(w_i) = \mathfrak{A}'_{10}w_1(A_2^{(0)}(w_i))^2 + \mathfrak{A}'_{11}(A_2^{(0)}(w_i))^2 + 2\mathfrak{A}'_0 A_2^{(0)}(w_i)A_3^{(0)}(w_i) + \mathfrak{B}'_{10}w_i f_4(w_i) + \mathfrak{B}'_{11}f_4(w_i)$$

$$i = 1, 2, 3.$$

$$P_2^2(w_1) = \mathfrak{A}'_0(A_2^{(0)}(w_i))^2 \qquad 5)$$

$$(P_2(w_1))^2 A_{20}^{(0)2} - P_{20}^2(A_2^{(0)}(w_1))^2 = -\mathfrak{B}'_{10}f_{30}$$

$$(P_2(w_1))^2 A_{22}^{(0)} - P_{22}(A_2^{(0)}(w_1))^2 = -\mathfrak{B}'_{11}f_{33}.$$

Die letzten zwei Gleichungen entstehen, wenn man in der Identität 2), die nach Erfüllung der Bedingungen 4) in der That besteht, einmal $z = 1$, $s = 0$, das anderemal $s = 1$, $z = 0$ setzt.

Die gesuchte letzte Bedingungsgleichung ist dann:

$$\begin{vmatrix} P_2(w_1)P_3(w_1) & w_1(A_2^{(0)}(w_1))^2 & (A_2^{(0)}(w_1))^2 & A_2^{(0)}(w_1)A_3^{(0)}(w_1) & w_1 f_4(w_1) & f_4(w_1) \\ P_2(w_2)P_3(w_2) & w_2(A_2^{(0)}(w_2))^2 & (A_2^{(0)}(w_2))^2 & A_2^{(0)}(w_2)A_3^{(0)}(w_2) & w_2 f_4(w_2) & f_4(w_2) \\ P_2(w_3)P_3(w_3) & w_3(A_2^{(0)}(w_3))^2 & (A_2^{(0)}(w_3))^2 & A_2^{(0)}(w_3)A_3^{(0)}(w_3) & w_3 f_4(w_3) & f_4(w_3) \\ (P_2(w_1))^2 & 0 & 0 & (A_2^{(0)}(w_1))^2 & 0 & 0 \\ (P_2(w_1))^2 A_{20}^{(0)2} - P_{20}^2(A_2^{(0)}(w_1))^2 & 0 & 0 & 0 & -f_{30} & 0 \\ (P_2(w_1))^2 A_{22}^{(0)2} - P_{22}^2(A_2^{(0)}(w_1))^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -f_{33} \end{vmatrix} = 0. \qquad 6)$$

Die Parameter λ der Schaar P sind nur in der ersten Colonne enthalten, und es ist ersichtlich, dass sie in der Gleichung 6) quadratisch auftreten. Die Zerlegung in zwei Linearfactoren bietet hier schon bedeutende Schwierigkeiten; sie wird aber gerade durch die Auswahl des Gleichungssystems 5) erleichtert. Es lässt sich

nämlich mit Hilfe der früheren Relationen die Determinante 6) so umformen, dass die erste Colonne irgend eine der drei Grössen $P_2(w_1)$, $P_2(w_2)$, $P_2(w_3)$ als Factor enthält.

Zunächst folgen aus den Gleichungen 4) die Beziehungen

$$\begin{aligned} P_2(w_2) &= -\varepsilon \frac{A_2^{(0)}(w_2)}{A_2^{(0)}(w_1)} P_2(w_1) \\ P_2(w_3) &= -\varepsilon' \frac{A_2^{(0)}(w_3)}{A_2^{(0)}(w_1)} P_2(w_1). \end{aligned} \tag{7}$$

Die beiden letzten Elemente der ersten Colonne:

$$\begin{aligned} &(P_2(w_1))^2 A_{20}^{(0)2} - P_{20}^2 (A_2^{(0)}(w_1))^2 \\ &(P_2(w_1))^2 A_{22}^{(0)2} - P_{22}^2 (A_2^{(0)}(w_1))^2 \end{aligned}$$

enthalten die Parameter λ auch in den Formen P_{20}^2, P_{22}^2. Es ist daher nöthig, diese Grössen durch $P_2(w_1)$, $P_2(w_2)$, $P_2(w_3)$ auszudrücken.

Dazu führen die Gleichungen

$$\begin{aligned} P_{20} w_1^2 + P_{21} w_1 + P_{22} &= P_2(w_1) \\ P_{20} w_2^2 + P_{21} w_2 + P_{22} &= P_2(w_2) \\ P_{20} w_3^2 + P_{21} w_3 + P_{22} &= P_2(w_3). \end{aligned}$$

Setzt man

$$\Delta = \begin{vmatrix} w_1^2 & w_1 & 1 \\ w_2^2 & w_2 & 1 \\ w_3^2 & w_3 & 1 \end{vmatrix},$$

so folgt aus der Annahme, dass $s = 0$, $z = 0$ für die Grundcurve $f_3(s, z) + f_4(s, z) + \ldots = 0$ ein dreifacher Punkt mit getrennten Tangenten ist, dass Δ von Null verschieden sein muss.

Man hat daher

$$\begin{aligned} \Delta P_{20} &= P_2(w_1)(w_2 - w_3) + P_2(w_2)(w_3 - w_1) + P_2(w_3)(w_1 - w_2) \\ \Delta P_{21} &= P_2(w_1)(w_3^2 - 1) + P_2(w_2)(w_1^2 - 1) + P_2(w_3)(w_2^2 - 1) \\ \Delta P_{22} &= P_2(w_1) w_2 w_3 (w_2 - w_3) + P_2(w_2) w_3 w_1 (w_3 - w_1) + \\ &\qquad + P_2(w_3) w_1 w_2 (w_1 - w_2). \end{aligned} \tag{8}$$

Unter Berücksichtigung von 7) und 8) geht die Bedingungsgleichung 6) in die folgende über:

$$\begin{vmatrix} P_3(w_1) & w_1(A_2^{(0)}(w_1))^2 & (A_2^{(0)}(w_1))^2 & A_2^{(0)}(w_1)A_3^{(0)}(w_1) & w_1 f_4(w_1) & f_4(w_1) \\ -\varepsilon\frac{A_2^{(0)}(w_2)}{A_2^{(0)}(w_1)}P_3(w_2) & w_2(A_2^{(0)}(w_2))^2 & (A_2^{(0)}(w_2))^2 & A_2^{(0)}(w_2)A_3^{(0)}(w_2) & w_2 f_4(w_2) & f_4(w_2) \\ -\varepsilon'\frac{A_2^{(0)}(w_2)}{A_2^{(0)}(w_1)}P_3(w_3) & w_3(A_2^{(0)}(w_3))^2 & (A_2^{(0)}(w_3))^2 & A_2^{(0)}(w_3)A_3^{(0)}(w_3) & w_3 f_4(w_3) & f_4(w_3) \\ P_2(w_1) & 0 & 0 & (A_2^{(0)}(w_1))^2 & 0 & 0 \\ P_2(w_1)(A_{22}^{(0)2}-(A_2^{(0)}(w_1))^2 M) & 0 & 0 & 0 & -f_{30} & 0 \\ P_2(w_1)(A_{20}^{(0)2}-(A_2^{(0)}(w_1))^2 N) & 0 & 0 & 0 & 0 & -f_{33} \end{vmatrix} . P_2(w_1) = 0, \quad 9)$$

worin

$$M = \frac{1}{\Delta^2}\left\{(w_2-w_3)-\varepsilon\frac{A_2^{(0)}(w_2)}{A_2^{(0)}(w_1)}(w_3-w_1)-\varepsilon'\frac{A_2^{(0)}(w_3)}{A_2^{(0)}(w_1)}(w_1-w_2)\right\}^2$$

$$N = \frac{1}{\Delta^2}\left\{w_2w_3(w_2-w_3)-\varepsilon\frac{A_2^{(0)}(w_2)}{A_2^{(0)}(w_1)}w_3w_1(w_3-w_1)-\varepsilon'\frac{A_2^{(0)}(w_3)}{A_2^{(0)}(w_1)}w_1w_2(w_1-w_2)\right\}^2 .$$

Bezeichnen wir die letzte Determinante mit $\Delta_{\varepsilon\varepsilon'}$, so hat die Gleichung 6) schliesslich die Form:

$$\Delta_{\varepsilon\varepsilon'} . P_2(w_1) = 0. \qquad 10)$$

Die Gleichungen 4') und 10) stellen die drei gesuchten Bedingungsgleichungen in ihrer endgiltigen Gestalt dar, und es folgen aus ihnen unmittelbar die wesentlichsten Resultate über die hier in Frage kommenden Berührungscurvenschaaren.

Durch diese Gleichungen werden, wie bekannt, aus der Schaar P gerade jene Theilschaaren ausgesondert, in deren freien Schnittpunkten mit f, Curven $\mathfrak{A}$ berühren. Nun gibt es zur Erfüllung der ersten beiden Bedingungen, wegen der Combinationen $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon' = \pm 1$, vier Möglichkeiten und jeder derselben gehört eine und nur eine Möglichkeit zu, der letzten Bedingung $\Delta_{\varepsilon\varepsilon'} = 0$ zu genügen.

Die Bedingung 10) ist aber auch erfüllt, wenn man die Parameter von P der Gleichung $P_2(w_1) = 0$ genügen lässt; dann ist aber vermöge 7) auch $P_2(w_2) = 0$, $P_2(w_3) = 0$ und daher nach 8) auch:

$$P_{20} = P_{21} = P_{22} = 0, \tag{11}$$

so dass die drei Bedingungsgleichungen jetzt die Gleichungen 11) sind, und da dies für jede Combination $\varepsilon\varepsilon'$ eintritt, ist die durch 11) definirte Schaar von P vierfach zählend.

Die Curven der Schaar P, deren Parameter den Gleichungen 11) genügen, haben aber in $s = 0$, $z = 0$ nicht mehr wie alle anderen Curven P einen Doppelpunkt, sondern einen dreifachen Punkt, und es rücken daher von ihren freien Schnittpunkten drei in den dreifachen Punkt.

Da aber in jedem dieser Punkte eine Berührung zwischen f und $\mathfrak{A}$ statthaben muss, so gehören diesen besonderen P-Curven Berührungscurven $\mathfrak{A}$ zu, die in $s = 0$, $z = 0$ einen Doppelpunkt haben. (Drei uneigentliche Berührungen.) Aus dem Vorstehenden folgt:

Jedes System adjungirter Berührungscurven bestimmt vier von einander getrennte Schaaren von Berührungscurven, welche den dreifachen Punkt nicht enthalten und selbst Systeme bilden und überdies noch ein vierfach zählendes uneigentliches System, bei welchem drei Berührungspunkte dadurch in den dreifachen Punkt gerückt sind, dass die sämmtlichen Curven desselben dort einen Doppelpunkt haben.[1]

[1] Es sind für die $\mathfrak{A}$ ebenso drei Bedingungen f an drei Stellen zu berühren wie in $s = 0$, $z = 0$ einen Doppelpunkt zu haben.

Curve 4. Ordnung mit dreifachem Punkt. $p = 0$.

Die an vier Stellen berührenden Kegelschnitte bilden vier von einander verschiedene einfach unendliche Systeme; überdies treten die doppelt gezählten Geraden durch den dreifachen Punkt (vierfach zählend) als uneigentliches System auf.

Die überall berührenden Curven dritter Ordnung, welche den dreifachen Punkt nicht enthalten, bilden vier von einander verschiedene Schaaren von der Mannigfaltigkeit 3. Diese Schaaren sind nichtadjungirte Systeme, d. h. die 12 Berührungspunkte zweier Curven einer Schaar sind der volle Schnitt einer weiteren C_3. Überdies tritt bei unserer Bestimmung das System der adjungirten Berührungscurven C_3 vierfach zählend als uneigentliches System auf.

Curve 5. Ordnung mit einem dreifachen Punkt. $p = 3$.

Durch drei beliebige Punkte a_1, a_2, a_3 der C_5^3 gibt es $2^{2.3}.4 = 256$ Curven dritter Ordnung, welche sonst nur noch an sechs Stellen berühren.

Überdies treten die 64 adjungirten Berührungscurven dritter Ordnung, jede vierfach zählend, als uneigentliche Lösungen auf. Dabei können a_1, a_2, a_3 und die 12 Berührungspunkte zweier der obigen Curven niemals auf einer C_3 liegen.

Curve 6. Ordnung mit zwei dreifachen Punkten. $p = 4$.

Es sollen die überall berührenden Curven 4. Ordnung bestimmt werden, welche die dreifachen Punkte t und t' nicht enthalten. Nimmt man eine dieser Curven an und ergänzt auf irgend eine Weise ein adjungirtes System, zu welchem sie gehört, so treten in der zugehörigen Schaar P genau acht freie Parameter auf, welche in t und t' je den drei Bedingungen 4) und 10) zu unterwerfen sind.

Bezeichnet man die Combinationen, welche bezüglich t zu eigentlichen oder uneigentlichen Lösungen führen, mit t_e, beziehungsweise t_u und analog t'_e und t'_u, so kann man zusammennehmen: 1. $t_e t'_e$; 2. $t_e t'_u$; 3. $t_u t'_e$; 4. $t_u t'_u$, und es folgt: Die Curve 6. Ordnung mit zwei dreifachen Punkten hat $2^{2.4}.4^2 = 4096$ Systeme von überall berührenden Curven 4. Ord-

nung, die keinen der beiden dreifachen Punkte enthalten und die Mannigfaltigkeit 2 haben. Ferner treten 2048 Systeme auf, deren Curven in je einem der dreifachen Punkte adjungirt sind und sonst an neun Stellen berühren. Diese Systeme zählen als uneigentliche Lösungen vierfach. Endlich zählen die 256 Systeme adjungirter Berührungscurven 4. Ordnung 16fach als uneigentliche Lösungen.

Hat endlich allgemein eine Curve vom Geschlechte p etwa d dreifache Punkte, so gibt es durch eine geeignet gewählte Anzahl von festen Punkten auf der Curve im Ganzen: $2^{2p}.4^d$ Systeme von überallberührenden Curven, die keinen der dreifachen Punkte enthalten; $2^{2p}.d.4^{d-1}$ je vierfach zählende uneigentliche Systeme, die nur in je einem der dreifachen Punkte einen Doppelpunkt haben und die anderen $(d-1)$ nicht enthalten; $2^{2p}\cdot\binom{d}{2}\cdot 4^{d-2}$ je 4^2-fach zählende uneigentliche Systeme, die nur in je zweien der dreifachen Punkte adjungirt sind und sonst überall berühren u. s. w., endlich 2^{2p} je 4^d-fach zählende uneigentliche Systeme, die in allen dreifachen Punkten adjungirt sind.

Sind ausser den d dreifachen Punkten noch δ Doppelpunkte vorhanden, so ist, wegen §. 6, Abhandlung I, jede der erhaltenen Anzahlen mit 2^δ zu multipliciren, während sich die Mannigfaltigkeit jedes der Systeme um δ vermindert.

Treten endlich noch r Rückkehrpunkte hinzu, so erleidet die Mannigfaltigkeit jeder der bisher angegebenen Schaaren eine weitere Reduction um r, und eine jede derselben zeigt an den r Rückkehrpunkten folgendes Verhalten:

Die Schaar theilt sich in:

$$1;\ \binom{r}{1};\ \binom{r}{2};\ \binom{r}{3};\ldots\binom{r}{\nu}$$

Unterschaaren, welche nur je

$$0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots\nu$$

der Rückkehrpunkte enthalten (vergl. Abhandlung I, §. 6).

—

Über ein Interferenzrefractometer

(II. Mittheilung)

von

Ludwig Mach.

(Mit 1 Tafel und 15 Textfiguren.)

I. Vorbemerkungen.

1. In diesen Sitzungsberichten[1] habe ich ein von mir construirtes und in dem mechanischen Theil[2] auch von mir selbst ausgeführtes Interferenzrefractometer beschrieben. Über das Verhältniss meiner Arbeit zu jener von Zehnder,[3] beziehungsweise über die Unabhängigkeit meiner Construction, über deren Eigenthümlichkeit und den besonderen Zweck des Apparates ist an den angeführten Orten das Wesentliche angegeben. Eine Unterstützung von Seiten der kaiserl. Akademie, die ich hier dankend hervorheben muss, hat es möglich gemacht, den Apparat mit grösseren quadratischen Plangläsern von 10 *cm* Seite und 15 *mm* Dicke auszustatten.[4] Mit diesen habe ich seither mehrere Versuchsreihen durchgeführt, und konnte hiebei neue Erfahrungen sammeln. Hierin, sowie in dem Umstande, dass meine erste Publication etwas früher stattfinden musste,

---

[1] L. Mach, Über ein Interferenzrefractometer. Diese Sitzungsberichte, Bd. CI, Abth. II. a, Jänner 1892. — Vergl. auch die vorläufige Mittheilung im akad. Anzeiger vom 5. November 1891.

[2] Die ausführliche Beschreibung des mechanischen Theiles siehe in »Zeitschrift für Instrumentenkunde«, Berlin 1892. März.

[3] Vergl. »Zeitschrift für Instrumentenkunde«, Berlin 1891. August.

[4] Die Platten wurden in hoher Vollkommenheit von der Firma C. A. Steinheil Söhne in München hergestellt. Den Inhabern der Firma Herrn Dr. Adolf und Rudolf Steinheil bin ich für die eben so sorgfältige als vorzügliche Ausführung zu grösstem Danke verpflichtet.

als ich es beabsichtigt hatte, liegt der Anlass zu dieser neuen Mittheilung.

2. Alle Interferenzversuche beruhen im Wesentlichen darauf, dass durch irgend welche optische Mittel zwei Bilder $L_1 L_2$ derselben Lichtquelle L hergestellt werden, welche als cohärente Lichtquellen wirken. Die Symmetrieebene von $L_1 L_2$ enthält alle Punkte mit dem Gangunterschiede Null. Die Flächen gleichen Gangunterschiedes bilden eine Schaar von confocalen Rotationshyperboloiden mit den Brennpunkten $L_1 L_2$. Schneidet man diese Schaar durch eine Ebene E, welche als Schirm dient, oder welche durch einen optischen Apparat abgebildet wird, so schneidet E jene Schaar in Kegelschnitten, welche je nach der Stellung von E zwei, einen oder keinen unendlich fernen Punkt haben, also Hyperbeln, Parabeln oder Ellipsen sind. Eine zu $L_1 L_2$ parallele E gibt z. B. hyperbolische, eine zu $L_1 L_2$ senkrechte E hingegen kreisförmige Interferenzstreifen.

Bei dem Fresnel'schen Spiegelversuch und den verwandten Versuchsformen liegen $L_1 L_2$ für den Beobachter nebeneinander, bei dem Lummer'schen[1] Versuch hintereinander. Letzterer stellt eben einen besonderen Fall der kreisförmigen Interferenzstreifen vor.

3. Ist L keine punktförmige Lichtquelle, sondern besteht L aus einem System von Punkten, so erhält man so viele Interferenzstreifensysteme, als L Punkte enthält, welche Systeme sich im Allgemeinen gegenseitig verwischen. Nur unter besonderen Bedingungen ist ein System von leuchtenden Punkten zulässig, z. B. beim Fresnel'schen Versuch eine Spalte, welche der Durchschnittslinie der Spiegel parallel ist.

Verfolgt man den Strahlenkegel, welcher von einem Punkte des Newton'schen Glases in die Pupille des Auges gelangt, nach rückwärts, so sieht man, dass derselbe — wegen der geringen Dicke der farbengebenden Luftschichte — von zwei sich fast deckenden Strahlenkegeln herrührt, wobei jeder Richtung eines Strahles ein anderer leuchtender Punkt als Lichtquelle entspricht. Die Cohärenzbedingung ist hier bei beliebig ausgedehnter Lichtquelle von selbst erfüllt. Diese Eigenschaft

[1] Wiedemann's Annalen, Bd. 23 (1884), S. 49.

überträgt sich auf die Brewster-Jamischen Platten, welche Anordnung als eine Combination von zwei planen Newtonschen[1] Gläsern angesehen werden kann, und ebenso auf den hier zu behandelnden Interferenzapparat. Bei den Versuchen, welche eine ausgedehnte Lichtquelle zulassen, tritt die störende Rolle der Beugung ganz zurück.

II. Das Schema des Apparates.

4. Das theoretische Schema meines Interferenzapparates lässt sich am einfachsten in folgender Weise darstellen. Wir legen durch die Ecken *abcd* (Fig. 1) eines Rechteckes vier einfache, parallele, reflectirende, beziehungsweise brechende Ebenen $P_1 S_1 P_2 S_2$ unter 45° gegen die Rechteckseiten. In Wirklichkeit sind bei meinem Apparat, zum Unterschied von jenem Zehnder's, $P_1 P_2$ Glasplatten, von deren Dicke wir hier zunächst absehen, $S_1 S_2$ aber einfache Spiegel. Der kürzlich von Albert Michelson[2] beschriebene Apparat scheint sich von dem meinigen nur dadurch zu unterscheiden, dass $P_1 P_2$ eine Platte bilden. Ein Lichtpunkt l spiegelt sich an P_1 in m und hierauf an S_1 in l_1. Ebenso spiegelt sich l an S_2 in n und hierauf an P_2 in l_2, wobei l_1 und l_2 zusammenfallen. Die Dreiecke lam, mbl_1 u. s. w. sind durchaus rechtwinklig und gleichschenklig; P_1, S_1 u. s. w. stellen deren Symmetrieebenen dar. Eine geringe Verdrehung einer der Ebenen $P_1 S_1 P_2 S_2$ bewirkt, dass die Bilder l_1, l_2 nebeneinander fallen, womit die Bedingung zum Auftreten von Interferenzstreifen gegeben ist.

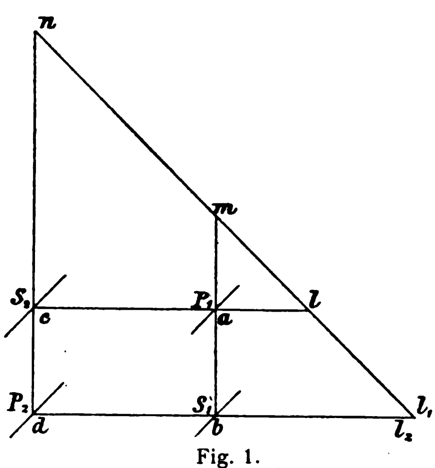


Fig. 1.

[1] Vergl. Mach und v. Weltrubsky. Diese Sitzungsberichte, Bd. 78, II. Abth., Juli 1878. — Mach, über die Stefan'schen Nebenringe am Newton'schen Farbenglas. Diese Sitzungsberichte, Bd. 67, II. Abth., April 1873.

[2] Bulletin de la Société Française de Physique, 5me Mai 1893.

5. Verfolgt man ausser den eben betrachteten von l (Fig. 2) ausgehenden Strahlen noch andere, so sieht man, dass keine neuen Fälle entstehen, wenn man die parallelen Platten durch die Ecken eines beliebigen Parallelogrammes legt; der früher erörterte Fall enthält diese schon in sich. Hiernach ist theoretisch die Justirung des Apparates eine sehr einfache. Man stellt drei der Ebenen, z. B. P_1, S_2, P_2 (Fig. 3) in beliebigen Entfernungen $S_2P_1 = m$, $S_2P_2 = n$ parallel. Stellt man S_1 ebenfalls parallel und macht P_2S_1 ebenfalls $= m$, so ist auch $P_1S_1 = n$ und die Justirung ist vollendet. Hiebei liegen P_1 und S_1 beziehungsweise auf derselben Seite von S_2 und P_2. Verschiebt man S_1 im Sinne des gefiederten Pfeiles um p, so kann die Störung sowohl durch die entgegengesetzte Verschiebung von S_2 aufgehoben werden, als auch durch die beiden Verschiebungen $\frac{p}{2}$ im Sinne der glatten Pfeile.

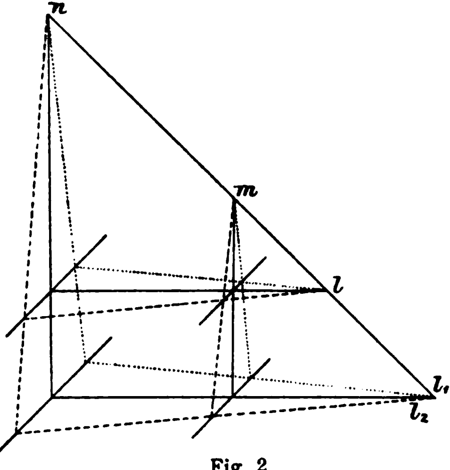


Fig. 2.

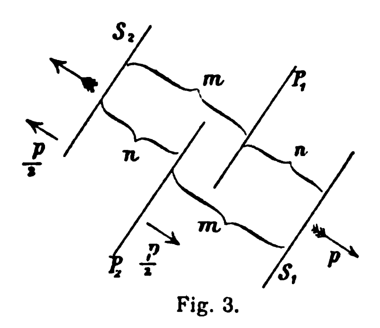


Fig. 3.

6. In der Figur 4*a* sind die beiden interferirenden Bündel I und II, soweit dieselben reell sind, beziehungsweise durch die Schraffirung /// und ⋛ angedeutet. Ein Hauptvorzug des Apparates, welchen derselbe mit dem Jamin'schen gemein hat, besteht darin, dass die beiden Bündel zwischen den Platten des Apparates virtuell in einander, in Wirklichkeit aber das eine ausserhalb des anderen verlaufen. Dadurch ist es möglich z. B. bei E eine verzögernde Einschaltung in das eine Bündel allein vorzunehmen, und bei

optischer Accommodation auf E zugleich doch auch die Streifen deutlich zu sehen. Bewirkt die Einschaltung eine von Stelle zu Stelle wechselnde Verzögerung, so ist dies an der Verkrümmung der Streifen deutlich zu sehen.[1]

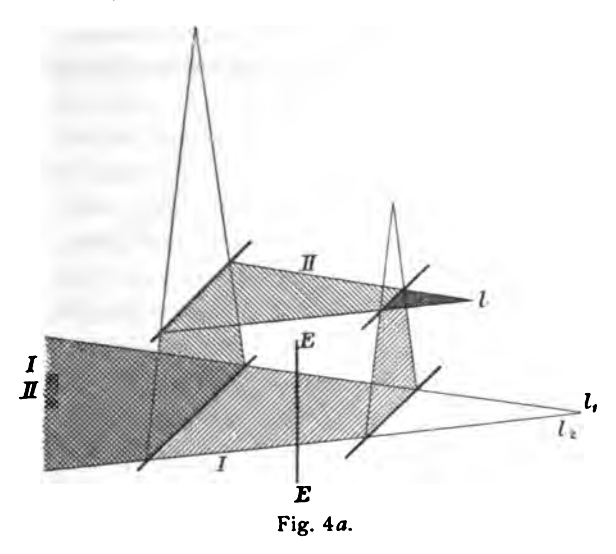


Fig. 4*a*.

Bei jener Classe von Interferenzversuchen, welcher der Fresnel'sche Versuch angehört, ist ein derartiger Vorgang unmöglich. Nimmt man eine Einschaltung E_1 in das Bündel I (Fig. 4 *b*) allein vor, so wird das ganze Streifensystem verschoben. Dasselbe wird verwischt, wenn E_1 nicht an allen Stellen dieselbe Verzögerung bewirkt. Eine Einschaltung E_2 aber in dem Überdeckungsfeld von I, II ist selbstredend unwirksam.

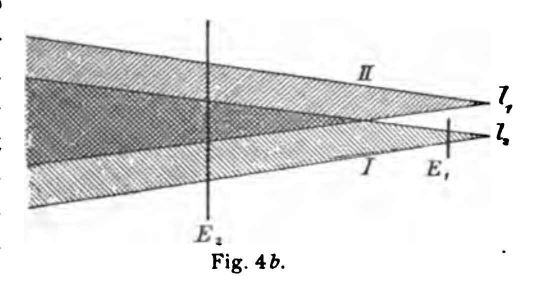


Fig. 4*b*.

7. Ein Vorzug meines Apparates vor dem Jamin'schen besteht darin, dass bei ersterem die interferirenden Bündel

---

[1] Vergl. Mach und v. Weltrubsky, Über die Formen der Funkenwellen. Diese Sitzungsber., Bd. 78, II. Abth., Juli 1878.

beliebig weit getrennt, und das Feld für die Interferenz und die verzögernde Einschaltung leicht sehr gross gemacht werden kann. Könnte man die Dicke der Platten $P_1 P_2$ ohne allzugrossen technischen Aufwand verschwindend klein machen, wie dies in der ersten Mittheilung angegeben ist,[1] so wären diese Vortheile ohne weitere Umstände gegeben. Aber auch bei dickeren

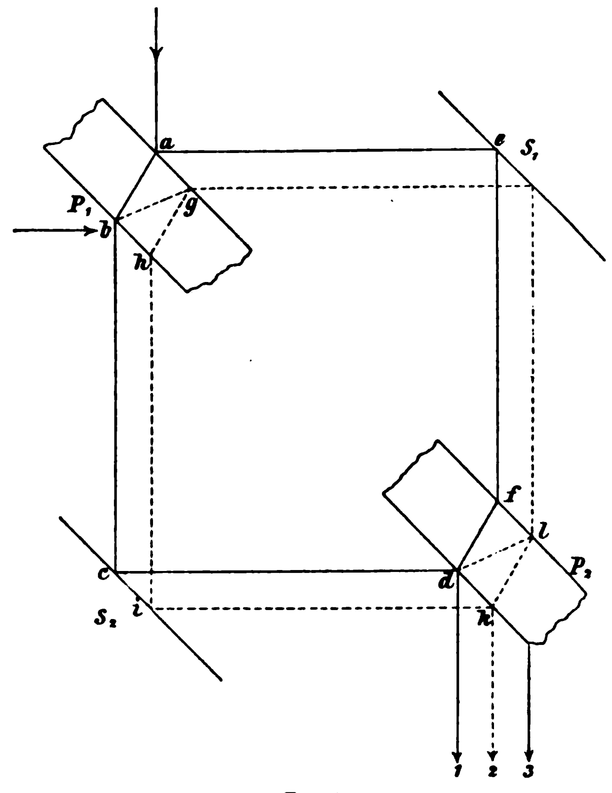


Fig. 5.

Platten $P_1 P_2$ kann man dieselben mit einem Opfer an Lichtintensität leicht erreichen. Um dies deutlich zu machen, muss der Gang der Strahlen in den Platten genauer verfolgt werden.

8. Das bei *a* (Fig. 5) einfallende Licht nimmt einerseits den Weg *abcd*, anderseits *aefd*. Bei vollkommenen Platten und vollkommener Anordnung im oben angegebenen Sinne haben die

---

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 101, Abth. II a (1892), S. 7, 10.

Lichter beim Zusammentreffen in *d* den Gangunterschied Null. Ein Theil des Lichtes geht aber auch über *abghik*, und der entsprechende über *aefdlk*. Auch diese Lichter, welche durch je eine Platte dreimal gegangen sind, haben unter obiger Bedingung den Gangunterschied Null. Dasselbe gilt von den Lichtern, welche je eine Platte fünfmal, siebenmal u. s. w. durchsetzt haben. Weicht man von der obigen Bedingung etwas ab, so treten in jedem der Bündel 1, 2, 3,...... Interferenzen auf und zwar selbstredend in jedem etwas von den anderen verschiedene.

Hiemit sind aber die Interferenzen nicht erschöpft. Wir denken uns alles vom Spiegel S_1 reflectirte Licht abgeblendet, und betrachten die Strahlenwege *bcdlk* und *bghik*. Die betreffenden Lichter kommen in *k* zwar mit ungleicher Intensität an, verhalten sich aber ihrem Gange nach so, als ob beide von einem nach der Pfeilrichtung bei *b* einfallenden Lichte herrühren würden. Man erhält matte Streifen, welche der durch den Spiegel S_2 vermittelten Interferenz an den beiden Jamin'schen Platten P_1P_2 entspricht. Dieselben sind neben den vorher erwähnten Streifen in dem Bündel 2 immer sichtbar. Denken wir uns ebenso alles von S_2 reflectirte Licht abgeblendet, so sehen wir ein weiteres mattes Jamin'sches System, welches durch den Spiegel S_1 vermittelt wird, und das ebenfalls immer in dem Bündel 2 vorhanden ist. Sind die Spiegel S_1 und S_2 nicht absolut parallel, so können die beiden Jamin'schen Systeme nicht identisch sein. Wir wollen ein Streifensystem, das durch die Zusammenwirkung beider Spiegel S_1, S_2 entsteht ein Vierplattensystem, ein Streifensystem aber, bei dem nur ein Spiegel S_1 oder S_2 mitwirkt, zum Unterschied ein Zweiplattensystem nennen.

9. Das Bündel 1 enthält also nur ein Vierplattensystem, das Bündel 2 ein Vierplatten- und zwei Zweiplattensysteme; wie letzteres verhält sich auch das Bündel 3, 4 u. s. f. Das Zweiplattensystem ist nur durch den Parallelismus der concurrirenden Platten bedingt, und die Entfernungen sind für dasselbe ganz gleichgiltig. Es kommt also auch viel leichter zustande, ist fast immer zu sehen, und man darf sich durch dasselbe nicht täuschen lassen. Es reagirt nur auf die Bewegung eines der beiden Spiegel S_1 oder S_2, während das Vierplatten-

system, welches bei meinen Versuchen immer allein in Frage kommt, auf die Bewegung beider Spiegel S_1, S_2 reagirt, und sofort verschwindet, wenn man das von S_1 oder von S_2 reflectirte Licht abblendet.[1]

10. Sieht man durch den genügend justirten Apparat gegen eine ausgedehnte Lichtquelle, z. B. den hellen Himmel mit dem blossen Auge hindurch, so erblickt man alle Streifensysteme, welche noch genügende Lichtstärke haben, zugleich im Felde. Ausserdem geben Einschaltungen aus selbstverständlichen Gründen mehrfache gegen einander verschobene Bilder. Nur wenn $P_1 P_2$ unendlich dünn wären, würden die Zweiplattensysteme verschwinden, die Vierplattensysteme identisch werden, und die mehrfachen Bilder in eines zusammenfallen. In diesem Falle allein wäre eine ausgedehnte Lichtquelle ohneweiters zu verwenden.

11. Bei Platten $P_1 P_2$ von endlicher Dicke, wie in unserem Fall, muss der Apparat in anderer Weise gebraucht werden. Auf die Platte P_1 fällt das divergirende Licht eines leuchtenden Punktes oder vielmehr einer kleinen Lichtquelle. Jedem der austretenden Strahlen 1, 2, 3, ... entsprechen nun ebenso viele Lichtkegel, welche von den virtuellen Bildern der Originallichtquelle auszugehen scheinen. Ist diese in endlicher Entfernung, so liegen die 1, 2, 3, ... entsprechenden virtuellen Bilder für den Beobachter (Fig. 5) von links nach rechts geordnet in Abständen nebeneinander, welche durch die Plattendicke bestimmt sind. Die zugehörigen Lichtkegel können so angesehen werden, als wenn dieselben durch Parallelverschiebung aus einander hervorgegangen wären. Fasst man die austretenden Strahlen mit einer achromatischen Linse ab, so dass von jenen virtuellen Bildern reelle Bilder in der umgekehrten Ordnung . . . . . . 3, 2, 1, entworfen werden, so ist es nun leicht, das Licht von 1 allein hindurch zu lassen, und die übrigen Lichter abzublenden.[2] Das Licht 1 enthält nämlich, wie gesagt, nur das reine Vierplattensystem. Fällt es in das Auge oder den photographischen Apparat, so bildet sich bei der Accommodation

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. 101, Abth. II a (1892), S. 8.

[2] A. a. O. S. 8.

auf irgend eine Ebene E (Fig. 4*a*) das derselben zugehörige Streifensystem rein und das ganze Feld erfüllend ab. Selbstredend besteht jedes der eben erwähnten Bilder 1, 2, 3...... genau genommen aus je einem Paar, dessen Glieder sehr nahe aneinanderliegen, die aber desto weiter getrennt sind, je feinere Interferenzstreifen man herstellt.

12. Verwendet man anstatt eines Lichtpunktes eine ausgedehnte kleine Lichtquelle, welche durch die kleine Gerade l dargestellt ist, so hat man an der Construction Fig. 1 nur wenig zu ändern. Sämmtliche Bilder von l liegen zwischen

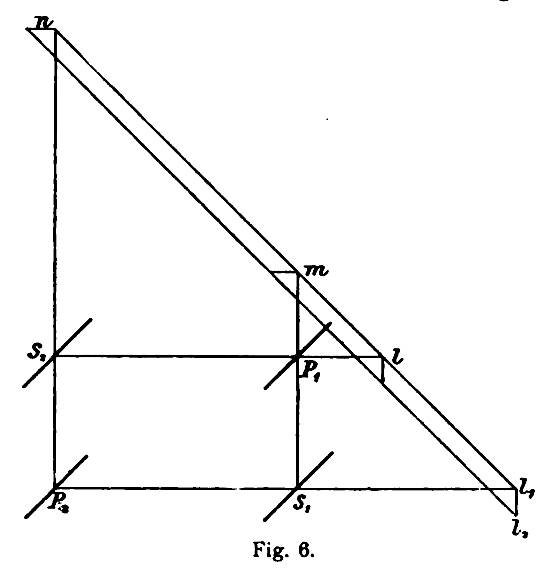


Fig. 6.

parallelen durch den Umfang des Flächenstückchens l gelegten Geraden. (Fig. 6.) Eine zu grosse Ausdehnung der Lichtquelle l zieht bei der zuletzt angegebenen Versuchsanordnung die Verwischung der Streifen nach sich. Einem leuchtenden Punkt gehört nämlich ein System von hyperboloïdischen Interferenzflächen an. Bewegt sich der Punkt, so bewegt sich das System. Ist die ganze Bahn des Punktes von genügender Ausdehnung mit leuchtenden Punkten besetzt, so muss Verwischung eintreten.

Dies kann sehr leicht durch den Versuch erläutert werden. Man entwirft in l ein grösseres Sonnenbild, verdeckt dasselbe durch einen kleinen in seiner Ebene drehbaren Schirm mit einer

geradlinigen Spalte S (Fig. 7), über welchem sich senkrecht zur Spaltenrichtung ein zweiter Schirm mit einer V-förmigen Spalte vv verschieben lässt. So werden zwei leuchtende Punkte hergestellt, die man von einander entfernen, und deren Verbindungslinie man beliebig drehen kann. Man sieht dann zwei Streifensysteme, welche bei der Bewegung abwechselnd coincidiren und alterniren, und kann empirisch die zulässige Ausdehnung der Lichtquelle ermitteln.[1]

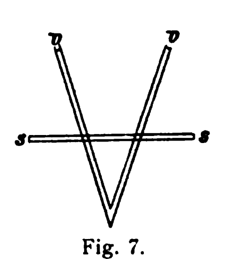


Fig. 7.

13. Das Gesagte widerspricht nicht der Thatsache, dass beim freien Durchblicken durch den Interferenzapparat gegen eine ausgedehnte Lichtquelle (den hellen Himmel) Streifen sichtbar sind. In diesem Falle gehören die einzelnen Strahlen verschiedener Richtung, welche in die Pupille des Auges gelangen, verschiedenen Elementen der Lichtquelle an, und jedem Element des nun sichtbaren Streifensystems entspricht ein anderes Element der Lichtquelle. Wird die Pupille zu weit, oder beobachtet man durch ein Fernrohr von grösserer Öffnung, so tritt ebenfalls Verwischung ein. Man kann überdies bei dieser Beobachtungsweise, ausser wenn man Theile des Gesichtsfeldes abblenden will, nicht verhindern, dass Streifensysteme verschiedener Art und Ordnung zugleich gesehen werden.

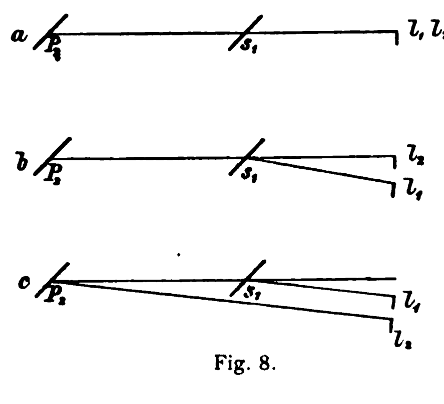


Fig. 8.

14. Eine Eigenthümlichkeit meines Apparates besteht in einer grösseren Freiheit der Einstellung anderen Interferenzapparaten gegenüber, durch welche wieder eine grössere Umständlichkeit der Justirung bedingt ist. Gehen wir von dem Fall

---

[1] Dieses Verfahren benützt Prof. E. Mach seit Jahren zur Erläuterung des Fresnel'schen Spiegelversuches in den Vorlesungen.

aus, in welchem die beiden virtuellen Bilder $l_1 l_2$ der kleinen Lichtquelle l von endlicher Ausdehnung vollkommen zusammenfallen (Fig. 8 *a*). Dreht man S_1 ein wenig, so trennen sich die beiden Bilder, und es treten Streifen auf. Da jedoch nur je zwei homologe Punkte von l_1 und l_2 cohärentes Licht liefern, so stören sich im Allgemeinen die verschiedenen Streifensysteme. In Folge der Drehung des einen Bildes gegen das andere bildet die Symmetrieebene der rechts liegenden Ränder der Bilder mit der Symmetrieebene der links liegenden Ränder einen Winkel. Beide Symmetrieebenen durchschneiden sich in der Drehaxe von S_1, wo auch die Streifensysteme am besten coincidiren (Fig. 8 *b*). Hebt man die Verdrehung der Bilder, ohne die Verschiebung zu vernichten, dadurch auf, dass man S_1 und P_2 um denselben Winkel dreht, so rückt der Durchschnitt der erwähnten Symmetrieebenen in unendliche Entfernung (Fig. 8 *c*). Durch passende Wahl der beiden Drehungen bringt man den Durchschnitt und damit die reinsten Streifen an die Stelle E, auf welche eben optisch eingestellt wird. Beim Fresnel'schen Spiegelversuch fällt der Durchschnitt der beiden Symmetrieebenen stets mit der Durchschnittslinie der beiden Spiegel zusammen, während derselbe hier an eine beliebige Stelle vor oder sogar hinter die Bilder $l_1 l_2$ fallen kann. Von Wichtigkeit ist die Rücksicht auf diesen Umstand besonders dann, wenn man mit schmalen Streifen operirt, welche bei Nichtbeachtung dieses Verhältnisses leicht ganz matt und undeutlich werden.

III. Mechanik und Justirung.

15. Über den mechanischen Theil des Apparates ist in der »Zeitschrift für Instrumentenkunde«[1] das Nothwendigste bereits mitgetheilt und die Justirung ist in meiner älteren Mittheilung[2] schon besprochen. Hier sollen einige Ergänzungen folgen, welche durch kleine Änderungen am Apparat und durch neue Erfahrungen bedingt sind.

Die Platten $P_1 S_1 P_2 S_2$ (Fig. 9 *a*, *b*) sind längs zweier Schienen *ab*, *cd* grob verschiebbar. Jede Platte kann um eine verticale

[1] Zeitschr. für Instrumentenkunde. Berlin. 1892, März.

[2] Diese Sitzungsberichte, Bd. 101, Abth. II a., Jänner 1892.

und um eine horizontale Axe mikrometrisch gedreht werden. und S_1 ist auch noch längs *ab* mikrometrisch verschiebbar. Die Schienen *ab*, *cd* sitzen auf einem (gewöhnlich) horizontalen Ring *R* und *cd* ist um eine verticale und horizontale Axe mikrometrisch drehbar. Letztere Bewegung ist neu hinzugekommen, und wird durch eine Hebelvorrichtung mit der Schraube *H* vermittelt. Theoretisch würde es genügen, die eine Platte z. B. P_1 fest, die drei anderen um je zwei Axen beweglich, und die eine noch nach einer Rechteckseite etwas verschiebbar zu machen. Der Überfluss an Bewegungen ist aber durchaus nicht unangenehm.

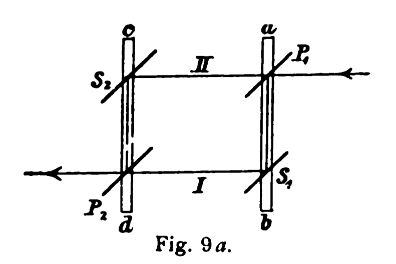


Fig. 9*a*.

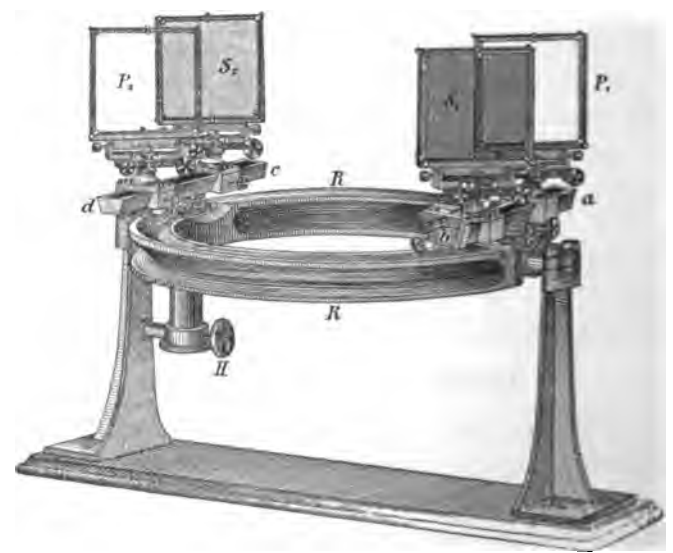


Fig. 9*b*.

16. Der zweckmässigste Vorgang der Justirung ist folgender. Man stellt alle vier Platten mit Hilfe des Fernrohres und eines sehr fernen Objectes parallel, in der Weise, wie dies in den früheren Mittheilungen [1] beschrieben wurde. Dann muss die

[1] A. a. O.

Verschiebung der einen Platte S_1 längs *ab* zur Vollendung der Justirung genügen.

Damit die Entfernung der Platte S_1 von den übrigen schon von Anfang an nicht zu unrichtig sei, tragen die Mittelpunkte der oberen Plattenrahmenseiten punktförmige Marken (Kenner), welche mit Hilfe des Stangenzirkels und der erwähnten Bewegungen paarweise gleichgemacht werden. Dann geht man erst an die Verschiebung von S_1.

Sind alle Platten genau parallel und man verschiebt S_1 längs *ab* (ohne den Parallelismus zu stören), so bewegt sich das Bild l_1 längs der Geraden l_2lmn (Fig. 10) und muss durch l_2 durchschlagen. Letzteres findet natürlich genau niemals statt.

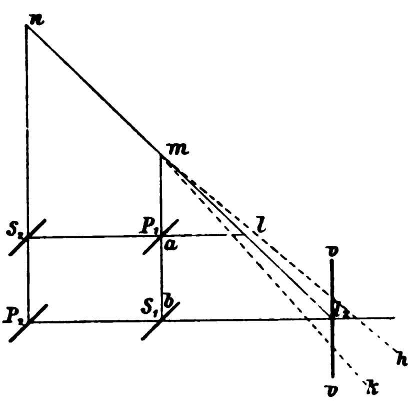


Fig. 10.

Weicht S_1 (von oben gesehen) im Sinne des Uhrzeigers nur wenig vom Parallelismus ab, so bewegt sich l_1 auf der Geraden *mk*, welche zur Ebene von S_1 senkrecht steht; bei entgegengesetzter Abweichung läuft l_1 auf der Geraden *mh*. Kommt bei dieser Bewegung l_1 in eine auch l_2 enthaltende Ebene *vv*, welche fast normal auf der Visirrichtung (S_1S_2) steht, so treten die mittleren Interferenzstreifen mit kleinem Gangunterschied im Feld auf. Dieselben sind augenscheinlich zu fein, um wahrgenommen zu werden, wenn die Abweichung vom Parallelismus merklich ist.

17. Es sollen nun einige bequeme optische Hilfsmittel zur Vollendung der Justirung angegeben werden. Man bringt eine verticale feine Spalte vor P_1, lässt auf dieselbe intensives paralleles Licht (Sonnenlicht oder elektrisches Licht) fallen, blendet alle Bündel bis auf das mit 1 bezeichnete ab, und betrachtet in diesem die Spalte durch ein Ocularprisma mit gerader Durchsicht. Ist S_1 nahe genug an der richtigen Stellung, so sieht man im Spectrum feine Streifen, die man durch

Verschiebung von S_1 verbreitert, wobei die Interferenzstreifen von kleinem Gangunterschied in's Feld rücken.

Die anderen optischen Justirungen werden ebenfalls am bequemsten bei intensivem Licht ausgeführt. Auf die sehr kleine Öffnung eines Schirmes Σ (Fig. 11) vor der Platte P_1 lässt man das durch eine Linse gesammelte Licht fallen. Hinter P_2 steht eine achromatische Linse (photographisches Objectiv), welches von den einzelnen vorher mit 1, 2, 3...... bezeichneten Bündeln reelle Bilder entwirft. Steht S_1 noch nicht an der richtigen Stelle, so besteht jedes der Bilder deutlich aus einem Paar. Indem man die Platte S_1 so schiebt, dass die Doppelbilder in einfache zusammengehen, kann man die sichtbaren Interferenzstreifen hervorrufen, oder denselben doch sehr nahe

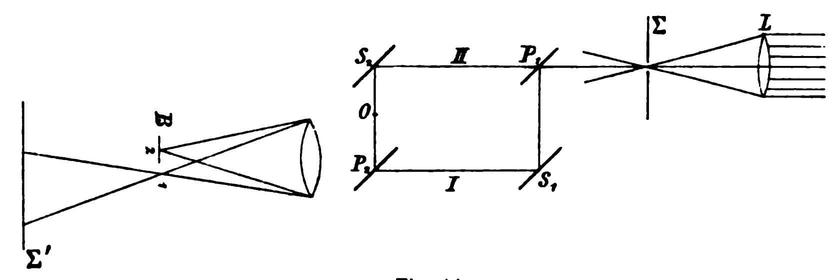


Fig. 11.

kommen. Die Beobachtung der Streifen kann man ausführen, indem man das Auge nach 1 bringt, oder, wenn das Licht intensiv genug ist, das Bündel 1 neben einer Blendung B vorbei auf einen Schirm Σ' fallen lässt. Man kann auch unmittelbar hinter B den photographischen Apparat anbringen.

18. Das Vierplattensystem ist ausserordentlich empfindlich. Nicht nur hat wegen der weiten Trennung der interferirenden Bündel jeder Luftzug[1] einen sehr störenden Einfluss, sondern die Streifen werden, wenn sie noch nicht vollkommen eingestellt, oder noch matt (Vergl. 14) sind, durch die leisen Erzitterungen des Apparates unsichtbar, zuweilen selbst dann, wenn derselbe mit Filzunterlage auf einen Stein gestellt und auf die Platten $P_1 P_2 S_1 S_2$ eine Dämpfung in Form

[1] Die Heliostatenöffnung wurde deshalb durch eine Glasplatte geschlossen.

eines mit Filz beklebten Holzrahmens aufgelegt wird. Doch erleichtern diese Mittel wesentlich die Beobachtung.

19. Bei der oben beschriebenen Anwendung des Ocularprismas kann man wegen der angeführten Umstände die Streifen nicht immer entdecken. In diesem Falle schreitet man zweckmässig zur monochromatischen Beleuchtung des Feldes. Eine rohe aber intensive monochromatische Beleuchtung, welche bei den später erwähnten photographischen Versuchen verwendet wurde, erhält man, wenn zwischen die achromatische in's Sonnenlicht gestellte Linse L und den Schirm Σ mit der Öffnung (Fig. 11) einfach in den engeren Theil des Lichtkegels ein Prisma mit gerader Durchsicht eingeschaltet wird. Besser ist die monochromatische Beleuchtung, wenn das auf Σ fallende Linsenbild selbst schon die Abbildung eines durch Blendung verkleinerten Sonnenbildes ist.

Viel reiner wird die monochromatische Beleuchtung durch folgendes Verfahren. In der Öffnung des Schirmes Σ (Fig. 12) bringt man die kleine Objectivlinse h eines Mikroskopes, bildet durch L auf derselben die Fensterladenspalte b scharf ab, und bringt dann in den Lichtkegel das Prisma mit gerader Durchsicht D. Von h geht nun ein monochromatischer Lichtkegel von grosser Öffnung aus. Bei dieser Anordnung sind die Interferenzstreifen, welche gerade über das ganze Feld laufen, von wunderbarer Schönheit, und dieselben sind schon bei mangelhafter Justirung des Apparates sichtbar, welche nun leicht vollendet werden kann.

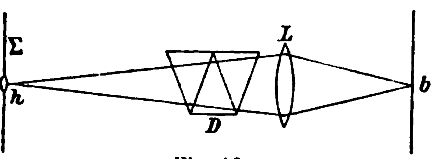


Fig. 12.

Dreht man nämlich D so, dass die Beleuchtung mit Licht von zunehmender Brechbarkeit erfolgt, so sieht das Auge in 1 die Streifen gegen die Stelle des kleineren Gangunterschiedes rücken. Bewegt man dann S_1 so, dass die der vorigen entgegengesetzte Bewegung der Streifen eintritt, so bekommt man allmälig den Gangunterschied Null in's Feld.

Man kann noch in etwas anderer Weise verfahren. Mit dem durch den Fensterladenspalt eindringenden Licht wird durch eine Linse und ein unmittelbar vor derselben stehendes

Prisma D auf der Platte P_1 ein reines intensives Spectrum, und durch die achromatische Linse hinter P_2 das Bild des Prismas D mit dem Querschnitt des noch dünnen, dasselbe durchsetzenden weissen Lichtbündels entworfen. Dieses Bild ist so oft vorhanden, als Bündel 1, 2, 3...... sichtbar sind. Blendet man alle Bilder bis auf 1 ab, so sieht man auf einem Schirm, oder wenn man das Auge nach 1 bringt, ein Stück eines von Interferenzstreifen durchzogenen Spectrums. Dreht man das Prisma D ein wenig so, dass brechbarere Farben an dieselbe Stelle fallen, und beobachtet die Verschiebung der Streifen, so hat man an dem Apparat die entgegengesetzte Verschiebung einzuleiten Die hier erwähnten spectralen Methoden verwendet Prof. E. Mach seit Jahren sowohl zur Justirung von Interferenzapparaten als auch zu Vorlesungsversuchen. Dieselben beruhen im wesentlichen alle auf Newton's Versuch mit dem Farbenglas im Spectrum.


Fig. 13.

20. Hat man die Streifen im Felde, so handelt es sich nur darum, denselben die gewünschte Breite, Richtung, Lage und Schärfe (Farbensättigung) zu geben. Zum Zweck der Orientirung verwende ich ein an einer Holzgabel befestigtes dünnes Glimmerblatt (Fig. 13), welches in eines der Bündel I, II eingeführt werden kann, und dann eine Verschiebung um einige Streifenbreiten bewirkt. Sind die Streifen vertical, so liegen die Bilder $l_1 l_2$ in einer Horizontalen nebeneinander. Es liegt l_1 für den Beobachter mit dem Auge in 1 rechts, wenn die Einführung des Glimmers in I die Streifen nach rechts verschiebt. Um die Streifen schmäler zu machen muss dann der Spiegel S_1, welcher nur auf das Bild l_1 wirkt, von oben gesehen im Sinne des Uhrzeigers (um eine verticale Axe) gedreht werden. Bei horizontaler beziehungsweise schiefer Streifenrichtung liegen $l_1 l_2$ vertical übereinander beziehungsweise schief nebeneinander. Drehung von S_1 um eine Horizontalaxe ändert dann die Breite und bei schiefer Anfangslage der Streifen auch die Richtung derselben. Versucht man l_1 und l_2 zur Deckung zu bringen, so gelingt dies selbstverständlich nicht vollkommen

genug, indem dieselben sehr nahe aneinander vorbeigehen, wobei die Streifen sich drehen. Bei grösstmöglicher Annäherung von l_1 und l_2 erhält man sehr breite, durch die nun hervortretenden Plattenfehler stark verkrümmte Streifen. Was über die Lage der Bilder $l_1 l_2$ gesagt wurde, lässt sich bei sehr kleiner Lichtquelle auch an dem Bilderpaar 1 beobachten (vergl. 17).

Man bemerkt leicht, dass durch den Spiegel S_2 das Bild l_2 allein bewegt wird. Zwar kann man l_2 auch durch Drehung von P_2 in Bewegung setzen, es versteht sich aber, dass dann P_2 auch auf l_1 nach Art eines Compensators wirkt. Würde es gelingen durch Verschiebung und Drehung von S_1 das Bild l_1 für den Beobachter hinter l_2 zu bringen, so müsste die Ringform der Interferenzstreifen hervortreten. Mit weissem Licht ist dieser Versuch schwer ausführbar, weil dann gerade die schwächsten Farben der höchsten Ordnung in der Mitte des Feldes und in der Nähe des Ringcentrums stehen, wobei man die Streifen überhaupt leicht verliert. Ich habe jedoch den Versuch angestellt, indem ich vor der kleinen Öffnung in Σ (Fig. 12) eine Natriumflamme als Lichtquelle verwendet, und in das Bündel I eine 15 *mm* dicke Planplatte eingeschaltet habe. Man erhält dann sehr schöne Ringe, ähnlich wie beim Lummer'schen Versuch, jedoch unter anderen Bedingungen. Abblendung des Bündels I oder II bringt die Ringe zum Verschwinden, welche also ein Vierplattensystem vorstellen.

Wenn der Apparat gut justirt ist, und man lässt das Licht von 1 und 2 auf den Schirm Σ' gelangen, so sieht man zwei an Breite etwas verschiedene Vierplattensysteme, sich unter einem kleinen Winkel kreuzend durch's Feld gehen. Dies beweist, dass die beiden virtuellen Bilder $l_1 l_2$, welche dem Bündel 1 entsprechen, nicht genau dieselbe Lage und Entfernung gegen einander einhalten, wie die virtuellen Bilder des Bündels 2. Liegen erstere genau in einer Horizontalen, so ist dies bei letzteren nicht genau der Fall. Dies erklärt sich durch einen relativen kleinen Keilfehler der Platten P_1 und P_2, welcher für das einmal und für das dreimal die Platten $P_1 P_2$ durchsetzende Licht in ungleichem Maasse sich bemerklich machen muss.

21. Will man das Streifensystem im Feld verschieben, so ist Folgendes zu beobachten. Liegt l_1 für den Beobachter in

Fig. 11 rechts von l_2, so wird l_1 durch Verschiebung von S_1 im Sinne *ba* dem Bilde l_2, zugleich aber dem Beobachter genähert. Dadurch wird die Symmetrieebene von $l_1 l_2$ und mit derselben das ganze Streifensystem für den Beobachter nach links über das Feld geführt. Dreht man das Plattenpaar $P_2 S_2$ mit Hilfe der Schiene *cd* um eine durch *o* gelegte Verticalaxe von oben gesehen im Sinne des Uhrzeigers, so macht l_2 die Parallelbewegung zu der von l_1 ausgeführten, wodurch das Streifensystem wieder zurückwandert (vergl. 5). Dies ist aus unserer Grundconstruction (Fig. 1) sehr leicht ersichtlich. Die Umkehrungen liegen auf der Hand.

Wird das Plattenpaar $S_2 P_2$ mit Hilfe der Schraube *H* (Fig. 9 *b*) für den in der Richtung $P_2 S_2$ blickenden Beobachter um die Schiene *cd* als Axe im Sinne des Uhrzeigers gedreht, so wird, wie dieselbe Construction lehrt, l_2 gesenkt und etwas dem Beobachter in 1 genähert. Liegt l_1 wieder rechts von l_2, so drehen sich für den Beobachter die Streifen verkehrt wie der Uhrzeiger, und rücken der rechten oberen Ecke des Feldes näher.

Wie die Schärfe und Farbensättigung der Streifen in der zu beobachtenden Ebene *E* zu erreichen ist, wurde schon in 14 besprochen und durch Fig. 8 erläutert. Es möge noch erwähnt werden, dass bei tiefsatten Farben in den beiden mittleren dunklen Streifen (zwischen denen der Gangunterschied Null liegt) eine feine tuschschwarze geschlängelte Linie zu sehen ist. Diese ist für mich ein sicheres Kennzeichen der höchsten Farbensättigung.

22. Beim praktischen Gebrauch des Apparates ist noch zu beachten, dass die Mikrometerschrauben trotz ihrer geringen Ganghöhe ($^1/_{60}$ eng. Zoll und $^7/_{40}$ *mm*) noch etwas zu grob sind, wesshalb man stets sehr langsam und vorsichtig drehen muss, ohne einen Seitendruck auszuüben. Bei einer Neuconstruction würde sich, wenn man die Complication nicht scheut, die Anwendung von Tangentialschrauben empfehlen. Auch die Erwärmung durch die angenäherte Hand macht sich bemerklich, und man muss desshalb nach jeder Drehung und Entfernung der Hand stets die endliche Einstellung abwarten. Eine häufig bei der Justirung beobachtete Erscheinung besteht darin, dass

nach der Drehung und Absetzung der Hand die Streifen eine Zeit lang noch in demselben Sinne spontan sich weiter bewegen. Es dürfte dies in dem Widerstand der Schmierung liegen, welche nur allmälig dem durch die Schraube gesetzten Druck nachgibt. Auch wenn der Apparat nicht berührt wird, wandern die Streifen langsam bei Temperaturveränderungen, kommen aber bei derselben Temperatur auch wieder in ihre frühere Lage zurück.

Die Spiegel $S_1 S_2$ bestehen bei meinem Apparat aus oberflächlich versilberten Plangläsern. Dieselben sind unmittelbar nach der Versilberung und ersten Politur von wunderbarer Reinheit, leiden aber durch die mechanischen und chemischen Insulten, welchen dieselben bei den Versuchen ausgesetzt sind, und müssen oft neu versilbert werden.[1] Vielleicht wäre es empfehlenswerth, dieselben durch Metallspiegel zu ersetzen.

IV. Anwendungen des Apparates.

23. Die Anwendbarkeit des Apparates ist eine sehr mannigfaltige und dieselbe ist durch meine bisher ausgeführten Versuchsreihen, welche in einer vorläufigen Mittheilung[2] schon aufgezählt wurden, sicherlich nicht erschöpft. Über die Ergebnisse dieser Versuche kann ich nur nach und nach berichten. Hier soll zunächst ein gemeinsames Princip derselben besprochen, und die Anwendung des Apparates lediglich durch ein in der Tafel dargestelltes Beispiel erläutert werden.

24. Wir denken uns das ganze Gesichtsfeld des Apparates mit geraden, monochromatischen, äquidistanten z. B. verticalen Interferenzstreifen überzogen. Der Gangunterschied Δ wechselt hier von Stelle zu Stelle, und ist in Wellenlängen (λ) ausgedrückt

---

[1] Spiegel und Planplatten wurden nach jedem Versuch mit Cartonkappen bedeckt. Zwei derselben, die zur Bedeckung der Spiegel dienten, waren mit Filtrirpapier, das Spuren von Bleiacetat enthielt, ausgeklebt. Dieser Kunstgriff rührt von Dr. O. Lohse in Potsdam her, und hat sich bei mir vorzüglich bewährt. Die im März 1893 versilberten Spiegel, die den Pulvergasen von circa 200 Schüssen ausgesetzt waren, sind heute noch (Septemb. 1893) ganz gut brauchbar.

[2] Akadem. Anzeiger vom 13. Juli 1893.

durch $\Delta = a + \frac{\lambda}{b} \cdot x$, wobei a der Gangunterschied in Wellenlängen an dem einen verticalen Gesichtsfeldrande, x die horizontale Entfernung der betreffenden Stelle von diesem Rande und b die Streifenbreite bedeutet. Schaltet man irgend ein durchsichtiges Object in das Bündel I ein, so wird im allgemeinen ein von Stelle zu Stelle wechselnder positiver oder negativer Gangunterschied D hinzugeschaltet. Hiedurch werden die Streifen verkrümmt. Ist das eingeschaltete Object kleiner als das Feld, so bleiben in dem nicht bedeckten Theile des Feldes die Streifen geradlinig, und man kann den Sinn und das Ausmaass der Verkrümmung durch Verfolgung eines jeden Streifens in den bedeckten Theil des Feldes hinein ermitteln, und so die an jeder Stelle eingeführten Gangunterschiede D auswerthen. Dieselben betragen in Wellenlängen so viel, als die Verschiebung in Streifenbreiten beträgt.

Diese Überlegung führt zu einer sehr einfachen Interpretation des Bildes. Wir legen an der Einschaltungsstelle senkrecht zur Lichtrichtung durch das Object eine Ebene E, und tragen an jeder Stelle derselben das positive und negative D nach der einen oder anderen Seite als Ordinate auf, wobei wir als Maass der Wellenlänge die Streifenbreite benützen. Die optische Wirkung des Objectes wird so veranschaulicht. Da aber die Ordinate D stets der Grösse und dem Sinne nach der Streifenverschiebung gleich ist, können wir uns durch jeden Streifen eine gegen E um 45° geneigte Ebene E' legen, auf welche wir nach der Lichtrichtung die Streifen projiciren. Die Streifen verkrümmen und verschieben sich dann so zusagen in den Ebenen E', und geben unmittelbar die Endpunkte der D-Ordinaten an. Mehrere Beispiele hiefür zeigt die Tafel. Die Gesammtheit der D-Ordinaten bestimmt eine Fläche F, welche die optischen Eigenschaften des eingebrachten Objectes ersichtlich macht.

Die Ebene E, sowie die Schar der Ebenen E' seien (Fig. 14) durch deren senkrechte Schnitte mit der Zeichnungsebene dargestellt. Denkt man sich umgekehrt die Fläche F gegeben, so sind die Schnitte derselben mit den Ebenen E', auf E projicirt, die deformirten Interferenzstreifen. Die Schnitte der

F aber mit einer Schar zu E parallelen Ebenen, welche aus den ersteren Curven abgeleitet werden können, sind die Curven gleichen Gangunterschiedes. Auf die Ermittlung der letzteren wird die Untersuchung meist ausgehen.

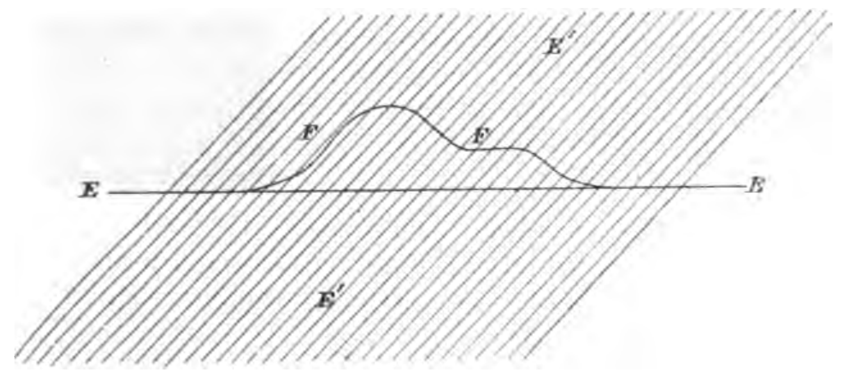


Fig. 14.

Enthält die Fläche F kegelförmige Erhebungen oder Vertiefungen (Fig. 15), so kann dieselbe eine Reihe der E' auch in geschlossenen ringförmigen Curven schneiden. Dies bildet insofern einen schwierigern Fall, als man bei monochromatischem

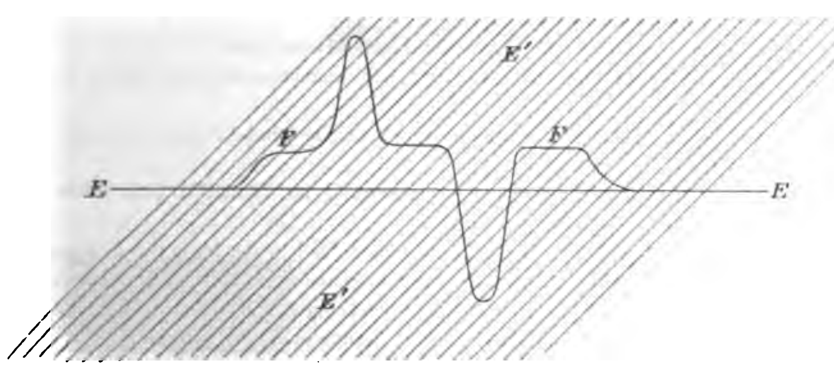


Fig. 15.

Licht und an der (farblosen) Photographie in der Regel nicht ohne weiters entscheiden kann, ob es sich um eine Erhebung oder Vertiefung der Fläche F handelt.

25. Die bisher mit dem Apparat ausgeführten Versuche beziehen sich auf Projectile, Schallwellen und Luft-

strahlen.[1] Bei den beiden ersteren Versuchsreihen war man natürlich auf Momentbeleuchtung durch den elektrischen Funken beschränkt. Die Anwendung des monochromatischen Lichtes zur photographischen Fixirung der Bilder war wegen der bedeutenden hiemit verbundenen Lichtschwächung in diesen Fällen mit beträchtlichen Schwierigkeiten verbunden. Das Studium der Luftstrahlen liess aber eine Beleuchtung von längerer Dauer und auch die bequeme Anwendung der monochromatischen Beleuchtung zu.

Ich möchte zum Schlusse bemerken, dass sich durch einige Winke, die ich meinem Vater Prof. E. Mach verdanke, die theoretische Auffassung des Apparates wesentlich vereinfacht hat.

[1] Vergl. Die vorläufige Mittheilung im Akadem. Anzeiger vom 13. Juli 1893.

Erklärung der Tafel.

1. Streifenaufnahme bei weissem Licht.

2. Streifenaufnahme bei monochromatisch blauem Licht.

3. Die Flamme einer Walrathkerze bei monochromatischem Licht im Bündel I.

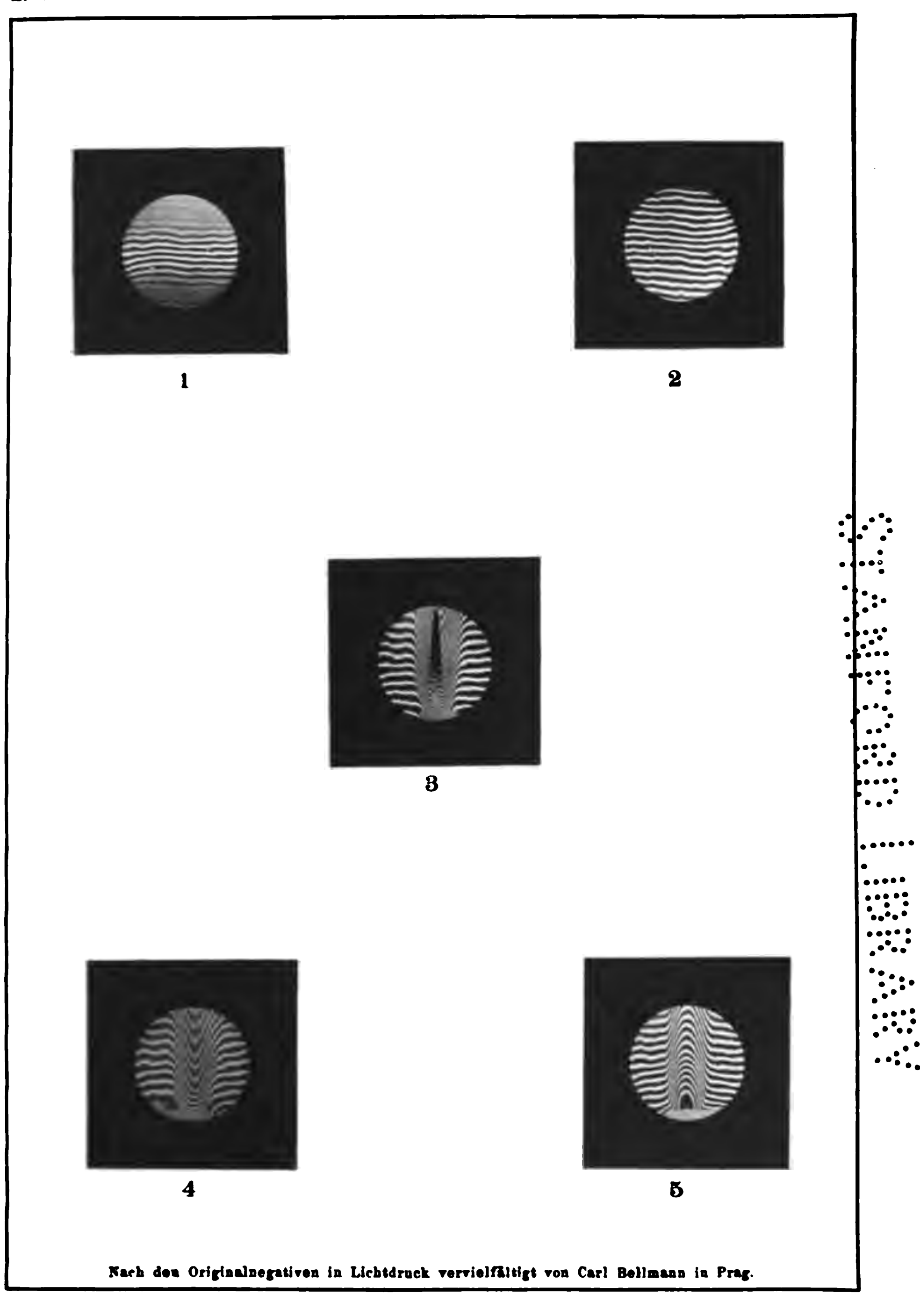
4. Ein kleiner nichtleuchtender Gasbrenner im Bündel I (monochromatisches Licht).

5. Ein kleiner nichtleuchtender Gasbrenner im Bündel II (monochromatisches Licht).

Bei Bild 1 und 2 ist der Gangunterschied Null in der Mitte des Feldes. Um bei den übrigen drei Bildern die ausgebogenen Streifen in ihrem ganzen Verlauf im Feld zu haben, wurde die Stelle des Gangunterschiedes Null knapp über den Kerzendocht, beziehungsweise die Brennermündung verlegt.

Bild 4 und 5 ergänzen einander.

L. Mach: Ein Interferenzfractometer.



Nach den Originalnegativen in Lichtdruck vervielfältigt von Carl Bellmann in Prag.

XXI. SITZUNG VOM 19. OCTOBER 1893.

Der Secretär legt das erschienene Heft III—VII (März bis Juli 1893) des 102. Bandes der Abtheilung III der Sitzungsberichte vor.

Herr Oberbergrath Prof. Dr. Wilhelm Waagen in Wien dankt für seine Wahl zum inländischen correspondirenden Mitgliede dieser Classe.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Lang übersendet eine Arbeit aus dem Laboratorium für allgemeine und analytische Chemie an der k. k. technischen Hochschule in Wien von dem diplom. Chemiker Herrn Carl Mangold, betitelt: »Die Dampfdrucke von Benzolkohlenwasserstoffen der homologen Reihe C_nH_{2n-6} und von Gemischen aus Benzol und Toluol«.

Das w. M. Herr Prof. E. Weyr übersendet eine Abhandlung von Prof. Emanuel Czuber in Wien: »Über Curvensysteme und die zugehörigen Differentialgleichungen«.

Herr Prof. Dr. Anton Puchta in Czernowitz übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Aufstellung eines neuen dreifach orthogonalen Flächensystems«.

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine Arbeit aus seinem Laboratorium: »Über den Wassergehalt der Calciumsalze von Bernsteinsäure und Methyläthylessigsäure«, von D. Milojkowič.

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer in Wien überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Notiz über die zu einer Fundamentaldiscriminante gehörigen Bernoulli'schen Zahlen«.

Herr Prof. Dr. Ed. Lippmann in Wien überreicht folgende Mittheilung: »Über ein isomeres Monojodalkylderivat des Cinchonins«.

Notiz über die zu einer Fundamentaldiscriminante gehörigen Bernoulli'schen Zahlen

von

Leopold Gegenbauer,

c. M. k. Akad.

Ich werde in den folgenden Zeilen einige Reihen mit Hilfe der zu einer Fundamentaldiscriminante gehörigen Bernoulli'schen Zahlen summiren und sodann auf Grund eines der angegebenen Resultate den Grenzwerth einer unendlichen Doppelsumme ermitteln, welche in einer gewissen Beziehung zu einem bestimmten Doppelintegrale mit unendlichem Integrationsintervalle steht.

I. Ist Δ eine Fundamentaldiscriminante und $\varepsilon\Delta > 0$, so sind die zu Δ gehörigen Bernoulli'schen Zahlen $B(\lambda, \Delta)$ nach der von Herrn Berger in seiner in den Schriften[1] der schwedischen Akademie der Wissenschaften zu Stockholm veröffentlichten Abhandlung: »Sur une généralisation des nombres et des fonctions de Bernoulli« gegebenen Definition durch die Gleichung

$$\frac{v}{e^v-1} \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) e^{\frac{rv}{\varepsilon\Delta}} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} B(\lambda, \Delta)\, v^{\lambda}$$

bestimmt, aus welcher folgt, dass

$$B(\lambda, \Delta) = \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \varphi\left(\frac{r}{\varepsilon\Delta}, \lambda\right)$$

---

[1] Bihang till kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. 13. Bandet, Afdelning 1.

ist, wo $\varphi(z, \lambda)$ die gewöhnliche Bernoulli'sche Function ist, also durch die Gleichung

$$v\frac{e^{zv}-1}{e^{v}-1} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \varphi(z, \lambda)v^{\lambda}$$

definirt wird, und dass für diese rationalen Zahlen die Recursionsformel

$$B(0, \Delta) = 0,\ B(\lambda, \Delta) = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\lambda} \frac{B_{\lambda-\varkappa}}{\varkappa!\,(\varepsilon\Delta)^{\varkappa}} \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) r^{\varkappa} \quad (\lambda \geqq 1)$$

besteht.

Auf diese Zahlen lässt sich eine grosse Anzahl von Reihen zurückführen, von denen einige hier angegeben werden mögen. Dieselben sind in dem folgenden Theoreme enthalten.

Ist $\mu_{\varkappa}(n)$ gleich 0 oder 1, je nachdem die ganze Zahl n durch eine $\varkappa^{\text{te}}$ Potenz theilbar ist oder nicht,

$\lambda_{\varkappa}(n)$ gleich 0, wenn bei der Darstellung von n als ein Product von Primzahlpotenzen auch nur einer der Exponenten nach dem Modul $\varkappa$ einer von 0 oder 1 verschiedenen Zahl congruent ist, und gleich $(-1)^{\tau}$ in allen anderen Fällen, wo τ die Anzahl der Exponenten von der Form $\sigma\varkappa+1$ vorstellt,

$\mu(n)$ gleich 0, wenn n durch ein Quadrat (ausser 1) theilbar ist, sonst aber gleich $+1$ oder -1, je nachdem die Anzahl der Primtheiler von n gerade oder ungerade ist,

bezeichnet ferner $\varphi_{\varkappa}(n)$ die Anzahl der Systeme von $\varkappa$ ganzen Zahlen der Intervalles $1 \ldots n$, deren grösster gemeinsamer Theiler zu n theilerfremd ist,

$f_{\rho}(n)$ die Anzahl der Zerlegungen der ganzen Zahl n in ρ Factoren,

$\omega(n)$ die Anzahl der Zerlegungen von n in zwei theilerfremde Factoren,

$\rho_{\varkappa,\tau}(n)$ die Summe der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen Theiler von n, welche ρ^{te} Potenzen sind,

so bestehen die Beziehungen

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{\mu_{2r}(x)}{x^{2s+\frac{1-\varepsilon}{2}}}=\frac{(-1)^{s+1}|\Delta|^{2r\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)}\Gamma\left(2r\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)+1\right)B\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2},\Delta\right)}{\varphi_{2r\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)}(|\Delta|)(2\pi)^{(2r-1)\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)}B_{2r\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)}\left|\sqrt{\varepsilon\Delta}\right|}$$

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{\mu_{2r+1}(x)}{x^{2s}}=\frac{B(2s,\Delta)}{(2\pi)^{4rs}B((2r+1)s,\Delta)}\qquad(\varepsilon>0)$$

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{\lambda_{2r}(x)}{x^{2s+\frac{1-\varepsilon}{2}}}=\frac{(-1)^{s+1}(2\pi)^{(2r-1)\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)}\varphi_{2r\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)}(|\Delta|)B_{2r\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)}\left|\sqrt{\varepsilon\Delta}\right|}{|\Delta|^{2r\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)}\Gamma\left(2r\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)+1\right)B\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2},\Delta\right)}$$

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{\lambda_{2r+1}(x)}{x^{2s}}=\frac{(2\pi)^{4rs}B((2r+1)s,\Delta)}{B(2s,\Delta)}\qquad(\varepsilon>0)$$

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{\mu(x)}{x^{2s+\frac{1-\varepsilon}{2}}}=\frac{(-1)^{s+1}2\left|\sqrt{\varepsilon\Delta}\right|}{(2\pi)^{2s+\frac{1-\varepsilon}{2}}B\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2},\Delta\right)}$$

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{\varphi_{2\varkappa}(x)}{x^{2(s+\varkappa)+\frac{1-\varepsilon}{1}}}=\frac{(-1)^{\varkappa}B\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2},\Delta\right)}{(2\pi)^{2\varkappa}B\left(2(s+\varkappa)+\frac{1-\varepsilon}{2},\Delta\right)}$$

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{\lambda_2(x)\,\omega(x)}{x^{2s+\frac{1-\varepsilon}{2}}}=\frac{2\varphi_{4s+1-\varepsilon}(|\Delta|)\,B_{4s+1-\varepsilon}}{|\Delta|^{4s-\varepsilon}\,\Gamma(4s+2-\varepsilon)\,B^2\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2},\Delta\right)}$$

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{\omega(x)}{x^{2s+\frac{1-\varepsilon}{2}}}=\frac{|\Delta|^{4s-\varepsilon}\,\Gamma(4s+2-\varepsilon)\,B^2\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2},\Delta\right)}{2\varphi_{4s+1-\varepsilon}(|\Delta|)\,B_{4s+1-\varepsilon}}$$

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{\psi(x^2)}{x^{2s+\frac{1-\varepsilon}{2}}}=\frac{(-1)^{s+1}(2\pi)^{2s+\frac{1-\varepsilon}{2}}\,|\Delta|^{4s-\varepsilon}\,\Gamma(4s+2-\varepsilon)\,B^3\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2},\Delta\right)}{4\left|\sqrt{\varepsilon\Delta}\right|\varphi_{4s+1-\varepsilon}(|\Delta|)\,B_{4s+1-\varepsilon}}$$

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{\psi^2(x)}{x^{2s+\frac{1-\varepsilon}{2}}}=\frac{(2\pi)^{4s+1-\varepsilon}|\Delta|^{4s-1-\varepsilon}\,\Gamma(4s+2-\varepsilon)\,B^4\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2},\Delta\right)}{8\varphi_{4s+1-\varepsilon}(|\Delta|)\,B_{4s+1-\varepsilon}}$$

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{f_2(x)}{x^{2s+\frac{1-\varepsilon}{2}}}=\frac{(2\pi)^{4s+1-\varepsilon}B^2\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2},\Delta\right)}{4|\Delta|}$$

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{f_3(x)}{x^{2s+\frac{1-\varepsilon}{2}}}=\frac{(-1)^{s+1}(2\pi)^{6s+\frac{3(1-\varepsilon)}{2}}B^3\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2},\Delta\right)}{8|(\varepsilon\Delta)^{3/2}|}$$

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{f_4(x)}{x^{2s+\frac{1-\varepsilon}{2}}}=\frac{(2\pi)^{8s+2-2\varepsilon}B^4\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2},\Delta\right)}{16\Delta^2}$$

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{\rho_{2\varkappa,2\tau+1}(x)}{x^{2s+\frac{1-\varepsilon}{2}}}=\frac{(-1)^{\varkappa+\frac{1-\varepsilon}{2}\tau}(2\pi)^{2\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)(\tau+1)}B\left(2s-2\varkappa+\frac{1-\varepsilon}{2},\Delta\right)B\left(\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)(2\tau+1),\Delta\right)}{4|\Delta|}$$

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{\rho_{\varkappa,2\tau}}{x^{2s+\varkappa+\frac{1-\varepsilon}{2}}}=\frac{(-1)^{s+1}(2\pi)^{\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)(2\tau+1)+2\tau\varkappa}B\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2},\Delta\right)B_{2\tau\left(\varkappa+2s+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)}\varphi_{2\tau\left(\varkappa+2s+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)}(|\Delta|)}{4|\sqrt{\varepsilon\Delta}|\,\Gamma\left(2\tau\left(\varkappa+2s+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)+1\right)|\Delta|^{2\tau\left(\varkappa+2s+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)}}$$

II. Das eigentliche bestimmte Doppelintegral

$$\int_0^a \int_0^b f(x^2+y^2)\, dx\, dy$$

ist der Grenzwerth der Doppelsumme

$$\sum_{r=1,\, s=1}^{r=n_1,\, s=n_2} \delta_r \delta'_s f(x_r^2+y_s^2)$$

bei unbegrenzter, im Übrigen beliebiger Abnahme einer jeden der Zahlen

$$\delta_r = x_{r+1}-x_r;\ \delta'_s = y_{s+1}-y_s,$$

wobei jedoch stets

$$\sum_{r=1}^{r=n_1} \delta_r = a,\quad \sum_{s=1}^{s=n_2} \delta'_s = b$$

bleibt, und es ist das uneigentliche bestimmte Doppelintegral mit unendlichem Integrationsintervalle

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x^2+y^2)\, dx\, dy$$

der Grenzwerth, welchem sich das obige eigentliche Integral bei unbegrenzter Zunahme von a und b nähert. Theilt man das Integrationsgebiet in lauter gleiche Quadrate von der Seite $\sqrt{\varepsilon}$, so handelt es sich demnach bei der Ermittlung des zuletzt genannten uneigentlichen bestimmten Integrales um die Bestimmung des Werthes, welchem sich die Summe

$$\sum_{\lambda,\, \mu=0}^{\lambda=s_1,\, \mu=s_2} \varepsilon f(\varepsilon(\lambda^2+\mu^2))$$

bei unbegrenzter Abnahme von ε und unbegrenzter Zunahme von s_1 und s_2 nähert. Es ist nun nicht uninteressant, zu untersuchen, welche Änderung dieser Grenzwerth erfährt, wenn man den ganzen Zahlen λ und μ nicht alle, sondern nur gewisse ausgewählte ganzzahlige Werthe des Bereiches zuertheilt, also

gewissermassen eine Reihe von Punkten desselben dadurch ausscheidet, dass man in denselben die Function $f(x, y)$ Null sein lässt. Ein derartiger, unter Benützung eines zahlentheoretischen Satzes bei Voraussetzung der absoluten Convergenz des e,rwähnten Integrales leicht zu behandelnder Fall ist derjenige in welchem den Zahlen λ und μ nur jene ganzzahligen positiven Werthe beigelegt werden, welche zu einander theilerfremd sind. Da die mittlere Flächendichtigkeit dieser Zahlenpaare nach einem von mir früher abgeleiteten Satze $\frac{6}{\pi^2}$ ist, so ist von vorneherein zu erwarten, dass dadurch die Summe eine Änderung erleiden wird. Unter der eben genannten Voraussetzung findet man auf demselben Wege, welchen ich in der vor Kurzem veröffentlichten Mittheilung:[1] »Eine Anwendung der Zahlentheorie auf die Integralrechnung« eingeschlagen habe die Beziehung

$$\lim_{\varepsilon=0, s_1=\infty, s_2=\infty} \sum_{\lambda, \mu=0}^{\lambda_1=s_1, \lambda_2=s_2} \varepsilon f(\varepsilon(\lambda^2+\mu^2))\, \varepsilon\left(\frac{1}{[\lambda, \mu]}\right) =$$

$$= M\int_0^{\infty} f(y)\,dy, \qquad ([\lambda, 0] = \lambda;\ [0, 0] > 1)$$

wo $[\lambda, \mu]$ der grösste gemeinsame Theiler der zwei ganzen Zahlen λ und μ ist, die zahlentheoretische Function $\varepsilon(\alpha)$ den Werth 1 oder 0 hat, je nachdem $\alpha \geqq 1$ ist oder nicht und mit $4M$ die mittlere Anzahl der eigentlichen Darstellungen einer ganzen Zahl durch die binäre quadratische Form (1, 0, 1) bezeichnet wird.

Da die Anzahl der eigentlichen Darstellungen von n als Summe zweier Quadrate bekanntlich gleich der über alle ungeraden Theiler d dieser Zahl erstreckten Summe

$$\sum_d (-1)^{\frac{d-1}{2}} \mu_2(d)$$

ist, so ergibt sich unter Benützung der ersten Gleichung des im vorigen Abschnitte angegebenen Theorems für die Gesammt-

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. 102, Abth. II. a.

anzahl $A(n)$ der genannten Darstellungen aller Zahlen von 1 bis n nach einer leichten Rechnung die Relation

$$A(n)=\frac{2n}{\pi}+a_1 n^{\frac{3}{4}},$$

wo a_1 eine für alle Werthe von n endliche Grösse bezeichnet, und daher hat man schliesslich die Relationen

$$\lim_{\varepsilon=0,\, s_1=\infty,\, s_2=\infty} \sum_{\lambda,\mu=0}^{\lambda=s_1,\, \mu=s_2} \varepsilon f(\varepsilon(\lambda^2+\mu^2))\, \varepsilon\left(\frac{1}{[\lambda,\mu]}\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(y)\,dy$$

$$\lim_{\varepsilon=0,\, s_1=\infty,\, s_2=\infty} \sum_{\lambda,\mu=0}^{\lambda=s_1,\, \mu=s_2} \varepsilon f(\varepsilon(\lambda^2+\mu^2))\, \varepsilon\left(\frac{[\lambda,\mu]}{2}\right)=\frac{\pi^2-8}{4\pi}\int_0^\infty f(y)\,dy.$$

Man hat also beispielsweise die Beziehungen

$$\lim_{\varepsilon=0,\, s_1=\infty,\, s_2=\infty} \sum_{\lambda,\mu=0}^{\lambda=s_1,\, \mu=s_2} \varepsilon^{\rho+1} e^{-a^2\varepsilon^2(\lambda^2+\mu^2)^2} (\lambda^2+\mu^2)^{\rho} J^{\nu}(a_1\varepsilon(\lambda^2+\mu^2))\, \varepsilon\left(\frac{1}{[\lambda,\mu]}\right)=$$

$$=\frac{\Pi\left(\frac{\rho+\nu-1}{2}\right)a_1^{\nu}}{2^{\nu}\pi\,\Pi(\nu)\,a^{\rho+\nu+1}}\, e^{-\frac{a_1^2}{4a^2}}\, \varphi\left(\frac{\nu+1-\rho}{2},\, \nu+1,\, \frac{a_1^2}{4a^2}\right)$$

$$\lim_{\varepsilon=0,\, s_1=\infty,\, s_2=\infty} \sum_{\lambda,\mu=0}^{\lambda=s_1,\, \mu=s_2} \varepsilon^2 e^{-a^2\varepsilon^2(\lambda^2+\mu^2)^2} (\lambda^2+\mu^2) J^{\nu}(\rho_1\varepsilon(\lambda^2+\mu^2))\, J^{\nu}(\rho_2\varepsilon(\lambda^2+\mu^2))\, \varepsilon\left(\frac{1}{[\lambda,\mu]}\right) = \frac{i^{\nu}}{a^2\pi} e^{-\frac{\rho_1^2+\rho_2^2}{4a^2}} J^{\nu}\left(\frac{\rho_1\rho_2}{2a^2 i}\right)$$

$$\lim_{\varepsilon=0,\, s_1=\infty,\, s_2=\infty} \sum_{\lambda,\mu=0}^{\lambda=s_1,\, \mu=s_2} \varepsilon^{\rho+1} e^{-a\varepsilon(\lambda^2+\mu^2)} J^{\nu}(a_1\varepsilon(\lambda^2+\mu^2))(\lambda^2+\mu^2)^{\rho}\, \varepsilon\left(\frac{1}{[\lambda,\mu]}\right) =$$

$$= \frac{\Pi(\rho+\nu)\, a_1^{\nu}}{2^{\nu-1}\pi\,\Pi(\nu)\, a^{\rho+\nu+1}} F\left(\frac{\rho+\nu+1}{2}, \frac{\rho+\nu+2}{2}, \nu+1, -\frac{a_1^2}{a^2}\right)$$

$$\lim_{\varepsilon=0,\, s_1=\infty,\, s_2=\infty} \sum_{\lambda,\mu=0}^{\lambda=s_1,\, \mu=s_2} \varepsilon^{\rho+1} e^{-a^2\varepsilon^2(\lambda^2+\mu^2)^2} (\lambda^2+\mu^2)^{\rho} J^{\nu}(a_1\varepsilon(\lambda^2+\mu^2))\, \varepsilon\left(\frac{[\lambda,\mu]}{2}\right) =$$

$$= \frac{(\pi^2-8)\,\Pi\left(\frac{\rho+\nu-1}{2}\right) a_1^{\nu}}{2^{\nu+3}\pi\,\Pi(\nu)\, a^{\rho+\nu+1}} e^{-\frac{a_1^2}{4a^2}} \varphi\left(\frac{\nu+1-\rho}{2}, \nu+1, \frac{a_1^2}{4a^2}\right)$$

70* $$\lim_{\varepsilon=0,\, s_1=\infty,\, s_2=\infty} \sum_{\lambda,\mu=0}^{\lambda=s_1,\, \mu=s_2} \varepsilon^2 e^{-a^2\varepsilon^2(\lambda^2+\mu^2)^2} (\lambda^2+\mu^2) J^{\nu}(\rho_1\varepsilon(\lambda^2+\mu^2))\, J^{\nu}(\rho_2\varepsilon(\lambda^2+\mu^2))\, \varepsilon\left(\frac{[\lambda,\mu]}{2}\right) =$$

$$= \frac{i^{\nu}(\pi^2-8)}{8\pi a^2} e^{-\frac{\rho_1^2+\rho_2^2}{4a^2}} J^{\nu}\left(\frac{\rho_1\rho_2}{2a^2 i}\right)$$

$$\lim_{\varepsilon=0,\, s_1=\infty,\, s_2=\infty} \sum_{\lambda,\mu=0}^{\lambda=s_1,\,\mu=s_2} \varepsilon^{\rho+1} e^{-a\varepsilon(\lambda^2+\mu^2)} J^{\nu}(a_1\varepsilon(\lambda^2+\mu^2))(\lambda^2+\mu^2)^{\rho}\, \varepsilon\left(\frac{[\lambda,\mu]}{2}\right) =$$

$$= \frac{\Pi(\rho+\nu)\, a_1^{\nu}(\pi^2-8)}{2^{\nu+2}\,\pi\,\Pi(\nu)\, a^{\rho+\nu+1}} F\left(\frac{\rho+\nu+1}{2}, \frac{\rho+\nu}{2}+1, \nu+1, -\frac{a_1^2}{a^2}\right) \qquad (R(a) \geqq J(a_1);\ \nu > 1)$$

$$\lim_{\varepsilon=0,\, s_1=\infty,\, s_2=\infty} \sum_{\lambda,\mu=0}^{\lambda=s_1,\,\mu=s_2} \varepsilon^2(\lambda^2+\mu^2)\, e^{-a\varepsilon(\lambda^2+\mu^2)} J^{\nu}(a_1\varepsilon(\lambda^2+\mu^2))\, J^{\nu}(a_2\varepsilon(\lambda^2+\mu^2))\, \varepsilon\left(\frac{1}{[\lambda,\mu]}\right) =$$

$$= \frac{2(a_1a_2)^{\nu}\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\pi^{3/2}\,\Pi(\nu)\, a^2 (a^2+a_1^2+a_2^2)^{\nu+\frac{1}{2}}} F\left(\frac{2\nu+1}{4}, \frac{2\nu+3}{4}, \nu+1, \frac{4a_1^2a_2^2}{(a^2+a_1^2+a_2^2)^2}\right)$$

$$\lim_{\varepsilon=0,\, s_1=\infty,\, s_2=\infty} \sum_{\lambda,\mu=0}^{\lambda=s_1,\,\mu=s_2} \varepsilon^2(\lambda^2+\mu^2)\, e^{-a\varepsilon(\lambda^2+\mu^2)} J^{\nu}(a_1\varepsilon(\lambda^2+\mu^2))\, J^{\nu}(a_2\varepsilon(\lambda^2+\mu^2))\, \varepsilon\left(\frac{[\lambda,\mu]}{2}\right) =$$

$$= \frac{(\pi^2-8)(a_1a_2)^{\nu}\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{4}\right)}{4\pi^{3/2}\,\Pi(\nu)\, a^2 (a^2+a_1^2+a_2^2)^{\nu+\frac{1}{2}}} F\left(\frac{2\nu+1}{4}, \frac{2\nu+3}{4}, \nu+1, \frac{4a_1^2a_1^2}{(a^2+a_1^2+a_2^2)^2}\right)$$

$$\lim_{\varepsilon=0,\, s_1=\infty,\, s_2=\infty} \sum_{\lambda,\mu=0}^{\lambda=s_1,\,\mu=s_2} \varepsilon e^{-2a\varepsilon(\lambda^2+\mu^2)} \left(J^{(0)}(ia\varkappa\varepsilon(\lambda^2+\mu^2))\right)^2 \varepsilon\left(\frac{1}{[\lambda,\mu]}\right) = \frac{2}{\pi^2 a} K$$

$$\lim_{\varepsilon=0,\, s_1=\infty,\, s_2=\infty} \sum_{\lambda,\mu=0}^{\lambda=s_1,\,\mu=s_2} \varepsilon e^{-2a\varepsilon(\lambda^2+\mu^2)} \left(J^{(0)}(ia\varkappa\varepsilon(\lambda^2+\mu^2))\right)^2 \varepsilon\left(\frac{[\lambda,\mu]}{2}\right) = \frac{\pi^2-8}{4a\pi^2} K,$$

wo $\varphi(\alpha, \beta, y)$ die von E. E. Kummer zuerst untersuchte Reihe

$$1 + \frac{\alpha}{1!\,\beta} y + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!\,\beta(\beta+1)} y^2 + \ldots$$

ist.



Die Dampfdrucke von Benzolkohlenwasserstoffen der homologen Reihe C_nH_{2n-6} und von Gemischen aus Benzol und Toluol

von

Carl Mangold.

Aus dem Laboratorium für allgemeine und analytische Chemie an der k. k. technischen Hochschule in Wien.

(Mit 1 Tafel.)

A. Die Dampfdrucke von Benzol, Toluol, Orthoxylol, Metaxylol, Paraxylol, Äthylbenzol und Isopropylbenzol.

Zwischen Dampfdruck und Temperatur sind eine Reihe von Formeln aufgestellt worden, welche empirisch erhaltene Regelmässigkeiten zusammenfassen.

Eine derselben, das sogenannte Dalton'sche Gesetz: »Die Dämpfe aller Flüssigkeiten haben gleiche Spannkräfte bei Temperaturen, die gleich weit entfernt sind von ihren Siedepunkten bei gewöhnlichem Atmosphärendruck«, ist durch die Untersuchungen verschiedener Forscher, insbesondere durch die umfassenden Regnaults in Bezug auf die allgemeine Giltigkeit widerlegt worden.

Doch machte Landolt[1] zuerst auf die Möglichkeit aufmerksam, dass dieses Gesetz sich an den Gliedern homologer Reihen bewahrheiten könnte. Landolt fand bei den Säuren der Reihe $C_nH_{2n}O_2$, dass es in der Nähe des gewöhnlichen Siedepunktes zutreffe. Schmidt[2], welcher die Tensionen von Flüssigkeiten derselben homologen Reihe ermittelte, zeigte, dass

[1] Liebig's Annalen Suppl. Bd. 1868, S. 129.

[2] Zeitschr. für physikal. Chemie. Bd. VII., S. 433. 1891.

innerhalb des Druckes bis zu einer Atmosphäre das angeführte Gesetz strenge giltig sei. Die ebenfalls von Schmidt[1] untersuchte Reihe der Alkohole zeigte nach dieser Richtung kein gesetzmässiges Verhalten.

Anlässlich meiner Diplomsprüfung an der technischen Hochschule in Wien wurde mir die Aufgabe gestellt, die Tensionen von Benzol und Toluol zu bestimmen.

Um die homologe Reihe der Benzolkohlenwasserstoff- C_nH_{2n-6} in Bezug auf das Dalton'sche Gesetz zu prüfen, unterzog ich neben den genannten Körpern noch der Untersuchung Orthoxylol, Metaxylol, Paraxylol, Äthylbenzol und Isopropylbenzol.

Die Bestimmungen wurden nach der dynamischen Methode ausgeführt und hiezu ein Apparat verwendet, der mit unwesentlichen Abänderungen mit dem von G. C. Schmidt[2] angegebenen, übereinstimmt. Der Apparat, vollständig aus Glas bestehend, wurde von Geissler's Nachfolger in Bonn hergestellt. Zur Zusammenstellung und Benützung desselben waren nothwendig Luftpumpe, Thermometer und Barometer. Die erstgenannten Instrumente wurden vom Herrn Regierungsrath Professor Dr. L. Ditscheiner in der freundlichsten Weise beigestellt. Es wurde benützt eine Luftpumpe (Quecksilberhahnpumpe) von Geissler's Nachfolger in Bonn, Geissler'sche Normalthermometer in 0·2° getheilt, mit von der physikalisch-technischen Reichsanstalt in Charlottenburg ausgestellten Prüfungs-Bescheinigungen, wonach alle Temperaturablesungen corrigirt wurden. Correctionen für den herausragenden Faden fielen weg, da das Thermometer sich stets ganz im Dampfe befand.

Das von mir hergestellte Barometer wurde durch sorgfältiges wiederholtes Auskochen vollständig luftfrei gemacht. Zur Ablesung des im Apparate herrschenden Druckes diente ein sehr genau gearbeitetes Kathetometer des physikalischen Institutes. Die Ablesungen, welche bis auf 0·02 *mm* möglich waren, wurden durchgängig auf eine Decimalstelle abgerundet.

Sämmtliche Druckangaben sind in Millimetern Quecksilber ausgedrückt und auf 0° Temperatur reducirt.

[1] Zeitschr. für physikal. Chemie, Bd. VIII., S. 628.

[2] Ebenda, Bd. VII, S. 441, 1891.

Bei der Ausführung der Tensionsbestimmungen wurde der von Schmidt angegebene Vorgang eingehalten.

Zur Prüfung des Apparates auf seine Zuverlässigkeit wurden die Dampfdrucke des Wassers bestimmt, da von demselben für Vergleichszwecke unanfechtbar sichere Versuchsdaten vorliegen.

Dampfdruck des Wassers.

Temperatur	Spannkraft in *mm* p_m	Spannkraft nach Regnault[1] p_r	Differenz $p_m - p_r$ Δ
21·5°	19·3	19·0	0·3
26·1	25·1	25·1	0·0
31·3	34·2	33·9	0·3
37·6	48·5	48·2	0·3
45·1	71·6	71·7	—0·1
47·3	796	80·3	—0·7
51·5	98·6	99·1	—0·5
55·9	122·5	122 7	—0·2
60·6	153·3	151·1	0·2
65·5	192·3	191·3	1·0
70·6	240·5	239·5	1·0
73·3	268·9	268·8	0·1
76·0	301·3	301·1	0·2
78·8	338·0	338 0	0·0
81·5	377·8	377·0	0·8
84·3	421·8	421·4	0·4
85·2	437·4	436·6	0·8
89·2	509·8	509·7	0·1

Die Übereinstimmung meiner Beobachtungen mit den Regnault'schen ist eine gute, der Apparat demnach zu exacten Ermittlungen von Dampfspannungen wohl geeignet.

---

[1] Nach Regnault's Messungen berechnet von Broch. Aus den physikalisch-chemischen Tabellen von Landolt und Börnstein. Berlin 1883.

Zur Interpolation meiner Spannkraftsmessungen benützte ich eine von Bertrand[1] angegebene, im Gebrauche weit einfachere Formel als die Biot'sche, welche am häufigsten angewendet wurde.

Sie hat die Form

$$p = G\left(\frac{T-\lambda}{T}\right)^{50}$$

T absolute Temperatur, λ und G sind Constanten, welche sich aus zwei Beobachtungen

$$\begin{matrix} p_1 & T_1 \\ p_2 & T_2 \end{matrix}$$

aus den folgenden Gleichungen ergeben:

$$\lambda = \frac{nT_1 - T_2}{n-1}.$$

n wird bestimmt aus dem Ausdrucke:

$$\lg n = \frac{\lg p_2 - \lg p_1}{50} + \lg T_2 - \lg T_1$$

$$\lg G = \lg p_1 - 50 \lg \frac{T_1 - \lambda}{T_1}$$

Die Versuchsergebnisse wurden in ein Coordinatennetz eingetragen, bei welchem jeder Theilstrich auf der Abcissenachse 0·1° Temperatur, auf der Ordinatenachse 1 *mm* Druck entsprach. Es wurde durch möglichst viele Beobachtungspunkte eine Curve gelegt und zur Berechnung der Constanten der Interpolationsformel stets zwei weit voneinander abstehende Beobachtungen, die in der vorgezeichneten Curve lagen, gewählt.

In den Tabellen sind die berechneten Drucke den beobachteten an die Seite gestellt.

[1] Comptes rendus, 1886, Bd. 104, S. 1568.

1. Dampfdruck des Benzols.

Zur Untersuchung wurde ein von Kahlbaum in Berlin aus Benzoësäure hergestelltes Präparat verwendet.

Der Siedepunkt des von mir noch durch fractionirte Destillation, zum Schlusse über Natrium gereinigten Präparates lag bei einem Barometerstande von 760·9 *mm* bei 80·1°.

Einige bisherige Angaben über den Siedepunkt[1] des Benzols sind:

Druck	Siedepunkt	Autor
760	80·4	Kopp 1847/48,
760	80·36	Regnault 1863.
739	79·3	Brühl 1879.
764	80·0	Schiff 1881.

Es wurde auch der Schmelzpunkt des in Kältemischung zum Erstarren gebrachten Benzols nach dem Vorgange von W. Fischer[2] ermittelt.

Ich fand den Schmelzpunkt, bestimmt mit dem von der physikalisch-technischen Reichsanstalt geprüften Normalthermometer der Firma Rohrbecks Nachfolger in Wien, bei 5·5° C.

Einige bisherige Angaben über den Schmelzpunkt sind:

Schmelzpunkt	Autor
4·45	Regnault 1863.
3	Jungfleisch 1880.
5·3	W. Fischer 1886.
5·42	Lachowicz[3] 1888.

Erste Beobachtungsreihe.

Temperatur t	Druck beobachtet p_b *mm*	Druck berechnet p *mm*	Differenz $p_b - p$ *mm*
18·3°	69·8	70·2	0·4
18·7	70·9		
19·3	72·9	73·7	0·8
20·4	76·7		

[1] Nach Landolt und Börnstein's Tabellen.

[2] Wiedemann's Annalen, Bd. XXVIII, S. 424, 1886.

[3] Ber. d. Deutsch. chem. Ges. XXI, S. 2207, 1888.

Temperatur t	Druck beobachtet p_b *mm*	Druck berechnet p *mm*	Differenz p_b-p *mm*
25·3	97·4	97·4	0·0
27·3	107·1		
30·4	122·7	122·3	0·4
33·3	139·3		
35·4	152·3	152·3	0·0
37·8	167·1		
40·0	184·0	183·5	0·5
41·6	195·5		
46·3	235·5	236·0	0·5
46·8	240·5		
48·2	253·8	254·0	0·2
50·2	273·8		
51·4	287·3	287·0	0·3
52·8	301·6		
54·2	318·4	318·6	0·2
55·2	331·1		
57·4	358·7	358·1	0·6
58·9	378·6		
60·3	397·2	397·3	0·1
61·7	417·7		
62·8	433·6	433·7	0·1
63·8	448·2		
65·1	469·1	469·6	0·5
71·4	579·7		
73·9	629·4	629·9	0·5
75·3	659·6		
76·1	676·3	676·1	0·2
77·3	702·4		
78·0	718·5	718·2	0·3

Zweite Beobachtungsreihe.

Temperatur t	Druck beobachtet p_b mm	Druck berechnet p mm	Differenz p_b-p mm
20·0	75·5	76·1	0·6
20·4	76·7		
22·1	83·7	84·0	0·3
23·9	90·5		
28·1	110·0	110·0	0·0
30·1	120·5		
33·5	140·4	139·9	0·5
34·8	148·4		
37·2	163·5	163·5	0·0
38·8	174·2		
41·4	193·5	194·2	0·7
44·3	218·3		
45·7	230·7	230·5	0·2
48·3	254·6		
50·1	273·1	273·3	0·2
51·9	293·8		
54·9	327·6	326·9	0·7
59·6	386·8		
60·8	403·7	404·4	0·7
64·2	453·8		
65·0	467·6	468·0	0·4
67·5	508·6		
69·1	537·1	537·8	0·7
71·0	570·7		
75·5	661·3	663·2	1·9
77·7	708·9		
78·3	726·2	725·0	1·2

Mit Hilfe der Beobachtungen

$t_1 = 25·3 \qquad p_1 = 97·4$

$t_2 = 77·3 \qquad p_2 = 702·4$

wurden die Constanten der Bertrand'schen Formel

$$p = G\left(\frac{T-\lambda}{T}\right)^{50}$$

ermittelt:

$$\lg G = 7 \cdot 204809$$

$$\lambda = 63 \cdot 7 \qquad T = t+273$$

Diese Constanten dienten zur Berechnung der nachfolgenden Tabelle, in welcher auch die Beobachtungen Regnault's angeführt sind.

Die Übereinstimmung meiner Resultate mit den Regnault'schen ist eine befriedigende; die Differenzen, welche sich unter 20° und über 50° zeigen, sind für organische Flüssigkeiten, welche von verschiedenen Beobachtern nie in ganz übereinstimmendem Reinheitsgrade zur Untersuchung gelangen, nicht beträchtlich.

Temperatur	Dampfdruck *mm*	Dampfdruck nach Regnault *mm*	Temperatur	Dampfdruck *mm*	Dampfdruck nach Regnault *mm*
0°	27·2	25·3	45°	224·3	224·1
5	35·8	34·2	50	272·1	271·4
10	46·5	45·3	55	328·1	326·4
15	59·8	58·9	60	393·0	390·1
20	76·1	75·7	65	468·0	463·4
25	96·1	95·9	70	554·2	547·4
30	120·2	120·2	75	652·7	643·2
35	149·1	149·3	80	764·6	751·9
40	183·5	183·6			

2. Dampfdrucke des Toluols.

a) Toluol, welches von mir aus Paratoluidin nach einer von Paul Friedländer[1] angegebenen Methode hergestellt wurde.

Der Siedepunkt des vollständig gereinigten Präparates wurde bei einem Barometerstande von 760·9 *mm* bei 110·5° beobachtet.

[1] Ber. d. Deutsch. chem. Ges., XXII, S. 587, 1889.

Einige bisherige Angaben über den Siedepunkt sind:

Siedepunkt	Druck	Autor
110°	—	Wilbrandt und Beilstein 1863.
110·3	—	Warren 1865.
110—110·1	741	Brühl 1879.
110·9—111·2	—	Brown 1881.
109·2	756	Schiff 1881.
109·8	759·4	» 1884.
111	760	Kahlbaum 1885.

Erste Beobachtungsreihe			Zweite Beobachtungsreihe		
Temperatur t	Druck beobachtet p_b mm	Druck berechnet p mm	Temperatur t	Druck beobachtet p_b mm	Druck berechnet p mm
23·0°	26·1	26·3	17·9°	20 3	20 1
25·1	28·9		19·7	22·0	
27·0	31·8	32·3	20·7	23·2	23·4
28·3	34·1		22·0	24·1	
29·0	36·8	37·2	28·9	35·1	35·4
33·8	44·7		31·1	38·5	
34·9	46·9	47·3	32·3	40·3	41·8
36·1	49·5		34·9	47·6	
37·1	52·1	52·4	36·5	51·0	51·0
38·2	54·5		37·8	54·2	
45·9	77·2	77·8	44·4	72·5	
48·8	87·5		46·6	79·9	80·2
50·4	93·7	94·3	50·0	93 5	
52·9	105·0		53·7	108·2	108·2
56·3	119·9	120·0	56·1	120·2	
58·7	134·3		58·2	130·1	129·9
65·5	172·6	172·5	63·0	157·3	
72·7	223·7		68·3	193·2	191·7
76·1	255·3	254·4	79·5	288·6	
80·3	295·7		82 7	320·3	319·9
81·7	309·7	309·1	87·6	378·0	
84·3	337 2		97·6	521·9	521 0
85·5	351·2	351·5	102·6	605·2	
88·5	388·0		105·2	651·6	652 7

Erste Beobachtungsreihe			Zweite Beobachtungsreihe		
Temperatur t	Druck beobachtet p_b *mm*	Druck berechnet p *mm*	Temperatur t	Druck beobachtet p_b *mm*	Druck berechnet p *mm*
89·2°	397·7	397·1	106·0°	667·6	
94·2	467·7		106·8	684·0	684·3
95·8	491·6	490·3	107·8	701·9	
97·0	515·0				
99·5	549·1	549·8			
101·2	578·7				

Die beiden Beobachtungen

$$t_1 = 36\cdot 5 \qquad p_1 = 51\cdot 0$$
$$t_2 = 106\cdot 8 \qquad p_2 = 684\cdot 0$$

wurden benützt, um die Constanten der Bertrand'schen Formel

$$p = G\left(\frac{T-\lambda}{T}\right)^{50}$$

zu ermitteln.

$$\lg G = 7\cdot 20292$$
$$\lambda = 69\cdot 2$$
$$T = t + 273$$

Diese Constanten dienten zur Berechnung der nachfolgenden Tabelle.

Temperatur t	Dampfdruck p *mm*	Temperatur t	Dampfdruck p *mm*	Temperatur t	Dampfdruck p *mm*
0°	7·2	40°	59·9	80°	291·6
5	9·7	45	75·0	85	345·6
10	13·0	50	92·8	90	407·5
15	17·2	55	114·1	95	478·2
20	22·5	60	139·5	100	558·3
25	29·2	65	169·2	105	648·9
30	37·4	70	204·1	110	751·0
35	47·5	75	244·7		

b) Toluol aus *p*-Toluidin dargestellt, von Kahlbaum in Berlin bezogen.

Erste Beobachtungsreihe			Zweite Beobachtungsreihe		
Temperatur t	Druck beobachtet p_b *mm*	Druck berechnet p *mm*	Temperatur t	Druck beobachtet p_b *mm*	Druck berechnet p *mm*
25·5°	29·4	29·8	26·5°	30·1	31·3
27·1	31·0		28·6	34·6	
35·7	48·1		29·9	37·1	
38·5	54·6		38·2	53·1	
39·3	57·1	57·7	39·1	56·1	57·2
46·9	81·0		42·6	66·1	
48·1	84·2		43·9	71·6	
50·5	93·5		45·2	75·2	
52·6	103·1	103·0	49·3	90·0	89·6
53·3	105·8		50·7	95·8	
54·9	112·9		54·4	111·5	
55·9	118·9		56·3	120·7	
68·2	190·0	190·0	56·8	122·9	122·2
74·4	238·1		59·0	131·5	
78·4	274·7		63·2	154·2	
82·6	318·1		66·5	176·1	
85·4	350·4	348·6	68·1	187·8	189·3
91·2	430·6		69·9	200·6	
98·4	533·2		72·0	216·5	
105·6	661·4		74·6	239·1	
			77·0	260·1	261·3
			80·8	298·3	
			84·4	338·2	
			91·0	421·1	
			102·4	678·1	677·0

Mit Hilfe der Beobachtungen

$$t_1 = 68\cdot2 \qquad p_1 = 190\cdot0$$
$$t_2 = 80\cdot8 \qquad p_2 = 298\cdot3$$

wurden die Constanten

$$\lambda = 69\cdot2 \qquad \lg G = 7\cdot20076$$

ermittelt.

Von der Berechnung einer Tabelle, die von 5 zu 5 Graden die Tensionen angibt, wurde abgesehen, da die Werte der Dampfdrucke dieses Präparates mit den des von mir dargestellten Toluols fast durchgängig übereinstimmen.[1]

3. Dampfdrucke des Orthoxylols.

Das Präparat wurde von Kahlbaum in Berlin bezogen und von mir durch wiederholte fractionirte Destillation, zum Schlusse über Natrium, gereinigt. Der von 143·7—143·9° bei einem Barometerstande von 751·6 *mm* übergehende Antheil wurde zu den Versuchen benützt.

Einige bisherige Angaben über den Siedepunkt sind:

140—141°	Fittig und Bieber
141—143	Jannasch und Hübner 1873.
142—143	Jacobsen 1877.
141	Piccard 1879.
141·9	Pinette 1888.

Erste Beobachtungsreihe			Zweite Beobachtungsreihe		
Temperatur t	Druck beobachtet p_b *mm*	Druck berechnet p *mm*	Temperatur t	Druck beobachtet p_b *mm*	Druck berechnet p *mm*
50·8°	25·5		46·2°	20·9	21·7
55·0	32·5		49·6	24·5	
58·5	38·0		53·8	30·8	
62·0	45·2	45·3	59·7	40·6	41·2
65·9	54·3		64·2	49·2	
70·5	65·5		68·8	61·1	
75·1	79·7	78·7	72·7	71·6	71·4
77·7	88·1		75·9	81·9	
81·1	101·5		79·1	93·2	
84·8	116·9	115·0	82·7	107·8	106·2
89·7	141·2		87·3	128·9	
93·5	162·0		91·2	148·9	
98·8	192·5	191·1	95·5	172·5	170·3
101·4	211·1		97·0	181·7	
104·1	235·2		97·6	185·7	
105·3	240·0	238·5	100·1	202·5	200·0

[1] Siehe Seite 1103.

Erste Beobachtungsreihe			Zweite Beobachtungsreihe		
Temperatur t	Druck beobachtet p_b *mm*	Druck berechnet p *mm*	Temperatur t	Druck beobachtet p_b *mm*	Druck berechnet p *mm*
108·0°	268 6		102·0°	216·9	
109·2	273·6		103·2	225·5	
114·8	325·6	324·7	107 6	261·2	257·4
118·0	359·4		110·2	283·4	
124·6	439·8		112·8	305·9	
129·6	507·3	508·3	115·7	335·9	334·1
132·5	553·7		117·4	353·8	
135·5	600·8		128·8	495·6	
136·6	623·3	620·5	130·8	525·4	526·3
138·1	649·9		135·2	599·6	
139·0	668·6		139·3	670·1	
141.5	710·4	710·2	141·5	709·6	710·2
			142·1	725·2	

Die Constanten der Bertrand'schen Formel wurden ermittelt zu:

$$\lambda = 76 \cdot 3, \qquad \lg G = 7 \cdot 268958$$

Dieselben dienten zur Berechnung der folgenden Tabelle:

Temperatur t	Druck p *mm*	Temperatur t	Druck p *mm*	Temperatur t	Druck p *mm*
0°	1·4	50°	26·1	100°	199·3
5	2·0	55	33·1	105	236·1
10	2·8	60	41·5	110	278·4
15	3·9	65	51·7	115	326·7
20	5·3	70	63 9	120	381·7
25	7·0	75	78·4	125	444·0
30	9·3	80	95·6	130	514·2
35	12·2	85	115·9	135	593·2
40	15·9	90	139·6	140	681·7
45	20·5	95	167·3	145	780·5

4. Dampfdrucke des Metaxylols.

Das zur Untersuchung verwendete Präparat wurde von Kahlbaum in Berlin bezogen und durch wiederholte fractionirte Destillation, zum Schlusse über Natrium, noch gereinigt. Der bei 138·7—139·0° bei einem Barometerstande von 748·3 *mm* übergegangene Antheil wurde zu den Versuchen benützt.

Einige bisherige Angaben über den Siedepunkt sind:

139·8°		Warren 1865.
138—139		Fittig und Velguth 1868.
139·2	(759)	Schiff 1884.
138·9		Pinette.

Erste Beobachtungsreihe			Zweite Beobachtungsreihe		
Temperatur t	Druck beobachtet p_b *mm*	Druck berechnet p *mm*	Temperatur t	Druck beobachtet p_b *mm*	Druck berechnet p *mm*
45·8°	21·7		46·3°	25·3	26·3
49·3	29·5		69·1	73·2	
54	37·6		72·4	83·4	
59·0	46·2	47·4	74 3	90·0	90·0
62·7	54·6		76·4	98·4	
67·6	68·0		79·1	109·3	
71·0	78·0	78·8	82·1	122·6	121·9
74·1	89·3		85·0	136·5	
77·7	103 2		90·7	169·0	
80·9	116·9	116·5	93·7	188·0	186·3
83·6	128·7		95·2	198·2	
86·5	141·9		95·6	202·8	
88·9	156·9	156·9	97·4	214·7	211·6
91·0	170·4		98·0	217·7	
93·2	184·3	183·0	99·5	230·4	
95·6	199·6		99·7	230·9	229·2
97·6	214·3		100·7	240·5	
99·6	229·5	228·4	101 7	247·9	
100·0	233·4		103·8	266·9	263·0
106·2	286·5		106·2	286·5	
108·0	302·4	301·8	107·8	303·0	
108·1	305·6		109·8	318·7	319·7
109·2	315·0		118·6	425·9	
110·3	328·1	324·9	121·0	455·0	
113·5	360·8		134·4	638·6	
115·8	388·7		136·7	710·6	709·8
117·5	408·4	406·8			
119·7	437·8				
130·7	600·0				
132·5	632·1	631·6			
134·3	664·8				
135·9	693·9	694·3			
138·0	736·6				

Mit Hilfe der Beobachtungen

$$t_1 = 74 \cdot 1 \qquad p_1 = 89 \cdot 3$$
$$t_2 = 132 \cdot 5 \qquad p_2 = 632 \cdot 1$$

wurden die Constanten der Bertrand'schen Formel berechnet:

$$\lambda = 75 \cdot 3 \qquad \lg G = 7 \cdot 261151$$

Dieselben dienten zur Berechnung der folgenden Tabelle:

Temperatur t	Druck p *mm*	Temperatur t	Druck p *mm*	Temperatur t	Druck p *mm*
0°	2·1	50°	31·4	100°	231·6
5	2·9	55	39·6	105	273·6
10	4·0	60	49·5	110	321·8
15	5·5	65	61·4	115	376·7
20	7·4	70	75·7	120	438·9
25	9·9	75	92·6	125	508·7
30	13·0	80	112·5	130	588·4
35	17·0	85	135·9	135	677·3
40	21·9	90	163·2	140	776·6
45	24·7	95	194·9		

5. Dampfdrucke des Paraxylols.

Das Präparat wurde von Kahlbaum in Berlin bezogen und ebenso wie die vorhergehenden noch gereinigt. Zur Untersuchung wurde der bei einem Barometerstande von 752·2 *mm* bei 138·0—138·2° übergehende Antheil benützt.

Einige bisherige Angaben über den Siedepunkt sind:

136—137°		Fittig und Glinzer 1865.
136·5	(758)	R. Schiff 1881,
138·1	(761·2)	» 1884.
138·0		Pinette 1888.

Erste Beobachtungsreihe			Zweite Beobachtungsreihe		
Temperatur t	Druck beobachtet p_b mm	Druck berechnet p mm	Temperatur t	Druck beobachtet p mm	Druck berechnet p mm
48·8°	30·8	30·8	48·2°	30·3	29·9
50·0	32·7		49·2	31·4	
51·6	35·2		50·8	33·8	
52·4	36·5	36 4	55·3	42·0	
55·4	42·5		59·1	49·6	
58·6	48·6		61·8	55·7	55·2
62·7	58·1	57·4	65·1	64·7	
66·2	67·9		69·8	78·7	
70·5	81·0		73·1	89·9	
73·4	91·1	89·2	76 9	104·8	
75·8	100·5		80·4	119·6	117·1
78·9	113·6		86·7	152·0	
81·7	126·6	123·0	89·2	166·9	
84·2	139·4		91·6	181·4	
105·4	290·3		94·0	196·8	
109·2	321·0	318·8	95·7	204·0	203·8
111·2	340·6		96·7	216·9	
112·8	358·1		97 8	219·8	
114·2	372·7	372·9	99·4	232·4	
115·8	391·8		103·4	264·8	
117·7	415·6		106·6	293·3	293·3
120·1	446·1	446·2	108·1	310·8	
122·1	475·5		110·1	332·4	
124·3	508·3		112·8	358·1	
127·4	552·4	552·5	114·6	376·7	
128·8	577·0		117·3	407·6	410·0
130·5	606·7		118·7	426·9	
131·9	629·9	627·7	120·5	454·4	
134·4	672·5		123·8	500·4	
135·7	693·6		126·4	539·0	
136·9	718·7	720·5	129·0	580·0	578·3
			135·2	689·1	
			136·4	705·9	
			137 7	731·4	

Mit Hilfe der Beobachtungen

$$t_1 = 50 \cdot 8 \qquad p_1 = 33 \cdot 8$$
$$t_2 = 134 \cdot 4 \qquad p_2 = 672 \cdot 5$$

wurden die Constanten der Interpolationsformel ermittelt:

$$\lambda = 74 \cdot 8 \qquad \lg G = 7 \cdot 232817$$

Dieselben dienten zur Berechnung der nachfolgenden Tabelle:

Temperatur t	Druck p *mm*	Temperatur t	Druck p *mm*	Temperatur t	Druck p *mm*
45°	25·7	80°	115·3	115°	382·2
50	32·6	85	139·1	120	444·8
55	41·0	90	166·8	125	515·5
60	51·1	95	198·9	130	595·0
65	63·3	100	235·9	135	684·0
70	77·8	105	278·4	140	783·5
75	95·0	110	327·0		

6. Dampfdrucke des Äthylbenzols.

Das Präparat wurde von Kahlbaum in Berlin bezogen und wie die vorhergehenden noch gereinigt. Zu den Versuchen wurde der bei 135·7—135·9° bei einem Barometerstande von 755·2 ***mm*** übergehende Antheil benützt.

Einige bisherige Angaben über den Siedepunkt sind:

134°		Fittig und König.
135·9	(738)	R. Schiff.
136·5		Weger

Erste Beobachtungsreihe			Zweite Beobachtungsreihe		
Temperatur t	Druck beobachtet p_b mm	Druck berechnet p mm	Temperatur t	Druck beobachtet p_b mm	Druck berechnet p mm
47·6°	30·3		60·4°	57·2	56·8
48·2	31·7		61·4	60·2	
48·8	33·1		63·2	64·6	
50·2	35·2		64·9	69·3	
53·0	40·5		66·4	73·7	
57·2	49·4	49·4	68·1	79·5	
62·2	61·5		70·3	86·9	85·6
64·7	68·7		72·4	94·8	
67·8	77·9		74·7	103·3	
69·9	85·2		76·9	112·9	
72·7	95·2	94·2	79·1	123·0	
80·2	127·5		101·1	264·3	
89·9	183·4		103 2	282·9	281·8
92·9	203·1		105·7	308·1	
96·2	226·8		107·0	319·9	
99·8	252·6	251·9	108·3	333·6	
101·6	265·9		110·1	351·4	
102·7	280·4		111·7	369·3	369·5
103·1	281·2		113·3	388·0	
104·6	299·5		115·8	419·7	
105·2	300·4	300·7	119·0	460·9	
106·0	314·3		121·8	501·4	
107·0	319·7		123·2	522·5	522·0
107·6	330·7		126·1	570·7	
109·6	350·6		128 1	602·7	
112·2	376 0	375·2	129·6	628·5	
113·9	398·1		132·2	675·0	
116·3	428·3		133·7	703·9	
129·0	623·1		134·6	719·3	719·7
132·0	672·0		135·5	737·8	
133·1	692·7	690·7			
134·2	715·5				
135·2	732·8				

Aus den Beobachtungen

$$t_1 = 57 \cdot 2 \qquad p_1 = 49 \cdot 4$$
$$t_2 = 132 \cdot 2 \qquad p_2 = 675 \cdot 0$$

wurden die Constanten der Interpolationsformel ermittelt:

$$\lambda = 74 \cdot 2 \qquad \lg G = 7 \cdot 220577$$

Mit deren Hilfe wurde die folgende Tabelle berechnet.

Temperatur t	Druck p *mm*	Temperatur t	Druck p *mm*
45°	28·2	95°	214·2
50	35·7	100	253·6
55	44·8	105	298·8
60	55·8	110	350·3
65	68·9	115	408·9
70	84·6	120	475·2
75	103 1	125	549·9
80	124 9	130	633·8
85	150·3	135	728·2
90	179·9	140	831·3

7. Dampfdrucke des Isopropylbenzols.

Das Präparat wurde von Kahlbaum in Berlin bezogen und wie die vorhergehenden noch gereinigt. Der bei einem Barometerstande von 744·1 *mm* bei 153·9—154·6° übergehende Antheil wurde zu den Versuchen benützt.

Erste Beobachtungsreihe			Zweite Beobachtungsreihe		
Temperatur t	Druck beobachtet p_b mm	Druck berechnet p mm	Temperatur t	Druck beobachtet p mm	Druck berechnet p mm
60·4°	29·1	29·4	70·3°	46·0	45·5
61·8	30·9		75·2	56·2	
62·8	32·5		79·9	68·3	
63·7	33·7		84·2	81·4	
64·6	35·5		87·0	90·8	
67·3	40·2		89·5	100·4	97·9
74·0	53·5	53·1	94·5	121·4	
75·2	56·0		96·9	132·2	
79·9	66·0		101·1	153·4	
82·9	78·0		103·7	161·4	
105·1	177·3		106·9	180·7	182·2
106·8	188·5		108·6	197·9	
115·2	238·1	239·3	110·9	207·4	
117·7	256·9		115·0	237·0	
119·3	273·3		115·2	238·2	
121·7	292·9		118·0	259·6	261·7
124·1	316·6		121·5	292·2	
126·6	342·0	341·4	125·1	325·7	
128·7	364·9		128·4	359·1	
130·4	384·8		131·3	392·7	
133·2	419·0		134·2	426·6	427·2
135·2	442·1		136·2	450·5	
137·7	470·0		138·4	480·3	
139·3	495·6	494·1	141·3	521·6	
141·5	526·0		143·3	549·7	
143·7	554·3		145·1	576·9	580·1
145·5	580·6		146·2	600·5	
147·3	612·1		153·0	715·6	
151·2	691·6				
153·6	736·0				

Aus den Beobachtungen

$$t_1 = 64 \cdot 6 \qquad p_1 = 35 \cdot 5$$
$$t_2 = 153 \cdot 0 \qquad p_2 = 715 \cdot 6$$

wurden die Constanten der Interpolationsformel ermittelt:

$$\lambda = 77 \cdot 6 \qquad \lg G = 7 \cdot 221678$$

Mit deren Hilfe wurde die nachfolgende Tabelle berechnet.

Temperatur t	Druck p *mm*	Temperatur t	Druck p *mm*	Temperatur t	Druck p *mm*
45°	14·0	85°	82·5	125°	325·2
50	18·0	90	99·8	130	377·9
55	22·9	95	120·0	135	437·2
60	28·9	100	143·5	140	503 9
65	36·1	105	170·6	145	578·6
70	44·9	110	201·9	150	661·9
75	55·3	115	237·8	155	754·5
80	64·7	120	278·7		

Mit den nun mitgetheilten Resultaten der von mir ausgeführten Bestimmungen lässt sich die Giltigkeit des Dalton'schen Gesetzes prüfen. Zu dem Zwecke ist es nothwendig, die zu einem bestimmten Drucke gehörige Temperatur zu berechnen.

Aus der Bertrand'schen Interpolationsformel

$$p = G\left(\frac{T-\lambda}{T}\right)^{50}$$

folgt, dass

$$T = \frac{\lambda}{1-a},$$

wenn a bestimmt ist durch den Ausdruck

$$\lg a = \frac{\lg p - \lg G}{50}.$$

In der nachfolgenden Tabelle sind die zu gleichen Drucken gehörigen Temperaturen verzeichnet, welche ich mit Hilfe der obigen Gleichungen und der bei den einzelnen Kohlenwasserstoffen angegebenen Constanten berechnet habe.

Entsprechende Temperaturen für die Dampfdrucke von:

Name	760 *mm*	Δ	700 *mm*	Δ	600 *mm*	Δ	500 *mm*	Δ	400 *mm*	Δ	300 *mm*	Δ	200 *mm*	Δ	100 *mm*
Benzol	80·1	2·7	77·4	4·8	72 6	5·4	67·2	6·5	60·7	7·8	52·9	10 6	42·3	16·3	26·0
Toluol	110·4	2·8	107·6	5·2	102·4	6·0	96·4	6·9	89·5	8·6	80·9	11·5	69·4	17·6	51·8
Orthoxylol..........	144·0	3 1	140·9	5·4	135·5	6·5	129·0	7·5	121·5	9·2	112·3	12·2	100·1	18·9	81·2
Metaxylol	139·2	3·0	136·2	5·5	130·7	6·3	124·4	7·5	116·9	9·1	107·8	12·0	95·8	18 9	76·9
Paraxylol....... ...	138·9	3·1	135·8	5·5	130·3	6·3	124·0	7·4	116·6	9·3	107·3	12·1	95·2	18·8	76·4
Äthylbenzol	136·6	3 0	133·6	5·1	128·5	6·8	121·7	7·5	114·2	8·4	105·8	12 7	93·1	18·9	74·2
Isopropylbenzol	155·1	3·0	152·1	6·0	146·1	6·4	139·7	7·8	131·9	9·7	122·2	12·6	109·6	19·5	90·1

Wäre das Dalton'sche Gesetz für die homologe Reihe der Benzolkohlenwasserstoffe richtig, so müssten die einer bestimmten Druckdifferenz entsprechenden Temperaturdifferenzen bei sämmtlichen Kohlenwasserstoffen gleich sein. Aus der nebenstehenden Tabelle geht hervor, dass die Temperaturdifferenzen im Allgemeinen nicht constant, jedoch bei den drei Xylolen gleich sind.

Somit folgt aus den Versuchen, dass das Dalton'sche Gesetz für die homologe Reihe der Benzolkohlenwasserstoffe nicht giltig, hingegen für die drei stellungsisomeren Xylole zutreffend ist.

Es wurde weiters eine von Dühring[1] aufgestellte Beziehung zwischen Dampfdruck und Temperatur geprüft. Dieselbe lautet: »Von den Siedepunkten beliebiger Substanzen, wie sie für irgend einen für alle gemeinsamen Druck als Ausgangspunkt gegeben sein mögen, sind bis zu den Siedepunkten für irgend einen anderen gemeinsamen Druck die Temperaturabstände sich gleichbleibende Vielfache voneinander.«

Der sogenannte »specifische Factor (q)« Dühring's muss für jeden Kohlenwasserstoff, falls die Beziehung richtig ist, eine constante Zahl sein.

Derselbe berechnet sich nach der Formel

$$q = \frac{t' - \vartheta}{t - 100}$$

t	Siedetemperatur des Wassers beim Drucke					p
100	»	»	»	»	»	760
t'	»	der Substanz beim Drucke				p
ϑ	»	»	»	»	»	760

In der folgenden Tabelle sind die specifischen Factoren der von mir untersuchten Kohlenwasserstoffe zusammengestellt. Die Siedetemperaturen bei verschiedenen Drucken sind der Tabelle Seite 1092 entnommen.

---

[1] Neue Grundgesetze zur rationellen Physik und Chemie. Leipzig 1878.

Tabelle der specifischen Factoren.

Dampfdruck *mm*	Entsprechende Temperatur für								Specifische Factoren von						
	Wasser	Benzol	Toluol	Ortho-xylol	Meta-xylol	Para-xylol	Äthyl-benzol	Iso-propyl-benzol	Benzol	Toluol	Ortho-xylol	Meta-xylol	Para-xylol	Äthyl-benzol	Iso-propyl-benzol
		ϑ													
760	100	80·1	110·4	144·0	139·2	138·9	136·6	155·1							
	t	t'													
700	97·7	77·4	107·6	140·9	136·2	135·0	133·6	152·1	1·17	1·22	1·35	1·34	1·35	1·34	1·34
600	93·5	72·6	102·4	135·5	130·7	130·3	128·5	146·1	1·15	1·23	1·31	1·31	1·32	1·25	1·39
500	88·7	67·2	96·4	129·0	124·4	124·0	121·7	139·7	1·12	1·24	1·33	1·31	1·32	1·32	1·36
400	83·0	60·7	89·5	121·5	116·9	116·6	114·2	131·9	1·14	1·23	1·33	1·31	1·31	1·32	1·36
300	75·9	52·9	80·9	112·3	107·8	107·3	105·8	122·2	1·12	1·22	1·32	1·30	1·31	1·28	1·37
200	66·5	42·3	69·4	100·1	95·8	95·2	93·1	109·6	1·13	1·22	1·31	1·30	1·30	1·30	1·36
100	51·6	26·0	51·8	81·2	76·9	76·4	74·2	90·1	1·12	1·21	1·30	1·29	1·29	1·29	1·34
Im Mittel									1·14	1·22	1·32	1·31	1·31	1·30	1·36

Aus der Tabelle ist ersichtlich, dass die Schwankungen[1] der specifischen Factoren bei den einzelnen Kohlenwasserstoffen innerhalb enger Grenzen liegen, dass somit die von Dühring aufgestellte Beziehung innerhalb des die Versuche umfassenden Druckintervalls mit grosser Annäherung thatsächlich besteht.

Mit zunehmendem Molekulargewicht steigen die specifischen Factoren an; bei den isomeren Kohlenwasserstoffen C_8H_{10} sind dieselben fast gleich.

Die specifischen Factoren wurden hauptsächlich deshalb angeführt, weil es mit ihrer Hilfe ungemein einfach ist die Siedetemperatur für irgend einen Druck zu berechnen, soferne die Resultate der Dampfdrucke des Wassers zur Verfügung stehen.

Um beispielsweise die Übereinstimmung der berechneten Werthe mit den direct beobachteten zu constatiren, führe ich für das Benzol die nachfolgende Zusammenstellung an.

Die Siedetemperaturen werden berechnet nach der Formel:

$$t' = q(t-100)+\vartheta.$$

Druck	Wasser t	t_b beobachtet (Benzol)	t' berechnet (Benzol)	Δ
152·3	60·5	35·4	35·1	0·3
235·5	70·2	46·3	46·1	0 2
331·1	78·3	55·2	55·4	0·2
702·4	97·8	77·3	77·6	0·3

In dem von Ramsay und Young[2] angegebenen Ausdrucke

$$\frac{T'_1}{T'_2} = \frac{T_1}{T_2} + c(T'_1 - T_1),$$

---

[1] Die z. B. für Benzol nach den Regnault'schen Beobachtungen von mir berechneten specifischen Factoren schwanken von 1·13—1·17, somit fast innerhalb derselben Grenzen wie die nach meinen Beobachtungen ermittelten.

[2] Zeitschrift für physikalische Chemie, Bd. I, S. 250, 1887.

worin T_1 und T_2 die absoluten Siedetemperaturen irgend zweier Stoffe bei einem Drucke p, T'_1 und T'_2 dieselben bei einem Drucke p' bedeuten, zeigt sich die Constante c beim Vergleiche nahestehender Stoffe gleich Null. Ich habe die Richtigkeit der Angabe bei der Prüfung dieser Beziehung der von mir untersuchten Kohlenwasserstoffe untereinander als vollkommen zutreffend gefunden.

Wenn $c = o$, so ist das Verhältniss der zum gleichen Druck gehörigen Siedetemperaturen constant.

Die folgende Tabelle enthält die Werthe für die Verhältnisse $\frac{T_1}{T_2}$ der von mir untersuchten Kohlenwasserstoffe:

Substanz	T_1 bei 760 *mm*	T_2 bei 200 *mm*	$\frac{T_1}{T_2}$
Benzol	353·1	315·3	1·120
Toluol	383·4	342·4	1·120
Orthoxylol	417·0	373·1	1·118
Metaxylol	412·2	368·8	1·118
Paraxylol	411·9	368·2	1·119
Äthylbenzol	409·6	366·1	1·119
Isopropylbenzol	428·1	382·6	1·119

Es zeigt sich, dass das Verhältniss $\frac{T_1}{T_2}$ nahezu ganz constant ist.

Die mitgetheilten Versuchsergebnisse gestatten auch die Erörterung der Frage, wie sich die Differenzen der Siedetemperaturen von je zwei homologen Kohlenwasserstoffen, deren Zusammensetzungsdifferenz CH_2 beträgt, bei verschiedenen Drucken im Verhältniss zur Differenz der Siedetemperaturen bei gewöhnlichem Atmosphärendruck ändern.

Darüber gibt die folgende Zusammenstellung Aufschluss.

Entsprechende Siedetemperaturen für die Drucke von:

Name	760mm	Δ CH_2	700 mm	Δ CH_2	600 mm	Δ CH_2	500 mm	Δ CH_2	400 mm	Δ CH_2	300 mm	Δ CH_2	200 mm	Δ CH_2	100 mm	Δ CH_2
Benzol	80·1		77·4		72·6		67·2		60·7		52·9		42·3		26·0	
		30·3		30·2		29·8		29·2		28·8		28·0		27·1		25·8
Toluol	110·4		107·6		102·4		96·4		89·5		80·9		69·4		51·8	
		33·6		33·3		33·1		32·6		32·0		31·4		30·7		29·4
Orthoxylol	144·0		140·9		135·4		129·0		121·5		112·3		100·1		81·2	
		28·8		28·6		28·3		28·0		27·4		26·9		26·4		25·1
Metaxylol	139 2		136·2		130·7		124·4		116·9		107·8		95·8		76·9	
		28·5		28·2		27·9		27·6		27·1		26·4		25·8		24·6
Paraxylol	138·9		135·8		130·3		124·0		116·6		107·3		95·2		76·4	
		26·2		26·0		26 1		25 3		24·7		24·9		23·7		22·4
Äthylbenzol	136·6		133·6		128·5		121·7		114·2		105·8		93·1		74·2	
		18·5		18·5		17·6		18·0		17·7		16·4		16·5		15·9
Isopropylbenzol .	155·1		152·1		146·1		139·7		131·9		122·2		109·6		90·1	

Mit fallendem Drucke findet eine Abnahme der der Zusammensetzungsdifferenz CH_2 entsprechenden Siedepunktsdifferenzen statt.

B. Die Dampfdrucke von Gemischen aus Benzol und Toluol.

Mischungen von Benzol und Toluol gehören in jene Classe von Flüssigkeitspaaren, deren Bestandtheile sich in jedem beliebigen Verhältnisse lösen.

Die verschiedenen physikalischen Constanten eines derartigen Flüssigkeitsgemisches entsprechen meist nicht den nach den quantitativen Antheilen berechneten Werthen.

So ist auch der Dampfdruck eines aus zwei sich vollkommen lösenden Flüssigkeiten bestehenden Gemisches stets kleiner als die Summe der Dampfdrucke der Bestandtheile.

Zur Ermittlung des Dampfdruckes von Flüssigkeitsgemischen ist nur die statische Methode anwendbar.

Der von mir hierzu gebrauchte Apparat war folgendermassen eingerichtet: Der wesentliche Theil besteht aus einem kupfernen Kasten mit eisernen Rahmen an den Längsseiten. An diesen wurden ebene Spiegelglasplatten mit Hilfe von Eisenrahmen und Schrauben befestigt. Zur Dichtung dienten Gummieinlagen.

Am Boden des Kastens, der 81 *cm* hoch, 42·5 *cm* breit ist und circa 34·5 *l* Inhalt besitzt, befinden sich fünf Öffnungen, durch welche mittelst Kautschukstöpseln die Röhren dicht eingesetzt werden können. Der Kasten trägt auf jeder Seite einen Ring und eine Querspeiche, die zu seiner Befestigung an dem Stative dienen. Längs der Ringe erfolgt die Führung an den beiden verticalen Stangen des Gestelles; auf die Querspeichen stützen sich die Klemmschrauben, durch welche der Kasten in jeder beliebigen Höhe festgehalten werden kann.

Zur Zusammenstellung und Benützung des Apparates wird zunächst die Quecksilberwanne in der aus der Figur der beifolgenden Tafel ersichtlichen Stellung bis zur Hälfte mit Quecksilber gefüllt, hierauf die Barometerröhren eingesetzt und mittelst Stativen festgehalten. Vor dem Einsetzen werden die genau in die Öffnungen des Bodens passenden durchbohrten Kautschukstöpsel über die Rohre gezogen.

Nach dem Hineinlassen der Gemische in dieselben wird der Kasten darüber gezogen, die Stöpsel fest hineingedrückt.

Hierauf wird der Kasten mit Wasser gefüllt, so dass die oberen Enden der Röhren noch vollständig in Wasser getaucht sind.

Das Anwärmen desselben geschieht mit zwei Ehmann'schen Heizvorrichtungen, deren Einrichtung aus der Figur zu ersehen ist.

Als Rührer wurde ein aus Blei hergestellter, an zwei Schnüren befestigter Rahmen verwendet.

Für die statische Methode der Tensionsbestimmungen ist es ganz besonders wichtig, vollständig luftfreie Barometer für die Aufnahme der zu untersuchenden Flüssigkeiten zu benützen.

Sämmtliche Barometer wurden von mir selbst hergestellt und durch sorgfältiges Auskochen vollständig luftfrei gemacht. Die innere Weite der Barometerröhren betrug 11 *mm*.

Es wurden zwei Versuchsreihen ausgeführt; bei der ersten waren zwei Röhren, bei der zweiten vier Röhren mit Flüssigkeitsgemengen neben einem als Barometer verwendeten Rohre im Apparate.

Bei den Versuchen wurde in der Weise vorgegangen, dass das Wasser im Apparate bis auf die gewünschte Temperatur angeheizt, dann die Flammen unter den Erhitzungsvorrichtungen entweder kleiner gemacht oder ganz abgedreht, hierauf zum Ausgleich der Temperaturen in den verschiedenen Niveaus der Rührer eine kurze Zeit hindurch lebhaft auf und ab bewegt wurde.

War der Temperaturausgleich durch die gesammte Wassermasse erfolgt, so wurde mittelst des Kathetometers die Höhe der Quecksilberstände in allen Röhren abgelesen. Die Unterschiede derselben gegen den Stand des Barometers gaben die Tensionen bei der eben herrschenden Temperatur des Wasserbades an. Innerhalb der Ablesungszeit erhielt sich die Temperatur fast immer constant.

An den Spannkraftsmessungen wurden die folgenden Reductionen vorgenommen:

1. Reduction der Flüssigkeitssäulen der Gemische auf Quecksilber.

2. Reduction der Quecksilbersäulen auf 0°.

Zu den Gemischen wurden verwendet: Benzol aus Benzoësäure von Kahlbaum und Toluol aus Paratoluidin von mir erzeugt. Die Mischungen wurden mit der Wage hergestellt.

Gemisch Nr. 1

besteht aus:

Benzol ....22·84%
Toluol.....................77·16%

Temperatur t	Dampfdruck des Gemisches p mm	Dampfdruck des Benzols p_1 mm	Dampfdruck des Toluols p_2 mm	p_1+p_2 mm	$\frac{p}{p_1+p_2}$
17·2	40·6	66·6	19·4	86·0	0·472
21·6	46·9	82·1	24·5	106·6	0·441
25·0	54 7	96·1	29·2	125·3	0·437
25·8	55·4	99 6	30·4	130·0	0·426
28·5	61·9	112·5	34·8	147·3	0.421
30·0	66·7	120·2	37·4	157·6	0·423
35·0	80·1	149·1	47·5	196·6	0·408
36·5	85·5	158·8	51·0	209·8	0·408
37·6	89·8	166·3	53·7	220·0	0·408
43·3	110·2	209·7	69·4	279·1	0·395
50·0	143·6	272·1	92·8	364·9	0·394
54·7	169·2	324·5	112·8	437·3	0·387
60·0	205·6	393·0	139·5	532·5	0·386
61·7	218·4	417·7	149·3	567·0	0·385
62·4	222·0	427·7	153·2	530·9	0·382
70·4	291·8	561·6	207·2	768·8	0·380

Gemisch Nr. 2

besteht aus:

Benzol ....39·41%
Toluol ....60·59%.

Temperatur t	Dampfdruck des Gemisches p mm	Benzols p_1 mm	Toluols p_2 mm	p_1+p_2 mm	$\frac{p}{p_1+p_2}$
10·8°	34·0	48·4	13·6	62·2	0 548
17·2	45·1	66·1	19·4	86·0	0·524
20·8	51·2	79·0	23·5	102·5	0·500
28·6	73·6	113·0	34·9	147·9	0·498
30·0	77·8	120·2	37·4	157·6	0·495
35·0	95·0	149·1	47·5	196·6	0·484
37·6	105·2	166·3	53·7	220·0	0·478
43·3	131·0	209·7	69·4	279·1	0·470
50·0	172·5	272·1	92·8	364·9	0·470
54·7	201·9	324·5	112·8	437·3	0·462
60·0	245·5	393·0	139·5	532·5	0·461
61·8	260·2	418·8	149·9	568·7	0·458
62·3	263·9	426·2	152·6	578·8	0·459
70·3	342·4	559·7	206·4	766·1	0·447

Gemisch Nr. 3

besteht aus:

Benzol ....47·10%
Toluol ....52·90%

Temperatur t	Dampfdruck des Gemisches p mm	Benzols p_1 mm	Toluols p_2 mm	p_1+p_2 mm	$\frac{p}{p_1+p_2}$
15°	47·7	59·8	17·2	77·0	0·620
20	58·1	76·1	22·5	98·6	0·589
25	69·8	96·1	29·2	125·3	0·557
30	87·3	120·2	37·4	157·6	0·554
35	106·7	149·1	47·5	196·6	0·543
40	129·5	183·5	59·9	243·4	0·532
45	156·2	224·3	75·0	299·3	0·522
50	188·0	272·1	92·8	364·9	0·515
55	224·9	328·1	114·1	442·2	0·509
60	269·8	393·0	139·5	532·5	0·506
65	317·0	468·0	169·2	637·2	0·499
70	374·6	554·2	204·2	758·3	0·494

Gemisch Nr. 4

besteht aus:

Benzol ....75·57
Toluol ....24·43.

Temperatur t	Dampfdruck des Gemisches p mm	Dampfdruck des Benzols p_1 mm	Dampfdruck des Toluols p_2 mm	p_1+p_2 mm	$\frac{p}{p_1+p_2}$
15°	55·1	59·8	17·2	77·0	0·715
20	67·2	76·1	22·5	98·6	0·682
25	83·9	96·1	29·2	125·3	0·669
30	105.0	120·2	37·4	157·6	0·667
35	129·1	149·1	47·5	196·6	0·657
40	158·1	183·5	59·9	243·4	0·650
45	191·2	224·3	75·0	299·3	0·639
50	330·1	272·1	92·8	364·9	0·631
55	277·2	328·1	114·1	442·2	0·627
60	328·5	393·0	139·5	532·5	0·617
65	387·7	468·0	169·2	637·2	0·609
70	549·4	544·2	204·1	758·3	0·593

Gemisch Nr. 5

besteht aus:

Benzol ....80·11%
Toluol ....19·89%.

Temperatur t	Dampfdruck des Gemisches p mm	Dampfdruck des Benzols p_1 mm	Dampfdruck des Toluols p_2 mm	p_1+p_2 mm	$\frac{p}{p_1+p_2}$
15°	59·8	59·8	17·2	77·0	0·776
20	73·3	76·1	23·5	98·6	0·743
25	89·9	96·1	29·2	125·3	0·717
30	111·5	120·2	37·4	157·6	0·707
35	136·0	149·1	47·5	196·6	0·692
40	166·9	183·5	59·9	243·4	0·686
45	200·7	214·3	75·0	399·3	0·661
50	242·5	272·1	92·8	364·9	0·695
55	291·8	328·1	114·1	442·2	0·670
60	347·2	393·0	435·5	532·5	0·652
65	411·4	468·0	169·2	637·2	0·646
70	485·1	554·2	204·1	758·3	0·639

Aus den vorstehenden Versuchsergebnissen ist zu ersehen, dass die Dampfdrucke von Mischungen aus Benzol und Toluol Functionen der Mischungsverhältnisse sind; dass die Dampfdrucke mit Zunahme des Benzolgehaltes in den Mischungen ansteigen.

Die Tension einer jeden Mischung bei jeder Temperatur ist kleiner als die Summe der Spannkräfte der Bestandtheile, und zwar liegt der Dampfdruck stets zwischen den Spannkräften des Toluols und Benzols und ist stets grösser als der des Toluols.

Was den Quotienten $\frac{p_1+p_2}{p}$, d. i. das Verhältniss der Tension des Gemisches zur Summe der Tensionen der Bestandtheile, anbelangt, so zeigt sich, dass derselbe mit zunehmenden Procentgehalt an Benzol in der Mischung zunimmt. Er wird hingegen für jede einzelne Mischung mit zunehmender Temperatur kleiner.

Nach der Eintheilung Konowalows[1] gehören Mischungen von Benzol und Toluol in die Gruppe von zwei sich vollständig ineinander lösenden Flüssigkeitspaaren, deren Spannungscurven weder ein Minimum noch ein Maximum enthalten und beim Verdampfen beziehungsweise Sieden sich in folgender Weise verhalten: »Beim Verdampfen wird sich die Zusammensetzung des Gemisches fortwährend ändern, und zwar bei constant gehaltener Temperatur die Tension, bei constant gehaltenem äusseren Drucke die Siedetemperatur: es gibt kein constant siedendes Gemisch. Von welchem Mischungsverhältniss man auch ausgehen möge, das Endresultat einer fortgesetzten (wiederholten) Destillation ist stets, dass die Flüssigkeit von höherer Tension rein übergeht, die von kleinerer Tension rein zurückbleibt.«

Zu Seite 1082.

Ich habe des Vergleiches wegen auch die Siedetemperaturen berechnet für diejenigen Drucke, bei welchen Neubeck[2] und A. Naccari und S. Pagliani[3] die Siedetemperaturen

---

[1] Wiedemann's Annalen, Bd. XIV, S. 47, 1881.

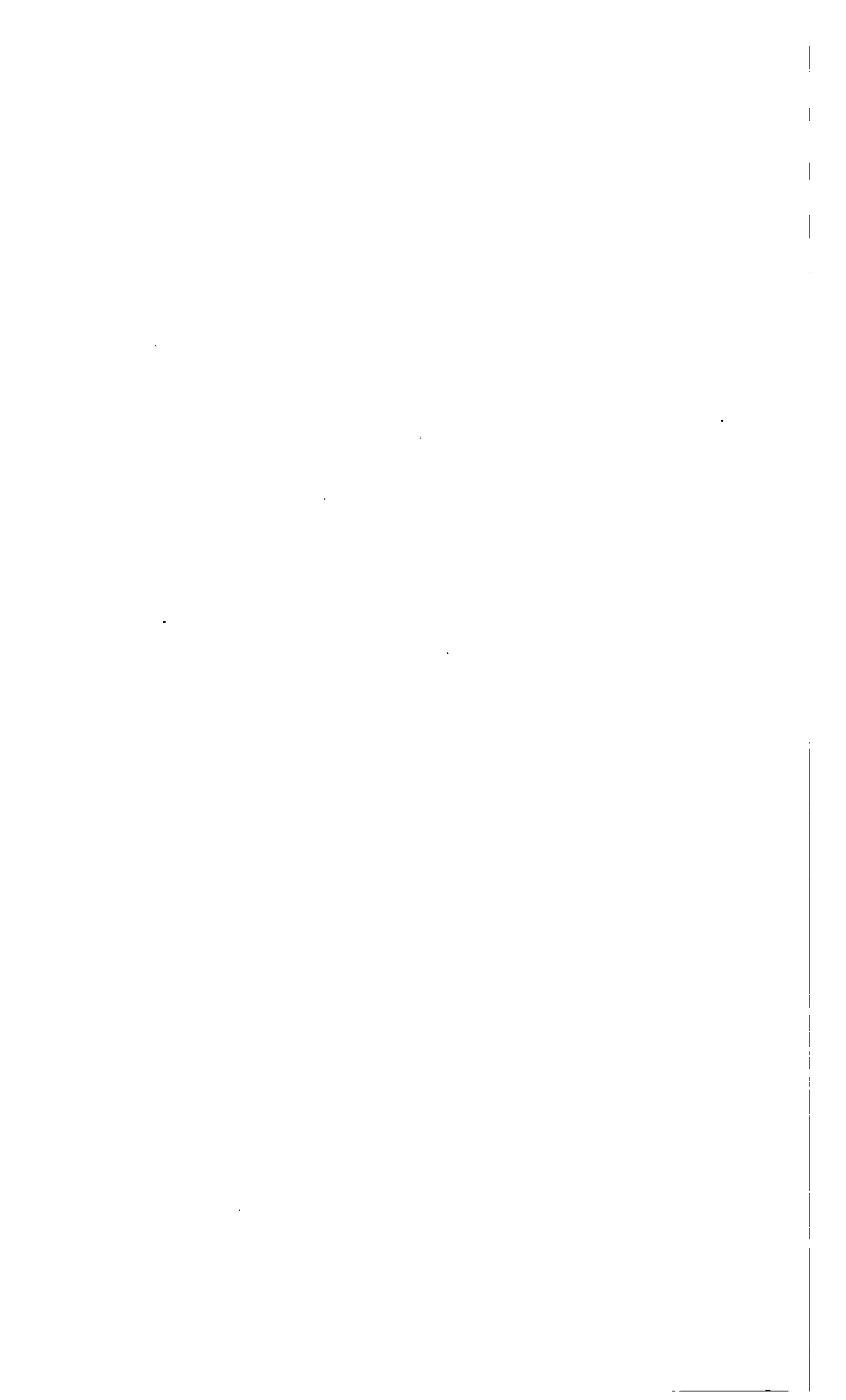
[2] Zeitschrift f. physikal. Chemie, Bd. I. 649, 1887.

[3] Ann. Phys. Beibl. 6, 1882.

bestimmt haben und in beiden Fällen gute Übereinstimmungen constatirt.

So führe ich z. B. in der folgenden Zusammenstellung neben den von Neubeck ermittelten (t_n) die von mir mit den angeführten Constanten berechneten Siedetemperaturen (t_m) an.

p	t_n	t_m
144·8	61·2	61·0
454·1	93·4	93·5
760·5	110·8	110·5



Über Condensationsschwingungen

von

J. Wanka,

Supplent an der k. u. k. Marine-Akademie in Fiume.

(Mit 9 Textfiguren.)

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Prag.

Beim Aufblasen von Kugeln an innen befeuchteten Glasröhren kommt es vor, dass nach dem Absetzen der Röhre vom Munde ein gewöhnlich tiefer Ton zu hören ist, welcher so lange andauert, als die Kugel entsprechend heiss ist. Diese Erscheinung beschreibt schon A. Pinaud[1] und erkennt auch richtig, dass dieselbe von den Wasserdämpfen herrührt, welche in der heissen Kugel aus dem eingeführten Wasser entstehen, und dass eine periodische Condensation und nachherige Verdampfung die Druckschwankungen setzt, welche die Luft in der Glasröhre zum Tönen bringen, ohne indessen diesen Punkt deutlich hervorzuheben und näher darauf einzugehen, was bei dem damaligen Stand der Wärmetheorie auch verständlich ist.

Dass Condensationen des Dampfes das Massgebende sind, geht schon daraus hervor, dass mit trockenen Röhren der Ton nicht hervorgerufen werden kann. Mit der Erklärung genannter Thatsache steht übrigens keineswegs in Widerspruch die zuerst von Biot[2] aufgestellte, von späteren[3] festgehaltene Behauptung, dass bei der Schallfortpflanzung in Dämpfen

[1] A. Pinaud, Über eine neue Art der Tonerzeugung, Pogg. Ann. 42, S. 610 (1837).

[2] Biot, Traité de physique II, S. 22 (1816).

[3] Jüngst von F. Beyme, Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in gesättigten Dämpfen (1884), (auch Beibl. 9 [1885] S. 503) und G. Jäger: Über die Schallgeschwindigkeit in Dämpfen und Bestimmung der Dampfdichte. Wied. Ann. 36.

Condensationen nicht auftreten können, denn bei dem obigen Experiment ist der Wasserdampf weder der schallfortpflanzende Körper, noch geräth er selbst in Schwingungen; ihm kommt vielmehr die Aufgabe zu, durch seine Zustandsänderungen die akustischen Schwingungen zu erhalten. Ferner hat man es hier mit verhältnissmässig langsamen Schwingungen zu thun, bei welchen trotz theilweisen Condensationen Druckfortpflanzungen möglich wären.

Der Ton kann übrigens bequem und verlässlich in folgender Weise erzeugt werden: man setzt an ein kugel- oder cylinderförmiges Glasgefäss von etwa 10—50 cm^3 Capacität eine rechtwinklig gebogene Glasröhre an, füllt das Gefäss bis zu etwa einem Drittel mit Wasser und taucht es in ein Ölbad. Bei einer Temperatur nahe an 100° C. tritt der Ton auf und erhält sich zwischen gewissen Temperaturgrenzen beliebig lange, ohne dass das Wasser siedet. Je nach den Dimensionen der Röhre und des Gefässes ist der Ton höher oder tiefer, klingt in der Regel wie ein dumpfes Brummen. Die Luftbewegung in der Röhre kann so kräftig werden, dass man sie mit der Hand spürt.

Im Folgenden beabsichtige ich eine Modification dieses Versuches zu beschreiben, die zu bemerkenswerthen Beobachtungen geführt hat. Ich ersetze die Luft in der Ansatzröhre durch einen anderen schwingungsfähigen Körper, auf welchen dann der Dampf zu wirken hat, nämlich durch die Flüssigkeitssäure in einer *U*-Röhre, welche den Dampfraum absperrt.

Zuvor erwähne ich noch eine Übergangsanordnung; an das mit der Flüssigkeit, meistens mit Wasser gefüllte Gefäss ist eine höchstens 2·5 *mm* im Lichten weite Glasröhre angesetzt. Das erstere wird so in das Bad gesteckt, dass die enge Glasröhre horizontal bleibt. Die entwickelten Wasserdämpfe condensiren sich an den kälteren Stellen in der Röhre und laufen zu einem oder mehreren Tropfen zusammen, welche alsbald ohne weiteres Zuthun in heftige horizontale Schwingungen gerathen, deren doppelte Amplitude 3—4 *cm* beträgt und deren Schwingungszahl per Minute auf ungefähr 300 geschätzt werden kann. Die Schwingungen halten aber nicht regelmässig an, da die Tropfen wegen der Adhäsion an der

Glaswand zerfliessen, worauf sich dann an einer anderen Stelle ein neuer Tropfen bildet, um ebenso in Schwingungen zu gerathen. Der Tropfen ist hier nicht der schwingungsfähige Körper, sondern zeigt als Index nur die Schwingungen der abgesperrten Luft an, welche er gleichzeitig verlangsamt.

Beschreibung des Apparates. Um die Sperrflüssigkeit in der *U*-Röhre in dauernde Schwingungen zu versetzen, bediente ich mich des folgenden Apparates. Derselbe besteht aus drei Theilen: einem Siedegefäss *a* (Fig. 1), das kugelförmig oder cylindrisch gestaltet, zur Aufnahme der Flüssigkeit, deren Dämpfe benützt werden, dient und in das Bad (am besten Paraffinbad) gebracht wird; der *U*-Röhre *b* und einem Verbindungsrohr *c*. Letzteres ist mit *a* gewöhnlich in einem Stück gefertigt und besteht aus einem verticalen Theil, in den durch einen Kork ein Thermometer mit cylindrischem Quecksilbergefäss verschiebbar eingeführt werden kann, und einem daran gesetzten horizontal verlaufenden Rohr, das passend in einen Träger eingespannt wird. Beide sind etwa 4—13 *mm* weit. Der eine Schenkel der *U*-Röhre ist am Ende knieförmig gebogen und trägt hier ein kurzes Glasröhrchen *d* angesetzt, über welches ein Stück Kautschukschlauch mit Quetschhahn als Ventil geschoben wird. Ein weiteres Ventilloch befindet sich bei *e*, etwas über die Mitte desselben Schenkels und wird durch ein kurzes, über die Röhre gestreiftes Schlauchstück geschlossen. Mit Hilfe dieser Ventile kann man bequem den Innenraum des Siedegefässes mit der äusseren Luft in Communication setzen und so, besonders mit dem Ventil bei *e*, den ganzen, durch die Sperrflüssigkeit abgegrenzten Raum mit Dampf füllen. In das Ölbad ist ausser einem Thermometer noch ein Reichel'scher Thermoregulator und zur Beleuchtung des Inneren des eingetauchten Siedegefässes — das Paraffin war in einem Eisentopf — ein Glühlämpchen mit Zuleitungsdrähten eingeführt.

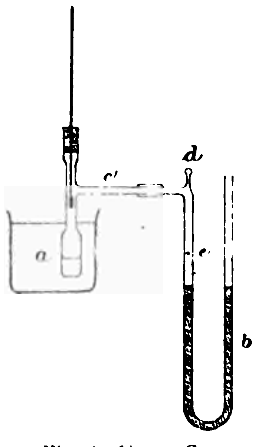


Fig. 1. $^1/_{10}$ n. G.

Die Capacität der verwendeten Siedegefässe betrug 8—72 cm^3, jene der Verbindungsstücke 6—24 cm^3, die U-Röhren hatten 3—15 *mm* Durchmesser und eine Länge zwischen 37 und 72 *cm*. Das Siedegefäss wird etwa bis zu einem Drittel mit Wasser oder einer anderen Flüssigkeit gefüllt; als Sperrflüssigkeit dient Wasser und Quecksilber.

Verlauf des Versuches. Man hält die Temperatur des Bades auf 110—115°; sie beträgt dann im Siedegefäss noch nicht 100° und das Sieden des Wassers wird vortheilhaft vermieden. Hat sich der Dampfraum mit Dampf gefüllt, so schliesst man zunächst den Quetschhahn, dann das Ventilloch *e*, worauf die Schwingungen eingeleitet werden können. Ist in der U-Röhre Wasser, so beginnt es bei der geringsten Erschütterung seine Schwingungen mit anfangs kleiner Amplitude, die aber rasch wächst und sich schliesslich auf einem maximalen Werth erhält. Bei Quecksilber als Sperrflüssigkeit muss das Gleichgewicht meist absichtlich gestört werden; es genügen jedoch anfängliche Schwankungen von höchstens 1 *cm* Länge; die Amplitude nimmt zwar langsamer zu als bei Wasser, erreicht aber ceteris paribus einen grösseren maximalen Werth. Die totale Schwankung wird mitunter 18—20 *cm* lang, dort erreicht sie selten mehr wie 12 *cm*. Während der Schwingungen bleibt, wie man sich mit der erwähnten Glühlampe überzeugen kann, die Flüssigkeit im Siedegefäss vollkommen ruhig, wohl aber bemerkt man, wie hauptsächlich an den Wänden des Verbindungsrohres periodisch, im Tempo der Schwingungen der Sperrflüssigkeit condensirter Wasserdampf sich niederschlägt und wieder verdampft. Wegen der Wichtigkeit dieser Condensationen nenne ich mangels einer anderen, vielleicht besseren Bezeichnung diese Schwingungen Condensationsschwingungen. Die Schwingungszahl per Minute — Hin- und Hergang zusammen als eine Schwingung gerechnet — beträgt je nach Umständen bei Wasser 120—250, bei Quecksilber 60—130; sie ist in jedem Fall unter sonst gleichen Umständen grösser als jene der freien Schwingung der Sperrflüssigkeit, wenn auf dieser in beiden Schenkeln ein constanter Luftdruck lastet; bei Wasser ist der Unterschied der Schwingungszahlen viel grösser als bei Quecksilber. Hält man mittels

des Thermoregulators die Temperatur constant, so erfolgen die Schwingungen beliebig lange mit präcis constanter Amplitude und Schwingungsdauer; letztere nimmt übrigens mit sinkender Temperatur innerhalb viel engerer Grenzen zu als die Amplitude, welche von der Temperatur sehr merklich beeinflusst wird, mit sinkender Temperatur ziemlich rasch abnimmt.

Besonderes Interesse bietet das Verhalten des im Dampfraum befindlichen Thermometers. War vor Beginn der Schwingungen die Temperatur im Siedegefäss und noch wenigstens in dem verticalen Theil des Verbindungsrohres überall gleich, so sinkt unmittelbar nach Einleitung der Schwingungen die Temperatur im Verbindungsrohr um mehrere Grade und wird an verschiedenen Stellen eine verschiedene, umso niedriger, je weiter vom Siedegefäss entfernt. Die Schwingungen erhalten sich mit abnehmender Temperatur bis zu 75° im Verbindungsrohr, wo dann im Bad circa 85° sind. Ausserdem bemerkt man bei dem Thermometer im Dampfraum ein Auf- und Abschwanken des Quecksilbers in der gleichen Periode, mit der die Schwingungen stattfinden, und zwar hauptsächlich dann, wenn gleichzeitig am Quecksilbergefäss des Thermometers Nebel sich periodisch niederschlagen und verschwinden. Diese Schwankungen des Quecksilbers im Thermometerrohr, welche auch den raschen Schwingungen des Wassers zu folgen vermögen, sowie auch die Condensationen des Dampfes im Verbindungsrohr beobachtet man bequemer bei den langsamen Schwingungen von Quecksilber in der *U*-Röhre; man kann sich dann überzeugen, dass die Condensationen während der Dilatation auftreten, während der Compression die Nebel wieder verschwinden sowie, dass das Quecksilber im Thermometerrohr während der Dilatation fällt. Bei der Verwendung von Quecksilber als Sperrflüssigkeit kommt es mitunter vor, dass die Condensationen nicht in dem einfachen Tempo der Schwingungen erfolgen, sondern auf eine erste Condensation während der Dilatation noch ruckartig eine geringere Nachcondensation folgt. Etwas analoges findet auch beim Thermometer statt. Auf die nähere Besprechung der Schwankungen im Thermometer komme ich noch zurück.

Bei Quecksilber und mitunter auch bei Wasser als Sperrflüssigkeit erhalten sich die Schwingungen selbst dann noch, wenn die Flüssigkeit im Siedegefäss bereits siedet, verlaufen aber naturgemäss nicht mehr regelmässig; bei der Dilatation, also Druckabnahme, findet ein Aufwallen der Flüssigkeit oder Aufsteigen zahlreicher Dampfblasen statt. Bei Wasser in der U-Röhre sind bei höheren Temperaturen die Schwingungen dann so stürmisch, dass die Flüssigkeit infolge der Druckabnahme aus der U-Röhre in das Siedegefäss zu stürzen droht, was insofern von unangenehmen Folgen begleitet sein kann, als das Gefäss springt und seinen Inhalt in das heisse Öl ergiesst. Diese stürmischen Schwingungen sind auch in der Hinsicht unregelmässig, als die Amplituden periodisch ab- und zunehmen, was ganz den Eindruck von Schwebungen macht.

Versucht man, bevor noch der Dampfraum mit Dämpfen gefüllt ist oder die Temperatur genug hoch ist, die Schwingungen einzuleiten, so hören dieselben, mehr oder weniger gedämpft, bald auf; es darf ferner der eingetauchte Theil des Siedegefässes nicht ganz mit Flüssigkeit gefüllt sein, etwa nur bis zu einem Drittel oder zur Hälfte. Auch wenn alles Wasser oder der sonst verwendete Hilfskörper ganz verdampft ist, hören die Schwingungen auf.

Sie erfolgen meistens um ein in den beiden Schenkeln verschieden hohes Niveau als Gleichgewichtslage, je nach dem mittleren Druck im Dampfraum; dieser ist nach Beginn der Schwingungen gewöhnlich kleiner als der äussere Luftdruck. Die an den Wänden des Dampfraumes condensirte Flüssigkeit rinnt zum Theil in das Siedegefäss, zum Theil in das U-Rohr. Verwendet man als Sperrflüssigkeit Quecksilber, so bemerkt man diese Ansammlung des Condensationswassers sehr gut; die Flüssigkeit destillirt gleichsam aus dem Siedegefäss über in die U-Röhre. Abgesehen von dieser Condensationsflüssigkeit, welche nicht mehr zum Verdampfen gelangt, durchläuft der Hilfskörper einen vollständigen Kreisprocess und es geht nichts davon verloren.

Zur Theorie der Condensationsschwingungen. Die freien Schwingungen der Sperrflüssigkeit finden in einem U-Rohre von durchwegs gleichem Durchmesser, wie schon

Newton bekannt war, abgesehen von der Reibung genau sinförmig statt, auch bei endlichen Elongation, und zwar mit der Periode $2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$, wo l die ganze Länge der Flüssigkeitssäule ist, sonach ganz unabhängig von ihrer materiellen Beschaffenheit. Die eben beschriebenen Condensationsschwingungen verlaufen stets rascher als die freien unter sonst gleichen Umständen und werden durch die Reibung der Flüssigkeit an der Glaswand nicht zum Erlöschen gebracht, sondern können beliebig lange erhalten werden; sie sind also nach den von Raleigh[1] gegebenen Kennzeichen erzwungene Schwingungen, bei welchen besonders deutlich die l. c. skizzirten Verhältnisse zu beobachten sind. Die Sperrflüssigkeit ist ein schwingungsfähiges System, welches durch seine Bewegung den Dampf im Dampfraum beeinflusst und umgekehrt wieder von diesem beeinflusst wird. Diese gegenseitige Einwirkung gibt sich am deutlichsten darin kund, dass man verschiedene Schwingungsdauern und Amplituden erhält, wenn bei demselben Apparat gleich lange Flüssigkeitssäulen von Wasser und Quecksilber schwingen.

Die Zustandsänderungen, welche das Wasser-Dampfgemisch durchläuft, erfolgen bei einem endlichen Temperaturgefäll gegen die Wärmequelle und mit endlicher Geschwindigkeit; namentlich aus dem letzteren Grund geht es daher nicht an, die Gleichungen der mechanischen Wärmetheorie in Anwendung zu bringen. Die Zustandsänderung ist weder eine adiabatische, noch eine isothermische, auch hat der Dampf nicht durchgehends eine gleiche Temperatur. Die Energie, welche zur fortwährenden Überwindung der Reibung der Flüssigkeit an den Wänden der U-Röhre, sowie zur Vergrösserung der Amplitude zu Beginn der Schwingungen verbraucht wird, stammt von den bei der Condensation abgegebenen Wärmemengen her, welche bei der darauf stattfindenden Verdämpfung von der Wärmequelle, dem Ölbad, ersetzt werden. Man hat es hier sonach mit einer Dampfmaschine besonderer

---

[1] J. W. Strutt, Baron Rayleigh, The Theory of Sound (1877), deutsch von Fr. Neesen, §. 48 und 51.

Art zu thun, deren Wirksamkeit nicht zunächst in der Expansion des Dampfes, sondern in den im geeigneten Moment eintretenden Condensationen und Rückverdampfungen gelegen ist, welche ihrerseits die von der schwingenden Flüssigkeit an sich gesetzten Druckschwankungen vergrössern. Die beim Herausschwingen auftretende Condensation schafft eine Druckabnahme, welche mit der ohnehin entstehenden das Gewicht der im äusseren Schenkel überragenden Flüssigkeit in der Beschleunigung der ganzen Masse gegen die Gleichgewichtslage unterstützt; ebenso vergrössert die Druckzunahme, welche infolge der Verdampfung des condensirten Wassers zu der beim Hineinschwingen auftretenden hinzutritt, die Beschleunigung gegen die Gleichgewichtslage. Die Theorie verlangt, dass der Überschuss des inneren, variabeln Druckes über den äusseren, constanten Luftdruck von der Stellung der Flüssigkeitssäule allein nicht abhängt, vielmehr in der nämlichen Lage beim Hineinschwingen ein anderer ist als beim Herausschwingen, da sonst zur Überwindung der Reibung kein Plus der bei einer ganzen Schwingung gewonnenen Arbeit über die geleistete übrig bliebe.[1]

Registrirung der Schwingungen. Um dies zu constatiren und überhaupt die Schwingungen ihrer qualitativen Natur nach genauer zu studiren, habe ich die Volums- und Druckänderungen des abgesperrten Dampfes registrirt. Hiezu wurde einerseits ein Schwimmer mit einem Schreibstift aus Aluminium, anderseits ein Marey'scher Tambour, dessen Kautschukmembran gleichfalls einen Al-Schreiber trug, benützt. Der Schwimmer war je nach der verwendeten Sperrflüssigkeit aus Eisen oder aus Kork und hatte einen solchen Querschnitt, dass er eben noch bequem sich in dem freien Schenkel der *U*-Rohre bewegen konnte. Neben dieser rohen Führung erhielt der Schreiber noch eine doppelte Geradführung; der auf dem Schwimmer *a* (Fig. 2) befestigte Al-Draht *b* geht durch die feine Öffnung einer an das Ende des *U*-Rohres mit drei Schrauben befestigten Platte *c*, und die oberhalb des horizontalen Armes, der bei *e* die Schreibspitze trägt, angekittete dünn ausgezogene

[1] Vergl. Rayleigh; l. c. §. 64.

Glasröhre ($^3/_4$ *mm* im Durchmesser) wird im Lumen einer vertical fixirten Barometerröhre gerade geführt. Hiedurch wurde auch bei den raschen Wasserschwingungen ein vollkommen gerader Gang der Schreibspitze erzielt, indem die transversalen Bewegungen des Al-Drahtes aufgehoben waren. Zur Registrirung des Druckes im Inneren wurde an die *U*-Röhre bei *d* (Fig. 1) ein Marey'scher Tambour angesetzt, auf dessen dünne Kautschukmembran ein Messingplättchen aufgeklebt war, das

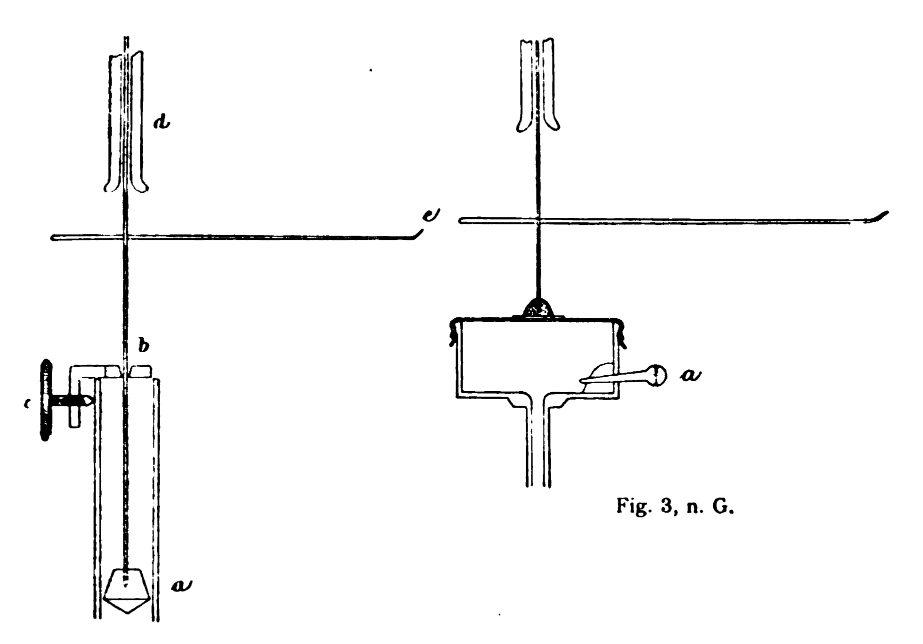


Fig. 3, n. G.

Fig. 2, n. G.

einen kurzen Al-Draht (Fig. 3) mit ebensolchem Querarm trug. Zur Sicherung des geraden Ganges der Schreibspitze genügt die Führung des Glasröhrchens wie früher. Die 1 *cm* tiefe Luftkapsel darf keinen zu grossen Querschnitt erhalten, da sonst durch das Nachgeben der Membran die Dämpfung so bedeutend werden kann, dass die Schwingungen überhaupt nicht auftreten; die von mir verwendeten hatten einen Durchmesser von 2 oder 3 *cm* für zwei verschieden starke Membranen; auch da werden die Schwingungen augenscheinlich verlangsamt. Eine 5 *cm* breite Kapsel ist nicht mehr zu verwenden. Bei *a* ist ein Ventilstift.

Diese directe Registrirung, welche freilich besondere Vorkehrungen zur Gradführung nöthig macht, ist jedenfalls der mittelst Hebelübertragung vorzuziehen, da die Curven ohne Verzerrung erhalten werden und die Masse und Reibung des Hebels vermieden wird, die Schwankungen auch gross genug sind. Beide Schreiber zeichnen gleichzeitig auf einer durch Uhrwerk in Rotation versetzten Trommel mit verticaler Axe Russcurven.

Um die Verlässlichkeit der erhaltenen Curven zu prüfen, habe ich noch zu einer zweiten Methode gegriffen, zur photographischen Registrirung. Die gewählte Anordnung, welche sich auch zur objectiven Darstellung sehr gut eignet, war die folgende: das Licht einer Magnesiumlampe fällt durch einen nicht zu engen, verticalen Spalt auf die Sammellinse I (Fig. 4),

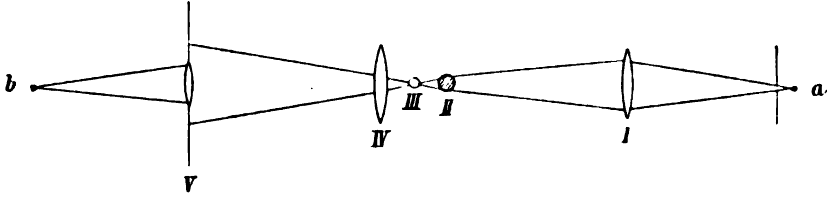


Fig. 4.

welche auf der mit Wasser gefüllten, cylindrischen Glasröhre II von 3·5 *cm* Durchmesser und 30 *cm* Länge ein unscharfes Bild des Spaltes entwirft. Die verticale Glasröhre erzeugt als Cylinderlinse in der Axe des freien Schenkels der *U*-Röhre III eine scharfe Lichtlinie, deren, wegen der kurzen Brennweite von II stark divergente Strahlen von IV etwas zusammengehalten werden, während die achromatische Linse V ein umgekehrtes, scharfes Bild derselben bei *b* auf der Trommel entwirft; letztere ist mit lichtempfindlichem Emulsionspapier[1] überzogen. Das in der *U*-Röhre schwingende Quecksilber schneidet mehr oder weniger von der Luftlinie ab, so dass auf der rotirenden Trommel das Papier unterhalb einer Wellenlinie belichtet wird. Trotzdem die Umfangsgeschwindigkeit der Trommel rund 8 $\frac{cm}{sec}$ war, erhielt man deutlich abgegrenzte Curven. Um auch Druck-

[1] Aus Dr. E. A. Just's Fabrik photographischer Papiere.

curven aufzunehmen, wurde bei der Schreibvorrichtung mit dem Marey'schen Tambour der horizontale Querarm durch ein rechteckiges Stück leichten Cartonpapiers ersetzt; dieses hat bei *a* (Fig. 5) eine kleine Öffnung und wird mittels eines angepickten verticalen Glasröhrchens in einer Barometerröhre geradgeführt. Eine Magnesiumlampe wirft durch eine in doppelter Brennweite aufgestellte Linse auf den Carton einen Lichtkegel so, dass der Vereinigungspunkt der Strahlen etwas hinter das Papier fällt, damit während der Schwingungen durch das Loch bei *a* immerfort Licht hindurchgeht. Der so hergestellte auf- und abschwingende Lichtpunkt wird durch eine achromatische Linse auf der Trommel abgebildet; man erhält sonach eine einfache Wellencurve. Gegen die letztere Methode lassen sich wohl gar keine Bedenken aussprechen, da ja die Massen und die Reibung auf das Geringste reducirt sind; bei der Volumcurve wirkt die in den Umkehrpunkten sich ändernde Convexität des Quecksilbermeniscus, welcher ja die Lichtlinie abzuschneiden hat, störend.

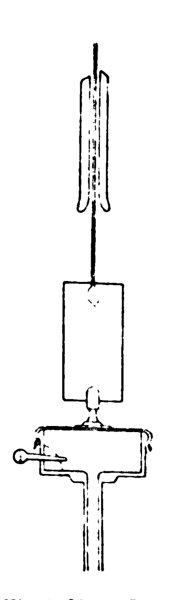


Fig 5, $^2/_3$ n. G.

Bei den photographischen Aufnahmen unterstützte mich in der freundlichsten Weise Herr C. Krupka, Assistent am physikalischen Institut, dem ich hiemit meinen verbindlichsten Dank ausspreche.

Diese unter ganz anderen Verhältnissen vorgenommene Registrirung ergab, dass die Russcurven genügend zuverlässig und wegen der viel einfacheren Procedur daher vorzuziehen sind.

Die erhaltenen Curven können als genau sin-förmig angesehen werden; sie haben natürlich die gleiche Periode. Während jedoch die Volumscurve sich sehr einfach auf absolutes Mass zurückführen lässt, indem man einfach die Ordinaten mit dem Querschnitt der verwendeten *U*-Röhre multiplicirt, gestattet die Druckcurve keine derartig einfache Reducirung, indem die Deformation der bewegten Membran nicht demselben Druck

entspricht wie eine gleich grosse der dauernd deformirten, gleichwohl lässt sich aus dem sin-förmigen Verlauf der erhaltenen Druckcurve auf eine ebenfalls sin-artige Änderung des Druckes mit der Zeit schliessen. Besonderes Interesse bietet die Phasenverschiebung der beiden Curven, welche unzweifelhaft vorhanden, aber so klein oder richtiger so nahe an 180° ist, dass eine verlässliche Bestimmung nicht ausführbar war; die Registrirung hätte viel sorgfältiger geschehen müssen. Doch wäre es des Versuches werth, absichtlich die Reibung zu

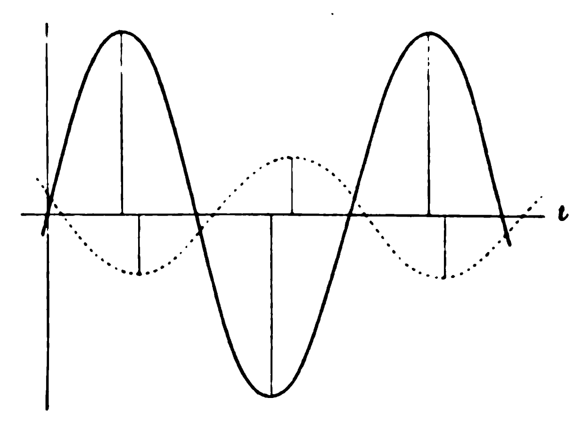


Fig. 6.

vergrössern oder die Maschine irgendwie zu belasten, um eine grössere Phasenverschiebung zu erhalten. Die beiden Curven verlaufen ungefähr in der durch Fig. 6 angedeuteten Weise, abgesehen von der verticalen Verschiebung, welche wegen der Verschiedenheit der Mittelwerthe von Druck und Volumen noch anzubringen wäre. Die ausgezogene Curve stellt den zeitlichen Verlauf des Volumens, die gestrichelte jene des Druckes dar, so wie sie direct erhalten werden. Die Druckcurve hat gegen die Volumcurve eine Phasenverschiebung von $180+\theta$, wo θ eine kleine Grösse ist (in der Zeichnung der Deutlichkeit wegen grösser).

Die Gleichungen. Sind V und P das Volumen und der Druck des abgesperrten Dampfes zur Zeit t, V_0 und P_0 die Mittelwerthe, v und p die Amplituden dieser Grössen und

$\alpha = \frac{2\pi}{T_1}$, wo T_1 die Periode der erzwungenen Schwingung ist, dann kann man nach dem Vorhergehenden schreiben

$$V = V_0 + v \sin \alpha t,$$
$$P = P_0 + p \sin (\alpha t - 180 - \theta) = P_0 - p \sin (\alpha t - \theta).$$

Durch Elimination der Zeit t aus beiden Gleichungen erhält man die Beziehung zwischen V und P, welche in der VP-Ebene die Curve der Zustandsänderung darstellt und im vorliegenden Falle bekanntlich eine Ellipse gibt; diese Relation lautet

$$\left(\frac{V-V_0}{v}\right)^2 + \left(\frac{P-P_0}{p}\right)^2 + 2\frac{V-V_0}{v} \cdot \frac{P-P_0}{p} \cdot \cos\theta = \sin^2\theta$$

Die Neigung φ der grossen Axe gegen die V-Axe ist gegeben durch

$$\tan 2\varphi = -\cos\theta \cdot \frac{2\frac{p}{v}}{1-\left(\frac{p}{v}\right)^2} = -\cos\theta \cdot \tan 2\psi,$$

wenn man $\frac{p}{v} = \tan\psi$ setzt.

In unserem Falle, wo θ sehr klein ist, wird die Ellipse sehr schmal, ihre endliche Hauptaxe ist gegen die V-Axe unter dem Winkel $-\psi$ geneigt; ihre ins Quadrat erhobenen Halbaxen

$$\frac{p^2 v^2}{p^2+v^2}\sin^2\theta \text{ und } \frac{1}{\frac{\cos^2\varphi}{v^2} + \frac{\sin^2\varphi}{p^2} + \frac{\sin 2\varphi}{pv}\cos\theta}\sin^2\theta$$

werden zu $\frac{p^2 v^2}{p^2+v^2} \cdot \theta^2$ und p^2+v^2, welch letzterer Ausdruck der wahre Werth des zweiten der vorangehenden Brüche ist, welcher für $\theta = 0$ den Werth $\frac{0}{0}$ annimmt. Durch Differentiation von Zähler und Nenner, wobei die Beziehung zwischen φ und θ zu berücksichtigen ist, erhält man in bekannter Weise

den angegebenen Ausdruck. Der Flächeninhalt der Ellipse, welcher der zur Überwindung der Reibung gewonnenen Arbeit proportional ist, beträgt

$$\frac{pv}{\sqrt{p^2+v^2}} \cdot \sqrt{p^2+v^2} \, . \, \theta \, . \, \pi = pv\theta\pi,$$

ist somit den Volums- und Druckamplituden, sowie der Phasenverzögerung proportional. Der in Fig. 7 durch den Pfeil angedeutete Umlaufssinn ist derart, dass bei dem Kreisprocess thatsächlich Arbeit gewonnen wird.

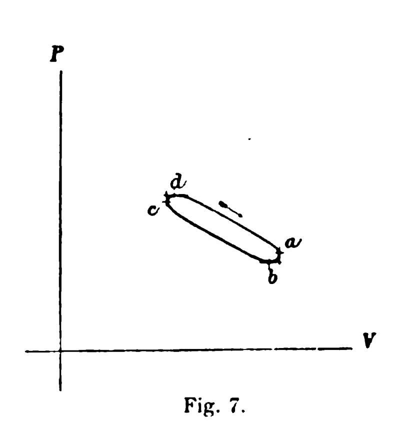


Fig. 7.

Die für V und P aufgestellten Ausdrücke genügen auch vollkommen der Differentialgleichung für die erzwungene Schwingung der Sperrflüssigkeit. Lassen wir x die lineare Elongation des Flüssigkeitsniveaus von der Gleichgewichtslage, f den constanten Querschnitt und r den Radius der U-Röhre, l die Länge der Flüssigkeitssäule und s das specifische Gewicht der Sperrflüssigkeit bedeuten, so lautet die Differentialgleichung mit Rücksicht auf die Reibung[1]

$$\frac{fsl}{g}\frac{d^2x}{dt^2}+2r\pi lw\frac{dx}{dt}+2fsx = F,$$

wo F die hinzutretende äussere Kraft, hier der Überschuss des Druckes P über den äusseren Luftdruck P_0, also $P-P_0$ und w die Reibung pro Flächeneinheit bei der Geschwindigkeitseinheit ist. Da ferner

$$V = V_0+fx = V_0+v \sin \alpha t, \text{ also } x = \frac{v}{f} \sin \alpha t$$

---

[1] Vergl. J. Stefan, Über die Bewegung flüssiger Körper. III., Diese Berichte 46, S. 511 (1862).

ist, erhält man, wenn noch $\beta^2 = \frac{2g}{l} = \frac{4\pi^2}{T^2}$ gesetzt wird, wo T die Periode der freien Schwingung ist,

$$F = -\frac{v}{f}\left[\frac{fls}{g}(\alpha^2-\beta^2)\sin\alpha t - 2r\pi lw\alpha\cos\alpha t\right];$$

hier ist $\frac{fls}{g}$ die Masse m der Sperrflüssigkeit und $r\pi lw = h$ die Dampfungsconstante. Die für F und $P-P_0$ gefundenen Ausdrücke sind conform; die Gleichsetzung der Coëfficienten ergibt

$$m(\alpha^2-\beta^2) = a\cos\theta \text{ und } 2\alpha h = a\sin\theta$$

und es wird

$$F = P-P_0 = -\frac{v}{f}a\sin(\alpha t-\theta).$$

Bei sehr kleinem θ ist

$$a = m(\alpha^2-\beta^2) \text{ und } \theta = \frac{2\alpha h}{a} = \frac{2\alpha h}{m(\alpha^2-\beta^2)}.$$

Der Ausdruck für F besteht aus zwei Theilen; von dem ersten $-\frac{v}{f}m(\alpha^2-\beta^2)\sin\alpha t$, welcher der Elongation x proportional ist, rührt die Verkleinerung der Periode her, der zweite Theil hebt die Wirkung der Reibung auf.

Verhalten des Thermometers im Siedegefäss. Wie schon hervorgehoben wurde, zeigt ein in das Verbindungsrohr eingeführtes Thermometer periodische Schwankungen, und zwar sinkt das Quecksilber, wie man bei Schwingungen von Quecksilber als Sperrflüssigkeit deutlich sehen kann, bei der Dilatation, und steigt bei der Compression. Daraus würde man zunächst auf die Druckschwankungen als den Grund derselben schliessen. Thatsächlich geben auch die Quecksilbergefässe der von mir verwendeten Thermometer dem wechselnden Druck nach, wie ich mich überzeugte, indem ich das in ein abgeschlossenes, mit Luft gefülltes Gefäss gesteckte Thermometer Druckschwankungen aussetzte; da waren jedoch die Schwankungen des Quecksilbers eben noch merkbar, bedeutend

kleiner als die in Rede stehenden, welche $^1/_2$—1 *mm* gross werden. Die auf der Elasticität der Glaswand des Quecksilbergefässes beruhende Empfindlichkeit gegen Druck ist bei der cylindrischen Gestalt nicht gross; sie ist bei einem abgeplatteten Quecksilbergefäss schon so beträchtlich, dass man bei Druckänderungen in trockener Luft allein bis 3 *mm* grosse Schwankungen erhält.

Dem variabeln Druck darf man sonach die eigenthümlichen Schwankungen im Thermometer nicht allein zuschreiben; sie haben vielmehr hauptsächlich einen thermischen Grund und kommen von den bei der Condensation frei werdenden und bei der Verdampfung gebundenen Wärmemengen her, welche der Glaswand mitgetheilt, beziehungsweise entzogen werden, wie dies besonders daraus hervorgeht, dass die Schwankungen am stärksten dann auftreten, wenn sich der Dampf direct auf der Glashülle des Quecksilbergefässes condensirt, und beim Verschieben des Thermometers fast verschwinden, wenn das Quecksilbergefäss an Stellen ist, wo keine Condensationen sichtbar sind. Wie innig diese Schwankungen mit den Condensationen zusammenhängen, sieht man auch daran, dass bei den schon erwähnten doppelten Condensationen, welche mitunter bei langsamen Schwingungen zu beobachten sind, auch das Quecksilber in der Thermometerröhre eine zweifache Schwankung macht, wenn das Quecksilbergefäss am passenden Ort ist.

Ob die Glashülle allein diese Temperaturschwankungen mitmacht oder theilweise auch das Quecksilber, konnte ich bisher nicht feststellen, doch ist so viel sicher, dass hauptsächlich die Glaswand sich periodisch ausdehnt und zusammenzieht, da ja schon der Sinn der Schwankungen im Thermometerrohr jener ist, wie er einer blossen Veränderlichkeit der Capacität entspricht und gerade entgegengesetzt ist demjenigen, welcher Temperaturschwankungen des Quecksilbers allein zukäme.

Einwurfsfrei wären die Anzeigen eines in den Dampfraum eingeführten Metallthermometers, das bei entsprechend kleinen Dimensionen genug empfindlich sein müsste und dem man solche Abmessungen geben könnte, dass seine elastischen



Schwingungen mit den Condensationsschwingungen gleiche Periode hätten.

Im Folgenden will ich noch eine Reihe von Versuchen anführen, die angestellt wurden, theils weil sie an sich interessant sind, theils auch, um die günstigen Versuchsbedingungen aufzufinden.

Besondere U-Röhren. Wird die U-Röhre mit geradlinigen Schenkeln aus der verticalen Lage herausgebracht, so nimmt die Periode der freien Schwingung zu, sie wird $2\pi\sqrt{\frac{l}{2g\sin\alpha}}$, wenn α der Neigungswinkel gegen die Horizontale ist; auch die Periode der erzwungenen Schwingung wächst, anfangs, so lange die Neigung keine beträchtliche ist, langsam, dann rascher und endlich hören die Schwingungen ganz auf, wenn die Neigung etwa 10° geworden ist.

Über manche Fragen könnte der Versuch mit kreisförmig oder cylindrisch gekrümmten Röhren Aufschluss geben. Bei der ersten Art erfolgen die Schwingungen nicht genau sin-förmig, sondern wie bei einem Pendel von der Länge $\frac{l}{2\sin\frac{\omega}{2}}$, wo l die Länge der Flüssigkeitssäule und ω der Centriwinkel des ausgefüllten Kreisbogens ist, vorausgesetzt, dass die Kreisebene vertical und der Querschnitt der Röhre gegen den Radius klein ist. In einer Röhre, die in einer verticalen Ebene cycloidisch gekrümmt und derart orientirt ist, dass die Spitzen in einer Horizontalen liegen, erfolgen die Schwingungen sin-förmig, die Excursionen längs des Bogens gemessen, und zwar mit der Periode $2\pi\sqrt{\frac{4r}{g}}$, wenn r den Radius des erzeugenden Kreises bedeutet, also unabhängig von der Länge der Flüssigkeitssäule; wird auf den nach unten convexen Cycloidenbogen ein congruenter, nach oben convexer gesetzt und so viel Flüssigkeit verwendet, dass die beiden Niveaus während der Schwingungen im oberen Bogen bleiben, so ist die Periode der sinförmigen Schwingung $2\pi\sqrt{\frac{4rl}{g(16r-l)}}$, wenn l die Länge der Flüssigkeitssäule ist.

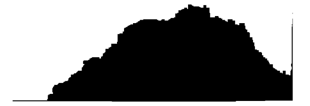
Lange Flüssigkeitssäulen. Während die Neigung der *U*-Röhre die Periode der erzwungenen Schwingung bedeutend vergrössern kann, vermag eine über die gewöhnlichen Verhältnisse (18—50 *cm*) hinausgehende Länge der Flüssigkeitssäule die Schwingungszahl nicht so sehr zu vermindern; Flüssigkeitssäulen von 18—50 *cm* entsprechen ungefähr 100—60 freie und je nach Umständen 260—72 erzwungene Schwingungen per Minute. Um mit besonders langen *U*-Röhren zu operiren, wurden zwei 6 *mm* im Lichten weite Glasröhren durch einen 151 *cm* langen Kautschukschlauch verbunden; als Sperrflüssigkeit wurde Wasser verwendet. Es ergaben sich bei einer totalen Schwankung von 22 *cm* Länge 92 Schwingungen und bei einer 255 *cm* langen Wassersäule 66 Schwingungen mit 14 *cm* doppelter Amplitude. Den freien Schwingungen hätten die Schwingungszahlen 2·79 und 1·65 entsprochen, also bedeutend weniger. Sehr gut konnten hier auch die doppelten Condensationen beobachtet werden.

U-Röhre mit verschieden weiten Schenkeln. Es wird bei derselben Füllung entweder der engere Schenkel oder der weitere an das Siedegefäss angeschlossen; in der Schwingungszahl ergibt sich ein merklicher Unterschied.

1. Der engere Schenkel hat einen lichten Durchmesser von 4·5 *mm*, der weitere von 10 *mm*; bei Wasserschwingungen hat man in besonderem Fall 160 und 146 Schwingungen, je nachdem der engere oder weitere Schenkel mit dem Dampfraum communicirt; weniger auffallend ist der Unterschied bei Quecksilber als Sperrflüssigkeit.

2. Statt der 10 *mm* weiten Röhre wurde eine 17·5 *mm* weite genommen; dann traten, wenn der engere Schenkel angeschlossen war, bei Wasser und Quecksilber Schwingungen (136, beziehungsweise 72 per Minute) auf, im anderen Falle überhaupt keine.

Der Unterschied, welcher durch das Vertauschen der Schenkel geschaffen wird, besteht darin, dass die Geschwindigkeiten, mit welcher sich die Sperrflüssigkeit in den beiden Schenkeln und auch der vor ihr befindliche Dampf bewegen, sich verkehrt wie die Querschnitte verhalten, also den Quadraten der Radien verkehrt proportional sind. Je rascher aber



der Dampf im Verbindungsrohr hin- und hergeht, desto günstiger scheint dies für das Eintreten der Condensationen zu sein, wie auch aus später anzugebenden Beobachtungen hervorgeht. Daher finden bei Wasser die Schwingungen eine doppelte Begünstigung; die zu bewegende Masse ist cet. par. kleiner, daher die Schwingungen an sich rascher und dies begünstigt dann wieder die Condensationen, wodurch eine weitere Beschleunigung der Schwingungen bedingt ist.

Ein zweiter Punkt, welcher zu berücksichtigen kommt, ist der, dass die in den beiden Schenkeln beim Schwingen freigelegten Oberflächen der Röhrenwand sich ebenfalls verkehrt wie die Radien verhalten; da die Volumsschwankung beiderseits dieselbe ist, hat man $r^2\pi h = r_1^2\pi h_1$, wenn h und h_1 die linearen Excursionen in den beiden Schenkeln sind; es verhalten sich dann die freigelegten Oberflächen

$$2r\pi h : 2r_1\pi h_1 = r_1 : r.$$

In der engeren Röhre ist die der freigelegten Oberfläche proportionale Abkühlung der vorbeistreichenden Dämpfe eine grössere.

a *b*

Fig. 8, $^1/_{10}$ n. G.

Verschiedene Anordnung des *U*-Rohres. Wenn das Siedegefäss aus dem Bade herausgehoben wird, so werden die Schwingungen träger, in dem Masse, als es bereits herausragt: sie erlöschen ganz, wenn nur noch der mit Wasser gefüllte Theil des Siedegefässes im Bade steckt. Anderseits darf das *U*-Rohr nicht in das Bad kommen; man kann die Anordnung so treffen, dass an den kürzeren Schenkel desselben das Siedegefäss direct, wie in Fig. 8 *a* angesetzt ist, wo dann bis auf ein mit Quetschhahn verschliessbares Ansatzröhrchen und den längeren Schenkel der *U*-Röhre kein Theil aus dem Bade ragt. Oder man lässt wenigstens die Verbindungsröhre ausserhalb des Bades wie in Fig. 8*b*. In keinem dieser Fälle werden aber dauernde Schwingungen erhalten; es muss also eine untere Wärmequelle vorhanden sein. Die *U*-Röhre und das Verbindungsrohr übernehmen die Rolle einer solchen durch die Wärmeabgabe an die Umgebung.

Zwei Siedegefässe und ein *U*-Rohr. Die beiden Schenkel einer *U*-Röhre werden mit je einem Siedegefäss verbunden; die beiden Verbindungsröhren stehen auch unter einander in Communication, die durch einen Quetschhahn unterbrochen werden kann. So hat man auf beiden Seiten der Sperrflüssigkeit einen Dampfraum, also gewissermassen eine dopelt wirkende Dampfmaschine. Sperrt man mit dem Quetschhahn die Verbindung ab, so folgen die Schwingungen bedeutend rascher als bei einfacher Wirksamkeit und auch mit grösserer Amplitude. Selbst dann, wenn eines der verwendeten Siedegefässe seiner Dimensionen wegen allein die Sperrflüssigkeit nicht in Schwingungen erhalten kann, das andere ja, vermögen beide zusammen doch eine bedeutende Beschleunigung des Tempos der Schwingungen hervorzurufen gegen jene Schwingungen, welche das zweite für sich unterhält.

Ein Siedegefäss und zwei *U*-Röhren. Man kann zwei *U*-Röhren in zweifacher Weise mit einem Siedegefäss verbinden: entweder steht jede der beiden Röhren direct mit dem Siedegefäss in Verbindung, die Verbindungsröhre ist dann gabelförmig verzweigt, oder es wird bloss eine *U*-Röhre zunächst mit dem Siedegefäss verbunden, die zweite an den freien Schenkel der ersten angeschlossen; sie können also neben- oder hintereinander geschaltet werden.

Füllt man im ersten Fall die zwei Röhren mit verschiedenen Flüssigkeiten unter sonst gleichen Umständen, so dass einzeln die erzwungenen Schwingungen in denselben verschiedene Perioden hätten, so ergibt sich bei gleichzeitiger Anregung der beiden Sperrflüssigkeiten eine mittlere Periode; man sieht, die Sperrflüssigkeit in einer *U*-Röhre passt sich innerhalb weiter Grenzen verschiedenen Perioden an.

Auch die Hintereinanderschaltung ist in mechanischer Beziehung interessant. Bei dem angestellten Versuche waren die zwei *U*-Röhren verschieden weit; die eine 5·5 *mm*, die andere 9 *mm* im lichten Durchmesser. Indem abwechselnd die eine mit Wasser, die andere mit Quecksilber gefüllt wurden, konnten folgende vier Combinationen ausgeführt werden: die engere Röhre ist vorgeschaltet und entweder mit Wasser oder

Quecksilber gefüllt, oder es ist bei wechselnder Füllung die weitere vorgeschaltet. Das Verbindungsrohr der zwei *U*-Röhren konnte durch ein Quetschhahnventil mit der äusseren Luft in Communication gesetzt werden, damit man auch die Sperrflüssigkeit der vorgeschalteten Röhre allein schwingen lassen konnte. Wenn die Flüssigkeit in der zweiten Röhre mitschwang, ergab sich, wie zu erwarten, eine Vergrösserung der Periode. Nur in dem Falle, wo die weitere Röhre, mit Wasser gefüllt, vorgeschaltet war, konnten die Schwingungen nicht in beiden Röhren erhalten werden, wiewohl das Wasser allein schwingen konnte; es vermag also offenbar nicht genug Energie aufzunehmen, um auch das Quecksilber der zweiten Röhre zu Schwingungen anzuregen.

Besondere Verbindungsröhren. Um die Bedingungen, welche für das Auftreten der Condensationen günstig sind, festzustellen, insoweit sie von den Dimensionen des Verbindungsrohres abhängen, wurden Röhren wie in Fig. 9, *a b c* verwendet. Die Condensationen finden hauptsächlich oder nur an Stellen mit engerem Querschnitt statt; dort ist auch die Geschwindigkeit der hin- und hergehenden Bewegung cet. par. eine grössere. Bei der Form *c* bleibt es sich gleich, ob I oder II mit dem Siedegefäss verbunden sind. Bei δ betrug der Querschnitt des inneren Rohres $9\pi\, mm^2$, der ringförmige $40 \cdot 25\, \pi\, mm^2$; bei einer zweiten Röhre von der Form *c* war der Unterschied nicht mehr so gross, die Querschnitte waren 4π und $10 \cdot 25\, \pi\, mm^2$; hier fanden denn auch die Condensationen an α und δ statt.

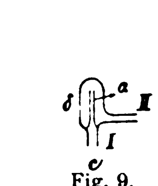


Fig. 9.

Ferner wurde ein Verbindungsrohr von der Form eines Hohlcylinders benützt, indem in eine weitere Glasröhre ein Messingrohr geschoben war, so dass der Querschnitt zwischen beiden Röhren im Lichten $17 \cdot 25\, \pi\, mm^2$ betrug. In $5 \cdot 5$ und $9\, mm$ weiten *U*-Röhren erhielten sich mit Wasser Schwingungen, mit Quecksilber nicht. Besonders bemerkenswerth ist, dass bei dieser Verbindungsröhre das eingangs erwähnte Tönen sehr leicht auftritt.

Siedegefässe und *U*-Röhren von verschiedenen Dimensionen. Werden bei demselben Siedegefäss der Reihe nach verschieden weite *U*-Röhren verwendet, so kann man nur innerhalb bestimmter Grenzen in denselben Schwingungen erhalten. Diese Grenzen sind je nach der Sperrflüssigkeit verschieden, und zwar beginnen die Schwingungen von Wasser bei engeren Röhren als jene von Quecksilber möglich zu werden, hören aber auch schon bei Röhrendurchmessern auf, bei denen sich noch Quecksilberschwingungen erhalten. Verwendet man die nämliche *U*-Röhre und der Reihe nach verschiedene Siedegefässe, so treten bei kleineren Siedegefässen die Schwingungen leichter auf; es ist auch die Schwingungszahl cet. par. eine grössere. Geht das Siedegefäss über eine gewisse Grösse hinaus, werden die Schwingungen immer träger, um schliesslich aufzuhören.

Bei einer Röhrenweite von 3 *mm* konnten mit keinem der Siedegefässe, welche mit der Verbindungsröhre 14—78 cm^3 fassen, Schwingungen erhalten werden, weder wenn Wasser, noch wenn Quecksilber Sperrflüssigkeit war. Mit dem kleinsten Siedegefäss beginnen Wasserschwingungen bei einer Röhrenweite von 4 *mm*, treten nicht mehr auf bei einem 9 *mm* weiten Rohr; mit einem Siedegefäss von 74 cm^3 Capacität (die des Verbindungsrohres miteinbegriffen) treten sie erst bei 5·5 *mm* weiten Röhren und nicht mehr bei 15·3 *mm* weiten auf. Quecksilber beginnt bei dem kleinsten Siedegefäss erst in einer 5·5 *mm* weiten Röhre zu schwingen, bei dem 74 cm^3 fassenden erst in einer 9 *mm* weiten Röhre und schwingt auch in der weitesten der verwendeten Röhren von 15·3 *mm*.

Je länger die Flüssigkeitssäule, desto grösser im allgemeinen auch die Schwingungsdauer; ich greife einige Zahlen heraus, die dies illustriren: Siedegefäss von 58·5 cm^3 Capacität, Röhrenweite 5·5 *mm*.

	Wasser		Quecksilber		
Länge der Flüssigkeitssäule in *cm*..	23	38	19	32	47
Schwingungszahl per Minute......	212 (88)	184 (68)	120 (97)	80 (74)	68 (62)
Amplitude in *cm*	12	15	7	6	6

Die in Klammern beigesetzten Zahlen sind die entsprechenden Schwingungszahlen der freien Schwingungen.

Verschiedene Hilfskörper. Als Hilfskörper, der zur Verdampfung gelangt, wurde in der Regel Wasser verwendet, doch kamen auch andere Flüssigkeiten zur Untersuchung, die ich nach ihren Siedepunkten geordnet folgen lasse:

Äthyläther	$2(C_2H_5)O$	35°
Ameisensäureäthyläther	$\left.\begin{matrix}CHO\\C_2H_5\end{matrix}\right\}O$	54°
Methylalkohol	$(CH_3)HO$	60·5°
Chloroform	$CHCl_3$	61°
Essigsäureäthyläther	$\left.\begin{matrix}C_2H_3O\\C_2H_5\end{matrix}\right\}O$	74°
Äthylalkohol	$(C_2H_5)HO$	78°
Benzol	C_6H_6	80°
Ameisensäureamyläther	$\left.\begin{matrix}CHO\\C_5H_{11}\end{matrix}\right\}O$	116°
Essigsäure	$C_2H_3O.HO$	118°
Buttersäureäthyläther	$\left.\begin{matrix}C_4H_7O\\C_2H_5\end{matrix}\right\}O$	119°
Proprionsäure	$C_3H_5O.HO$	140°

Bei den zwei ersten Flüssigkeiten konnten weder mit Wasser noch mit Quecksilber als Sperrflüssigkeit Schwingungen erhalten werden, obgleich bei Wasser im Siedegefäss cet. par. die Schwingungen andauern. Die Temperatur im Inneren des Siedegefässes stieg bis 55°, bei Ameisensäureäthyläther bis 85°; nach jedesmaligem Lüften des Quetschhahnventils steigt der Druck rasch an, ohne dass die Sperrflüssigkeit zum Schwingen zu bringen ist. Bei den anderen Substanzen konnten Schwingungen erzielt werden. Bei Methylalkohol stieg die Temperatur bis 67°, erst bei 48° hörten mit sinkender Temperatur die Schwingungen auf. Es ist also nicht der niedrige Siedepunkt der ersten zwei Äther der Grund für das Nichtgelingen des Versuches, weil etwa das Temperaturgefälle der beiden Wärmequellen zu gering gewesen wäre. Bei Chloroform begannen die Schwingungen bei 50°, bei 55° war die doppelte Amplitude schon 4—5 *cm*; bei 60° trat dann so

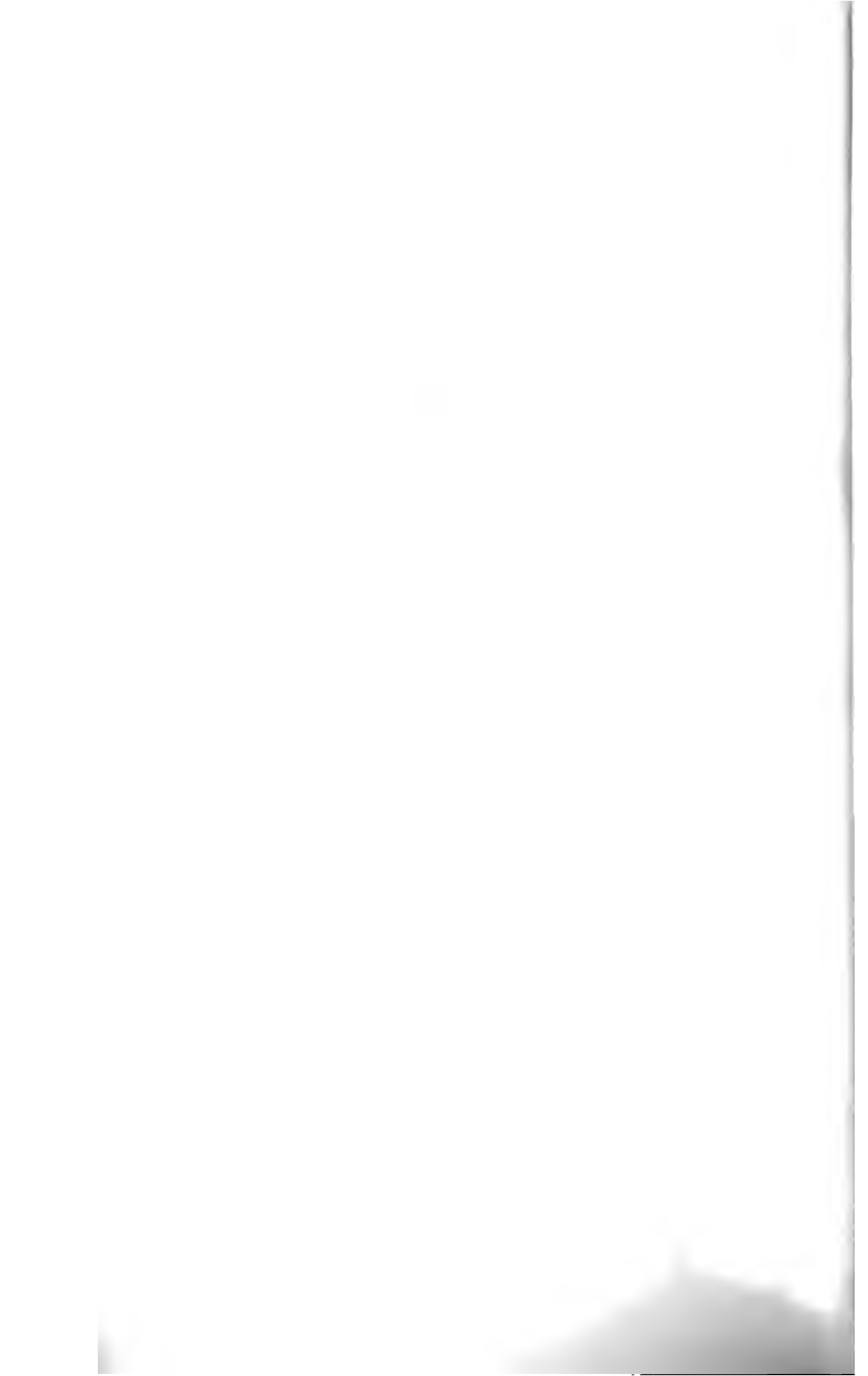
unbedingtes Sieden ein, dass die Schwingungen sofort aufhörten. Mit Essigäther wurde bis zu Temperaturen von 77° im Inneren gegangen. Bei Benzol erloschen mit abnehmender Temperatur die Schwingungen bei 54°. Essigsäuredämpfe vermögen die Schwingungen besonders kräftig anzuregen; bei Quecksilber als Sperrflüssigkeit beträgt die doppelte Amplitude bis zu 18 *cm* bei 100 Schwingungen pro Minute; die Schwingungen erhalten sich bis zu 75° herunter. Bei der höher siedenden Propionsäure beginnen die Schwingungen erst mit 100°; sie sind bei höherer Temperatur (120°) ebenfalls sehr energisch.

Der Grund, warum mit Äthyläther und Ameisensäureäthyläther sich keine Condensationsschwingungen erhalten, scheint mir ein wesentlicher zu sein und darin zu liegen, dass bei den gesättigten Dämpfen genannter Flüssigkeiten die specifische Wärme positiv ist. Von Äthyläther ist es bekannt, dass innerhalb des in Betracht kommenden Temperaturintervalles sein gesättigter Dampf sich bei adiabatischer Compression condensirt, bei adiabatischer Expansion aber überhitzt wird; ebenso ist von den meisten anderen angeführten Flüssigkeiten, mit welchen Schwingungen möglich waren, das entgegengesetzte Verhalten bei der Compression und Dilatation nachgewiesen oder nachgerechnet. Ich vermuthe, dass Ameisensäureäthyläther, für welchen ich Bestimmungen der specifischen Wärme seines gesättigten Dampfes nirgends gefunden habe, wie Äthyläther in der Nähe seines Siedepunktes eine positive specifische Wärme hat oder wenigstens eine sehr kleine, sei es positive oder negative. Es entspricht ganz der Theorie, dass bloss Dämpfe mit negativer specifischer Wärme die Condensationsschwingungen unterstützen können, indem bei der Expansion (auf dem Wege c über d nach a in Fig. 7) Wärme abgegeben werden muss, wie dies bei der Condensation geschieht, während der Compression (auf dem Wege a über b nach c) aber Wärme aufgenommen wird, was durch die Verdampfung möglich ist. Bei Dämpfen mit positiver specifischer Wärme würden die Condensationen zur unrechten Zeit eintreten.

Um dies auch experimentell zu erhärten, wäre folgende Versuchsanordnung zu treffen. Chloroform zeigt unter 120°

das Verhalten von Wasser, darüber benimmt es sich wie Äthyläther. Um mit ihm auch bei diesen höheren Temperaturen operiren zu können, müsste man seinen Siedepunkt durch grösseren Druck erhöhen. Diese auch sonst interessante Verwendung eines höheren Dampfdruckes, wobei man natürlich auch im freien Schenkel der *U*-Röhre einen constanten höheren Druck herstellen müsste, wäre auch bei Äthyl- und Ameisensäureäthyläther zu empfehlen, um das rasche Ansteigen der Niveaudifferenz der Sperrflüssigkeit zu verhindern.

Zum Schlusse sei es mir gestattet, dem Herrn Regierungsrath Prof. Dr. E. Mach für seine vielseitige Unterstützung bei Ausführung vorliegender Arbeit meinen innigsten Dank auszusprechen.



SITZUNGSBERICHTE

DER

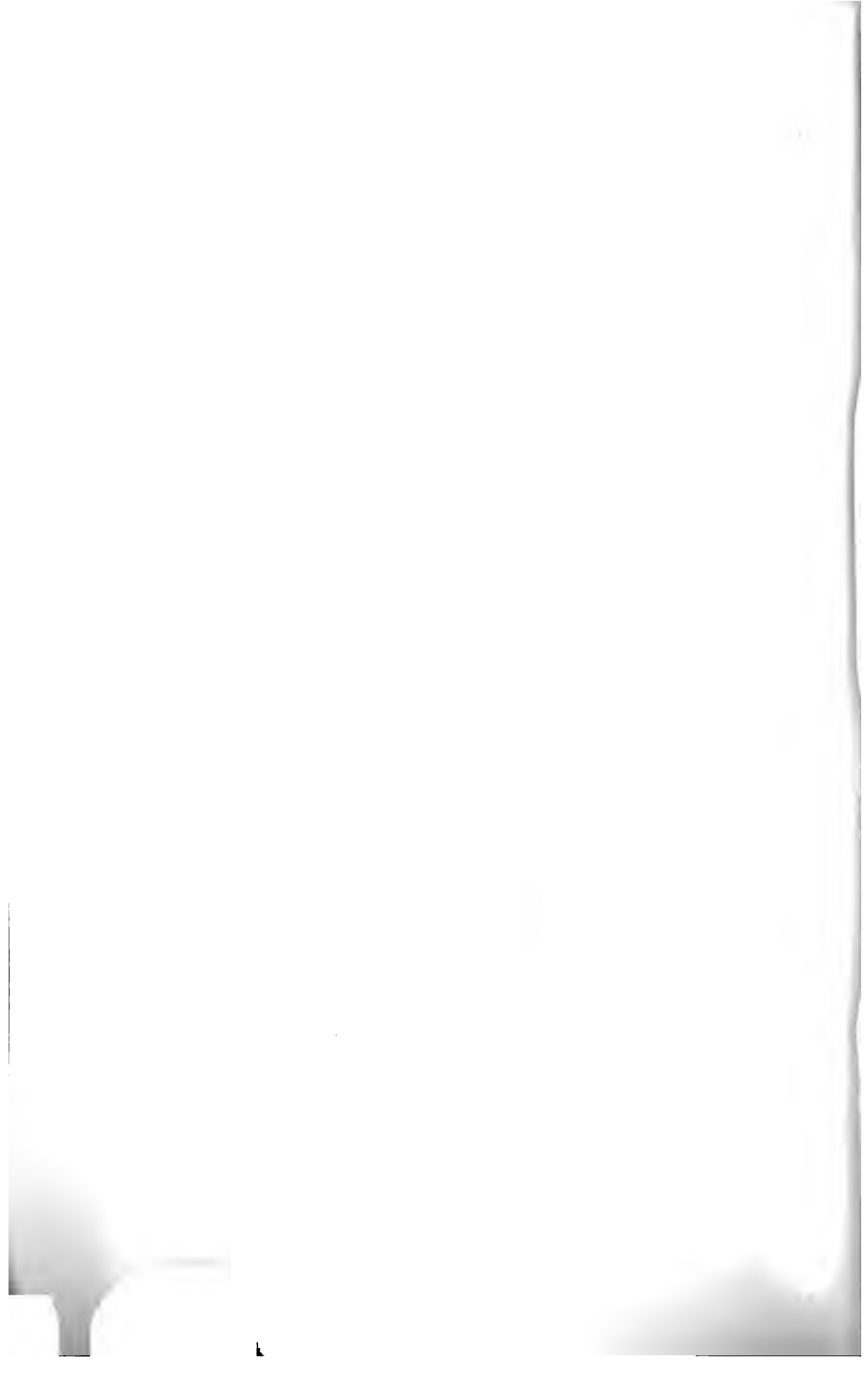
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CII. BAND. IX. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



XXII. SITZUNG VOM 2. NOVEMBER 1893.

In Verhinderung des Herrn Vicepräsidenten übernimmt Herr Intendant Hofrath Ritter v. Hauer den Vorsitz.

Im Auftrage seiner k. u. k. Hoheit des durchlauchtigsten Herrn Erzherzogs Ludwig Salvator, Ehrenmitgliedes der kaiserl. Akademie, wird von der Buchdruckerei Heinr. Mercy in Prag die Fortsetzung des Prachtwerkes »Die Liparischen Inseln«, II. Folge: »Salina« für die akadem. Bibliothek übermittelt.

Rector und Senat der kaiserl. russischen Universität zu Kasan laden die kaiserl. Akademie zur Theilnahme an der am 3. November l. J. bei dieser Universität stattfindenden Gedenkfeier des hundertjährigen Geburtstages ihres einstigen Rectors und Professors, des berühmten Geometers Nicolas Lobatschevsky, ein.

Herr Prof. Dr. Karl Rabl in Prag dankt für seine Wahl zum inländischen correspondirenden Mitgliede dieser Classe.

Der Secretär legt das erschienene Heft VI—VII (Juni bis Juli 1893) des 102. Bandes der Abtheilung I der Sitzungsberichte vor.

Das c. M. Herr Prof. Franz Exner übersendet eine Abhandlung von Dr. Mathias Cantor in Tübingen: »Über die Zerstreuung der Elektricität durch das Licht«.

Herr Prof. Dr. M. Holl in Graz übersendet eine Abhandlung: »Über das *Foramen caecum* des Schädels«.

Die Herren Oberlehrer Dr. J. Elster und H. Geitel vom herzogl. Gymnasium zu Wolfenbüttel übersenden eine Abhandlung: »Beobachtungen der normalen atmosphärischen Elektricität auf dem Sonnblick«.

Herr A. Kuwert in Wernsdorf (Ostpreussen) übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: »Die Passaliden«.

Das w. M. Herr Director E. Weiss bespricht die Entdeckung eines teleskopischen Kometen, welche Brooks in Geneva (N. Y.) in den Morgenstunden des 17. October gelungen ist.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. C. Claus überreicht eine Abhandlung von Dr. Theodor Pintner in Wien, betitelt: »Studien an Tetrarhynchen nebst Beobachtungen an anderen Bandwürmern. I. *Tetrarhynchus Smaridum* Pintner«.

Ferner überreicht Herr Hofrath Claus eine Abhandlung des Prof. Dr. Anton Jaworowski in Lemberg, betitelt: »Die Entwickelung der sogenannten Lungen bei den Arachniden und speciell bei *Trochosa singoriensis* Laxm.«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine Arbeit aus seinem Laboratorium von Horace Landau: »Über die Löslichkeit des önanthylsauren Silbers, Calciums und Bariums, sowie des trimethylessigsauren Calciums und Bariums«.

Ferner überreicht Herr Hofrath Lieben eine Arbeit aus dem Laboratorium der k. k. chemisch-physiologischen Versuchsstation für Wein- und Obstbau in Klosterneuburg bei Wien von dem Assistenten W. Seifert: »Über Vitin und den Wachskörper der Traubenbeeren amerikanischer Reben und deren Hybriden« (I. Mittheilung).

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Erzherzog Ludwig Salvator, Die Liparischen Inseln. II. Salina. Prag, 1893; Folio.

Benko, Jerolim Freih. v., Die Reise S. M. Schiffes »Zriny« nach Ost-Asien 1890—1891. Verfasst auf Befehl des k. u. k. Reichs-Kriegsministeriums (Marine-Section). I. Lieferung: Die Ausreise von Pola über Suez, Aden, Colombo, Singapore nach Shanghai. (Mit einer Reiseskizze.) Wien, 1893; 8°.

Loewy, M., Recherches sur la détermination des constantes des clichés photographiques du Ciel. Paris, 1893; 4°.

XXIII. SITZUNG VOM 9. NOVEMBER 1893.

Der Secretär legt das erschienene Heft VII (Juli 1893) des 102. Bandes der Abtheilung II. a der Sitzungsberichte vor.

Das c. M. Herr Prof. Franz Exner übersendet eine im physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien ausgeführte Abhandlung von M. v. Smoluchowski: »Über die innere Reibung in nicht wässerigen Lösungen«.

Das c. M. Herr Custos Theodor Fuchs in Wien übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: »Beiträge zur Kenntniss der Spirophyten und Fucoiden«.

Der Secretär übergibt für die Denkschriften den von den Professoren J. Luksch und J. Wolf an der k. u. k. Marine-Akademie in Fiume vorgelegten vollständigen Bericht über die auf S. M. Schiff »Pola« im Jahre 1892 durchgeführten physikalischen Untersuchungen im östlichen Mittelmeere.

Das w. M. Herr Hofrath Director A. Kerner v. Marilaun berichtet über den zweiten Theil der von Dr. E. v. Halácsy im Auftrage der kaiserl. Akademie der Wissenschaften zur Erforschung der Vegetationsverhältnisse in den griechischen Hochgebirgen ausgeführten Reise.

Der Vorsitzende, Herr Prof. E. Suess, legt im Namen des Herrn Rich. Lepsius, Vorstand der geologischen Landescommission in Darmstadt, dessen Werk: »Geologie von Attika; ein Beitrag zur Lehre vom Metamorphismus der Gesteine« und zugleich die von Herrn Lepsius verfasste geologische Karte von Attika (in 9 Blättern, 1:25.000) vor, welche auf Kosten der k. preussischen Akademie der Wissenschaften publicirt worden ist.

Über die innere Reibung in nicht wässerigen Lösungen

von

M. v. Smoluchowski.

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität Wien.

(Mit 1 Textfigur.)

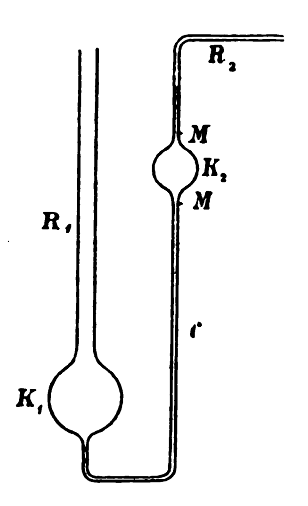
Bisher wurden fast ausschliesslich wässerige Lösungen in Bezug auf ihre innere Reibung untersucht. Es zeigte sich hiebei, dass durch den Zusatz von Salzen zu Wasser die Reibung meistens erhöht, in einigen Fällen aber auch erniedrigt wird, und zwar sind nach der Theorie von Sv. Arrhenius (Ostwald's Z., 1887) letztere Lösungen als solche zu betrachten, welche eine besonders grosse Anzahl von activen, d. i. in ihre Jonen gespaltenen Molekeln besitzen. Nun war es von Interesse, auch das Verhalten von nicht wässerigen, z. B. alkoholischen Lösungen zu prüfen, bei welchen ein sehr geringes elektrisches Leitungsvermögen zu erwarten war, und eine Dissociation nicht anzunehmen ist. Ich konnte nur eine diesbezügliche Versuchsreihe von D'Arcy (Philos. Mag., 1889, XXXII) auffinden, welcher eine Lösung von Chlorcalcium in Äthyl- und Methylalkohol benützte und in beiden Fällen eine bedeutende Vermehrung der Zähigkeit nachwies. Um einen Beitrag zur Ausfüllung dieser Lücke zu liefern, unternahm ich die Versuche, die im Folgenden beschrieben sind.

Ich verglich einerseits die Reibung von Schwefelkohlenstoff mit jener einer Lösung von Jod, also eines Metalloids, anderseits Alkohol mit alkoholischen Lösungen von Jodkalium und salpetersaurem Ammon, also Salzen, welche in wässerigen

Lösungen von ähnlicher Concentration eine merkliche Verminderung der Zähigkeit hervorrufen.

Eine absolute Messung des Reibungscoëfficienten war hiebei nicht erforderlich; es genügte, wenn Relativzahlen gefunden wurden und die diesen proportionale specifische Zähigkeit (Wasser bei 0° = 100) mittelst eines Versuches mit Wasser bestimmt wurde. Die dadurch ermöglichte Modification des Ausflussapparates ist für die Praxis sehr bequem und mag daher hier kurz beschrieben werden (Fig. 1).

Die Capillarröhre C ist U-förmig gebogen; der eine ganz kurze Schenkel mündet in die als Reservoir dienende Kugel K_1, welche in die weite Röhre R_1 ausgeht, der andere, lange Schenkel geht in die kleinere Kugel K_2 über, an welche sich die rechtwinklig gebogene Röhre R_2 anschliesst. Bei den Versuchen mit Alkohol, welche möglichste Fernhaltung der Luftfeuchtigkeit erforderten, wurde noch vor R_2 und über R_1 je ein Gefäss angebracht, in welchem die Luft über Schwefelsäure streichend getrocknet wurde. Die Masse waren: Rad. von $C = 0 \cdot 56$ *mm*, Länge = $23 \cdot 9$ *cm*, wirksame Höhe der Flüssigkeitssäule = $14 \cdot 2$ *cm*, Rad. von $K_1 = 2 \cdot 5$ *cm*, Rad. von $R_1 = 0 \cdot 4$ *cm*, $R_2 = 1 \cdot 5$ *mm*, Volumen von $K_2 = 11 \cdot 792$ *cm*^{3}. Der ganze Apparat war in ein Gefäss mit Wasser, dessen Temperatur constant erhalten wurde, eingetaucht. In K_1 wird die Flüssigkeit, deren Temperatur an dem von oben durch R_1 eingesenkten Thermometer abgelesen wird, bis zu einer Marke eingefüllt; mittelst eines Aspirators (Wasserstrahlpumpe), welcher mit R_2 in Verbindung ist, saugt man sie in K_2 und noch zu $^1/_3$ von R_2 hinauf und lässt sie durch Absperren des Hahnes und Öffnen des Luftzutrittes wieder in K_1 zurückströmen. Die Zeit τ zwischen den Momenten des Durchfliessens bei den oberhalb und unterhalb K_2 angebrachten Marken wird durch ein Chronoskop bestimmt. Bezeichnen s_1 und s_2 die specifischen Gewichte zweier Flüssig-



keiten, so ist das Verhältniss ihrer Reibungscoëfficienten: $\eta_1 : \eta_2 = s_1\tau_1(1-\alpha_1) : s_2\tau_2(1-\alpha_2)$, wobei das Correctionsglied $\alpha = \frac{v^2}{2^{1/3}\pi^2 g r^4 h \tau^2}$. Da die Durchflusszeit ziemlich kurz war, wurde eine grössere Anzahl von Versuchen angestellt, aus denen die Mittel genommen wurden; der wahrscheinliche Fehler des Mittels stieg im Maximum auf 0·15⁰/₀.

Die Versuchsresultate sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt. Spalte *A* gibt die Anzahl der Versuche an, *B* die Temperatur, *C* die beobachtete Zeit, *D* die sich hieraus durch Subtraction des Correctionsgliedes und Multiplication mit *s* ergebenden, der specifischen Zähigkeit proportionalen Werthe η', aus welchen nach der Methode der kleinsten Quadrate eine die Abhängigkeit von der Temperatur darstellende Formel mit drei Constanten berechnet wurde. Der Übersichtlichkeit wegen sind noch unter *E* die aus letzterer folgenden Werthe von η für 10°, 30° und 50° angeführt.

Schwefelkohlenstoff						9·26 proc. Lösung von Jod in Schwefelkohlenstoff					
A	*B*	*C*	*D*	*E*		*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	
22	1·0°	24·58	27·55	10°	27·56	25	0·9	24·52	29·06	10°	28·81
20	18·64	23·18	24·96	30	24 83	18	14·07	23·10	26·73	30	25·97
14	30·5	22·43	23·52			20	18·87	22·70	25·97		
						17	29 78	22·10	24·65		
$\eta' = 27\cdot71 - 0\cdot1638\,\vartheta + 0\cdot00086\,\vartheta^2$						$\eta' = 29\cdot103 - 0\cdot1913\,\vartheta + 0\cdot00142\,\vartheta^2$					
$\eta = 29\cdot19 - 0\cdot1726\,\vartheta + 0\cdot000906\,\vartheta^2$						$\eta = 30\cdot67 - 0\cdot2016\,\vartheta + 0\cdot00150\,\vartheta^2$					

Die Zunahme der Reibung beträgt also bei mittlerer Temperatur über 4⁰/₀.

Äthylalkohol						1·72 proc. Lösung von Jodkalium in Alkohol					
A	*B*	*C*	*D*	*E*		*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	
12	0·9°	114·85	91·95	10°	80·71	10	0·72	121·22	99·10	10°	86·27
11	11·94	92·70	73·08	30	54·24	11	11·46	97·91	78·91	30	57·80
15	21·75	77·50	60·25	50	40·73	12	20·86	82·22	65·38	50	43·01
20	29·89	67·76	51·99			15	30·1	69·80	54·69		
16	39·97	58·52	44·15			11	40·15	60·55	46·66		
13	50·0	51·43	38·09			15	49·75	53·30	40·37		

Äthylalkohol:

$\eta' = 93 \cdot 76 - 1 \cdot 8713\vartheta + 0 \cdot 01538\vartheta^2$

$\eta = 98 \cdot 81 - 1 \cdot 9721\vartheta + 0 \cdot 01621\vartheta^2$

1·72 proc. Lösung von Jodkalium in Alkohol:

$\eta' = 100 \cdot 24 - 1 \cdot 9998\vartheta + 0 \cdot 01623\vartheta^2$

$\eta = 105 \cdot 64 - 2 \cdot 108\vartheta + 0 \cdot 0171\vartheta^2$

4·1 proc. Lösung von salpetersaurem Ammon					
A	*B*	*C*	*D*	*E*	
14	20·03	97·67	78·73	[10°	99·01][1]
14	30·02	81·12	64·45	30	68·31
11	39·68	69·20	54·14	50	48·18
12	49·80	59·78	45·99		

$\eta' = 112 \cdot 266 - 1 \cdot 9576\vartheta + 0 \cdot 01253\vartheta^2$

$\eta = 118 \cdot 32 - 2 \cdot 063\vartheta + 0 \cdot 0132\vartheta^2$

Es ergibt sich also auch bei diesen Lösungen eine Vermehrung der Reibung, welche bis zu 25% steigt.

Der bei obigen Berechnungen verwendete Reductionscoëfficient $\frac{\eta}{\eta'} = 1 \cdot 0538$ folgte aus dem Werthe der specifischen Zähig-

[1] Bei Temperaturen von 10° und darunter konnten keine Versuche gemacht werden, da sich hiebei das Salz in krystallinischen Flocken ausschied.

keit des Wassers bei 20° = 56·15 (Mittelwerth der von Porseuille, Graham, Rellstab, Sprung, Slotte und Wagner ermittelten Zahlen) und dem beobachteten Werthe = 53·284.

Schliesslich wurden die gebrauchten Lösungen in Bezug auf ihre elektrische Leitungsfähigkeit untersucht; der specifische Widerstand (Quecksilber = 1) war bei der Jodlösung = 62.10^{11}, Jodkalium 10^8, Ammoniumnitrat 6.10^7, also ist die Leitungsfähigkeit verschwindend klein gegenüber jener der wässerigen Lösungen.

Das Resultat der Versuche lässt sich also kurz in Folgendem zusammenfassen: Insoweit sich die gewonnenen Ergebnisse verallgemeinern lassen, zeigt sich, dass die innere Reibung von nicht wässerigen Lösungsmitteln nicht nur durch Zusatz von Salzen erhöht wird, welche die Zähigkeit des Wassers bei ähnlicher Concentration vermehren, z. B. $CaCl_2$, sondern auch von solchen, welche sie vermindern, z. B. KJ, NH_4NO_3; ebenso bei Jod. In Gemässheit mit den Anschauungen von Arrhenius hätte man in diesen Lösungen eine sehr geringe Zahl von dissociirten Molekeln anzunehmen, was auch mit dem geringen Leitungsvermögen übereinstimmt. Umfangreichere Untersuchungen müssten feststellen, ob dieses Verhalten auch Ausnahmen aufweist.

Über Curvensysteme und die zugehörigen Differentialgleichungen

von

Prof. **Emanuel Czuber.**

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. October 1893.)

Der leitende Gedanke vorliegender Untersuchungen besteht in Folgendem. Die Gleichung eines Systems von ∞^r Curven in der Ebene enthält neben den Coordinaten x, y noch r von einander unabhängige Parameter. In der von diesen Parametern freien Differentialgleichung des Systems erscheinen dagegen ausser x, y im Allgemeinen die r Differentialquotienten von y in Bezug auf x von der ersten bis zur r^{ten} Ordnung einschliesslich. Werden diese wieder als von einander unabhängige Parameter aufgefasst, so stellt die Differentialgleichung abermals ein System von ∞^r Curven dar, das zu dem ersten in gewissen Beziehungen stehen wird und welches wir als das abgeleitete des ursprünglichen Systems bezeichnet haben. In den Fällen $r = 1$ und $r = 2$, auf die wir uns hier beschränken, nehmen diese Beziehungen einen einfachen geometrischen Ausdruck an: seine Feststellung bildet den ersten Gegenstand der Untersuchung.

Der Zusammenhang beider Systeme gestattet ferner bei gewissen Formen des abgeleiteten Systems einen Rückschluss auf das ursprüngliche; in analytischer Formulirung lehrt dieser Rückschluss für gewisse Formen von Differentialgleichungen die Structur des allgemeinen Integrals kennen. Hierin liegt ein Anknüpfungspunkt an die von Lie in die Theorie der Differentialgleichungen eingeführte geometrische Anschauungsweise.

Eine Gruppe von Problemen, zu welchen jener Gedanke leitet, lässt sich kurz so charakterisiren. Zwei Systeme von je ∞^1 Curven können zu einander in Beziehung gesetzt werden, indem man ihre Individuen mittels einer Relation zwischen den Parametern einander in bestimmter Weise zuordnet; aus dieser Zuordnung (Verwandtschaft) entspringt ein Erzeugniss der Systeme als Ort der Schnittpunkte entsprechender Individuen. Diese Betrachtungsweise kann, allerdings mit einer Modification, auch auf zwei Systeme von je ∞^2 Curven, sowie auf mehrfach unendliche Systeme ausgedehnt werden. Zu Erzeugnissen in einem ganz anderen Sinne wird man aber geführt, wenn die beiden Systeme durch Vermittlung ihrer abgeleiteten, analytisch gesprochen durch Vermittlung ihrer Differentialgleichungen auf einander bezogen werden. Bemerkenswerthe Beispiele solcher Erzeugnisse in übertragenem Sinne des Wortes bilden den weiteren Inhalt dieser Abhandlung.

I.

1. Ein System von ∞^1 Curven wird durch eine Gleichung zwischen den Coordinaten x, y und einem veränderlichen Parameter λ dargestellt, deren allgemeine Form lautet

$$f(x, y, \lambda) = 0. \tag{1}$$

Diese Gleichung und die durch Differentiation daraus gebildete

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} p = 0, \tag{2}$$

in welcher p den Differentialquotienten von y in Bezug auf x bedeutet, können dazu dienen, für einen gegebenen Punkt (x, y) die Parameterwerthe und die Richtungscoëfficienten der Tangenten der durch ihn gehenden Curven des Systems zu bestimmen. Eliminirt man zwischen (1) und (2) den Parameter λ, so ergibt sich eine Gleichung von der Form

$$\varphi(x, y, p) = 0, \tag{3}$$

welche für jeden Punkt der Ebene die Richtungen der Tangenten bestimmt, die an die durch ihn gehenden Curven des Systems

gezogen werden können; man bezeichnet sie als die Differentialgleichung des Curvensystems.

In der Gleichung (3) kann der Differentialquotient p wieder als veränderlicher Parameter angesehen werden, und von diesem Gesichtspunkte stellt sie ein neues System von ∞^1 Curven dar, welches zu dem ursprünglichen in einer bemerkenswerthen Beziehung steht. Da nämlich in allen Punkten einer Curve des Systems (3) p den nämlichen Werth hat, so geht diese Curve durch Punkte gleicher Tangenten-, also auch gleicher Normalenrichtung auf den Curven des Systems (1). Insbesondere wird beispielsweise die Curve $\varphi(x, y, 0) = 0$ durch die extremen Punkte der Curven (1) bezüglich der x-Axe, die Curve $\varphi(x, y, \infty) = 0$ durch die extremen Punkte in Bezug auf die y-Axe gehen.

Um das Verhältniss dieser beiden Curvensysteme kurz zu bezeichnen, soll das System (3) das abgeleitete des Systems (1), dieses dagegen das ursprüngliche oder das Integralsystem von (3) heissen. Da der angedeutete Process auf (3) von Neuem angewendet und dies im Allgemeinen beliebig oft wiederholt werden kann, so gibt ein vorgelegtes System (1) Veranlassung zur Entstehung einer unbeschränkten Anzahl neuer Systeme, welche als das erste, zweite, ... abgeleitete System von (1) benannt werden sollen.

Daraus, dass

$$\varphi\left(x, y, -\frac{1}{p}\right) = 0$$

die Differentialgleichung der orthogonalen Trajectorien von (1) ist, folgt die auch geometrisch einleuchtende Thatsache, dass ein Curvensystem und das System seiner orthogonalen Trajectorien zu demselben abgeleiteten System führen. Die Bemerkung bliebe übrigens auch für schiefe Trajectorien in Kraft.

2. Der Übergang von einem Curvensystem (1) zu seinem abgeleiteten (3) und die Umkehrung dieses Processes stellen sich geometrisch wie folgt dar. Man verzeichne die zu einer Reihe aufeinander folgender Werthe $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ von λ gehörigen Curven des Systems (1) und führe an sie die möglichen Tangenten einer beliebigen Richtung, deren Coëfficient p sei; die Berührungspunkte dieser Tangenten in der durch die Para-

meterwerthe bedingten Reihenfolge geben die Ecken eines Polygons, dessen Grenze bei beständig näher zusammenrückenden $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ eine Curve des Systems (3) ist.

Ist umgekehrt das abgeleitete System durch die Gleichung (3) gegeben, so stelle man eine Reihe aufeinander folgender Werthe $p_0, p_1, p_2, \ldots$ von p auf, verzeichne die zugehörigen Curven, führe durch einen beliebigen Punkt der Curve p_0 eine Gerade vom Richtungscoëfficienten p_0 bis an die Curve p_1, durch diesen Punkt eine Gerade vom Richtungscoëfficienten p_1 bis an die Curve p_2 u. s. f.; dadurch entsteht ein Polygon, dessen Grenze, wenn die Intervalle zwischen den Werthen $p_0, p_1, p_2, \ldots$ der Null sich nähern, eine Curve des Systems (1) sein wird.

3. Besitzt ein Curvensystem eine Enveloppe, so hüllt diese auch das abgeleitete Curvensystem und somit auch die abgeleiteten Systeme aller Ordnungen ein.

Es seien $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ unendlich benachbarte Werthe des Parameters λ; $C_0, C_1, C_2, \ldots$ die zugehörigen Curven des Systems (1); $M_0, M_1, M_2, \ldots$ die ebenfalls unendlich benachbarten Grenzpunkte, welche diese Curven mit der Enveloppe E gemein haben. Dann ist die Gerade $M_0 M_1$, deren Richtungscoëfficient p_0 heissen möge, Tangente an E sowohl als an die Nachbarcurven C_0, C_1 des Systems, $M_0 M_1$ daher ein Element der zum Parameterwerth p_0 gehörigen Curve des abgeleiteten Systems (3); ebenso erweist sich $M_1 M_2$ als Element der zu einem unendlich benachbarten Parameterwerth p_1 gehörigen Curve des abgeleiteten Systems u. s. w. Daraus folgt in der That, dass die Curve E auch das abgeleitete System einhüllt.

Dieses Theorem schliesst die bekannte Thatsache ein, dass man eine singuläre Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung ebensowohl und auf demselben Wege aus der Differentialgleichung wie aus dem allgemeinen Integral finden kann. Es zeigt ferner, dass und wie man aus einem Curvensystem mit einer Einhüllenden im Allgemeinen unbeschränkt viele andere Curvensysteme mit derselben Einhüllenden abzuleiten im Stande ist.

Aus der am Schlusse des Artikels 2 gemachten Bemerkung folgt: Hat ein Curvensystem oder das System seiner Trajectorien

oder haben beide Systeme Enveloppen, so hüllen diese zugleich das gemeinsame abgeleitete System ein.

4. Zur Erläuterung des bisher Vorgeführten mögen die folgenden Beispiele dienen.

α) Die von Lagrange[1] behandelte Gleichung

$$y^2 - ax^2 - \frac{B^2 a}{a - A^2} = 0, \tag{1}$$

in welcher a einen veränderlichen Parameter, A, B constante Grössen bedeuten, gehört einem System coaxialer Kegelschnitte zu; bringt man sie auf die Form

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$$

wobei

$$\alpha^2 = -\frac{B^2}{a - A^2}, \quad \beta^2 = \frac{B^2 a}{a - A^2},$$

so ist aus der Beziehung

$$A^2\alpha^2 + \beta^2 = B^2$$

leicht zu schliessen, dass sich die Halbaxen der Kegelschnitte construiren lassen als Coordinaten der Punkte eines festen Kegelschnittes mit den Halbaxen $\frac{B}{A}$, B. Das System besteht aus Ellipsen ($a < 0$) und Hyperbeln ($a > 0$), letztere in verschiedener Lage gegen das Axensystem angeordnet, je nachdem $a < A^2$ oder $a > A^2$; es bedeckt die Ebene doppelt und hat zur Einhüllenden das Vierseit

$$y = \pm Ax \pm B. \tag{2}$$

Durch Elimination von a ergibt sich aus (1) die Differentialgleichung

$$A^2px^2 - (A^2 + p^2)xy + py^2 - B^2p = 0; \tag{3}$$

dieselbe stellt, wenn p als veränderlicher Parameter aufgefasst wird, ein System concentrischer Hyperbeln dar, welches die

[1] Leçons sur le calcul des fonctions, p. 223 (nation. édit.).

Ebene ebenfalls zweifach, jedoch in eigenthümlicher Weise, bedeckt. Löst man nämlich (3) in Bezug auf p auf und bezeichnet die eine Wurzel mit p, so ist $\frac{A^2}{p}$ die andere; wird aber in der genannten Gleichung p durch $\frac{A^2}{p}$ ersetzt, so geht sie in sich selbst über: es fallen also die Kegelschnitte des Systems (3) paarweise zusammen. Dies ist so zu deuten: durch jeden Punkt einer Hyperbel des Systems (3) geht ein Kegelschnitt aus dem System (1) mit bestimmter Tangentenrichtung p und gleichzeitig ein zweiter Kegelschnitt dieses Systems mit der Tangentenrichtung $\frac{A^2}{p}$; p und $\frac{A^2}{p}$ sind zugleich die Asymptotenrichtungen der betreffenden Hyperbel (3). Alle diese Hyperbeln gehen durch die Ecken des Vierseits (2) und haben dieses Vierseit zur Einhüllenden in dem Sinne, dass durch dasselbe die Ebene in Gebiete getrennt wird, welche zweifach und nullfach durch das System (3) bedeckt sind. (Fig. 1; die den Linien beigesetzten Nummern deuten auf die Gleichungen hin.)

β) Wenn λ einen veränderlichen Parameter, c eine Constante bedeutet, so stellt die Gleichung

$$(\lambda^2-c^2)x^2+\lambda^2y^2 = \lambda^2(\lambda^2-c^2) \tag{1}$$

ein System confocaler Centralkegelschnitte dar; als Einhüllende desselben ergeben sich die beiden Brennpunkte, die als Nullkreise aufgefasst thatsächlich mit jedem der Kegelschnitte in ideeller Doppelberührung stehen.

Die Differentialgleichung des Systems lautet

$$xy[(y-px)(py+x)+c^2p] = 0$$

und zerfällt in die drei

$$x = 0, \quad y = 0$$

und

$$px^2+(p^2-1)xy-py^2 = c^2p; \tag{2}$$

die beiden ersten entsprechen nur im uneigentlichen Sinne Örtern von Punkten gleicher Tangentenrichtung, insofern näm-

lich die doppelt gelegten Geraden $x = 0$, $y = 0$ als degenerirte Kegelschnitte dem System (1) angehören; die dritte Gleichung, die allein von Interesse ist, entspricht bei variablem p einem System concentrischer gleichseitiger Hyperbeln, das die Ebene doppelt, jedoch in solcher Weise bedeckt, dass die zu Werthepaaren des Parameters von der Form $p, -\frac{1}{p}$ gehörigen Hyperbeln in je eine zusammenfallen. Die geometrische Deutung hiervon ist nach dem Vorangehenden leicht gegeben. Als Einhüllende ergeben sich wieder die Brennpunkte des confocalen Systems, durch welche alle Hyperbeln (2) hindurchgehen.

Bildet man für das System (2) abermals das abgeleitete, indem man den Parameter p eliminirt, so ergibt sich als Gleichung desselben, wenn neuerdings $\frac{dy}{dx}$ mit p bezeichnet wird,

$$(x^2+y^2)(px-y)-c^2(px+y) = 0. \tag{3}$$

Das abgeleitete System zweiter Ordnung ist also ein System circularer Curven dritter Ordnung, welche ebenfalls durch die Brennpunkte und überdies durch den Mittelpunkt des confocalen Systems hindurchgehen; letzterer ist zugleich Mittelpunkt aller der Curven, d. h. jener Punkt, in welchem sich ihre Kreisasymptoten schneiden.

Für das System confocaler Parabeln

$$y^2 = 2\lambda x+\lambda^2 \tag{4}$$

ergibt sich die Differentialgleichung

$$y[(1-p^2)y-2px] = 0;$$

von dem Bestandtheil $y = 0$ gilt eine ähnliche Bemerkung wie oben: der andere

$$(1-p^2)y-2px = 0 \tag{5}$$

stellt ein Strahlenbüschel dar mit dem Brennpunkt des Parabelsystems als Träger, welches die Ebene doppelt bedeckt in der Weise, dass zu Werthepaaren wie $p, -\frac{1}{p}$ in einen zusammen-

fallende Strahlen gehören. Gemeinsame Einhüllende beider Systeme ist der Brennpunkt des ersten.

γ) Im Wesentlichen zu denselben Resultaten führt das Kreisbüschel

$$x^2+y^2-2by-\pi=0, \tag{1}$$

dessen Differentialgleichung, durch Elimination des variabeln b gebildet,

$$px^2-2xy-py^2=\pi p \tag{2}$$

lautet und ein die Ebene nur einfach bedeckendes Büschel gleichseitiger Hyperbeln darstellt, dessen Basispunkte die Grundpunkte des Büschels (1) und des zugehörigen Orthogonalbüschels sind und das formell mit dem System (2), β) übereinfällt. Daraus resultirt auch die Übereinstimmung der abgeleiteten Systeme zweiter Ordnung, für welches hier die Gleichung

$$(x^2+y^2)(px-y)-\pi(px+y)=0 \tag{3}$$

besteht (Fig. 2).

δ) Über einem System paralleler Sehnen eines gegebenen Kreises als Durchmessern werden Kreise beschrieben; ihr System ist, wenn man den Mittelpunkt des gegebenen Kreises (vom Radius r) als Ursprung und die Sehnrichtung als Ordinatenrichtung wählt, dargestellt durch die Gleichung

$$(x-a)^2+y^2=r^2-a^2 \tag{1}$$

mit dem veränderlichen Parameter a. Die zugehörige Differentialgleichung ist

$$x^2+2pxy+(1+2p^2)y^2=r^2 \tag{2}$$

und gehört bei veränderlichem p einem System concentrischer Ellipsen zu, welche durch die festen Punkte $(\pm r, 0)$ gehen und zu denen der gegebene Kreis, entsprechend $p=0$, mit gehört.

Das abgeleitete System zweiter Ordnung hat die Gleichung

$$(x^2+y^2)(px-y)^2-(3p^2x^2-4pxy+y^2)r^2+2p^2r^4=0 \tag{3}$$

und ist ein System circularer Curven vierter Ordnung. Jede derselben ist, wie man unmittelbar aus der Gleichung erkennt,

centralsymmetrisch in Bezug auf den Ursprung, geht durch die vier festen Punkte $(\pm r, 0)$, $(\pm r\sqrt{2}, 0)$, durch das erste Paar in der durch p charakterisirten Richtung, durch das zweite normal zur x-Axe und besteht aus zwei Ovalen. Bringt man nämlich die Curve mit dem Strahl

$$y = \lambda x$$

in Verbindung, so ergibt sich zur Bestimmung der Abscissen der Schnittpunkte die Gleichung

$$(1+\lambda^2)(p-\lambda)^2 x^4 - (3p^2 - 4p\lambda + \lambda^2) r^2 x^2 + 2p^2 r^4 = 0;$$

diese liefert für x^2 zwei gleiche Werthe, sobald λ der Gleichung genügt:

$$(\lambda - p)^2 [(1 - 8p^2)\lambda^2 - 6p\lambda + p^2] = 0;$$

die stets reellen Lösungen von

$$(1 - 8p^2)\lambda^2 - 6p\lambda + p^2 = 0$$

bestimmen zwei reelle Doppeltangenten, zwischen welchen die Curve in ihrem reellen Verlaufe eingeschlossen ist; die doppelt zählende Lösung $\lambda = p$ dagegen führt zu einer Doppeltangente mit ideeller Doppelberührung im Unendlichen.

Die dem Parameterwerth $p = 0$ entsprechende Curve (3) zerfällt in den gegebenen Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ und in die doppelt zählende Gerade $y = 0$. Hieraus folgt, dass der genannte Kreis jede der Ellipsen (2) ausser in $(\pm r, 0)$ in zwei weiteren Punkten schneidet, in welchen die Tangenten parallel sind der Abscissenaxe, mit andern Worten, dass die jenem Kreise und einer Ellipse des Systems (2) gemeinsamen Durchmesser für letztere das Paar gleicher conjugirter Durchmesser bedeuten.

Alle drei Systeme, (1), (2) und (3), haben die Ellipse

$$x^2 + 2y^2 = 2r^2, \tag{4}$$

für welche die Punkte $(\pm r, 0)$ Brennpunkte und die Punkte $(\pm r\sqrt{2}, 0)$ Hauptscheitel sind, zur Einhüllenden (Fig. 3).

5. Einen bemerkenswerthen Fall bietet ein von einem veränderlichen Parameter abhängiges System von Geraden dar. Da die Gerade eine Linie ist, welche bei jeder Lage des

Berührungspunktes mit ihrer Tangente zusammenfällt, so sind Örter von Punkten gleicher Tangentenrichtung die Geraden des Systems selbst; demnach ist das abgeleitete System erster Ordnung und folglich auch jedes abgeleitete System höherer Ordnung mit dem ursprünglichen identisch. Der Satz, dass die Einhüllende des ursprünglichen Systems, falls eine solche vorhanden, zugleich Einhüllende der abgeleiteten Systeme ist, wird hier evident und gilt auch in der Umkehrung.

Dieses durch geometrische Erwägung gefundene Resultat wird auch durch die Analyse bestätigt. Die Gleichung eines Geradensystemes wie das besprochene kann immer auf die Form

$$y = \lambda x + f(\lambda) \tag{1}$$

gebracht werden, wo λ den Parameter bedeutet und f das Zeichen für eine beliebige Function ist. Durch Elimination von λ zwischen (1) und der daraus durch Differentiation abgeleiteten

$$p = \lambda$$

entsteht die Differentialgleichung

$$y = px + f(p), \tag{2}$$

welche bei veränderlichem p dasselbe Geradensystem darstellt wie (1). Als Differentialgleichung führt sie den Namen Clairaut's und ist für die Geschichte der Theorie der Differentialgleichungen von hervorragender Bedeutung. Die eben angestellte Betrachtung lässt deutlich den geometrischen Grund erkennen, warum sie mit ihrem allgemeinen Integral formell zusammenfällt.

Die Clairaut'sche Differentialgleichung ist der analytische Ansatz für ein inverses Tangentenproblem, welches der Tangente einer zu bestimmenden Curve eine Eigenschaft auferlegt, die unabhängig ist von der Lage des Berührungspunktes auf der Tangente und daher von allen Punkten der letzteren gleichmässig erfüllt wird.

Um dies zu zeigen, werde die Gleichung der Tangente in einem Punkte (x, y) der verlangten Curve in der Gestalt

$$\eta = p\xi + y - px \tag{3}$$

geschrieben; der Abschnitt auf der Ordinatenaxe ist hier durch $y-px$ vertreten; anderseits ergibt sich für ihn vermöge der Bedingung, welche der Tangente durch das Problem vorgeschrieben ist, ein Ausdruck, der im Allgemeinen von x, y, p abhängen wird. Ist nun das Problem solcher Art, dass dieser Ausdruck sich auf eine Function von p allein, etwa $f(p)$, reducirt so ist

$$y-px = f(p) \tag{4}$$

die dem Problem entsprechende Differentialgleichung. Hält man sie neben die aus (3) durch die Substitution (4) hervorgehende Form der Tangentengleichung

$$\eta = p\xi + f(p),$$

so ist zu erkennen, dass alle Punkte der Tangente die Differentialgleichung erfüllen, dass also die Tangente einen Theil des allgemeinen Integrals, die Gesammtheit aller Tangenten das Integralsystem selbst darstellt.

Zwei Beispiele mögen zur Erläuterung dienen.

Stellt man die Frage nach einer Curve, bei welcher die Tangente mit dem aus dem Ursprung nach dem Berührungspunkte gezogenen Strahl einen constanten Winkel arctg k einschliesst, so handelt es sich um eine Tangenteneigenschaft, bei welcher die Lage des Berührungspunktes in der Tangente von Einfluss ist; sind x, y die Coordinaten des Berührungspunktes, so liefert die Bedingung des Problems den Ansatz

$$\frac{\frac{y}{x} - p}{1 + \frac{y}{x} p} = k$$

und daraus folgt

$$y-px = k(x+py),$$

d. h. der Abschnitt der Tangente auf der Ordinatenaxe ist von x, y und p abhängig.

Wird dagegen um eine Curve gefragt, deren Tangenten vom Ursprung einen gegebenen Abstand a haben, so ist dies eine Tangenteneigenschaft, bei welcher es auf die Lage des

Berührungspunktes in der Tangente nicht ankommt; mittels der allgemeinen Gleichung der Tangente

$$\eta = p\xi + y - px$$

drückt sich die Bedingung des Problems durch

$$\frac{y-px}{\sqrt{1+p^2}} = a$$

aus und ergibt

$$y - px = a\sqrt{1+p^2},$$

d. h. für den Abschnitt der Tangente auf der Ordinatenaxe einen von p allein abhängigen Ausdruck.

Von letzterer Art ist das geometrische Problem, an welchem Clairaut zum erstenmale die Thatsache nachgewiesen hat, dass eine Differentialgleichung ausser dem allgemeinen Integral eine singuläre Lösung besitzen kann;[1] es wird um eine Curve gefragt, auf welcher die Schenkel eines rechten Winkels gleiten, während sein Scheitel eine gegebene Curve beschreibt.[2] Auch die geometrischen Aufgaben, welche Euler der Erläuterung der beiden »Paradoxa der Integralrechnung«[3] unterlegt, wonach es möglich ist, zu einer vorgelegten Differentialgleichung ein Integral zu finden nicht durch Integration, sondern durch Differentiation, und wonach eine Differentialgleichung neben ihrem allgemeinen noch ein besonderes durch Integration nicht auffindbares Integral besitzen kann, sind sämmtlich von der bezeichneten Art. Einige dieser Aufgaben hat Lagrange[4] wieder aufgenommen, als er den von ihm erkannten inneren Zusammenhang zwischen dem allgemeinen und dem singulären Integral darlegte, der den beiden vorgenannten Geometern noch verborgen geblieben war.

---

[1] Histoire de l'Académie royale des Sciences; année 1734, p. 196—215.

[2] Von diesem Problem leitet sich die Benennung der Gleichung (2) als Clairaut'sche Differentialgleichung her.

[3] Histoire de l'Académie royale des sciences et belles lettres, Berlin, 1756, p. 300—321.

[4] Théorie des fonctions, p. 207; Leçons sur le calcul des fonctions, p. 169,) (nation. édit.).

6. Der in Artikel 3 bewiesene Satz, dass die Enveloppe eines Curvensystems auch Einhüllende aller abgeleiteten Systeme ist, lässt sich im Allgemeinen nicht umkehren.

Es sei $\varphi(x,y,p)=0$ das abgeleitete System von $f(x,y,\lambda)=0$, E seine Einhüllende; die Curven $C_0, C_1, C_2, \ldots$, zu benachbarten Werthen $p_0, p_1, p_2, \ldots$ des Parameters p gehörig, mögen mit E die Grenzpunkte M_0, M_1, $M_2, \ldots$ gemein haben. Jede der Curven C verbindet Punkte einer oder mehrerer bestimmten Tangentenrichtungen im Integralsystem, so C_0 Punkte der durch p_0 (oder die Werthgruppe p_0) charakterisirten Richtung u. s. w.; sind nun die Richtungen $p_0, p_1, p_2, \ldots$ verschieden von den Tangentenrichtungen der E in M_0, M_1, $M_2, \ldots$, so schneiden die durch $M_0, M_1, M_2, \ldots$ gehenden Curven des Integralsystems die E unter endlichen Winkeln und somit ist E nicht auch Einhüllende des letztgenannten Systems; nur wenn jene Richtungen durchwegs übereinstimmen, hüllt E auch das System $f(x,y,\lambda)=0$ ein.

Hiermit hängt die Thatsache zusammen, dass der aus einer Differentialgleichung erster Ordnung durch Elimination des Differentialquotienten p gewonnene Ort, den Cayley[1] »p-discriminant locus« nennt, nicht nothwendig eine singuläre Lösung der Gleichung darzustellen braucht.

Einen sehr anschaulichen Beleg zu der oben aufgestellten Behauptung bietet das System der Evolventen einer Curve oder ein System von Parallelcurven und sein abgeleitetes. Weil nämlich die Berührungspunkte paralleler Tangenten an ein solches System auf Geraden liegen, so setzt sich das abgeleitete System aus von einem Parameter abhängigen Geraden zusammen; es hat eine Einhüllende, nämlich die Evolute, welche aber das ursprüngliche System, das der Evolventen, nicht einhüllt; sie spielt für dasselbe eine andere Rolle, indem sie den Ort seiner Spitzen (»cuspidal locus« nach Cayley) bildet.

Die Bemerkung, welche soeben über ein Parallelcurvensystem und sein abgeleitetes gemacht worden ist, gestattet in sehr einfacher Weise die Differentialgleichung der Evolventen einer Curve aufzustellen. Punkte gleicher Tangentenrichtung p

---

[1] The Messenger of Mathematics, vol. II (1873), p. 6—12.

liegen auf einer Geraden, welche zu dieser Richtung normal ist und deren Axenabschnitt von den Coordinaten des Punktes x, y der Evolvente, durch welchen sie geht, nicht abhängt; mithin hat die Gerade eine Gleichung von der Form

$$y = -\frac{1}{p}x + \varphi(p)$$

oder

$$x + py = \psi(p), \tag{1}$$

wobei φ, ψ Zeichen für willkürliche Functionen sind. Die Bedeutung von $\psi(p)$ ergibt sich leicht; dieselbe Gerade (1) hat nämlich als Tangente an einen bestimmten Punkt X, Y der zu Grunde liegenden Curve $F(X, Y) = 0$ die Gleichung

$$y = -\frac{1}{p}x + Y + \frac{1}{p}X; \tag{2}$$

vergleicht man die Ausdrücke für den Axenabschnitt in den Formen (1) und (2), so folgt

$$\frac{1}{p}\psi(p) = Y + \frac{1}{p}X$$

und daraus

$$\psi(p) = X + pY; \tag{3}$$

in dem rechtsstehenden Ausdrucke sind schliesslich X, Y durch jene Werthe zu ersetzen, welches sich dafür aus den Gleichungen

$$F(X, Y) = 0$$
$$p\frac{\partial F}{\partial X} - \frac{\partial F}{\partial Y} = 0 \tag{4}$$

ergeben, deren zweite ausdrückt, dass die Tangente der Evolute Normale der Evolventen ist.

Jede Differentialgleichung von der Form (1) gehört einem System von Evolventen an, dessen Evolute durch Bildung der Discriminante in Bezug auf p erhalten wird; die Auffindung des Systems der Evolventen selbst erfordert die Integration von (1). Es sei beispielsweise $\psi(p) = ap + b$, dann lautet (1)

$$x - a + p(y - b) = 0$$

und stellt ein Strahlenbüschel dar, dessen Mittelpunkt (a, b) zugleich als Einhüllende anzusehen ist; das zugehörige Evolventensystem besteht in allen Kreisen um (a, b) als Centrum. Die Annahme $\psi(p) = ap^2$ führt auf die Gleichung

$$x + py = ap^2,$$

welche das Tangentensystem der Parabel

$$y^2 + 4ax = 0$$

darstellt; die Evolventen dieser Parabel ergeben sich durch Integration in der Form

$$x = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \{C + al.(p + \sqrt{1+p^2})\}$$

$$y = ap - \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \{C + al.(p + \sqrt{1+p^2})\}.$$

7. Das Curvensystem sei, auf ein Polarcoordinatensystem bezogen, dargestellt durch die Gleichung

$$f(r, \omega, \lambda) = 0; \tag{1}$$

diese und die aus ihr durch Differentiation abgeleitete Gleichung

$$p\frac{\partial f}{\partial \omega} + r\frac{\partial f}{\partial r} = 0, \tag{2}$$

in welcher $p = \dfrac{rd\omega}{dr}$ die trigonometrische Tangente des Winkels bedeutet, den die Tangente der Curve mit dem Leitstrahl des Berührungspunktes bildet, sind geeignet, für die durch einen gegebenen Punkt (r, ω) laufenden Curven des Systems Parameterwerthe und Tangentenrichtungen zu bestimmen.

Die letzteren allein berechnen sich aus der Gleichung

$$\varphi(r, \omega, p) = 0, \tag{3}$$

welche aus (1) und (2) durch Elimination von λ hervorgeht und als Differentialgleichung des Curvensystems bezeichnet wird.

Fasst man in ihr p als veränderlichen Parameter auf, so ist sie der analytische Ausdruck für ein neues System von ∞^1

Curven, welches zu dem ursprünglichen in solcher Beziehung steht, dass jede Curve (3) solche Punkte auf den Curven (1) verbindet, in welchen die Tangente gegen den Leitstrahl des Berührungspunktes unter ein und demselben Winkel geneigt ist. Dieses neue System soll wieder das abgeleitete von (1), (1) hingegen das Integralsystem von (3) heissen.

Die Ausführungen der Artikel 3 und 6 gelten auch in dem vorliegenden Falle.

8. Es gibt Fälle, in welchen sich aus der Natur des abgeleiteten Systems gewisse geometrische Eigenschaften des ursprünglichen leicht erschliessen lassen; in analytischer Deutung sind dies ebensoviele Fälle von Differentialgleichungen, für welche sich die allgemeine Form des Integrals angeben lässt. Hier mögen die einfachsten dieser Fälle kurz erörtert werden.[1]

α) Die Gleichung des abgeleiteten Systems enthalte die Variabeln x, y nicht, laute also

$$\varphi(p) = 0. \tag{1}$$

Dann kann jede wie immer in der Ebene gezogene Linie als zum abgeleiteten System gehörig angesehen werden, ein abgeleitetes System im eigentlichen Sinne gibt es also hier nicht. Das ursprüngliche System muss infolge dessen aus einem oder mehreren Systemen paralleler Geraden bestehen, deren Richtungscoëfficienten die Wurzeln von (1) sind; mit anderen Worten: die Differentialgleichung (1) hat ein oder mehrere Integrale der Form

$$y = ax+\lambda. \tag{2}$$

β) Das abgeleitete System habe die Gleichung

$$\varphi(x, p) = 0, \tag{1}$$

bestehe also in zur y-Axe parallelen Geraden. Das ursprüngliche System kann dann aus einem seiner Individuen durch Verschiebung parallel zur y-Axe erzeugt werden oder es gestattet

[1] Vergl. Sophus Lie, Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, S. 140—147, wo zu gegebenen eingliedrigen Gruppen die zugehörigen Differentialgleichungen gesucht werden.



die eingliedrige Gruppe der Translationen dieser Richtung, hat also eine Gleichung von der allgemeinen Form

$$f(x, y+\lambda) = 0. \qquad (2)$$

γ) Durch ganz analoge Betrachtungen ergibt sich, dass zu einem abgeleiteten System von der Form

$$\varphi(y, p) = 0 \qquad (1)$$

ein Ursprüngliches der allgemeinen Gleichung

$$f(x+\lambda, y) = 0 \qquad (2)$$

gehört.

δ) Allgemeiner: Zu einem abgeleiteten System von der Form

$$\varphi(\alpha x+\beta y, p) = 0 \qquad (1)$$

gehört ein Ursprüngliches, welches die Gruppe der Translationen parallel zur Geraden $\alpha x+\beta y = 0$ gestattet, dessen allgemeine Gleichung daher lautet

$$f(x-\beta\lambda, y+\alpha\lambda) = 0. \qquad (2)$$

ε) In Polarcoordinaten habe das abgeleitete System die Gleichung

$$\varphi(r, p) = 0,$$

sei also ein System von Kreisen um den Pol als Mittelpunkt. Das ursprüngliche System kann dann aus einem seiner Individuen durch Rotation um den Pol erzeugt werden, hat also eine Gleichung von der Form

$$f(r, \omega+\lambda) = 0. \qquad (2)$$

Der Fall ist äquivalent jenem α) in rechtwinkligen Coordinaten. Geht man auch hier zu solchen über, so ist r zu ersetzen durch $(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$, ω durch arctg $\frac{y}{x}$ und p als Tangens des Winkels der Tangente mit dem Leitstrahl des Berührungspunktes durch

$$\frac{\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}} \quad \text{oder} \quad \frac{px-y}{x+py},$$

wenn man für $\frac{dy}{dx}$ neuerdings den Buchstaben p verwendet; hat also, in rechtwinkligen Coordinaten, das abgeleitete System eine Gleichung von der Form

$$\Phi\left(x^2+y^2, \frac{px-y}{x+py}\right)=0, \tag{1*}$$

so kommt dem ursprünglichen System eine Gleichung der Gestalt

$$F\left(x^2+y^2, \operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\lambda\right)=0 \tag{2*}$$

zu.

2) Die Gleichung des abgeleiteten Systems laute

$$\varphi(\omega, p)=0; \tag{1}$$

es ist ein Strahlenbüschel aus dem Pol; da jeder seiner Strahlen Punkte gleicher Tangentenrichtung auf den Integralcurven verbindet, so ist das ursprüngliche System aus einem seiner Individuen ableitbar durch die Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen aus dem Pol, hat infolge dessen eine Gleichung der Form

$$f(\lambda r, \omega)=0. \tag{2}$$

Vollzieht man den Übergang zu rechtwinkligen Coordinaten, so ergibt sich, dass einem abgeleiteten System von der Gleichungsform

$$\varphi\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \frac{p-\frac{y}{x}}{1+p\frac{y}{x}}\right)=0$$

oder

$$\Phi\left(\frac{y}{x}, p\right)=0 \tag{1*}$$

ein ursprüngliches System entspricht, welches sich darstellen lässt durch $f\left(\lambda(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}, \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)=0$ oder

$$F\left(\lambda x, \frac{y}{x}\right)=0. \tag{2*}$$

Zu allen vorangeführten Fällen sei bemerkt, dass die jeweilen mit (1) bezeichnete Gleichung das System der Bahncurven jener Gruppe von Transformationen darstellt, bei welcher das zugehörige ursprüngliche System (2) invariant bleibt. Im Falle ζ) gilt zwischen (1*) und (2*) dieselbe Beziehung, nicht so im Falle ε).

Zu der zuletzt behandelten homogenen Differentialgleichung (1*) möge noch folgende Bemerkung gemacht werden. Nach $\frac{y}{x}$ aufgelöst laute sie

$$\frac{y}{x} = \psi(p);$$

für solche Werthe von p, welche der Gleichung

$$\psi(p) = p$$

genügen, ist der Strahl des abgeleiteten Systems Tangente an die Curven des Integralsystems in den Punkten, welche er miteinander verbindet; jeder solche Strahl hüllt also die Integralcurven ein und bildet daher einen Theil der singulären Lösung der betreffenden Differentialgleichung, sofern er nicht zu einem particulären Integral derselben gehört.

Die Differentialgleichung

$$p^2 x - 2py + x + 2y = 0$$

gibt beispielsweise bei obiger Behandlung

$$\frac{y}{x} = -\frac{1+p^2}{2(1-p)},$$

und aus der Gleichung

$$-\frac{1+p^2}{2(1-p)} = p$$

findet man die beiden Werthe $p = 1 \pm \sqrt{2}$, welche zu den beiden ausgezeichneten, zu einander senkrechten Geraden des abgeleiteten Systems gehören

$$\frac{y}{x} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Dieselben bilden im vorliegenden Falle die singuläre Lösung der Differentialgleichung; denn sie hüllen das Integralsystem

$$(x+\lambda)^2 = 2\lambda y - \lambda^2,$$

ein System von Parabeln, deren Brennpunkte die Gerade $x+y=0$ erfüllen, während die Gerade $y=0$ ihre gemeinsame Directrix ist, ein, ohne in dem allgemeinen Integral enthalten zu sein.

Die Differentialgleichung

$$x+p^2y = 0$$

dagegen führt zunächst auf $\frac{y}{x} = -\frac{1}{p^2}$ und die Gleichung $-\frac{1}{p^2} = p$ ergibt $p^3+1 = 0$; hiedurch ergibt sich in

$$x^3+y^3 = 0$$

eine Gruppe von drei ausgezeichneten Geraden des abgeleiteten Systems, eine davon reell, die beiden andern conjugirt imaginär: diese Geraden bilden aber einen particulären Fall des allgemeinen Integrals

$$(y^{\frac{3}{2}} - C)^2 + x^3 = 0,$$

entsprechend dem Werthe $C = 0$ der willkürlichen Constanten

9. Zwei Systeme von je ∞^1 Curven

$$f(x, y, \lambda) = 0 \qquad (1)$$

$$g(x, y, \mu) = 0 \qquad (2)$$

können zu einander in Beziehung gesetzt werden, indem man solche Curven aus beiden Systemen einander zuordnet, deren Parameterwerthe eine gegebene Relation

$$\chi(\lambda, \mu) = 0 \qquad (3)$$

erfüllen. Der Ort der Schnittpunkte zugeordneter Curven wird als das aus der Verwandtschaft (3) hervorgehende Erzeugniss der beiden Curvensysteme bezeichnet; man erhält seine Gleichung durch Elimination von λ, μ zwischen den Gleichungen (1), (2) und (3).

Die einfachste Relation

$$\lambda = \mu$$

ordnet Curven mit gleichen Parameterwerthen einander zu: man kann diesem Fall folgende raumgeometrische Deutung unterlegen. Wird in den Gleichungen $f(x, y, \lambda) = 0$ und $g(x, y, \lambda) = 0$ $\lambda = z$ als dritte Ordinate eines Punktes im Raume aufgefasst, dessen zwei erste Ordinaten x, y sind, so stellt jede dieser Gleichungen eine Fläche dar; die beiden Curvensysteme sind die Projectionen der Niveaulinien dieser Flächen in der xy-Ebene und derart aufeinander bezogen, dass derselben Ebene angehörende Niveaulinien zugeordnete Curven ergeben; das Erzeugniss der Curvensysteme ist dann die Projection des Durchschnittes der beiden Flächen.

Jeder andere Fall kann auf diesen einfachsten zurückgeführt werden; man braucht nur mittels (3) μ aus (2) zu eliminiren.

10. Die beiden Curvensysteme (1) und (2) können aber auch in anderer Weise zu einander in Beziehung gebracht werden, nämlich durch Vermittlung ihrer Differentialgleichungen: diese seien

$$\varphi(x, y, p) = 0 \tag{1*}$$

$$\psi(x, y, P) = 0; \tag{2*}$$

p und P haben analytisch dieselbe Bedeutung, beide stellen den Differentialquotienten von y in Bezug auf x vor. Fügt man zu (1*) und (2*) eine Beziehung zwischen p, P und x, y, etwa

$$\chi(x, y, p, P) = 0 \tag{3*}$$

und eliminirt nun zwischen den drei Gleichungen p und P, so ergibt sich der geometrische Ort solcher Punkte der Ebene, für welche die Richtungscoëfficienten der Tangenten an die Curve des Systems (1) einer- und des Systems (2) anderseits im Verein mit den Coordinaten die Bedingung (3*) erfüllen. Die Beziehung der Tangentenrichtungen ist von der Lage des Punktes unabhängig und für alle Punkte dieselbe, wenn die Relation (3*) die Grössen x, y nicht enthält, also von der Form ist

$$\chi(p, P) = 0. \tag{3**}$$

Handelt es sich beispielsweise um den Ort solcher Punkte, in welchen die Tangenten an zwei durchlaufende Curven aus (1) und (2) auf der Ordinatenaxe Abschnitte von constanter Summe $= c$ bilden, so heisst die Bedingung

$$2y-(p+P)x = c$$

und ist von der Lage des Punktes beeinflusst; verlangt man dagegen den Ort von Punkten, in welchen die beiderseitigen Subtangenten ein constantes Verhältniss $= \gamma$ bilden, so ist die zugehörige Relation

$$\frac{P}{p} = \gamma$$

von der Lage des Punktes unabhängig.

Jeder auf solche Weise gewonnene Ort kann als Erzeugniss der Curvensysteme (1) und (2) in erweitertem Sinne des Wortes angesehen werden.

In den folgenden Beispielen beschränken wir uns auf eine specielle Beziehung von der Form (3**).

11. Es sei der gleichwinklige Durchschnitt der beiden Curvensysteme $f(x, y, \lambda) = 0$ und $g(x, y, \mu) = 0$, d. h. der Ort solcher Punkte der Ebene zu bestimmen, in welchen sich die durchlaufenden Curven je aus dem ersten und zweiten System unter einem constanten Winkel $= \operatorname{arctg} k$ schneiden.

Die Bedingung, welcher p und P zu genügen haben, lautet

$$\frac{P-p}{1+pP} = k;$$

bestimmt man hieraus $P = \frac{k+p}{1-kp}$ und setzt dies in (2*) ein, so löst das Eliminationsresultat von p zwischen

$$\varphi(x, y, p) = 0$$

und

$$\psi\left(x, y, \frac{k+p}{1-kp}\right) = 0$$

die gestellte Aufgabe.

Das $k = 0$ entsprechende Erzeugniss möge als Berührungsort bezeichnet werden; es verbindet Punkte, in welchen

sich Curven der Systeme (1) und (2) gegenseitig berühren; das $k = \infty$ entsprechende Erzeugniss ist der orthogonale Durchschnitt dieser Systeme.

Nachstehend sollen einige bemerkenswerthe Beispiele dieser Art durchgeführt werden.

α) Es sei der gleichwinklige Durchschnitt des Kreisbüschels

$$x^2+y^2-2\lambda y-\pi = 0 \tag{A}$$

mit dem Strahlenbüschel aus dem Punkte $M(a, b)$ zu bestimme n Die Differentialgleichungen der beiden Systeme

$$(x^2-y^2-\pi)p-2xy = 0 \tag{1}$$

$$y-b = P(x-a) \tag{2}$$

in der erörterten Weise mit einander combinirt liefern das Resultat:

$$(x^2+y^2)(y+kx)-(ak-b)(x^2-y^2)-2(a+bk)xy+$$
$$+\pi(y-kx)+\pi(ak-b) = 0. \tag{B}$$

Der gleichwinklige Durchschnitt eines Kreisbüschels mit einem Strahlenbüschel ist also eine circulare Curve dritter Ordnung, welche durch die Grundpunkte F, G des Kreisbüschels und den Mittelpunkt M des Strahlenbüschels hindurchgeht; es ist eine Curve von derjenigen Species, bei welcher die imaginären Kreispunkte conjugirte Punkte sind in dem Sinne, dass die Tangenten in denselben auf der Curve sich schneiden; denn die imaginären Asymptoten haben die Gleichungen

$$y = \pm ix+b\mp ai$$

und ihr Schnittpunkt ist der Punkt $M(a, b)$. Die reelle Asymptote hat die Gleichung

$$y = -kx-(ak+b),$$

liegt also zu der durch M parallel zu ihr gezogenen Geraden symmetrisch bezüglich des Ursprunges.

Ist das Kreisbüschel ein Berührungsbüschel ($\pi = 0$), so hat die Curve im Berührungspunkte einen Doppelpunkt mit zu einander senkrechten Tangenten.

Von besonderem Interesse sind die beiden Curven, welche den Werthen $k = 0$ und $k = \infty$ entsprechen; ihre Gleichungen lauten

$$(x^2+y^2)\,y+b\,(x^2-y^2)-2axy+\pi y-\pi b = 0 \qquad (C)$$

$$(x^2+y^2)\,x-a\,(x^2-y^2)-2\,bxy-\pi x+\pi a = 0 \qquad (D)$$

Die erste verbindet die Berührungspunkte der Tangenten, die zweite die Fusspunkte der Normalen, welche aus dem Punkte M nach den Kreisen des Büschels (A) gezogen werden können. Gerade die umgekehrte Rolle spielen diese Curven in Bezug auf das zu (A) conjugirte Kreisbüschel

$$x^2+y^2-2\mu x+\pi = 0. \qquad (A')$$

Man kann die Curve (C) in zweifacher Weise als Erzeugniss eines Kreisbüschels und eines dazu projectivischen Strahlenbüschels auffassen, und zwar des Kreisbüschels (A) mit dem zu M gehörigen Polarenbüschel, dessen Träger der Punkt $R\left(\frac{b^2+\pi}{a}, -b\right)$ auf der reellen Asymptote $y = -b$ von (C) ist; und des Kreisbüschels (A') mit dem Durchmesserbüschel aus M. In gleicher Weise ergibt sich (D) einerseits aus dem Kreisbüschel (A) und dem Durchmesserbüschel aus M, anderseits aus dem Kreisbüschel (A') und dem Polarenbüschel zu M, dessen Scheitel $S\left(-a, \frac{a^2-\pi}{b}\right)$ auf der reellen Asymptote $x = -a$ dieser Curve liegt.

Wie leicht zu zeigen ist, aus geometrischen Gründen übrigens unmittelbar einleuchtet, schneiden sich die Curven (C) und (D) in den Punkten F, G, M unter rechtem Winkel. Bemerkt sei noch, dass (C) für $b = 0$ in die Gerade $y = 0$ und einen Kreis des Büschels (A'), (D) dagegen für $a = 0$ in die Gerade $x = 0$ und einen Kreis des Büschels (A) zerfällt; die geometrische Bedeutung hievon ist leicht zu erkennen (Fig. 4).

β) Es soll der gleichwinklige Durchschnitt des Systems confocaler Centralkegelschnitte

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-c^2} = 1 \qquad (A)$$

mit dem Strahlenbüschel aus dem Punkte $M(a, b)$ bestimmt werden.

Mit Hilfe der Differentialgleichungen (vergl. Artikel 4, β))

$$p(x^2-y^2)+(p^2-1)xy-c^2p = 0 \tag{1}$$

$$y-b = P(x-a) \tag{2}$$

der beiden Liniensysteme erhält man als Gleichung des verlangten Durchschnittes

$$\begin{aligned}k(x^2+y^2)^2-\{[2ak-b(1-k^2)]x+[2bk+a(1-k^2)]y\}(x^2+y^2)-\\ -\{(b^2+c^2-a^2)k+ab(1-k^2)\}(x^2-y^2)+\\ +\{4abk+(a^2+c^2-b^2)(1-k^2)\}xy+\\ +c^2\{[2ak-b(1-k^2)]x-[2bk+a(1-k^2)]y\}-\\ -\{(a^2-b^2)k-ab(1-k^2)\}c^2 = 0.\end{aligned} \tag{B}$$

Der isogonale Durchschnitt eines Systems confocaler Centralkegelschnitte mit einem Strahlenbüschel ist also eine bicirculare Curve vierter Ordnung, welche durch die Brennpunkte F, G des Systems und den Scheitel M des Büschels hindurchgeht; letzterer Punkt ist Doppelpunkt mit zu einander rechtwinkligen Tangenten. Die Gleichung (B) ändert sich nicht, wenn man k ersetzt durch $-\frac{1}{k}$; von den acht Punkten, in welchen die Curve (B) einen Kegelschnitt des Systems (A) schneidet, entsprechen also vier dem Schnitt unter dem Winkel arctg k, die vier andern dem Schnitt unter dem Winkel arctg $\left(-\frac{1}{k}\right)$.[1]

---

[1] Die Aufgabe: aus dem Punkte $M(a, b)$ nach dem Kegelschnitt

$$Bx^2+Ay^2 = AB \tag{α}$$

Strahlen zu ziehen, welche mit letzterem einen gegebenen Winkel arctg k bilden, findet ihre Lösung in der Hyperbel

$$(A-B)kxy+B(a+bk)x+A(b-ak)y = AB; \tag{β}$$

die vier Schnittpunkte beider Linien sind die Fusspunkte der gesuchten Strahlen. Die dem Winkel arctg $\left(-\frac{1}{k}\right)$ entsprechende Hyperbel

$$(A-B)xy-B(ak-b)x-A(bk+a)y = -ABk \tag{γ}$$

Dies hat weiter zur Folge, dass den Werthen $k = 0$ und $k = \infty$ eine und dieselbe Curve, nämlich

$$(x^2+y^2)(bx-ay)-ab(x^2-y^2)+$$
$$+(a^2+c^2-b^2)xy-(bx+ay)c^2+abc^2 = 0 \qquad (C)$$

entspricht; diese circulare Curve dritter Ordnung verbindet also die Berührungspunkte der Tangenten, sowie die Fusspunkte der Normalen, welche aus dem Punkte M an die Kegelschnitte des confocalen Systems zu führen sind; ihre reelle Asymptote ist dem durch M laufenden Durchmesser parallel und hat die Gleichung

$$y = \frac{b}{a}x + \frac{bc^2}{a^2+b^2}.$$

Kommt M in eine der Axen zu liegen, so zerfällt die Curve in die betreffende Axe und einen Kreis, der diese rechtwinklig schneidet und die in ihr gelegenen (reellen oder imaginären) Brennpunkte der Kegelschnitte harmonisch von einander trennt.

Fällt der Punkt M mit dem Centrum des Kegelschnittsystems zusammen, ist also $a = 0 = b$, so vereinfacht sich die Gleichung (B) zu

$$k(x^2+y^2)^2-c^2k(x^2-y^2)+c^2(1-k^2)xy = 0 \qquad (D)$$

und geht für $k^2 = 1$ insbesondere über in

$$(x^2+y^2)^2-c^2(x^2-y^2) = 0, \qquad (E)$$

d. h. die Endpunkte jener Durchmesser eines confocalen Systems von Centralkegelschnitten, welche die Kegelschnitte unter den Winkeln $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{3\pi}{4}$ schneiden, liegen auf einer **Lemniscate**, deren Scheitel die Brennpunkte des Systems sind.

bestimmt vier weitere Punkte auf (α), und jede acht Punkte solcher Art liegen auf ein und derselben Curve vierter Ordnung (B).

Für $k = 0$ geht die Gleichung (β) in

$$Bax+Aby = AB,$$

d. i. in die Gleichung der Polare des Punktes M bezüglich des Kegelschnittes (α) über.

γ) Es sei der isogonale Durchschnitt des Systems confocaler Parabeln

$$y^2 = 2\lambda x + \lambda^2 \tag{A}$$

mit dem Strahlenbüschel aus dem Punkte $M(a, b)$ zu bestimmen.

Die Differentialgleichungen (vergl. Artikel 4, β))

$$(1-p^2)y^2 - 2pxy = 0 \tag{1}$$

$$y - b = P(x-a) \tag{2}$$

ergeben, wenn man sie in der oben angegebenen Weise miteinander combinirt, als Durchschnitt eine circulare Curve vierter Ordnung, von welcher sich jedoch die Axe

$$y = 0$$

als uneigentlicher Ort ablöst; der eigentliche Durchschnitt ist eine circulare Curve dritter Ordnung, deren Gleichung lautet:

$$\begin{aligned}(x^2+y^2)[2kx-(1-k^2)y] - 2[2ak-b(1-k^2)](x^2+y^2) + \\ +2[(a^2-b^2)k-ab(1-k^2)]x+[(a^2-b^2)(1-k^2)+4abk]y = 0.\end{aligned} \tag{B}$$

Die Curve geht durch den Brennpunkt der Parabeln und hat den Punkt M zum Knotenpunkt mit zu einander rechtwinkligen Tangenten. Die reelle Asymptote

$$y = \frac{2k}{1-k^2}x - \frac{4ak-2b(1-k^2)}{1-k^2}$$

hat eine von der Lage des Punktes M unabhängige Richtung, die imaginären Asymptoten $y = \pm ix$ schneiden sich im Ursprung, also auf der Curve, so dass für diese die imaginären Kreispunkte conjugirte Punkte sind. Ersetzt man in (B) k durch $-\frac{1}{k}$, so erleidet die Gleichung dadurch keine Änderung; von den sechs Punkten, welche die Curve mit einer Parabel des Systems bestimmt, entsprechen drei dem Schnittwinkel arctg k, die andern drei dem Schnittwinkel arctg$\left(-\frac{1}{k}\right)$.[1] Dieses Verhalten

[1] Die Fusspunkte der Strahlen, welche aus dem Punkte $M(a, b)$ nach der Parabel

$$y^2 = 2\varrho x + \varrho^2 \tag{\alpha}$$

der Gleichung hat auch zur Folge, dass die den Werthen 0 und ∞ von k entsprechenden Curven in eine zusammenfallen, welche analytisch charakterisirt ist durch die Gleichung

$$(x^2+y^2)y-2b(x^2+y^2)+2abx-(a^2-b^2)y = 0; \qquad (C)$$

dieselbe geht durch die Berührungspunkte der Tangenten und durch die Fusspunkte der Normalen aus M an die Parabeln (A); die reelle Asymptote dieser Curve ist $y = 2b$.

Fällt der Punkt M in die Axe des Parabelsystems $(b = 0)$, so zerfällt (C) in die Axe $y = 0$ und den Kreis $x^2+y^2 = a^2$; kommt M auf den Brennpunkt des Parabelsystems zu liegen $(a = 0 = b)$, so zerfällt (C) wie auch (B) in drei durch ihn gehende Geraden, wovon zwei die absoluten Richtungen anzeigen.

II.

12. Ein System von ∞^2 Curven ist dargestellt durch eine Gleichung zwischen den Coordinaten x, y und zwei veränderlichen Parametern λ, μ, also durch eine Gleichung von der Form

$$f(x, y, \lambda, \mu) = 0. \qquad (1)$$

Für stehende Werthe von x, y gibt diese die Beziehung an, welche zwischen den Parameterwerthen aller durch den Punkt (x, y) laufenden Curven stattfindet.

---

so gezogen werden, dass sie mit ihr den gegebenen Winkel $\operatorname{arctg} k$ bilden, ergeben sich als Schnittpunkte von (α) mit der gleichseitigen Hyperbel

$$kxy - \varrho x+[b-(a-\varrho)k]y - \varrho(a+\varrho+bk) = 0; \qquad (\beta)$$

da eine der Asymptoten dieser Hyperbel der Parabelaxe parallel ist, so fällt einer der vier Schnittpunkte mit dem unendlich fernen Parabelpunkt zusammen und ist als Lösung nur insofern anzusehen, als der unendlich fernen Parabeltangente jede beliebige Richtung zugeschrieben werden kann. Die dem Schnittwinkel $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{k}\right)$ entsprechende Hyperbel

$$xy+\varrho kx-(bk+a-\varrho)y+\varrho[k(a+\varrho)-b] = 0 \qquad (\gamma)$$

liefert ausser dem unendlich fernen drei weitere Punkte auf (α), und die sechs Punkte liegen auf ein und derselben Curve dritter Ordnung (B). Für $k = 0$ verwandelt sich, wie es sein muss, (β) in die Gleichung der Polare des Punktes M in Bezug auf (α), nämlich

$$by = \varrho(a+x)+\varrho^2.$$

Fügt man zu der Gleichung (1) die beiden neuen

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} p = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} p + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} p^2 + \frac{\partial f}{\partial y} q = 0 \tag{3}$$

hinzu, in welchen $p = \frac{dy}{dx}$ und $q = \frac{d^2 y}{dx^2}$ ist, und eliminirt zwischen allen drei Gleichungen λ und μ, so kommt eine Gleichung von der Form

$$\varphi(x, y, p, q) = 0 \tag{4}$$

zu Stande, welche bei festen Werthen von x, y die Beziehung ausdrückt, welche für alle durch den Punkt (x, y) laufenden Curven zwischen dem ersten und zweiten Differentialquotienten der Ordinate nach der Abscisse in jenem Punkte besteht. Einen andern, anschaulicheren Ausdruck erhält man hiefür, wenn man mit Hilfe der Beziehung

$$\rho = \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$$

q aus (4) entfernt; die neue Gleichung

$$\Phi(x, y, p, \rho) = 0 \tag{5}$$

bedeutet die Relation zwischen Tangentenrichtung und Krümmungsradius aller Curven durch den Punkt (x, y).

Man kann nun in (5) p, ρ als veränderliche Parameter ansehen; dann stellt diese Gleichung wieder ein System von ∞^2 Curven dar, welches zu dem ursprünglichen (1) in solcher Beziehung steht, dass jede Curve des Systems (5) Punkte gleicher Tangentenrichtung und gleicher (und gleichartiger) Krümmung auf Curven des Systems (1) verbindet. Beispielsweise wird $\Phi(x, y, p = 0, \rho) = 0$ ein System von ∞^1 Curven repräsentiren, welche durch extreme Punkte gleicher Krümmung $\frac{1}{\rho}$ bezüglich der x-Axe gehen; $\Phi(x, y, p, \rho = \infty) = 0$ ein System von ∞^1 Curven, dessen Individuen durch Wende- (oder Undulations-) Punkte gleicher Tangentenrichtung p laufen.

Früher eingeführten Benennungen entsprechend soll das System (4) oder das äquivalente (5) als **abgeleitetes** in Bezug auf (1), dieses hinwiederum als **Integralsystem** in Bezug auf (4) oder (5) bezeichnet werden.

13. Zur Erläuterung mögen die folgenden Beispiele dienen.

α) Ein Kreisnetz mit dem Radicalcentrum $C(a, b)$ und der Potenz π ist dargestellt durch die Gleichung

$$x^2+y^2-2\alpha(x-a)-2\beta(y-b)-a^2-b^2+\pi=0, \qquad (1)$$

in welcher α, β unabhängig veränderlich sind. Durch ihre Elimination ergibt sich die Gleichung

$$[(x-a)^2+(y-b)^2-\pi]q-2p(1+p^2)(x-a)+ \\ +2(1+p^2)(y-b)=0 \qquad (2)$$

des abgeleiteten Systems. Dieses ist wieder ein System von ∞^2 Kreisen, und zwar wieder ein Kreisnetz mit dem Radicalcentrum C; setzt man nämlich in dem Polynom der linken Seite von (2) a, b an die Stelle von x, y, so reducirt es sich auf $-\pi q$, und da q der Coëfficient von x^2+y^2 ist, so kommt dem Punkte C in Bezug auf alle Kreise des Systems (2) die Potenz $-\pi$ zu. Hiernach ist das abgeleitete System eines Kreisnetzes wieder ein Kreisnetz mit demselben Radicalcentrum; im übrigen sind beide Netze so geartet, dass der Orthogonalkreis des einen Diametralkreis des andern ist.

Mit $q=0$ reducirt sich die Gleichung (2) auf die Gleichung des Strahlenbüschels

$$y-b=p(x-a)$$

aus C als Ort der Punkte in (1), welchen ein unendlicher Krümmungsradius zukommt; es sind die zu Geraden degenerirten Kreise von (1).

Mit $p=0$ geht Gleichung (2) über in

$$[(x-a)^2+(y-b)^2-\pi]q+2(y-b)=0$$

und stellt, wie man leicht erkennt, ein Kreisbüschel mit der Potenzaxe $y=b$ und der Centrale $x=a$ dar als Ort der extremen Punkte in (1) bezüglich der x-Axe. Man überzeugt sich leicht, dass die extremen Punkte in Bezug auf die y-Axe

auf einem Kreisbüschel mit der Potenzaxe $x = a$ und der Centrale $y = b$ liegen, indem man (2) durch $(1+p^2)^{\frac{3}{2}}$ dividirt und hierauf lim $p = \infty$ setzt, beachtend, dass $\frac{q}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$ dabei einer endlichen Grenze sich nähert.

Als Ort der Punkte im System (1), für welche der Krümmungsradius Null ist, ergibt sich aus (2) mit $q = \infty$

$$(x^2-a)^2+(y-b)^2 = \pi,$$

d. i. der Hauptkreis des Netzes als Ort seiner Nullkreise.

β) Die Gleichung

$$Ax^2+By^2 = 1 \tag{1}$$

stellt bei veränderlichen A und B ein System coaxialer Centralkegelschnitte dar; durch Elimination der Parameter ergibt sich

$$qxy+p^2x-py = 0 \tag{2}$$

oder in anderer Form

$$(1+p^2)^{\frac{3}{2}}xy+p^2\rho x-p\rho y = 0 \tag{3}$$

als Gleichung des abgeleiteten Systems. Hiernach hat das System coaxialer Centralkegelschnitte zum abgeleiteten ein System von ∞^2 gleichseitigen Hyperbeln, welche durch das gemeinsame Centrum der Kegelschnitte gehen und deren gemeinsame Axen zu Asymptotenrichtungen haben.

Die Mittelpunktscoordinaten der Hyperbel (3) ergeben sich aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}(1+p^2)^{\frac{3}{2}}y+p^2\rho &= 0,\\ (1+p^2)^{\frac{3}{2}}x-p\rho &= 0;\end{aligned} \tag{4}$$

eliminirt man zwischen diesen einmal ρ, das anderemal p, so kommen die Gleichungen zu Stande:

$$y+px = 0, \tag{5}$$

$$(x^2+y^2)^3-\rho^2x^2y^2 = 0. \tag{6}$$

Ihr Inhalt ist folgender: Die Mittelpunkte aller Hyperbeln, welche Punkte gleicher Tangentenrichtung p in (1) verbinden,

liegen auf einem Strahl von der Gleichung (5); die Mittelpunkte aller Hyperbeln, welche durch Punkte gleicher Krümmung $\frac{1}{\rho}$ gehen, auf einer tricircularen Curve sechster Ordnung von der Gleichung (6), die im Centrum der Kegelschnitte einen vierfachen Punkt besitzt und aus vier gleichen die Axen berührenden Blättern besteht. Die beiden Liniensysteme (5) und (6) bedecken die Ebene derart, dass durch jeden Punkt je eine dieser Linien geht, und es ist der Schnittpunkt der Linien p, ρ Mittelpunkt jener Hyperbel (3), welche in dem System (1) Punkte der Tangentenrichtung p und der Krümmung $\frac{1}{\rho}$ vereinigt.

Den Werthen 0 und ∞ von p entsprechen die Örter

$$x = 0, \; y = 0; \text{ respective } x = 0;$$

den Werthen 0 und ∞ von ρ die Örter

$$x = 0, \; y = 0; \text{ respective } y = px;$$

die Deutung dieser Resultate bereitet keine Schwierigkeit.

14. Zwei Systeme von je ∞^2 Curven

$$f_1(x, y, \lambda_1, \mu_1) = 0 \tag{1}$$

$$f_2(x, y, \lambda_2, \mu_2) = 0 \tag{2}$$

können zu einander in Beziehung gesetzt werden dadurch, dass man die veränderlichen Parameter $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ einer Bedingung unterwirft

$$g_1(\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2) = 0; \tag{3}$$

vermöge einer solchen sind einem Individum des einen Systems ∞^1 Curven aus dem andern in bestimmter Weise zugeordnet. Der Ort der Schnittpunkte einander entsprechender Curven ist wieder ein System von ∞^2 Curven, analytisch dargestellt durch das Resultat der Elimination zweier von den vier Parametern zwischen den Gleichungen (1) bis (3). Da aber diese Elimination im Allgemeinen auf vier verschiedene Parameterpaare sich beziehen kann — von den Combinationen $\lambda_1, \mu_1; \lambda_2, \mu_2$ ist abzusehen — so gibt es auch vier verschiedene Erzeugnisse.

Sind die Parameter noch an eine zweite Bedingung

$$g_2(\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2) = 0 \tag{4}$$

gebunden, so ist die Beziehung beider Systeme zu einander derart geregelt, dass jedem Individuum des einen ein oder mehrere Individuen des andern zugeordnet sind, und weil nun drei der Parameter, und zwar im Allgemeinen in vier verschiedenen Combinationen eliminirt werden können, so entspringen hieraus vier verschiedene Erzeugnisse, jedes ein System von ∞^1 Curven darstellend.

Kommt endlich noch eine dritte Bedingung

$$g_3(\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2) = 0 \tag{5}$$

hinzu, so ist unter den einander zugeordneten Individuen beider Systeme eine Auswahl getroffen, und das Erzeugniss ist eine Einzelcurve, deren Gleichung sich durch Elimination aller vier Parameter aus den Gleichungen (1) bis (5) ergibt.

Ein einfaches Beispiel wird dies erläutern.

α) Die beiden Systeme von je ∞^2 Geraden

$$y = \lambda_1 x + \mu_1 \tag{1*}$$
$$y = \lambda_2 x + \mu_2 \tag{2*}$$

seien zunächst nur an die eine Bedingung

$$a\lambda_1 + b\lambda_2 + c\mu_1 + d\mu_2 = g \tag{3*}$$

geknüpft. Eliminirt man λ_1, λ_2, so entsteht, nach Ablösung von $x = 0$, die Gleichung

$$y = \frac{g - c\mu_1 - d\mu_2}{a+b} x + \frac{a\mu_1 + b\mu_2}{a+b}, \tag{A}$$

welche ∞^2 Gerade vorstellt; die zu einem festen μ_1 gehörigen ordnen sich zu Strahlenbüscheln mit Trägern auf der Geraden $x = \frac{b}{d}$, die einem stehenden μ_2 entsprechenden zu Strahlenbüscheln mit Trägern auf $x = \frac{a}{c}$. Das Ergebniss ist synthetisch leicht einzusehen. Bei stehenden μ_1, μ_2 stellen (1*), (2*) zwei Strahlenbüschel dar, deren Träger auf der y-Axe liegen und

die vermöge (3*) projectivisch auf einander bezogen sind; da ferner vermöge (3*) λ_1, λ_2 gleichzeitig unendlich werden, so fallen zwei homologe Strahlen mit der y-Axe zusammen und das übrige Erzeugniss ist die Gerade (A).

Die Elimination von μ_1, μ_2 führt auf

$$y = \frac{c\lambda_1 + d\lambda_2}{c+d} x + \frac{g - a\lambda_1 - b\lambda_2}{c+d}, \tag{B}$$

das entsprechende Erzeugniss ist wieder ein System von ∞^2 Geraden, die sich in Strahlenbüschel mit Trägern auf den Geraden $x = -\frac{b}{d}$ und $x = \frac{a}{c}$ ordnen, je nachdem man λ_1 oder λ_2 als fest betrachtet. Geometrisch geht dies aus der Wahrnehmung hervor, dass (1*) und (2*) bei festen λ_1 und λ_2 zwei Parallelstrahlenbüschel repräsentiren, die vermöge (3*) perspectivisch auf einander bezogen sind derart, dass das selbstentsprechende Element die unendlich ferne Gerade der Ebene ist; das übrige Erzeugniss ist die Gerade (B).

Aus der Elimination von λ_1, μ_2 entspringt die Gleichung

$$d\lambda_2 x^2 - dxy + (g - b\lambda_2 - c\mu_1)x - ay + a\mu_1 = 0, \tag{C}$$

welche ∞^2 Hyperbeln darstellt; ihre Mittelpunkte liegen auf der festen Geraden $x = -\frac{a}{d}$, eine ihrer Asymptoten ist der y-Axe parallel. Synthetisch wird dies sofort klar, wenn man beachtet, dass (1*) bei stehendem λ_1 ein Parallelstrahlenbüschel, (2*) bei festem μ_2 ein Centralstrahlenbüschel darstellt, welche vermöge (3) projectivisch auf einander bezogen sind derart, dass dem unendlich fernen Strahl im ersten die y-Axe im zweiten zugeordnet ist.

Eliminirt man schliesslich λ_2, μ_1, so kommt die Gleichung

$$c\lambda_1 x^2 - cxy + (g - a\lambda_1 - d\mu_2)x - by + b\mu_2 = 0 \tag{D}$$

zu Stande; ihr geometrisches Äquivalent ist wieder ein System von ∞^2 Hyperbeln, deren Centra auf der Geraden $x = -\frac{b}{c}$ liegen, während eine ihrer Asymptoten der y-Axe parallel ist. Die synthetischen Gründe hiefür sind den vorigen analog.

β) Dieselben Geradensysteme

$$y = \lambda_1 x + \mu_1 \qquad (1^*)$$

$$y = \lambda_2 x + \mu_2 \qquad (2^*)$$

sind durch die Relationen

$$a\lambda_1 + b\lambda_2 = c \qquad (3^{**})$$

$$d\mu_1 + f\mu_2 = g \qquad (4^{**})$$

zwischen ihren Parametern derart eindeutig auf einander bezogen, dass parallelen Geraden des einen auch parallele Gerade des andern Systems entsprechen und dass einem Strahlenbüschel aus einem Punkte der y-Axe im ersten System ein ebensolches Strahlenbüschel im zweiten System zugeordnet ist.

Die Elimination von μ_1, λ_2, μ_2 ergibt

$$y = \frac{cf - \lambda_1(af - bd)}{b(d+f)}\, x + \frac{g}{d+f}, \qquad (E)$$

d. i. ein Strahlenbüschel aus dem Punkte $\left(0, \frac{g}{d+f}\right)$. Es handelt sich bei stehendem λ_1 um das Erzeugniss zweier projectivischen Parallelstrahlenbüschel, welche die unendlich ferne Gerade ihrer Ebene als selbstentsprechendes Element gemein haben. Aus dieser Bemerkung folgt zugleich, dass die Elimination von λ_1, μ_1, μ_2 zu demselben Erzeugniss führen müsse; sie liefert die Gleichung

$$y = \frac{cd + \lambda_2(af - bd)}{a(d+f)}\, x + \frac{g}{d+f}, \qquad (E^*)$$

welche in der That vermöge (3^{**}) mit (E) zusammenfällt.

Aus der Elimination von $\lambda_1, \lambda_2, \mu_2$ geht, nach Ablösung von $x = 0$, die Gleichung

$$y = \frac{c}{a+b}\, x + \frac{bg + \mu_1(af - bd)}{f(a+b)} \qquad (F)$$

hervor, welcher ein Parallelstrahlenbüschel entspricht. Bei festem μ_1 hat man es mit zwei Strahlenbüscheln zu thun, welche die y-Axe als selbstentsprechendes Element gemein haben. Zu

demselben Resultate führt nothwendig die Elimination von $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2$; sie gibt, wieder nach Ablösung von $x=0$, die Gleichung

$$y = \frac{c}{a+b}x + \frac{ag-\mu_2(af-bd)}{d(a+b)}, \qquad (F^*)$$

welche vermöge (4**) mit (F) übereinstimmt.

In dem vorliegenden besonderen Falle liefern also die beiden Systeme (1*) und (2*) nur zwei von einander verschiedene Erzeugnisse.

γ) Die Parameter der beiden Geradensysteme

$$y = \lambda_1 x + \mu_1 \qquad (1^*)$$
$$y = \lambda_2 x + \mu_2 \qquad (2^*)$$

seien endlich an die drei Bedingungen

$$a\lambda_1 + b\lambda_2 = c \qquad (3^{**})$$
$$d\mu_1 + f\mu_2 = g \qquad (4^{**})$$
$$h\lambda_1 + k\mu_2 = l \qquad (5^{**})$$

gebunden; durch Elimination erhält man die Gleichung

$$cdkx^2-(a+b)dkxy+ \\ +(bdl-afl+agk+cfh)x-(d+f)bhy+bgh = 0, \qquad (G)$$

welche eine Hyperbel mit den Asymptotenrichtungen $x=0$ und $\frac{y}{x} = \frac{c}{a+b}$ darstellt. Greift man auf β) zurück, so kommt diese Hyperbel als Erzeugniss der beiden Strahlenbüschel (E) und (F^*) zu Stande, welche durch die neu hinzugetretene Bedingung (5**) in perspectivische Verwandtschaft gesetzt sind; dem unendlich fernen Element von (F^*) entspricht in (E) die y-Axe und ein Element von (E) ist den Strahlen von (F^*) parallel, wodurch die gefundenen Asymptotenrichtungen synthetisch begründet sind.

15. Man kann die beiden Curvensysteme

$$f_1(x, y, \lambda_1, \mu_1) = 0 \qquad (1)$$
$$f_2(x, y, \lambda_2, \mu_2) = 0 \qquad (2)$$

auch in anderer Weise, nämlich durch Vermittlung ihrer Differentialgleichungen oder der abgeleiteten Systeme

$$\varphi_1(x, y, p_1, \rho_1) = 0 \qquad (3)$$

$$\varphi_2(x, y, p_2, \rho_2) = 0 \qquad (4)$$

zu einander in Beziehung bringen; in diesen letzteren Gleichungen haben p_1, p_2 einer- und ρ_1, ρ_2 anderseits dieselbe geometrische Bedeutung.

Tritt zu den Gleichungen (3) und (4) eine weitere Gleichung von der Form

$$\psi_1(x, y, p_1, p_2, \rho_1, \rho_2) = 0, \qquad (5)$$

so können zwischen den drei Gleichungen (3), (4) und (5) zwei von den vier neuen Parametern p_1, p_2, ρ_1, ρ_2 eliminirt werden, und nachdem sich diese Elimination — von p_1, ρ_1 und p_2, ρ_2 abgesehen — auf vier verschiedene Combinationen beziehen kann, so erhält man auf solche Weise im Allgemeinen vier verschiedene Erzeugnisse, jedes derselben ein System von ∞^2 Curven darstellend. Die Bedeutung dieser Systeme ist eine verschiedene, je nach den eliminirten Grössen; hat man beispielsweise p_1, p_2 ausgeschieden, so ist das Erzeugniss ein System $F(x, y, \rho_1, \rho_2) = 0$, dessen Individuen solche Punkte der Ebene vereinigen, in welchen eine Curve des Systems (1) von der Krümmung $\frac{1}{\rho_1}$ einer Curve des Systems (2) von der Krümmung $\frac{1}{\rho_2}$ begegnet, jedoch so, dass zwischen den Coordinaten dieses Punktes, den Tangentenrichtungen und den genannten Krümmungen die Relation (5) platzgreift.

Wird neben (5) noch eine weitere Bedingung derselben Form

$$\psi_2(x, y, p_1, p_2, \rho_1, \rho_2) = 0 \qquad (6)$$

aufgestellt, so lassen sich drei Parameter, und zwar in vier verschiedenen Combinationen eliminiren; dementsprechend ergeben sich im Allgemeinen vier verschiedene Erzeugnisse, jedes aus ∞^1 Curven zusammengesetzt. Hat man beispielsweise p_1, p_2, ρ_2 eliminirt, so wird das Ergebniss ein System $F(x, y, \rho_1) = 0$ sein, dessen Individuen Punkte der Ebene ver-

binden, in welchen eine Curve des Systems (1) von bestimmter Krümmung $\frac{1}{\rho_1}$ einer Curve des Systems (2) begegnet derart, dass die Coordinaten dieses Punktes, die Tangentenrichtungen und die Krümmungen beider Curven die Bedingungen (5) und (6) erfüllen.

Kommt zu (5) und (6) noch eine dritte gleichartige Bedingung

$$\psi_3(x, y, p_1, p_2, \rho_1, \rho_2) = 0, \tag{7}$$

dann können zwischen den fünf Gleichungen (3) bis (7) alle vier Parameter und nur auf eine Art eliminirt werden; das Resultat ist eine einzelne Curve $F(x, y) = 0$, welche Punkte der Ebene verbindet, in denen sich Curven beider Systeme den durch (5), (6) und (7) vorgezeichneten Bedingungen gemäss begegnen.

16. Als Beispiel mögen verschiedene Erzeugnisse zweier Kreisnetze in Betracht gezogen werden. Zur Vereinfachung der Rechnungen und Resultate beschränken wir uns auf zwei Netze mit der Potenz Null und den Radicalcentren $(\pm a, 0)$.

Ihre Gleichungen lauten

$$x^2+y^2-2\lambda_1(x-a)-2\mu_1 y-a^2 = 0 \tag{1}$$
$$x^2+y^2-2\lambda_2(x+a)-2\mu_2 y-a^2 = 0 \tag{2}$$

und die Gleichungen der abgeleiteten Systeme

$$[(x-a)^2+y^2]\sqrt{1+p_1^2}-2p_1\rho_1(x-a)+2\rho_1 y = 0 \tag{3}$$
$$[(x+a)^2+y^2]\sqrt{1+p_2^2}-2p_2\rho_2(x+a)+2\rho_2 y = 0. \tag{4}$$

α) Zuvörderst handle es sich um die Schnittpunkte gleich grosser (und gleichartig gekrümmter) Kreise beider Netze. Die entsprechende Bedingung lautet

$$\rho_1 = \rho_2 (= \rho); \tag{5}$$

führt man sie in (3) und (4) ein, so ist zwischen beiden Gleichungen nur die Elimination von ρ möglich und ihr Resultat ist

$$(x^2+y^2)(Ax-By)-aC(x^2-y^2)+2aDxy-a^2(Ax+By)+ \\ +a^3C = 0, \tag{8}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt worden ist:

$$p_2\sqrt{1+p_1^2}-p_1\sqrt{1+p_2^2}=A$$
$$\sqrt{1+p_1^2}-\sqrt{1+p_2^2}=B$$
$$p_2\sqrt{1+p_1^2}+p_1\sqrt{1+p_2^2}=C$$
$$\sqrt{1+p_1^2}+\sqrt{1+p_2^2}=D.$$

Die Punkte, in welchen sich gleich grosse und gleichartig gekrümmte Kreise beider Netze begegnen, derart, dass sie dort bestimmte Tangentenrichtungen p_1, p_2 aufweisen, liegen demnach auf einer circularen Curve dritter Ordnung, welche durch die Radicalcentra der beiden Netze geht.

β) An zweiter Stelle sollen die Punkte gegenseitiger Berührung der Kreise beider Netze in Betracht gezogen werden. Die hiefür massgebende Bedingung

$$p_1 = p_2 (= p) \tag{6}$$

in die Gleichungen (3) und (4) eingeführt gestattet die Elimination von p allein, deren Resultat lautet:

$$K(x^2+y^2)^3+2aLx(x^2+y^2)^2+a^2M(x^2+y^2)^2-4a^2Kx^2(x^2+y^2)-$$
$$-4a^3Lx(x^2-y^2)+a^4N(x^2+y^2)-4a^4Px^2-16a^2Qy^2+$$
$$+2a^5Lx+a^6P=0, \quad (\mathfrak{B})$$

wobei abkürzungsweise gesetzt ist:

$$(\rho_1-\rho_2)^2=K$$
$$\rho_1^2-\rho_2^2=L$$
$$3\rho_1^2-2\rho_1\rho_2+3\rho_2^2=M$$
$$3\rho_1^2+2\rho_1\rho_2+3\rho_2^2=N$$
$$(\rho_1+\rho_2)^2=P$$
$$\rho_1^2\rho_2^2=Q.$$

Die Punkte also, in welchen sich Kreise des ersten Netzes von der Krümmung $\frac{1}{\rho_1}$ mit Kreisen des zweiten Netzes von der Krümmung $\frac{1}{\rho_2}$ berühren, liegen auf einer tricircularen Curve

sechster Ordnung, welche durch die Radicalcentra der beiden Netze hindurchgeht.

γ) An dritter Stelle handle es sich um Punkte, in welchen sich Kreise aus beiden Netzen von gleicher (und gleichartiger) Krümmung berühren. Die entsprechenden Bedingungen

$$\begin{aligned} p_1 &= p_2 (= p) \\ \rho_1 &= \rho_2 (= \rho) \end{aligned} \tag{7}$$

in die Gleichungen (3) und (4) eingeführt gestatten die Elimination von p oder ρ. Scheidet man p aus, so kommt die Gleichung

$$x^2 + (y \mp \sqrt{\rho^2 - a^2})^2 = \rho^2 \tag{$\mathfrak{C}$}$$

zu Stande; dieselbe stellt ein Kreisbüschel, und zwar das den beiden Netzen gemeinsame Büschel dar. In der That fasst jeder Kreis dieses Büschels und nur dieser Punkte der Ebene zusammen, durch welche Kreise gleicher Krümmung und gleicher Tangentenrichtung aus beiden Netzen laufen.

Eliminirt man hingegen ρ, so ergibt sich als Resultat

$$p(y^2 - x^2) + 2xy + pa^2 = 0, \tag{$\mathfrak{D}$}$$

d. i. ein System gleichseitiger Hyperbeln durch die Punkte $(\pm a, 0)$ mit dem Centrum $(0, 0)$; nach Artikel 4, γ) ist dies das abgeleitete System des Kreisbüschels ($\mathfrak{C}$). Thatsächlich sind die Punkte, in welchen Kreise gleicher Krümmung bei bestimmter Tangentenrichtung p einander berühren, identisch mit den Punkten der Tangentenrichtung p in dem System ($\mathfrak{C}$).

Man hätte die Resultate ($\mathfrak{C}$) und ($\mathfrak{D}$) selbstverständlich auch aus jenen ($\mathfrak{B}$) und ($\mathfrak{A}$) ableiten können, wenn man dort $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, hier $p_1 = p_2 = p$ gesetzt hätte.

δ) Es sei endlich der Ort solcher Punkte der Ebene zu untersuchen, in welchen sich Kreise der Netze (1) und (2) von entgegengesetzt gleicher Krümmung (also gleiche Kreise äusserlich) berühren. Wenn man die hiefür geltenden Bedingungen

$$\begin{aligned} p_1 &= p_2 (= p) \\ \rho_1 &= -\rho_2 (= \rho) \end{aligned} \tag{8}$$

in (3) und (4) einträgt, so gelangt man zu dem Gleichungspaar

$$[(x-a)^2+y^2]\sqrt{1+p^2}-2p\rho(x-a)+2\rho y=0 \qquad (3^*)$$
$$[(x+a)^2+y^2]\sqrt{1+p^2}+2p\rho(x+a)-2\rho y=0, \qquad (4^*)$$

aus welchem einmal p, ein zweitesmal ρ eliminirt werden kann.

Durch Elimination von p ergibt sich die Gleichung

$$(x^2+y^2)^3-2a^2(x^4-y^4)+a^4(x^2+y^2)-4a^2\rho^2y^2=0; \qquad (\mathfrak{C})$$

man hätte sie auch aus ($\mathfrak{B}$) durch die Substitution $\rho_1=-\rho_2=\rho$ ableiten können. Wenn also aus den beiden Netzen (1) und (2) solche Paare von Kreisen des Halbmessers ρ ausgewählt werden, welche in äusserer Berührung stehen, so ist der Ort der Berührungspunkte eine tricirculare Curve sechster Ordnung und ($\mathfrak{C}$) seine Gleichung. Wegen ihrer leichten Construction und ihrer charakteristischen Formen soll diese Curve als Beispiel der genannten Curvengattung etwas näher erörtert werden.

Behufs Construction beschreibe man aus den Radicalcentren A, A' (wobei $AA'=2a$) der Netze Kreise K, K' mit dem Halbmesser ρ und trage eine Strecke von der Länge 2ρ so ein, dass der eine Endpunkt P auf K, der andere P' auf K' liegt. Der Mittelpunkt M von PP' ist ein Punkt der Curve; denn die aus P und P' mit dem Radius ρ beschriebenen Kreise k und k' gehen durch A und A' beziehungsweise und berühren einander in M von aussen (Fig. 5).

Die Curve, welche symmetrisch ist in Bezug auf die Coordinatenaxen, hat die Punkte A, A' und den Mittelpunkt O von AA' zu Doppelpunkten. Zur Bestimmung ihrer Tangenten in O führt die Gleichung

$$a^2(x^2+y^2)-4\rho^2y^2=0,$$

aus welcher zu entnehmen ist, dass jene Tangenten reell und verschieden, reell und vereinigt oder imaginär sind, je nachdem ρ grösser, gleich oder kleiner ist als $\frac{a}{2}$ — im mittleren dieser drei Fälle reducirt sich der reelle Theil der Curve auf die drei Doppelpunkte. Die Tangenten in A, A' $(\pm a, 0)$ sind der Richtung nach bestimmt durch die Gleichung

$$a^2x^2+(a^2-\rho^2)y^2=0$$

und daher reell und getrennt, reell und vereinigt oder imaginär, je nachdem ρ grösser, gleich oder kleiner ist als a. In dem mittleren dieser drei Fälle zerfällt die Curve in einen Kreis und eine bicirculare Curve vierter Ordnung; für $\rho = a$ lässt sich nämlich die Gleichung ($\mathfrak{E}$) unter Zuhilfenahme der Identität

$$(x^2+y^2-a^2)^3 = (x^2+y^2)^3-3a^2(x^2+y^2)^2+3a^4(x^2+y^2)-a^6$$

umformen in

$$(x^2+y^2-a^2)[(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-3y^2)] = 0.$$

Die sechs Tangenten in den imaginären Kreispunkten ordnen sich zu den drei Paaren conjugirter imaginärer Geraden

$$y = \pm ix, \qquad y = \pm i(x-a), \quad y = \pm i(x+a),$$

deren Schnittpunkte (0, 0), (a, 0) und ($-a$, 0) sind; die drei Doppelpunkte der Curve spielen also auch die Rolle ihrer Doppelbrennpunkte. In die eben genannten drei Paare imaginärer Geraden zerfällt die ganze Curve ($\mathfrak{E}$) für $\rho = 0$; denn es ist

$$(x^2+y^2)^3-2a^2(x^4-y^4)+a^4(x^2+y^2) =$$
$$= (x^2+y^2)[(x-a)^2+y^2][(x+a)^2+y^2].$$

In dem Falle $\rho < a$, wo die Punkte A, A' conjugirte Punkte der Curve sind, gehen an sie aus dem Mittelpunkte O zwei reelle Doppeltangenten; die Gleichungen derselben ergeben sich, wenn man ($\mathfrak{E}$) in Polarcoordinaten r, ω umsetzt, in eben diesen Coordinaten als

$$\omega = \pm \operatorname{arc} \cos \frac{\rho}{a};$$

in diesem Falle besitzt die Curve sechs Wendepunkte, davon zwei im Mittelpunkte O vereinigt, welcher dadurch als Inflexionsknoten charakterisirt ist; in den Fällen $\rho \gtreqless a$ bleiben nur diese zwei Inflexionen reell.

In den Figuren 6 bis 8 sind drei charakteristische Formen der Curve, entsprechend $\rho > a$, $\rho = a$, $\frac{a}{2} < \rho < a$, dargestellt.

Eliminirt man weiter zwischen den Gleichungen (3*) und (4*) den Parameter ρ, so ergibt sich als Resultat

$$(x^2+y^2)(px-y) - a^2(px+y) = 0. \qquad (\mathfrak{F})$$

Wählt man also aus den Netzen (1) und (2) Paare einander berührender gleicher Kreise derart, dass die gemeinsame Tangente eine bestimmte durch p charakterisirte Richtung hat, so liegen die Berührungspunkte auf einer circularen Curve dritter Ordnung, deren Gleichung ($\mathfrak{F}$) ist; sie geht durch die Radicalcentra A, A' der Netze und durch den Mittelpunkt O von AA'. Übrigens ist das Curvensystem ($\mathfrak{F}$) bereits aufgetreten, und zwar als abgeleitetes System zweiter Ordnung bei einem System confocaler Centralkegelschnitte (Artikel 4, β)) und bei einem Kreisbüschel (Artikel 4, γ)).

17. Die Betrachtungen des vorigen Artikels, welche im Wesentlichen darauf hinausgehen, in der Ebene zweier Systeme von je ∞^2 Curven solche Örter aufzusuchen, deren Punkte in Bezug auf Tangentenrichtung und Krümmung der in ihnen zusammentreffenden Curven beider Systeme gewisse Bedingungen erfüllen, können auch auf mehr als zwei Systeme ausgedehnt werden. Statt allgemeiner Erörterungen, die sich den obigen ähnlich gestalten würden, soll ein charakteristisches Beispiel vorgeführt werden.

In der Ebene dreier Kreisnetze einen Ort zu bestimmen, in dessen Punkten Kreise gleicher Krümmung aus allen drei Netzen einander berühren.

Sind (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) die Potenzcentra, π_1, π_2, π_3 die Potenzen der drei Netze, so lauten ihre Gleichungen

$$x^2+y^2-2\lambda_i(x-a_i)-2\mu_i(y-b_i)-a_i^2-b_i^2+\pi_i=0, \quad (i=1,2,3). \qquad (1)$$

Durch Elimination der Parameter λ_i, μ_i folgen daraus die Gleichungen der abgeleiteten Systeme

$$[(x-a_i)^2+(y-b_i)^2-\pi_i]\sqrt{1+p_i^2}-2p_i\rho_i(x-a_i)+ +2\rho_i(y-b_i)=0 \quad (i=1,2,3). \qquad (2)$$

Den Bedingungen des Problems zufolge soll

$$\begin{aligned} p_1 &= p_2 = p_3 (= p) \\ \rho_1 &= \rho_2 = \rho_3 (= \rho) \end{aligned} \qquad (3)$$

sein; führt man dies in die Gleichungen (2) ein und eliminirt hierauf p und ρ, so ergibt sich für den gesuchten Ort die Gleichung

$$\begin{vmatrix} (x-a_1)^2+(y-b_1)^2-\pi_1 & x-a_1 & y-b_1 \\ (x-a_2)^2+(y-b_2)^2-\pi_2 & x-a_2 & y-b_2 \\ (x-a_3)^2+(y-b_3)^2-\pi_3 & x-a_3 & y-b_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = \Delta,$$

$$\begin{vmatrix} a_1^2+b_1^2-\pi_1 & b_1 & 1 \\ a_2^2+b_2^2-\pi_2 & b_2 & 1 \\ a_3^2+b_3^2-\pi_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = 2\alpha, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_1^2+b_1^2-\pi_1 & 1 \\ a_2 & a_2^2+b_2^2-\pi_2 & 1 \\ a_3 & a_3^2+b_3^2-\pi_3 & 1 \end{vmatrix} = 2\beta,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1^2+b_1^2-\pi_1 \\ a_2 & b_2 & a_2^2+b_2^2-\pi_2 \\ a_3 & b_3 & a_3^2+b_3^2-\pi_3 \end{vmatrix} = \Pi,$$

so heisst die Gleichung (4) in entwickelter Form

$$\Delta(x^2+y^2)-2\alpha x-2\beta y-\Pi = 0 \tag{4*}$$

und lässt nun erkennen, dass der gesuchte Ort ein Kreis ist. Werden in dem linksseitigen Polynom in (4*) an Stelle von x, y die Coordinaten a_1, b_1 eingeführt, so nimmt dasselbe, wenn man mit

$$\begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{matrix}$$

das System der Adjuncten der Determinante Δ bezeichnet, den Werth

$$\begin{aligned} \Delta(a_1^2+b_1^2)-(a_1^2+b_1^2-\pi_1)(a_1A_1+b_1B_1+C_1) \\ -(a_2^2+b_2^2-\pi_2)(a_1A_2+b_1B_2+C_2) \\ -(a_3^2+b_3^2-\pi_3)(a_1A_3+b_1B_3+C_3) \\ = \Delta(a_1^2+b_1^2)-\Delta(a_1^2+b_1^2-\pi_1) = \Delta\pi_1 \end{aligned}$$

an; somit ist $\frac{\Delta\pi_1}{\Delta} = \pi_1$ die Potenz des Punktes (a_1, b_1) in Bezug auf den Kreis (4*), dieser Kreis gehört also dem ersten der drei Netze an. In gleicher Weise zeigt sich, dass er auch dem zweiten und dritten angehört. Es ergibt sich also das geometrisch unmittelbar einleuchtende Resultat, dass der gesuchte Ort identisch ist mit dem den drei Netzen gemeinsamen Kreise.

18. Bei einigen besonderen Formen der Gleichung des abgeleiteten Systems ist es leicht, einen Schluss auf die Natur des ursprünglichen Systems zu ziehen; dem entsprechen ebenso viele Fälle, in welchen sich aus dem Bau einer Differentialgleichung zweiter Ordnung die Structur ihres allgemeinen Integrals vorausbestimmen lässt. Die einfachsten Fälle dieser Art sind im Folgenden entwickelt.

α) Enthält die Gleichung des abgeleiteten Systems die Variabeln x, y nicht, so hat sie eine der Formen

$$\varphi(q) = 0, \qquad \varphi(p, q) = 0 \tag{1}$$

oder auch, wenn man an Stelle von q den Krümmungsradius einführt,

$$\Phi(\rho) = 0, \qquad \Phi(p, \rho) = 0. \tag{1*}$$

Jede wie immer in der Ebene verzeichnete Linie kann in diesem Falle als zum abgeleiteten System gehörig angesehen werden, ein abgeleitetes System im eigentlichen Sinne gibt es also nicht; mit andern Worten, durch jeden Punkt der Ebene geht eine Curve des ursprünglichen Systems so, dass sie dort eine bestimmte Richtung und eine bestimmte (durch (1*) vorgezeichnete) Krümmung hat. Daraus folgt, dass das ursprüngliche System aus congruenten Curven ähnlicher Lage besteht, so dass es sich jeder Translation gegenüber invariant verhält; seine Gleichung muss daher die Form haben

$$f(x+\lambda, y+\mu) = 0, \tag{2}$$

wobei λ, μ willkürliche Constanten sind.

Beispielsweise führt die Gleichung $\varphi(q) = 0$ auf ein oder mehrere Systeme congruenter Parabeln von ähnlicher Lage wie

$$y = ax^2 + Cx + C',$$

wenn $2a$ eine Wurzel von $\varphi(q) = 0$ ist; dieses Resultat ab[...] nimmt, wenn man $\frac{C}{2a} = \lambda$, $\frac{C^2}{4a} - C' = \mu$ setzt, die unter ([...] fallende Form

$$y + \mu = a(x+\lambda)^2$$

an. Der Gleichung $\Phi(\rho) = 0$ entsprechen ein oder mehre[...] Systeme gleicher Kreise in der Ebene, je nachdem sie eine od[...] mehrere Wurzeln besitzt; ist a^2 eine derselben, so hat d[...] betreffende Kreissystem die Gleichung $(x+\lambda)^2 + (y+\mu)^2 =$ [...] Die Gleichung $\frac{\sqrt{1+p^2}}{q} - a = 0$ ergibt ein System congruent[...] ähnlich liegender Kettenlinien $y + \mu = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x+\lambda}{a}} + e^{-\frac{x+\lambda}{a}}\right)$.

β) Fehlt in der Gleichung des abgeleiteten Systems [...] Variable y, lautet sie also

$$\varphi(x, q) = 0, \qquad \varphi(x, p, q) = 0$$

oder in der andern Gestalt

$$\Phi(x, \rho) = 0, \qquad \Phi(x, p, \rho) = 0,$$

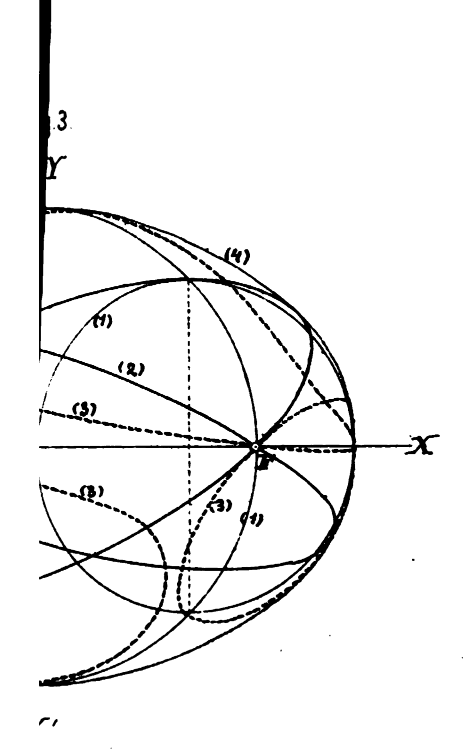
so besteht jenes System entgegen dem allgemeinen Falle [...] aus ∞^1 Linien, und zwar ist es das System der Parallelen [...] y-Axe; da in jedem Punkte einer solchen Parallelen zwisch[...] Tangentenrichtung und Krümmung der durch ihn gehend[...] Curven des ursprünglichen Systems dieselbe durch (1*) a[...] gedrückte Beziehung besteht, so verhält sich dieses Syst[...] einer Translation parallel zur y-Axe gegenüber invariant [...] hat demnach eine Gleichung von der Structur

$$f(x, y+\mu, \lambda) = 0.$$

γ) Erscheint die Variable x nicht explicit in der Gleichu[...] des abgeleiteten Systems, welche dann eine der Formen

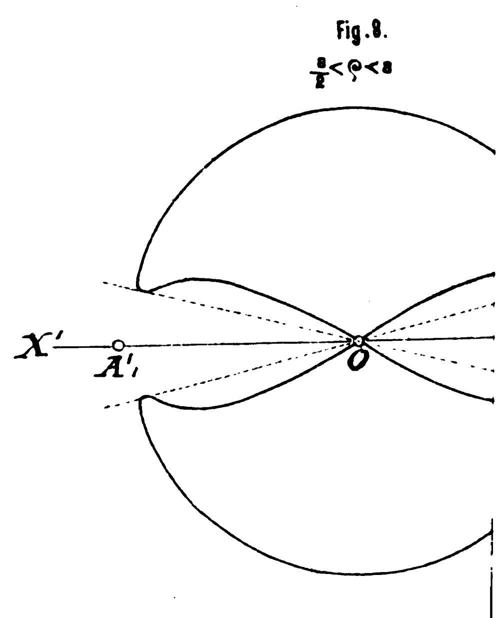
$$\varphi(y, q) = 0 \qquad \varphi(y, p, q) = 0$$

hat, so führen ähnliche Betrachtungen zu dem Schlusse, d[...] das ursprüngliche System bei jeder Translation parallel [...]



F

Fig. 8.



x-Axe unverändert bleibt, dass ihm also eine Gleichung der allgemeinen Gestalt

$$f(x+\lambda, y, \mu) = 0 \tag{2}$$

zukommt.

So gibt beispielsweise Lagrange[1] das Integral der Differentialgleichung

$$q^2 - 2A^2qy + A^2p^2 = 0$$

in der Form

$$y - \frac{a}{2}x^2 - bx - \frac{a^2 + A^2b^2}{2A^2a} = 0$$

an, indem er die willkürlichen Constanten mit a, b bezeichnet; führt man an ihre Stelle neue ein mittels der Substitution $\frac{b}{a} = \lambda$, $\frac{a}{2} = \mu$, so kann diesem Integral ohne Mühe die mit (2) übereinstimmende Gestalt

$$y - \frac{\mu}{A^2} = \mu(x+\lambda)^2$$

verliehen werden.

[1] Leçons sur le calcul des fonctions, p. 227.

Über die Zerstreuung der Elektricität durch das Licht

von

Mathias Cantor.

Aus dem physikalischen Institute der Universität in Tübingen.

§. 1. Die Wirkung, welche ultraviolette Strahlen nach Herz[1] auf die disruptive, nach Hallwachs[2] auf die continuirliche Entladung der Elektricität ausüben, ist zwar vielfach studirt worden, doch ist es nicht gelungen eine Erklärung dieser Erscheinungen aufzufinden.

Lenard und Wolf[3] haben zwar versucht dieselben zurückzuführen auf die von ihnen entdeckte Zerstäubung, welche Metalle durch das Licht erleiden, doch hat Schuster[4] darauf hingewiesen, dass ihre Schlüsse nicht einwandfrei seien.

Auch steht das Ausbleiben einer Zerstäubung bei unelektrisirtem Zink, ebenso wie das Eintreten derselben bei negativ geladenem Quecksilber mit dem lichtelektrischen Verhalten dieser Metalle im Widerspruch, da gerade am ersteren Hallwachs die lichtelektrische Ladung entdeckt hat, während das Quecksilber nach Elster und Geitel[5] lichtelektrisch unempfindlich ist.

Hiernach scheint die Zerstäubung nicht im nothwendigen Zusammenhang mit dem elektrischen Phänomen zu stehen.

---

[1] Herz, Wied. Ann. 31. S. 983, 1887.
[2] Hallwachs, Wied. Ann. 33, S. 301, 1888.
[3] Lenard und Wolf, Wied. Ann. 37, S. 433, 1889.
[4] Schuster, Proc. Roy. Soc. 47, p. 526, 1890.
[5] Elster und Geitel, Wied. Ann. 38, S. 497, 1889.

Schuster[1] vertritt die Ansicht, dass das elektrische Verhalten sowohl glühender als auch belichteter Elektroden durch chemische Processe bedingt werde. Die von Schuster mitgetheilten Beobachtungen Stantons würden dies auch für glühende Elektroden bestätigen, aber die Versuche von Stoletow[2] scheinen es auszuschliessen, dass die lichtelektrischen Erscheinungen durch chemische Wirkungen vermittelt würden. Schuster glaubt zwar den Versuchen Stoletow's keine derartig entscheidende Bedeutung beimessen zu müssen; indessen haben diese durch Breisig[3] eine so vollständige Bestätigung gefunden, dass vorerst die Annahme Schusters nicht zulässig erscheint.

§. 2. Unter diesen Umständen war es von Interesse zu untersuchen, ob eine, dem thermoelektrischen Thomson-Effecte analoge Potentialdifferenz zwischen belichtetem und nicht belichtetem Metall besteht. Denn die beobachteten Erscheinungen hätten auf eine derartige Potentialdifferenz wohl zurückgeführt werden können.

Auch durch die Untersuchungen von Righi wurde diese Frage veranlasst. Righi[4] hat nämlich aus seinen Versuchen geschlossen, dass durch die Strahlung zwei verschiedene Metalle auf das gleiche Potential gebracht werden und hierauf eine Methode zur Bestimmung der Contact-Potentialdifferenzen gegründet, dabei aber eine etwaige Potentialdifferenz zwischen belichtetem und nicht belichtetem Metalle ausser Acht gelassen. Nun hatte aber Righi[5] selbst beobachtet, dass ein Elektrometer, dessen Quadranten mit einer Kupferplatte und einem Kupfergitter verbunden waren, einen Ausschlag zeigte, wenn die Platte durch das Gitter hindurch belichtet wurde.

Wenn die Strahlung bloss einen Ausgleich der Potentiale bewirkte, so hätte wohl das Elektrometer in Ruhe bleiben sollen, da Platte und Gitter anfangs zur Erde abgeleitet waren, also von vorneherein gleiches Potential besassen. Eher konnte

---

[1] Schuster, l. c.

[2] Stoletow, C. R. 107, S. 91, 1888.

[3] Breisig, Dissertation, Bonn, 1891.

[4] Righi, Journal de Physique VII, p. 153, 1888.

[5] Righi, C. R. 107, S. 559, 1888.

dieser Versuch so gedeutet werden, dass zwischen einem belichteten und nicht belichteten Metalle eine Potentialdifferenz bestünde.

§. 3. Zur Beantwortung dieser Frage schien mir das Elektrometer von Christiansen[1] besonders geeignet. Bei demselben wird die Drehung beobachtet, welche ein kleiner Plattencondensator im elektrischen Felde erfährt, wenn seine Belegungen auf die zu messende Potentialdifferenz geladen werden.

Nach Christiansen kann man nun die Contactpotentiale ermitteln, indem man statt des Condensators eine aus zwei verschiedenen Metallen gebildete Doppelplatte benützt.

Denkt man sich die Doppelplatte ersetzt durch eine einfache, so sollte diese, wenn zwischen belichtetem und nicht belichtetem Metall eine Potentialdifferenz besteht, so wie eine aus zwei verschiedenen Metallen bestehende Doppelplatte eine Drehung im elektrischen Felde erfahren, sobald sie von einer Seite her belichtet wird.

§. 4. Da es mir vorerst nicht um Messung, sondern um qualitative Feststellung zu thun war, so konnte ich dem Elektrometer folgende bequemere und dabei empfindlichere Einrichtung geben:

An einer bifilaren Aufhängung von 80 *cm* Länge, deren Fäden oben 0·6 *mm*, unten 1·5 *mm* Abstand hatten, hing ein Cylinder aus dem zu untersuchenden Metall. Die cylindrische Form empfahl sich statt der anfänglich benützten Platten, weil dadurch die Störungen infolge der Luftströmung vermieden wurden.

Die Cylinder waren 60 *mm* lang und hatten 8—10 *mm* Durchmesser. Sie trugen an beiden Enden Drähte; der obere war mit einem leichten Spiegel versehen, der untere stand durch einen feinen Platindraht in leitender Verbindung mit Schwefelsäure, welche zur Erde abgeleitet wurde. Durch diese Ableitung wurde der Einfluss etwaiger statischer Ladungen eliminirt. Das elektrische Feld wurde wie bei Christiansen durch zwei grosse Messingplatten, welche einen Abstand von etwa 20 *mm*

[1] Christiansen, Wied. Ann. 48, S. 726, 1893.

hatten, hergestellt. Die Platten konnten mit den Polen einer constanten Batterie von 100 Volt Spannung verbunden werden. Der Apparat befand sich in einem Kasten, welcher mit Stanniol überzogen und mit der Erde leitend verbunden war. In dem Kasten war ein Gipsfenster eingelassen, durch welches der aufgehängte Cylinder belichtet werden konnte.

Vor das Fenster kam ein zur Erde geleitetes Messingnetz. Als Lichtquelle diente eine Bogenlampe. Es wurden nun Cylinder von Aluminium, Zink, Messing, vergoldetem Messing untersucht, aber bei keinem wurde durch Belichten eine Drehung hervorgerufen.

§. 5. Ganz anders verhielt sich ein Kupfercylinder. Bei diesem konnten sehr bedeutende und regelmässige Drehungen beobachtet werden, so oft das Licht der Lampe auf ihn fiel. Diese Ausschläge commutirten sich mit dem Felde, sie entstanden sogleich beim Einfallen des Lichtes, verschwanden aber nicht ganz vollständig, wenn die Belichtung unterbrochen wurde, vielmehr zeigte sich durch wiederholtes Belichten eine kleine dauernde Verschiebung der Ruhelage. Die Richtung der Drehung ergab die belichtete Seite +elektrisch gegen die unbelichtete.

Die sonderbare Ausnahmsstellung des Kupfers klärte sich auf, als bei einem zweiten Cylinder aus demselben Metall die Drehung ausblieb. Beim Vergleich der beiden Cylinder zeigte nämlich der erste — mit welchem schon durch längere Zeit experimentirt worden war — an der dem Lichte zugewendeten Seite Anlauffarben, während der zweite, welcher keine Drehung ergeben hatte, blank geblieben war.

Als nun der letztere durch Erhitzen mit einer dünnen Oxydschicht überzogen wurde, so trat, gerade so wie beim ersten Cylinder, die Drehung beim Belichten im elektrischen Felde ein.

Wenn nun auch durch die Oxydation allein die lichtelektrischen Erscheinungen keineswegs vollständig zu erklären sind, so schien mir doch die Beobachtung so unzweifelhaft den Einfluss der durch die Belichtung veranlassten chemischen Processe darzuthun, dass ich vorerst letztere näher zu untersuchen beschloss.

§. 6. In dieser Richtung lagen die oben erwähnten Versuche von Stoletow und von Breisig vor, welche einen chemischen Einfluss gänzlich auszuschliessen schienen. Denn nach Allem, was wir von dem Verhalten der Gase wissen, ist deren Reactionsfähigkeit im trockenen Zustande ausserordentlich verschieden von der im feuchten.

Wenn eine chemische Reaction zwischen der belichteten Platte und dem umgebenden Gas Ursache der lichtelektrischen Erscheinung ist, so muss man erwarten, dass diese wenn schon nicht völlig unterdrückt, doch wenigstens beträchtlich abgeschwächt wird, sobald trockene statt gewöhnlicher feuchter Luft die Platte umgibt.

Stoletow und Breisig aber fanden übereinstimmend, dass zwischen feuchter und trockener Luft kein merklicher Unterschied sich ergäbe. Auch vom Ausschluss des Sauerstoffes hätte man eine Abschwächung erwarten dürfen, während nach den genannten Autoren die Erscheinung im Wasserstoff wesentlich ebenso verläuft, wie in der Luft.

Indess schien mir in den erwähnten Versuchen nicht genügend dem Umstande Rechnung getragen, dass schon sehr kleine Mengen der wirksamen Gase die elektrischen Erscheinungen hervorrufen könnten, etwa so wie dies beim Leuchten des Phosphors der Fall ist, wozu bekanntlich die geringste Spur Sauerstoff genügt und dabei dennoch das Leuchten wesentlich an die Oxydation des Phosphors geknüpft ist. Von dieser Analogie geleitet habe ich neuerdings den Einfluss der umgebenden Gase auf die lichtelektrischen Erscheinungen untersucht.

§. 7. Dabei bediente ich mich der Anordnung von Stoletow. Eine volle und eine durchlochte Platte aus demselben Metall waren in einer Entfernung von 1—2 *mm* einander gegenüber gestellt; sie wurden mit den Polen einer Batterie von 25 Grove verbunden. Im Stromkreis befand sich ein Thomson-Galvanometer, welches für einen Strom von $3 . 10^{-10}$ Amp. einen Scalentheil Ausschlag gab. Die Platten waren in eine Glasglocke eingeschlossen, die durch einen Deckel mit eingekittetem Quarzfenster verschraubt werden konnte. Durch zwei Glasröhren, wovon die eine zwischen den beiden Platten, die andere am

Halse der Glocke mündete, konnte dieselbe mit verschiedenen Gasen gefüllt werden. Als Lichtquelle diente eine Bogenlampe, deren positive Kohle durch eine Messingstange ersetzt war. Dieses Licht erwies sich fast ebenso reich an wirksamen Strahlen, als das Zinklicht, und erzeugt weniger Zinkrauch.

Dem Trocknen und Reinigen der Gase wurde besondere Aufmerksamkeit gewidmet:

Das zu trocknende Gas passirte erst eine mit concentrirter Schwefelsäure gefüllte Sprengel'sche Flasche, sodann ein langes mit Phosphorsäureanhydrid gefülltes Rohr. Fast ebenso wirksam erwies sich eine sehr lange Röhre, welche mit concentrirter Schwefelsäure benetzte Glasperlen enthielt.

Stickstoff wurde nach der Vorschrift von Bötticher[1] aus Natriumnitrit entwickelt, dann über verdünnter Natronlauge in einem Gasometer aufgefangen. Beim Einfüllen in den Apparat wurde das Gas zuerst durch starke Natronlauge, dann in die Trockengefässe, endlich über eine glühende, vorher reducirte Kupferspirale geleitet.

Der Wasserstoff wurde elektrolytisch entwickelt und mit einer starken alkalischen Lösung von Pyrogallussäure gewaschen. Zwei Stunden lang vor und während der Beobachtung wurde ein ziemlich kräftiger Strom des betreffenden Gases durch den Apparat geleitet.

§. 8. Zuerst untersuchte ich den Einfluss der Feuchtigkeit und des Sauerstoffgehaltes der Luft. Der Apparat wurde in der angegebenen Weise mit dem trockenen Gase gefüllt und in diesem der Ausschlag beim Belichten ermittelt; sodann wurde das Gas durch gewöhnliche, feuchte Luft verdrängt und wieder der beim Belichten entstehende Strom beobachtet. Meine Vermuthung fand denn auch eine vollständige Bestätigung, indem sich ein sehr beträchtlicher Einfluss des Wasser- und Sauerstoffgehaltes ergab.

Dies zeigen die folgenden Zahlen, welche die Ausschläge des Galvanometers angeben, die beim Belichten eintreten. Dabei war immer die volle Platte mit dem negativen Pol der Batterie verbunden.

---

[1] Michaelis, Lehrbuch der anorg. Chemie.

Zink	in getrockneter Luft . . . . 13 Skalentheile, in gewöhnlicher, feuchter Luft . . . . 45 »
Zink	in getrocknetem Stickstoff . . . . 6 Skalentheile, in gewöhnlicher, feuchter Luft . . . . 35 »
Zink	in getrocknetem Wasserstoff . . . . . 17 Skalentheile, in gewöhnlicher, feuchter Luft . . . . 45 »
Kupfer	in getrocknetem Wasserstoff . . . . . 18 Skalentheile, in gewöhnlicher, feuchter Luft . . . . 52 »
Blei	in getrocknetem Wasserstoff . . . . . 4 Skalentheile, in gewöhnlicher, feuchter Luft . . . . 18 »

Ohne darauf Rücksicht zu nehmen, dass die Versuche noch lange nicht die äusserste Grenze der Reinheit erreicht haben — dies war schon durch die Grösse und den ungenügenden Verschluss meines Apparates nicht möglich — berechtigen doch die gefundenen Zahlen wohl zu dem Schlusse:

»Dass die lichtelektrischen Erscheinungen durch chemische Processe bedingt werden. Diese müssen aber auch durch die Belichtung veranlasst, müssen photochemische Processe sein.«

§. 9. Alsdann aber muss man erwarten, dass starke photochemische Effecte auch mit intensiven lichtelektrischen Wirkungen verbunden sind.

Die Versuche haben nun in der That eine vollständige Bestätigung dieser Voraussicht ergeben, indem Platten, welche mit dünnen Schichten von lichtempfindlichen Verbindungen bedeckt waren, sich auch lichtelektrisch sehr empfindlich erwiesen.

Die Versuche wurden in der Weise ausgeführt, dass die Stärke des actinoelektrischen Stromes beobachtet wurde, zuerst mit den blanken Metallen, dann nachdem diese der Einwirkung von Brom, Jod, Schwefelwasserstoff ausgesetzt worden waren.

Durch diese Behandlung wurden die Metalle mit dünnen Schichten der betreffenden lichtempfindlichen Salze bedeckt.

Die starke lichtelektrische Wirkung dieser Schichten zeigen die folgenden Zahlen, welche die beim Belichten entstehenden Ausschläge angeben. Das Vorzeichen bezieht sich auf den Pol der Batterie, welcher mit der vollen Platte verbunden war. Die Gase wurden bei diesen Versuchen nicht getrocknet.

Messing in Luft	+ 11 — 32
Geschwefeltes Messing in Luft	+ 30 —303
Kupfer in Luft	+ 22 — 32
Bromirtes Kupfer in Luft	+ 11 —104
Jodirtes Kupfer in Luft	+ 35 —130
Jodirtes Kupfer in Wasserstoff	+145 —205
Geschwefeltes Kupfer in Wasserstoff	+ 40 —430
Blei in Luft	+ 0 — 16
Geschwefeltes Blei in Luft	+ 8 — 55

Die Discussion dieser Zahlen möchte ich für eine spätere Gelegenheit mir vorbehalten, da ich die Versuche nach verschiedenen Richtungen hin zu ergänzen gedenke.

Der photochemische Charakter der lichtelektrischen Erscheinungen scheint mir indessen schon aus dem hier Mitgetheilten ersichtlich zu sein.

Es wird ja ohne Zweifel sehr schwierig sein, die den lichtelektrischen Wirkungen zugehörigen chemischen Processe festzustellen. Dies ist aber darin begründet, dass schon der Umsatz ungemein geringer Mengen genügt, um diese Er-

scheinungen hervorzurufen. Im gewissen Sinne stellen eben diese selbst Reactionen der Stoffe dar, welche ähnlich wie die spectralanalytischen die gewöhnlichen chemischen Reactionen an Empfindlichkeit ausserordentlich übertreffen.

Herrn Prof. Braun bin ich zu grossem Danke verpflichtet für das Interesse, welches er dieser Arbeit gewidmet, und die Freundlichkeit, mit welcher er mir die Mittel für dieselbe zur Verfügung gestellt hat.

Aufstellung eines neuen dreifach orthogonalen Flächensystems

von

Prof. Dr. **Anton Puchta** in Czernowitz.

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. October 1893.)

Ich werde in dieser kurzen Abhandlung ein neues dreifach orthogonales Flächensystem aufstellen, wobei vielleicht das Wichtigste darin liegt, dass ich das erwähnte Flächensystem durch sehr einfache Combination zweier bekannter, nur etwas verallgemeinerter Sätze vollständig fertig besass, ehe ich eine Zeile rechnete, und dass sich auch in diesem Falle zeigte, von welchem Vortheile Speculationen über mehrdimensionale Räume für den gewöhnlichen Raum sein können. Der Gedankengang, der mich dabei leitete, war folgender. Der bekannte Dupin'sche Satz behält auch für quadratische Räume höherer Dimension seine Giltigkeit, da formell nur eine Variable mehr in die Rechnung eintritt. Nun bilden, nach einem in der Festschrift für den verstorbenen Prof. Dr. H. Durège[1] von mir erwähnten, gewiss schon länger bekannten Satz, die Hauptkrümmungsrichtungen auf einem Raume R_1 von drei Dimensionen in einem Raume von vier Dimensionen drei zu einander orthogonale Flächensysteme. Sind also $xyzt$ rechtwinkelige Cartesische Punktcoordinaten, so ist auf dem Kugelraume

$$x^2+y^2+z^2+t^2 = 1$$

ein dreifach orthogonales Flächensystem bekannt. Die stereographische Projection lässt, wie bekannt, auch in höherer Dimension die Winkel unverändert; wird demnach von dem Punkte $x = y = z = 0$, $t = 1$ auf den dreidimensionalen linearen

[1] Freitag und Tempsky, Prag. 1892.

Raum $t+1=0$ das berührte dreifach orthogonale projicirt, so resultirt ein dreifach orthogonales Flächensystem in einem Raume von drei Dimensionen.

Nach diesem Gedankengange werde ich nun zunächst auf dem Kugelraume $x^2+y^2+z^2+t^2=1$ ein dreifach orthogonales Flächensystem aufstellen und von ihm mittelst der Formeln:

$$X=\frac{2x}{1-t},\quad Y=\frac{2y}{1-t},\quad Z=\frac{2z}{1-t}, \qquad \text{I)}$$

welche die stereographische Projection vermitteln, zu dem gesuchten dreifach orthogonalen Flächensystem übergehen.

Nachdem so das Flächensystem gefunden ist, werde ich den Beweis für die dreifache Orthogonalität direct führen, wodurch die Behauptung auch für solche Leser klar wird, die Betrachtungen über Räume höherer Dimension vermeiden wollen.

Löst man die vier Gleichungen

$$x^2+y^2+z^2+t^2-1=0 \qquad \text{1)}$$

$$\frac{x^2}{a-u}+\frac{y^2}{b-u}+\frac{z^2}{c-u}+\frac{t^2}{d-u}=0 \qquad \text{2)}$$

$$\frac{x^2}{a-v}+\frac{y^2}{b-v}+\frac{z^2}{c-v}+\frac{t^2}{d-v}=0 \qquad \text{3)}$$

$$\frac{x^2}{a-w}+\frac{y^2}{b-w}+\frac{z^2}{c-w}+\frac{t^2}{d-w}=0 \qquad \text{4)}$$

in der Weise auf, dass man aus 2), 3), 4) zunächst die Verhältnisse von x^2, y^2, z^2, t^2 und dann mittelst 1) diese Werthe selbst bestimmt, so erhält man durch einfache Determinantensätze an Stelle von 1) bis 4) leicht das System

$$\frac{x^2}{+(b-d)(c-b)(d-c)f(a)}=\frac{y^2}{-(a-d)(c-a)(d-c)f(b)}$$

$$=\frac{z^2}{+(a-d)(b-a)(d-b)f(c)}=\frac{t^2}{-(a-c)(b-a)(c-b)f(d)}$$

$$=\frac{1}{(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)}, \qquad \text{II)}$$

worin zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$\left.\begin{aligned} f(a) &\equiv (a-u)(a-v)(a-w) \\ f(b) &\equiv (b-u)(b-v)(b-w) \\ f(c) &\equiv (c-u)(c-v)(c-w) \\ f(d) &\equiv (d-u)(d-v)(d-w) \end{aligned}\right\} \qquad \text{III)}$$

Entnimmt man II) die Werthe von x, y, z, t und führt dieselben in I) ein, so erhält man, wenn noch zur Abkürzung gesetzt wird:

$$\begin{aligned} A &\equiv +(b-d)(c-b)(d-c) \\ B &\equiv -(a-d)(c-a)(d-c) \\ C &\equiv +(a-d)(b-a)(d-b) \\ D &\equiv -(a-c)(b-a)(c-b), \end{aligned}$$

endlich das gesuchte dreifach orthogonale Flächensystem in der Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{2\sqrt{Af(a)}}{\sqrt{\rho}-\sqrt{Df(d)}} \\ Y &= \frac{2\sqrt{Bf(b)}}{\sqrt{\rho}-\sqrt{Df(d)}} \\ Z &= \frac{2\sqrt{Cf(c)}}{\sqrt{\rho}-\sqrt{Df(d)}} \end{aligned}\right\} \qquad A)$$

worin ist:

$$\rho \equiv Af(a)+Bf(b)+Cf(c)+Df(d)$$

oder auch:

$$\rho \equiv (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$$

In $A)$ sind a, b, c, d gegebene Constanten und u, v, w veränderliche Parameter, und zwar soll $a > b > c > d$ sein und w, v, u respective — alle Constanten sind reell vorausgesetzt und positiv — in den Intervallen variiren:

a bis b,
b bis c,
c bis d.

Dann wird, wie ein blosses Abzählen der Vorzeichen bei den Factoren in II) ergibt, x^2, y^2, z^2, t^2 immer positiv, also X, Y, Z in A) immer reell, und A) stellt ein dreifaches Flächensystem dar.

Die Orthogonalität erkennt man dann leicht in folgender Weise. Sind F_1, F_2, F_3, F_4 die linken Seiten in 1) bis 4), so hat man sofort:

$$\frac{\partial F_h}{\partial x}\frac{\partial F_i}{\partial x}+\frac{\partial F_h}{\partial y}\frac{\partial F_i}{\partial y}+\frac{\partial F_h}{\partial z}\frac{\partial F_i}{\partial z}+\frac{\partial F_h}{\partial t}\frac{\partial F_i}{\partial t}=0,$$

$h, i = 1, 2, 3, 4$, d. h. es ist

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial t}{\partial u}=0 \qquad B)$$

und ebenso

$$\sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}=0 \qquad \sum\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial u}=0. \qquad C)$$

Nun folgt aber aus I)

$$\frac{1}{2}(1-t)^2\frac{\partial X}{\partial u}=(1-t)\frac{\partial x}{\partial u}+x\frac{\partial t}{\partial u}$$

$$\frac{1}{2}(1-t)^2\frac{\partial X}{\partial v}=(1-t)\frac{\partial x}{\partial v}+x\frac{\partial t}{\partial v}$$

und hieraus unter Beachtung von 1) einfach

$$\frac{1}{4}(1-t)^2\sum\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}=\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v},$$

d. h. wegen B) und C)

$$\sum\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}=0 \qquad \sum\frac{\partial X}{\partial v}\frac{dX}{\partial w}=0 \qquad \sum\frac{\partial X}{\partial w}\frac{\partial X}{\partial u}=0,$$

oder A) stellt in der That ein dreifach orthogonales, und zwar unter den über die Constanten gemachten Voraussetzungen reelles Flächensystem dar w. z. b. w.

Selbstverständlich resultiren die einzelnen Flächen des Systems durch u-Cst., respective v-Cst., respective w-Cst.

Das System A) kann, wie eine einfache Rechnung ergibt, auch ersetzt werden durch:

$$\left.\begin{aligned} \frac{16\xi^2}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2-4)^2} &= \frac{Af(a)}{Df(d)} \\ \frac{16\eta^2}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2-4)^2} &= \frac{Bf(b)}{Df(d)} \\ \frac{16\zeta^2}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2-4)^2} &= \frac{Cf(c)}{Df(d)} . \end{aligned}\right\} \qquad A')$$

Statt A') nehme ich für die weitere Gestaltung dieses Gleichungssystem, indem ich statt ξ, η, ζ respective 2ξ, 2η, 2ζ schreibe — es kommt dies geometrisch gesprochen darauf hinaus, dass die frühere stereographische Projection statt auf den linearen Raum $t+1=0$ auf $t=0$ ausgeführt wird — das System A''):

$$\left.\begin{aligned} \frac{4\xi^2}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2-1)^2} &= \frac{Af(a)}{Df(d)} \\ \frac{4\eta^2}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2-1)^2} &= \frac{Bf(b)}{Df(d)} \\ \frac{4\zeta^2}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2-1)^2} &= \frac{Cf(c)}{Df(d)} . \end{aligned}\right\} \qquad A'')$$

Befreit man A'') von den Brüchen und eliminirt mittelst eines bekannten Determinantensatzes 1, $-(v+w)$, vw, so resultirt das dreifach orthogonale Flächensystem durch Entwickelung der berührten Determinante dritten Grades, sobald der Factor $ABCD(\xi^2+\eta^2+\zeta^2-1)^4$ unterdrückt wird, schliesslich in der Form:

$$\frac{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2-1)^2}{d-u} - 4\left\{\frac{\xi^2}{a-u} + \frac{\eta^2}{b-u} + \frac{\zeta^2}{c-u}\right\} = 0. \qquad A'')$$

Man erhält nämlich je drei orthogonale Flächen, wenn dem Parameter u irgend ein Werth aus den drei Intervallen d bis c, respective c bis b, respective b bis a ertheilt wird.

Es ist jetzt auch nicht schwer, direct den Beweis für die Orthogonalität von A'') noch einmal zu führen, was umso wichtiger erscheint, als hiedurch zugleich eine Probe für die

Richtigkeit der Elimination erbracht wird. Ich bezeichne hiezu, wenn u, v, w drei beliebige Werthe aus den gedachten drei Intervallen vorstellen, die linken Seiten von $A''')$ mit

$$F_1(u) \equiv F_1 = 0$$
$$F_2(v) \equiv F_2 = 0$$
$$F_3(w) \equiv F_3 = 0.$$

Schreibt man für einen Moment statt $\xi^2+\eta^2+\zeta^2-1$ den Buchstaben r, so hat man sofort

$$\frac{1}{16}\sum\frac{\partial F_1}{\partial\xi}\,\frac{\partial F_2}{\partial\xi} = \frac{r^3-r^2}{(d-u)(d-v)} - \frac{2r}{d-v}\sum\frac{\xi^2}{a-u} - \\ - \frac{2r}{d-u}\sum\frac{\xi^2}{a-v} + 4\sum\frac{\xi^2}{(a-u)(a-v)},$$

wobei die Summation sich auf ξ, η, ζ und gleichzeitig a, b, c bezieht. Weil aber für die Schnittcurve von $F_1 = 0$ und $F_2 = 0$ auch

$$F_1-F_2 = (u-v)\left[\frac{r^2}{(d-u)(d-v)} - 4\sum\frac{\xi^2}{(a-u)(a-v)}\right]$$

verschwindet und anderseits ist:

$$\sum\frac{\xi^2}{a-u} = \frac{1}{4}\,\frac{r^2}{d-u}$$
$$\sum\frac{\xi^2}{a-v} = \frac{1}{4}\,\frac{r^2}{d-v},$$

so ergibt sich

$$\frac{1}{16}\sum\frac{\partial F_1}{\partial\xi}\,\frac{\partial F_2}{\partial\xi} = \frac{r^3-r^2}{(d-u)(d-v)} - \frac{r^3}{(d-v)(d-u)} + \\ + \frac{r^2}{(d-v)(d-u)} = 0,$$

d. h., da durch eine cyklische Vertauschung von u, v und w auch F_1, F_2 und F_3 cyklisch permutirt werden, $A'')$ stellt in der That ein dreifach orthogonales Flächensystem dar, und zwar von Flächen vierter Ordnung.

Aus der Gleichung $A'')$ ergibt sich aber ferner, dass $A'')$ durch eine veränderliche Raumcurve vierter Ordnung erzeugt

werden kann, nämlich, wenn λ ein veränderlicher Parameter ist, durch die Curve C)

$$\left.\begin{aligned} \xi^2+\eta^2+\zeta^2 &= 1+\lambda \\ \frac{\xi^2}{\frac{\lambda^2}{4}\frac{a-u}{d-u}}+\frac{\eta^2}{\frac{\lambda^2}{4}\frac{b-u}{d-u}}+\frac{\zeta^2}{\frac{\lambda^2}{4}\frac{c-u}{d-u}} &= 1 \end{aligned}\right\} \quad C)$$

Es dürfte hienach für einen gewandten Zeichner, der ich nicht bin, kaum erhebliche Schwierigkeiten darbieten, beliebig viele Tripeln von solchen orthogonalen Flächenindividuen, wie sie $A''')$ bietet, zu zeichnen.

Die sämmtlichen Krümmungslinien sind dann durch $A'')$ gegeben, wenn zweien der drei Parameter u, v, w irgend welche constante Werthe aus den betreffenden Intervallen beigelegt werden, der dritte aber sein Intervall durchlauft.

Die Betrachtungen bezüglich der Realität von u, v, w aus $A''')$ für beliebiges $\xi\eta\zeta$ dürften sich wohl mit den analogen Überlegungen beim confocalen Flächensystem zweiter Ordnung völlig decken. Erwähnenswerth ist vielleicht die Bemerkung, dass aus $A''')$ sofort sich ein biquadratisches n-fach orthogonales Raumsystem in einem Raume von n Dimensionen ergibt, so ist z. B., wenn die reellen Constanten a, b, c, d, e eine fallende Reihe bilden und ξ, η, ζ, τ rechtwinkelige Punktcoordinaten darstellen, durch $A'''')$ ein vierfach orthogonales biquadratisches Raumsystem dargestellt

$$\frac{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2+\tau^2-1)^2}{e-u}-4\left\{\frac{\xi^2}{a-u}+\frac{\eta^2}{b-u}+\frac{\zeta^2}{c-u}+\right.$$
$$\left.+\frac{\tau^2}{d-u}\right\}=0. \quad A'''')$$

Der Beweis ist durch die obige Bildung von $\sum\frac{\partial F_1}{\partial\xi}\frac{\partial F_2}{\partial\xi}$ geführt.

Einige Constructionen bezüglich der Schraubungsflächen

von

J. Sobotka in Prag.

(Mit 2 Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. October 1893.)

I. Zur Krümmung der Schraubungsflächen.

1. Mit der Ermittlung der Krümmungsverhältnisse und der Indicatrix für irgend einen Punkt einer Schraubungsfläche habe ich mich eingehend in einer in den Sitzungsberichten der k. Akademie der Wissenschaften zu Wien, Bd. CI, Abth. II. a. 1892, veröffentlichten Arbeit beschäftigt. Im Folgenden möge auf dieselbe durch die blosse Bandnummer »CI« hingewiesen werden.

Hier werden andere das angeführte Problem betreffende Constructionen entwickelt.

Zur Feststellung einer Schraubung im Raume gehört die Angabe ihrer Axe Z und ihres Parameters p der Grösse und dem Sinne nach. Durch irgend eine Curve A ist in der Schraubung eine Schraubungsfläche A bestimmt, auf welcher ihrer Erzeugung gemäss zwei besondere Systeme von Curven enthalten sind; erstens ein System von Schraubenlinien, die als Bahncurven einzelner Punkte von A aufzufassen sind und zweitens ein System congruenter Curven, welche die einzelnen Lagen der Curve A während der Schraubung vorstellen. Durch jeden Punkt u von A geht eine Curve U des ersten und eine Curve A_{μ} des zweiten Systems.

Es möge zunächst die Durchmesserinvolution der Indicatrix für den beliebig angenommenen Punkt u der Schraubungsfläche ermittelt werden. Dies geschieht durch Construction von zwei Paaren conjugirter Durchmesser derselben.

Die Berührungsebenen von A längs der Helix U umhüllen ein developpables Helikoid. Die Tangente S in u an die Helix U bildet mit der durch u gehenden Erzeugenden F des developpablen Helikoids ein Paar conjugirter Durchmesser der Indicatrix. Die Gerade F ist Charakteristik der Tangentialebene T_u in u an A und wird als Gerade grösster Neigung in Bezug auf eine Normalebene M der Schraubung erhalten; die Tangentialebene T_u selbst ist durch S und durch die Tangente T in u an die Curve A_μ gegeben.

Zum Zwecke der weiteren Construction kann die Curve A_μ durch irgend einen sie in u osculirenden Kegelschnitt B ersetzt werden. Irgend zwei Lagen des Kegelschnittes B in der Schraubung bestimmen zwei congruente ebene Felder; die Verbindungsgeraden ihrer entsprechenden Punkte erfüllen eine Regelfläche vierten Grades. Dies bleibt aufrecht auch dann, wenn die Lagen consecutiv werden, und wir also den Kegelschnitt B mit dem ihm unendlich benachbarten B' in Betracht ziehen. Für die erwähnte Regelfläche vierten Grades werden jetzt die erzeugenden Geraden zu Tangenten an die Bahncurven in sämmtlichen Punkten von B. Diese Regelfläche, die wir mit R bezeichnen wollen, berührt die Schraubungsfläche, welche durch B erzeugt wird, längs des Kegelschnittes B. Deshalb ist der zu T conjugirte Durchmesser V der Indicatrix von R in u gleichzeitig auch der zu T conjugirte Durchmesser für die Indicatrix in u der durch B, hiemit auch der durch A erzeugten Schraubungsfläche.

Es liegt also die Aufgabe vor, den Durchmesser V für die Indicatrix von R in u zu construiren.

Denken wir uns weiter die Fläche zweiten Grades H, welche die Fläche R längs ihrer Erzeugenden S berührt und den Kegelschnitt B enthält, so osculirt dieselbe die Fläche R im Punkte u [1] und man kann demnach zum Zwecke der Ermittlung von V die Fläche R durch die Fläche zweiten Grades H ersetzen, so dass es im Folgenden nur darauf ankommt, die Polare V von T in Bezug auf H zu construiren.

---

[1] J. Šolín: Construction der Osculationshyperboloide, in den Sitzungsberichten der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften in Prag 1883.

Da bestimmen wir zuerst die Berührungspunkte für den Tangentialebenenbüschel durch S.

Analog dem Vorigen schliessen wir, dass die Tangenten an die Bahncurven sämmtlicher Punkte von T ein hyperbolisches Paraboloid P erfüllen, welches die Fläche R, somit auch die Fläche zweiten Grades II längs S berührt. Mit Hilfe von P lässt sich in jedem Punkte der Geraden S die den Flächen II, R gemeinsame Tangentenebene ermitteln.

Sind nun T_m, T_n zwei derartige von T_u verschiedene Ebenen mit den Berührungspunkten m respective n und bezeichnen wir die Pole dieser Ebenen mit Bezug auf B mit m' respective n', dann schneiden sich die Geraden (mm'), (nn') im Punkte v und (vu) ist bereits die gesuchte Gerade V.[1]

Durch die Strahlenpaare SF, TV ist die Durchmesserinvolution für die Indicatrix im Punkte u der Schraubungsfläche A bestimmt.

Betreffs der Darstellung dieser Construction wählen wir — Fig. 1[2] — die vom Punkte u um den Parameter p etwa im negativen Sinne entfernte Normalebene M der Schraubung als Spurebene. Von den Berührungsebenen durch S können wir insbesondere die projicirende T_m und die asymptotische T_n hervorheben. Die Conturparabel der Hauptprojection von P hat T_1 zur Scheiteltangente und Z_1 zum Brennpunkte. Trägt man also $\overline{u_1 i_1} = \overline{Z_1 u_1}$ auf $(Z_1 u_1)$ auf und fällt von i_1 die Senkrechte auf T_1, so schneidet dieselbe die Tangente S_1 der Conturparabel in ihrem Berührungspunkte m_1, welcher die Projection des Berührungspunktes m für die projicirende Tangentialebene T_m ist. Der Pol von T_{m_1} in Bezug auf B_1 ist m'_1. Die asymptotische Ebene T_n von P für die Gerade S ist normal zur projicirenden Ebene von T. Fällt man also vom Spurpunkte s der Geraden S die Senkrechte auf T_1, so schneidet dieselbe die Spur O der Ebene O, in welcher der Kegelschnitt B liegt, in einem Punkte, dessen Verbindungsgerade J mit u den Schnitt von T_n mit O

[1] Man sehe in den Sitzungsberichten der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften in Prag die Abhandlung vom 24. März 1893.

[2] Es wird auch hier die orthogonale Projection in eine Normalebene der Schraubung als Hauptprojection bezeichnet und für ein Gebilde Σ durch Σ_1, ihr Bild durch Σ_1 symbolisch ausgedrückt.

vorstellt. Führt man also durch den Pol n_I' von J_I in Bezug auf B_I die Parallele $S_{n_I'}$ zu S_I, so schneidet diese die Verbindungsgerade $(m_I' m_I)$ im Punkte v_I von V_I.

2. In dem eben Erläuterten haben wir ein Mittel gewonnen, den zu T conjugirten Strahl V zu construiren, wenn die Osculationsebene O und der Osculationskegelschnitt B der Curve A_μ gegeben waren. Trachten wir die entwickelten Constructionen in umgekehrter Reihenfolge durchzuführen, so gelangen wir zur Construction irgend eines osculirenden Kegelschnittes B, wenn die Osculationsebene O und der conjugirte Strahl V gegeben sind, oder zur Construction der Osculationsebene O, wenn B und V gegeben sind. In beiden Fällen kann man unbeschadet der Allgemeinheit den Kegelschnitt B so ermitteln oder wählen, dass B_I ein Kreis wird. Es heisse der Mittelpunkt dieses Kreises o_I. Dieser Annahme gemäss wird $(m_I' o_I) \perp S_I$ und $(n_I' o_I) \perp J_I$.

Ist im ersten Falle O gegeben, so kennen wir auch J_I. Nehmen wir nun einen Punkt v_I^+ beliebig auf der Geraden V_I an, verbinden denselben mit m_I durch eine Gerade und ziehen durch ihn eine Parallele zu S_I, errichten wir ferner aus dem Schnittpunkte der ersten von den beiden soeben gezogenen Geraden mit T_I die Senkrechte zu S_I, aus dem Schnittpunkte der Parallelen zu S_I mit T_I die Senkrechte zu J_I, so erhalten wir im Schnitte o_I^+ beider Senkrechten einen Punkt, der eine Hyperbel H_I beschreibt, wenn sich v_I^+ auf der Geraden V_I bewegt. Der Mittelpunkt o_I muss auch auf dieser Hyperbel, welche T_I in u_I berührt, liegen; da er nebstdem auf der Senkrechten G_I in u_I zu T_I liegen muss, so erhält man ihn als den zweiten Schnittpunkt der Hyperbel H_I mit der Geraden G_I.

Hiemit gestaltet sich die Construction von o_I äusserst einfach. Zieht man nämlich durch m_I die Parallele zu T_I, bis sie V_I in v_I' trifft und trägt auf T_I die Strecke $v_I' m_I$ von u_I aus einmal in gleichem Sinne nach m_I'', das zweite Mal in entgegengesetztem Sinne nach n_I'' auf, so ist die Senkrechte L_I durch m_I' zu S_I eine Asymptote, die Senkrechte F_I durch n_I'' zu J_I die zweite Asymptote von H_I. Wird nun G_I von L_I in g_I, von F_I in h_I getroffen, so erübrigt nur noch, den Punkt o_I so zu ermitteln, dass $\overline{h_I o_I} = \overline{u_I g_I}$ wird.

Ist im zweiten von uns angeführten Falle der Mittelpunkt o_1 des Kreises B_1 gegeben, so fällen wir von ihm auf S_1 die Senkrechte, welche T_1 in m'_1 schneidet; $(m_1 m'_1)$ trifft dann V_1 im Punkte v_1. Die Parallele durch v_1 zu S_1 schneidet wiederum T_1 in n'_1; die Gerade J_1 ist alsdann senkrecht zu $(n'_1 o_1)$. Hiedurch ist die Gerade J in der Ebene T_{II} bestimmt; die Ebene (TJ) ist die gesuchte Osculationsebene O. Man kann auch auf die vorige Art die Punkte m''_1, n''_1 und die Asymptote L_1 ermitteln und auf G_1 den Punkt h_1 so annehmen, dass $\overline{o_1 h_1} = \overline{g_1 n_1}$ wird; alsdann ist J_1 senkrecht zu $(h_1 n''_1)$. Doch kürzer zum Ziele gelangt man dadurch nicht.

Da man nach Art. 1 in irgend einem Punkte der Schraubungsfläche zu jeder Tangente derselben den conjugirten Durchmesserstrahl der Indicatrix leicht finden kann, so ist man nach dem gerade entwickelten Vorgang im Stande, die Krümmung einer Curve auf der Schraubungsfläche in irgend einem Punkte u zu bestimmen, für welchen man die Osculationsebene der Curve kennt, insbesondere also die Krümmung einer ebenen Schnittcurve in jedem beliebigen Punkte derselben. Umgekehrt kann man danach die Osculationsebene einer Curve auf der Schraubungsfläche in einem Punkte ermitteln, wenn der Krümmungsmittelpunkt für die Projection der Curve im entsprechenden Punkte bekannt ist.

Bemerkt sei, dass die Auseinandersetzungen dieses Artikels fast wörtlich für alle windschiefen Flächen anwendbar bleiben und uns für dieselben eine Construction von praktischem Nutzen gewähren.

Die sowohl in Art. 1, als auch Art. 2 gegebenen Entwickelungen bleiben im Wesen auch für alle besonderen Fälle anwendbar; nur erhält die Durchführung eine geringe Modification hauptsächlich dadurch, dass man, wo es nöthig erscheint, noch eine zweite Projection in eine zur Axe Z parallele Ebene darstellt.

II. Zur Construction umschriebener Developpablen der Schraubungsflächen.

3. Es handelt sich hier um eine durch die Abhandlung: »Kinematisch-geometrische Constructionen der Parallelprojection der Schraubenflächen...« von Burmester in Schlö-

milch's Zeitschrift für Math. und Phys., 18. Jahrgang. 1873, angeregte Bemerkung. Mit der Bestimmung der Berührungscurve C einer gegebenen Schraubungsfläche mit der ihr umschriebenen Developpablen D von gegebenem Richtungskegel K oder umgekehrt, habe ich mich a. a. O. beschäftigt.[1] Es ist dort gezeigt worden, dass in der gegebenen Schraubung die Charakteristiken der Tangentialebenen in den Punkten der Berührungscurve C sämmtlich eine zur Schraubungsaxe Z parallele Cylinderfläche C berühren. Setzen wir voraus, dass der Mittelpunkt des Richtungskegels K auf Z liegt und bezeichnen für diese Lage mit L die Spur in derjenigen Normalebene der Schraubung, von welcher der Mittelpunkt um den Parameter p in positivem Sinne der Axe Z entfernt ist. Drehen wir alsdann die Spur L um Z im Sinne der Schraubung um 90°, so erhalten wir in ihrer neuen Lage L^+ einen Normalschnitt der Cylinderfläche C. Da für jeden Punkt der Schraubungsfläche die Normale der durch ihn gehenden Normalcurve und die Charakteristik seiner Tangentialebene in einer zu Z parallelen Ebene liegen, so folgt daraus:

Die Normalen in sämmtlichen Punkten der Berührungscurve C zu den durch dieselben gehenden Normalcurven der Schraubungsfläche bilden eine Conoidfläche G, welche in der Richtung der Axe Z durch die Cylinderfläche C projicirt wird.

Aus diesem Satze ergibt sich in einfacher Weise die Construction der Krümmungsmittelpunkte für die Spur D der Developpablen D in einer Normalebene M der Schraubung, sowie die Construction einzelner Punkte der Rückkehrkante der Developpablen D.

Es sei — Fig. 2 — e ein Punkt der Berührungscurve C; die diesem Punkte zugehörige Erzeugende des Conoids G, welche die Cylinderfläche im Punkte e' berührt, heisse E. Ferner sei P die durch e gehende Erzeugende von D, für die P_1 senkrecht steht zu $(Z_1 e'_1)$, und T die Tangente in e an C, welche als der zu P conjugirte Durchmesserstrahl der Indicatrix nach Art. 1 construirt werden kann. Schliesslich sei noch e''_1 der Krümmungsmittelpunkt von C_1 in e'_1.

[1] Monatshefte für Math. u. Phys., IV. Jahrg., S. 59.

Zunächst sehen wir, dass die Spur der Ebene (PE) in M identisch mit der Normalen N^{ε} von D im Spurpunkte m_p der Geraden P ist. Der Krümmungsmittelpunkt ${}^{\nu}e$ der Spur D in m_p ist der Schnitt der Normalen N^{ε} mit ihrer consecutiven $N^{\varepsilon\prime}$. Ist nun E' die auf E unmittelbar folgende Erzeugende von G und P' die auf P folgende Nachbarerzeugende von D, so ist $N^{\varepsilon\prime}$ ebenso die Spur der Ebene $(P'E')$. Die Schnittgerade R der Ebenen (PE), $(P'E')$ enthält nun den Krümmungsmittelpunkt ${}^{\nu}e$ von D in m_p als den Schnittpunkt der Spurgeraden N^{ε}, $N^{\varepsilon\prime}$; sie enthält auch einen Punkt q der Rückkehrkante der Developpablen D als den Schnittpunkt der Geraden P, P'. Es wird sich desshalb nur darum handeln, die Gerade R zu ermitteln. Von dieser Geraden kann man den Punkt r, in welchem sie die Gerade E schneidet, als den Berührungspunkt der Ebene (PE) mit dem Conoid G ohneweiters finden. Wir kennen für das Conoid die Tangentialebene (TE) in e, die zu Z parallele Tangentialebene in e' und die asymptotische Ebene durch E, sind somit im Stande, aus dem projectiven Zusammenhange des Tangentialebenenbüschels um E mit der Reihe der Berührungspunkte auf E den Berührungspunkt r von (PE) zu construiren. Danach trifft die Parallele, die man zu T_1 durch den Schnittpunkt von P_1 mit $(e'_1 e''_1)$ zieht, die Gerade E_1 in der Projection r_1 des fraglichen Punktes r.

Betreffs der Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes ${}^{\nu}e$ kann man die Developpable D durch einen längs P osculirenden Kegel, dessen Mittelpunkt in q sein wird, ersetzen; daraus ergibt sich, dass $R_1 \perp (Z_1 e''_1)$, wodurch die Richtung von R bestimmt wird. Da wir jetzt von R bereits den Punkt r und die Richtung kennen, so ist diese Gerade selbst und durch sie auch die in Frage gestellten Punkte ${}^{\nu}e$ und q gefunden.

Führen wir die entwickelte Construction in umgekehrter Reihenfolge durch, so gelangen wir zur Lösung folgender Aufgabe.

In einer gegebenen Schraubung ist diejenige Schraubungsfläche zu bestimmen, welche eine gegebene developpable Fläche D berührt.

Wir ermitteln zuerst den Richtungskegel der Developpablen und leiten aus ihm dann die Cylinderfläche C ab. Jeder

nden P von D entspricht auf C_I ein Punkt e'_I, wobei P_I ist. Hiedurch ist auch schon die betreffende Gerade E oids G bestimmt, welche P in einem Punkte e der Bescurve zwischen D und der Schraubungsfläche trifft. ir die Fläche D kennen, so sind wir im Stande, die R und den auf ihr liegenden Punkt $^v e$ zu construiren. sind uns für das Conoid die Tangentialebenen in den e', r und die asymptotische Ebene durch E bekannt sind in der Lage, die Tangentialebene desselben in e en, deren Schnitt mit der längs P berührenden Tanbene von D uns die Tangente T in e an die Berührungsliefert, wobei die Verbindungsgerade von r_I mit dem Punkte der Geraden P_I, welcher auf der in e'_I zu E_I ern Senkrechten liegt, die Richtung von T_I angibt. E ist male in e der durch diesen Punkt gehenden Normal-$_e$ der Schraubungsfläche. Die Charakteristik der Tanbene in e zur Schraubungsfläche bildet mit der te Q der durch e gehenden coaxialen Helix H der Fläche r, die Geraden T, P bilden ein zweites Paar der Durchnvolution für die Indicatrix und es lässt sich desshalb Tangente von N_e in e conjugirte Durchmesserstrahl I n leicht ermitteln. Die Senkrechte durch Z_I zu I et dann E_I im Mittelpunkte $^e o'_I$ des zu e_I gehörigen ungskreises von Ne_I.

n nun die Spur N der Schraubungsfläche in irgend einer ebene M der Schraubung, die wir als Hauptprojectionsetrachten können, zu construiren, suchen wir die Spur Q in M und tragen der Grösse und dem Sinne nach die $\overline{e_I m_Q}$ von e_I auf H_I bis zum Punkte $^e m$ auf, welcher ein Punkt der Normalspur N ist. Dreht man in dem Sinne E_I und $^e o'_I$ um Z_I um den Winkel $(e_I Z_I {}^e m)$ nach E^e, ive $^e o$, so ist E^e die Normale und $^e o$ der Krümmungsinkt von N für den Punkt $^e m$.

ur Construction umschriebener Developpablen der Schraubungsregelflächen.

In diesem Abschnitte will ich mich mit der Lösung er Aufgabe befassen

In irgend einem Punkte e der Berührungscurve C einer Schraubungsregelfläche A mit einer ihr umschriebenen Developpablen D ist die Osculationsebene O und das Krümmungscentrum $^{\omega}e$ dieser Berührungscurve zu construiren.

Es sei — Fig. 3 — O die Rückkehrhelix für die asymptotische Fläche der gegebenen Schraubungsregelfläche, C_1 die Projection der Cylinderfläche, von welcher im vorangehenden Abschnitte die Rede war, und L die Lage, in welche diese Projection gelangt, wenn sie um Z_1 in der Schraubung entgegengesetztem Sinne eine Vierteldrehung vollzieht. Nehmen wir weiter auf Z den Punkt v an, welcher in positiver Richtung von unserer Hauptprojectionsebene um den Parameter p entfernt ist und betrachten denselben als gemeinschaftlichen Mittelpunkt der Richtungskegel S, K der Schraubungsregelfläche, beziehungsweise der umschriebenen Developpablen, so ist O_1 die Spur des ersteren, L die Spur des letzteren Kegels in der Projectionsebene und es ist dann, wie bekannt, die Berührungscurve C die Durchdringungscurve der Schraubungsregelfläche mit einer windschiefen Fläche Q, deren Geraden C berühren, O schneiden und zu den Erzeugenden des zu K in Bezug auf S polarreciproken Kegels L parallel sind. Irgend ein Punkt e der Berührungscurve C ist also der Schnittpunkt einer Erzeugenden H der Fläche A mit der entsprechenden Erzeugenden R der Fläche Q.[1]

Ermittelt man das längs H die Schraubungsregelfläche osculirende Hyperboloid H und das längs R die Fläche Q osculirende Hyperboloid R, dann ist die fragliche Osculationsebene O die Osculationsebene in e für die Durchdringungscurve der Flächen H und R. Ist nun T die Tangente in e an C, so ist O die längs T berührende Tangentialebene des zur Punktreihe auf T doppelt conjugirten Kegels V in Bezug auf die Schmiegungshyperboloide H, R.

Die Construction von H ist bekannt, wesshalb wir bloss auf die Construction von R näher eingehen wollen.

[1] Monatshefte a. a. O.

e Gerade R treffe O im Punkte o und berühre C im e'. Weil O eine asymptotische Curve der Fläche Q ist, ie Tangente T_o in o an O eine Erzeugende von R. Als Erzeugende von R werden wir diejenige R' bestimmen, zu R parallel ist. Zu dem Behufe legen wir durch v die welche zur Tangentialebene T_o in o an Q, und weiter ne, welche zur projicirenden Tangentialebene $T_{e'}$ in e' rallel ist, suchen ihre Polargeraden J, J' in Bezug auf gel L, legen durch o die Parallele J_o zu J und durch e' allele $J_{e'}$ zu J'. Beide Parallelen schneiden sich in einem h; die Gerade R' ist alsdann die zu R in Bezug auf den symmetrische Gerade.[1] Dass man bei der Durchführung ben beschriebenen Construction nicht die Kegelfläche L construiren wird, sondern die Constructionen, die mit erselben durchgeführt werden sollen, durch die Reci- auf den Kegel K überträgt, also zuerst die Polarebenen ind J' in Bezug auf S aufsucht und aus ihnen erst dann aden J, J' ableitet, ist natürlich. Das Resultat dieser ung ist, wie leicht zu erkennen, folgendes: Ist e_I'' der ungsmittelpunkt von C_I in e_I', so ist J_{o_I} senkrecht) und $J_{e_I'}$ fällt mit $(e_I'' e_I')$ zusammen. Die Contur K_I' von R Kegelschnitt, der T_{o_I}, R_I' berührt und C_I in e_I' osculirt, estimmt. Dadurch ist auch R bereits gefunden, denn zeugende X von R, welche R schneidet, hat ihre Pro- in einer Tangente von K_I' und liegt in der Tangential- er Fläche Q im Punkte (XR) und kann demnach ohne- erhalten werden. Die Tangenten des Kegelschnittes K_I' nt man aus den entsprechenden Tangenten des Krüm- reises K_I von C_I in e_I' vermittelst centrischer Collineation ischen K_I, K_I' besteht, in einfacher Weise. Für diese h collineare Lage ist, wie bekannt, R_I die Collineations- r Tangente R_I' entspricht die zu ihr parallele, von R_I ver- ne Tangente R'_{+I} des Kreises K_I, der Tangente T_{o_I} ent- die noch durch o_I an K_I gehende Tangente $T_{o_I}^+$. Dem $j_I \equiv (R_I' T_{o_I})$ entspricht der Punkt $j_I^+ \equiv (R'_{+I} T_{o_I}^+)$, so dass ide $(j_I j_I^+)$ durch das Collineationscentrum r_I geht, wodurch

[1] Man sehe Amerkung 1 auf S. 206.

dieses als Schnitt von $(j_1 j_1^+)$ mit R_1 gefunden wird, und man jetzt leicht zu jedem Elemente das ihm entsprechende construiren kann.

Suchen wir zunächst den Berührungspunkt i der Tangente T_{o_1} mit dem Kegelschnitt K_1'; derselbe entspricht dem Berührungspunkt i_1^+ von $T_{o_1}^+$ mit K_1. Nun ist $(j_1^+ e_1'') \| (i_1^+ e_1') \| (o_1 h_1)$, wesshalb wir haben

$$\overline{j_1^+ i_1^+} : \overline{i_1^+ o_1} = \overline{e_1'' e_1'} : \overline{e_1' h_1} = \overline{l_1^+ e_1'} : \overline{e_1' h_1'},$$

wenn l_1^+ der Schnittpunkt von R_{+1}', und h_1' der Schnittpunkt von R_1' mit der Geraden $J_{e_1'}$ ist. Aus dieser Relation folgt, dass auch

$$\overline{j_1^+ i_1^+} : \overline{i_1^+ o_1} = \overline{j_1^+ r_1} : \overline{r_1 j_1},$$

dass also $(r i_1^+)$ parallel zu T_{o_1} ist.

Man ermittelt also das Collineationscentrum r_1 dadurch, dass man durch den von e_1' verschiedenen Schnittpunkt der Polare von o_1 in Bezug auf K_1 die Parallele zu T_{o_1} zieht, welche R_1 bereits in r_1 trifft. Aus dieser einfachen Erwägung ergibt sich, dass K_1' im Allgemeinen eine Hyperbel ist, welche C_1 in e_1' osculirt und T_{o_1} zur Asymptote hat.

Demnach ist R mit den Bestimmungsstücken von Q auch selbst direct gegeben.

Die Parallele durch i_1^+ zu R_1 trifft den Kreis K_1 noch im Punkte f_1^+. Trägt man $\overline{e_1' o_1'} = \overline{o_1 e_1'}$ auf R_1 auf, dann ist die durch o_1' zu $(r_1 f_1^+)$ gezogene Parallele F_1 die zweite Asymptote von K_1'.

Nach der gepflogenen Vorbereitung kann die Durchführung der eingangs dieses Abschnittes gestellten Aufgabe rasch bewerkstelligt werden. — Fig. 4. —

Wir wollen die Spur M^ω der fraglichen Osculationsebene in der durch den Centralpunkt c von H gelegten Normalebene, die wir zugleich als Projectionsebene betrachten, construiren. Zuerst ermitteln wir die Tangente T im Punkte e an die Berührungscurve C als die Schnittgerade der Tangentialebene der Schraubungsfläche mit der Tangentialebene der Fläche Q im Punkte e. Die Senkrechte M^* durch c_1 auf R_1 ist die Spur der ersten der beiden Berührungsebenen; die Spur der zweiten ist

de $M^{s'}$, welche durch o_I und durch den Schnittpunkt
Z_I) mit der durch e_I zu $(o_I Z_I)$ gelegten Parallele geht.
$M^{s'}$ schneiden sich im Spurpunkte t von T.
handelt sich noch darum, vier weitere Punkte für die
des Kegels V zu ermitteln, um dann an sie in t die
e M^{ω}, welche ja die verlangte Spur selbst ist, con-
zu können.
Senkrechte von e_I auf $(Z_I e'_I)$ ist die Projection der
gehenden Erzeugenden der umschriebenen Develop-
), also die Projection der Polaren von T in Bezug auf H.
nittpunkt w_I dieser Senkrechten mit M^s ist darum ein
Punkt von V. Ferner construiren wir die Polare von T
; auf R als die harmonisch conjugirte zu T in Bezug
durch e gehenden Erzeugenden von R; ihr Spurpunkt
.[1] Jetzt erübrigt noch, zwei Punkte des Kegelschnittes
chen. Zu dem Behufe wählen wir auf T zwei
u, n und bestimmen ihre doppeltconjugirten Geraden in
auf beide Schmiegungsflächen H, R. In unserem Falle
er Punkt m von T in der projicirenden Ebene von T_o an-
en. Diese Ebene geht also durch m und berührt das
loid R im unendlich fernen Punkte i von T_o; demnach
ler Punkt i der Polarebene von m in Bezug auf R an,
nebstdem durch (eu) gehen muss und somit hinreichend
t ist. Die Parallele durch e zu T_o fällt mit H zusammen;
ist die besagte Polarebene identisch mit der Ebene (uH);
r ist die Gerade $(u_I c_I)$. Bezüglich des Hyperboloides H
ir aus dem Umstande, dass m in einer Hauptebene
Hyperboloids, nämlich in der projicirenden Ebene
iegt, dass seine Polarebene senkrecht zu dieser pro-
n Ebene sein wird und da dieselbe nebstdem durch (ew)
nuss, so ist die aus w_I auf T_{o_I} gefällte Senkrechte bereits
der Polarebene. Der Schnittpunkt x beider so ermit-
puren ist die Spur der dem Punkte m entsprechenden
onjugirten Geraden; es ist also x ein weiterer Punkt

---

[1] e von R_I verschiedene Tangente an K_I durch e_I schneidet $(i^+_I f^+_I)$ in
kte, auf dessen Verbindungsgeraden mit r_I durch T_I und $(e_I u)$ eine
rausgeschnitten wird, welche durch R_I halbirt wird.

Als den zweiten Punkt u nehmen wir den unendlich fernen Punkt von T an. Seine Polarebene in Bezug auf R geht durch den Mittelpunkt q dieses Hyperboloids, welcher im Schnitte von T_{o_1} mit F_1 seine Projection hat und in der durch R gehenden asymptotischen Ebene von R enthalten ist. Die Parallele G durch o_1 zu $(e'_1 Z_1)$ ist die Spur dieser asymptotischen Ebene; sie wird von $(q_1 e_1)$ im Spurpunkte g der Geraden (qe) getroffen, so dass (ug) die Spur der Polarebene von u in Bezug auf R ist.

Die Gerade (wo) ist die Spur der Polarebene von u in Bezug auf H. Der Schnittpunkt y der Spuren (ug) und (wo) ist der fünfte Punkt von V.

Bezeichnen wir den Nachbarpunkt von t auf V durch t', so können wir schliesslich M''' als die Seite (tt') des Pascal'schen Sechsecks $uxywtt'$ erhalten, wobei wir die Reihenfolge der Eckpunkte so gewählt haben, dass so wenig als möglich Hilfsgeraden von Neuem gezogen werden müssen; es ist hier (oc) bereits die betreffende Pascalgerade.

Bei unserer Darstellung haben wir noch den Punkt u' im Schnitte von T mit der die Asymptote F_1 projicirenden Ebene angenommen und den ihm zugehörigen Punkt y' von V aufgesucht. Da diese projicirende Ebene eine durch u' gehende Tangentialebene des Hyperboloides R ist, so ist durch deren Berührungspunkt f und durch die Gerade (eu) die Polarebene von u' in Bezug auf R bestimmt. Der Punkt f ist nun als der unendlich ferne Punkt auf der Erzeugenden F von R, welche R in o' trifft, auch schon gegeben. Zieht man also durch e die Parallele F_e zu F, so ist (uF_e) die besagte Polarebene. Um nun ihre Spur darzustellen, suchen wir den Spurpunkt von F_e. Derselbe liegt auf der Spur der Ebene (RF), und da diese Ebene die Fläche Q in o' berührt, so hat man bloss durch o'_1 die Parallele zu $(Z_1 o_1)$ zu ziehen, bis sie $(Z_1 e'_1)$ in o''_1 trifft; $(o''_1 o_1)$ ist alsdann die Spur von (RF). Die Gerade F_e wird von dieser Spur im Punkte f' getroffen und (uf') ist die Spur der Polarebene von u' in Bezug auf R.

Wir suchen noch die Polarebene von u' in Bezug auf H. Zu dem Behufe legen wir durch u' die zur Axe (co) senkrechte Ebene G, welche sie im Punkte g' treffen möge. Tragen wir auf die Axe (co) die Länge $\overline{oc'} = \overline{co}$ auf, so ist der zu g' in Bezug

: Punkte c, c' harmonisch conjugirte Punkt g'' der Pol
und da G durch n' geht, so muss die Polarebene des
s n' durch g'' gehen, und (ng'') ist die Spur der Polar-
'on n' in Bezug auf H. Die Spuren $(u f^{\epsilon})$, (ng'') schneiden
Spurpunkte y' der zu n' doppeltconjugirten Geraden (ey')
ist ein weiterer Punkt von V.

ist aus der ganzen Darstellung einleuchtend, wie man
ehen hätte, wenn man die Punkte m, n oder auch die
ıormale Spurebene der Genauigkeit der graphischen
ihrung halber anders als in der angegebenen Weise
müsste.

ie auf Grund der Osculationsebene $O \equiv (eM^{\omega})$ die Con-
n des Krümmungskreises der Berührungscurve C im
e oder ihrer Projection in irgend eine Normalebene in
ection von e vorgenommen wird, ist im I. Abschnitte
worden.[1]

Wenn die umschriebene Developpable D eine Cylinder-
it, dann ist C_1 ein Punkt und die Schmiegungsfläche R
einem hyperbolischen Paraboloid; an unserer Darstellung
ich wesentlich nichts. Wenn in diesem Falle e speciell
ct von C auf der Strictionshelix der Schraubungsregel-
it, so vereinfacht sich noch unsere Lösung bedeutend.
ılen hier — Fig. 5 — die Spur- und zugleich Projections-
der Entfernung p von e im negativen Sinne (unterhalb)
die dem Punkte e entsprechende Gerade R parallel zur
nsebene ist, so sind die Spuren der Tangentialebenen
Punkten auf R gleichfalls zu R parallel. Wir ermitteln
ıittpunkte dieser Spuren mit der Geraden T_{o_1}. Es
von der Spur der Tangentialebene des Punktes e'_1
o_1, von der Spur der Tangentialebene des Punktes o im
'm, für den $\overline{o_1{}^{\omega}m} = \overline{Z_1 o_1}$ ist, wobei der Sinn von $\overline{o_1{}^{\omega}m}$
stimmt wird, von der asymptotischen Ebene in $^{\infty}m$ ge-
wobei die Spur der asymptotischen Ebene die um 90°
ı entgegengesetztem Sinne der Schraubung gedrehte
on e'_1 in Bezug auf O_1 ist. Die Spur M^{ϵ} für die Tan-
ene in e construirt man danach, dass die Reihe der

---

[1] ın sehe auch »CI«.

Punkte auf R_I projectiv ist mit der Reihe entsprechender Spurpunkte auf T_{o_I}; man bringt die Gerade $(\infty m e_I)$ mit $(e_I' \infty m)$ zum Schnitte; durch den so erhaltenen Schnittpunkt geht dann M^2 parallel zu R.

Die Tangente T an C in e ist die Schnittgerade der Ebene (RM^2) mit der projicirenden Ebene der durch e gehenden Erzeugenden der Schraubungsregelfläche. Man sieht, dass hier die Tangente T eine Erzeugende des Schmiegungsparaboloids R ist, woraus man entnimmt, dass (eM^2) zugleich auch die Osculationsebene von C im Punkte e ist.

Die Construction des Krümmungshalbmessers ρ von C in einem derartigen Punkte lässt sich in bekannter Weise durchführen. Für die geschlossene Schraubungsfläche bekommen wir aus dieser Construction auch einen sehr einfachen Ausdruck für ρ; seine Ableitung würde aber nichts Neues bieten.

Ist r der Radius von O_I, l die Entfernung des Punktes C_I von Z_I, p wie früher der Parameter der Schraubung, und betrachten wir den Sinn von $\overline{Z_I C_I}$ als positiv, dann ist

$$\rho = \frac{l^2 r^2 + p^2 (2l \pm r)^2}{\pm 2lr(l \pm r)},$$

in welchem Ausdrucke entweder nur die oberen oder nur die unteren Zeichen zu nehmen sind. Aus dieser Formel bekommt man auch einen Ausdruck für die Krümmungsradien der Curve C_I in ihren Scheiteln, für welche sich die absoluten Werthe $\frac{lr}{2(l \pm r)}$ ergeben.

6. Nicht ohne Interesse ist die Übertragung der Constructionen dieses Abschnittes auf die normalen Schraubungsregelflächen. Das Osculationshyperboloid H wird jetzt zu einem hyperbolischen Paraboloid, dessen Scheitel der Centralpunkt c und dessen Axe die Senkrechte A von c auf Z ist. — Fig. 6. — Die Fläche Q kann man zu unseren Zwecken durch eine normale Schraubungsregelfläche B ersetzen, deren Strictionshelix in den Krümmungskreis K_I von C_I sich projicirt, so dass $(e_I e_I')$ die Projection einer Erzeugenden (ee') und c_I'' die Projection der Axe von B ist. Die Fläche R ist also ein hyper-

es Paraboloid, dessen Scheitel in e und dessen Axe A'
krechte von e auf die Axe der Fläche B ist.
zeichnen wir mit d den Schnittpunkt (AA'), so ist $(d_1 e_1)$
kannt die Normale in e_1 an C_1. Hiedurch ist auch die
te T in e an die Berührungscurve C bestimmt.
ist leicht zu sehen, dass der doppeltconjugirte Kegel V
n Bezug auf die beiden Paraboloide H, R von den Nor-
ıen der Schraubung in Kreisen geschnitten wird. Wir
:n nämlich nur zu zeigen, dass die in einer solchen
ebene gelegenen Spurgeraden der Polarebenen P_m, P'_m
eines Punktes m von T in Bezug auf die beiden Para-
zu einander senkrecht sind.
gen wir durch m die zur Tangentialebene von H im
l c parallele Ebene Z, so liegt ihr Pol z bezüglich H auf A
:risch zum Schnittpunkte (AZ) in Bezug auf den
l c und ist ein Punkt der Ebene P_m. Ebenso wenn wir
ı die zur Tangentialebene von R im Scheitel e' parallele
Z' legen, ist deren Pol z' in Bezug auf R der zum
$(A'Z')$ bezüglich e' symmetrisch gelegene Punkt von A';
: ist ein Punkt der Ebene P'_m. Es sind also (ze), $(z'e)$ die
durch e gehenden Normalebene der Schraubung ge-
Spuren von P_m, respective P'_m. Dass $(ze) \perp (z'e)$ ist,
ich unmittelbar aus der Ähnlichkeit der Dreiecke (zce),

r wollen den Spurkreis V des Kegels V ermitteln,
in der Normalebene der Schraubung sich befindet, die
n negativem Sinne die Entfernung p besitzt. Ist als-
die Spur von T, für welche $\overline{e_1 v_1} = \overline{e_1 d_1}$, dann liegt der
ıkt p der Polare von T in Bezug auf H in der durch v
;ezogenen Parallelen und es ist $(e_1 p_1) \perp (Z_1 e'_1)$, $\overline{e_1 p_1} = \overline{Z_1 e'_1}$.
nselben Grunde liegt der Spurpunkt q der Polare von T
g auf R in der durch v zu (ee') gezogenen Parallelen
st $(e_1 q_1) \perp (e''_1 c_1)$, $\overline{e_1 q_1} = \overline{e''_1 c_1}$.
zen wir $\overline{ce} = l$, $\overline{ee'} = l'$, $\overline{c_1 Z_1} = r$, $\overline{e'_1 e''_1} = r'$, so ist
$2l' \pm r$, $\overline{v_1 q_1} = 2l \pm r'$, wobei in der Wahl der Zeichen
'eifel obliegen kann.
s der Lage des Durchmessers $\overline{pq}$ ergibt sich die Lage
v gehörigen Durchmessers von V, also auch die

Spur M^{ω} der Osculationsebene O als die Tangente von V im Punkte v äusserst einfach.

Diese Entwickelung liefert folgende Construction der Osculationsebene O. Man zieht durch den Halbirungspunkt von $\overline{c_1 Z_1}$ die Parallele zu A'_1, durch den Halbirungspunkt von $\overline{e'_1 e''_1}$ die Parallele zu A_1. Bezeichnen wir den Schnittpunkt dieser Parallelen mit g_1, alsdann ist die Spur M^{ω} der gesuchten Osculationsebene parallel zu $(d_1 g_1)$.

Ist nun die Osculationsebene O gefunden, so kann man den Krümmungsmittelpunkt o_1 von C_1 in e_1 nach einer in Cl. S. 911, Fig. 1, entwickelten Construction aufsuchen. Im Schnittpunkte von $(Z_1 e'_1)$ mit $(d_1 e_1)$ errichtet man die Senkrechte zu $(d_1 e_1)$, welche die Gerade $(c_1 e'_1)$ in i_1 schneiden möge; die Senkrechte in i_1 auf $(d_1 g_1)$ trifft die Normale $(d_1 e_1)$ von C_1 im verlangten Punkte o_1. Da bezüglich der Lösung unserer Aufgabe die gegebene normale Schraubungsfläche und die Schraubungsfläche B ihre Rollen auch austauschen können, so kann man auch im Schnittpunkte von $(d_1 e_1)$ mit $(c_1 e''_1)$ die Senkrechte zu $(d_1 e_1)$ errichten, welche die Gerade $(c_1 e_1)$ im Punkte j_1 treffen möge. Die Senkrechte von j_1 auf $(d_1 g_1)$ trifft $(d_1 e_1)$ abermals im fraglichen Punkte o_1.

Vereingen wir die zwei letzten von einander unabhängigen Constructionen, so bekommen wir den Krümmungsmittelpunkt o_1, ohne erst auf vorhergegangene Erörterungen Rücksicht nehmen zu müssen, einfach dadurch, dass wir $(d_1 e_1)$ mit der Geraden $(i_1 j_1)$ zum Schnitte bringen. Diese Construction von o_1 bestimmt auch die Osculationsebene O, indem $(i_1 j_1)$ senkrecht zu $(d_1 g_1)$, also senkrecht zur Spur M^{ω} von O sein muss.

Dass $(i_1 j_1)$ senkrecht zu $(d_1 g_1)$ ist, folgt auch leicht aus planimetrischen Gründen; wir finden nämlich, wenn wir $\overline{d_1 e_1} = d$ setzen, dass $\overline{j_1 e_1} = \frac{d^2}{2l \pm r'}$, $\overline{e_1 i_1} = \frac{d^2}{2l' \pm r}$, woraus die Richtigkeit unserer Behauptung sich sogleich ergibt.

Wenn in besonderem Falle der Punkt e auf die Strictionshelix der gegebenen Schraubungsfläche zu liegen kommt, oder wenn e_1 auf K_1 liegt, dann ergibt sich für den Krümmungshalbmesser von C_1 aus den letzten Gleichungen der Werth $\frac{l^2}{2l \pm r'}$

ıgsweise $\frac{l'^2}{2l' \pm r}$, wobei bezüglich des Zeichens wieder
ıl leicht zu treffen ist. Auch die Gerade $(i_1 j_1)$, also die
onsebene O selbst ergibt sich aus den genannten
ıgen für diese Speciallagen von e ohneweiters; übrigens
ie zuerst gegebene Construction von $(d_1 g_1)$ auch hier
ɔar.

ɜere Betrachtungen liefern nebenbei die Lösung folgen-
ȝabe. Ein rechter Winkel bewegt sich in seiner Ebene
dass seine Schenkel beständig zwei feste Curven
ı; es ist der Krümmungsmittelpunkt der durch den
des Winkels beschriebenen Bahn in irgend einem
e derselben zu ermitteln.

der Natur der Aufgabe entsprechende Lösung lässt sich
bar vornehmen, indem der Wendekreis der umgekehrten
ng bekannt ist, da er durch die Punkte d_1, Z_1, e_1'' geht. Die
Durchführung der Lösung unserer Aufgabe auf dieser
ge gibt in einfachster Anordnung Burmester in seinem
:he der Kinematik an betreffender Stelle.

Construction von Conturen und Conturevoluten der Schraubungsflächen.

Es möge zunächst eine Bemerkung über die Contur-
ıung einer Fläche überhaupt vorausgeschickt werden.
sei E eine Ebene, in die wir die gegebene Fläche R von
einem im Endlichen gelegenen oder unendlich fernen
ı q projiciren. Der Berührungskegel der Fläche, welcher
ıen Mittelpunkt hat, schneidet die Ebene E in der Con-
: C' der Projection dieser Fläche. Eine beliebige, durch q
: Tangentialebene der Fläche schneidet demnach die
ɔnsebene in einer Tangente der Conturcurve; der Be-
spunkt e' dieser Tangente ist die Projection des Be-
spunktes e der Fläche mit der erwähnten Tangential-

dieser allgemein gebrauchten Construction von C'
wir noch hinzufügen, wie man den Krümmungskreis K'
:ontur für den beliebig auf C' gelegenen Punkt e' er-
würde.

Wir denken uns nämlich eine die gegebene Fläche in e osculirende Fläche zweiten Grades F und projiciren dieselbe ebenfalls von q aus in die Ebene E; dann osculirt der Conturkegelschnitt F' der Projection von F die Curve C' im Punkte e'.

Der Krümmungskreis von F' in e' ist also der gesuchte Kreis K; sein Mittelpunkt k ist derjenige Punkt der Conturevolute, in welchem dieselbe von der Normalen in e' zu C' berührt wird. Der Kegelschnitt F' ist die Projection desjenigen Kegelschnittes F von F, welcher in der Polarebene Q des Punktes q in Bezug auf F enthalten ist. Somit geht Q durch die Polare von (qe) in Bezug auf die Fläche F, oder mit anderen Worten, durch den zu (qe) conjugirten Durchmesser L der Indicatrix in e für die gegebene Fläche R. Irgend ein Kegelschnitt G auf F hat mit F zwei Punkte gemeinschaftlich; seine Projection G' berührt desshalb F' in zwei Punkten. Fallen nun die Schnittpunkte von F und G zusammen, beispielsweise im Punkte e, dann schmiegt sich G' dem Kegelschnitte F' hier im Punkte e' vierpunktig an, so dass der Krümmungskreis von G' mit dem fraglichen Kreise K identisch ist.

Hieraus resultirt beiläufig folgende Construction von k, respective K.

Man sucht zu dem projicirenden Strahle (qe) den conjugirten Strahl L der Indicatrix des Punktes e, legt durch L eine beliebige Ebene (insbesondere die Normalebene) und ermittelt in bekannter Weise den Krümmungskreis G der Schnittcurve von R mit dieser Ebene; der Krümmungsmittelpunkt der Projection G' dieses Kreises in e' ist der gesuchte Punkt k.

Für die Contur der Orthogonalprojection einer Fläche führt uns diese Construction leicht zu einer von Mannheim (Cours de géom. descr., 2. Aufl., S. 301) herrührenden Formel, nach welcher der Krümmungsradius von C' für irgend einen Punkt e' berechnet wird.

Kennt man umgekehrt zu dem aus irgend einem Punkte auf (qe) der Fläche R umschriebenen Kegel einen längs (qe) sich anschmiegenden Kegel zweiten Grades, so kann man daraus leicht die Krümmung in e der Schnittcurve von R mit einer durch L gelegten Ebene ermitteln.

Die Übertragung der jetzt besprochenen Constructionen
raubungsflächen unterliegt keinen Schwierigkeiten, da
n Krümmungsmittelpunkte einer Curve auf der Schrau-
iche in jedem Punkte, für den man die Osculationsebene
ve kennt, auf kurzem Wege gelangen kann.

r die Construction der Contur und Conturevolute der
on einer Schraubungsfläche für den Fall, dass wir aus
einem im Endlichen gelegenen oder unendlich fernen
q in eine Normalebene $\mathbf{M}$ der Schraubung projiciren,
wir aus dem II. Abschnitte ein sehr einfaches Ver-

ir projiciren die Schraubungsfläche mit der Berührungs-
des projicirenden Berührungskegels ausserdem auch
nal in die Ebene $\mathbf{M}$. Ist nun e ein Punkt auf C, und E
male in e der diesem Punkte entsprechenden Normal-
ler Schraubungsfläche, so fällt man der in Fig. 2 darge-
Construction zufolge von Z_{I} auf $(q_{\mathrm{I}}e_{\mathrm{I}})$ die Senkrechte,
E_{I} im Punkte e'_{I} trifft. Alsdann ist man im Stande, den
r auf E nach der Erläuterung des Art. 3 zu construiren;
tralprojection dieses Punktes ist der der Centralprojection
entsprechende Krümmungsmittelpunkt der Conturcurve.
eses Verfahren lässt sich auch bei der Conturbestimmung
jection einer Schraubungsfläche verwenden, wenn die
ionsebene $\mathbf{E}$ wie immer gegen die Schraubungsaxe ge-
st. Dasselbe führt, was die Darstellung anbelangt, all-
rascher zum Ziele, als das vordem erläuterte. Es möge
rchführung hier skizzirt werden.

t das Projectionscentrum q im Endlichen, so legt man
dasselbe eine Normalebene der Schraubung $\mathbf{M}_q$, die man
eite Projectionsebene betrachtet, in welche orthogonal
rt wird. Die Projection auf diese Ebene stellt man in der
ppung in die Projectionsebene $\mathbf{E}$ dar. Es sei abermals e
rührungspunkt einer durch q gehenden Berührungsebene
hraubungsfläche; seine Orthogonalprojection e_μ auf $\mathbf{M}_q$
us dieser seine Centralprojection e' auf $\mathbf{E}$ wird in be-
r Weise dargestellt. Nun ermitteln wir die dem Punkte e
ge Normalebene der Schraubung $\mathbf{M}_e$ und zu der in ihr
nen Spur des aus q der Schraubungsfläche umschriebenen

Kegels den Krümmungskreis $\mathfrak{K}$ in e, dessen Radius in der umgelegten Projection auf M_q nach Früherem auf kurzem Wege erhalten wird. Die Centralprojection $\mathfrak{K}'$ von $\mathfrak{K}$ osculirt C' im Punkte e'. Der Mittelpunkt des Krümmungskreises K von $\mathfrak{K}'$ in e' ist der zu e' gehörige Punkt k der gesuchten Conturevolute. Der Radius von K kann aus dem Radius von $\mathfrak{K}$ nach der bekannten Formel von Geisenheimer[1] bequem construirt werden, wenn man die durch die bisherige Darstellung bereits gegebene centrische Collineation zwischen $\mathfrak{K}'$ und der Umlegung von $\mathfrak{K}$ in die Projectionsebene E berücksichtigt.

Für eine Parallelprojection wird unsere Darstellung nur noch einfacher. Sind aber die projicirenden Strahlen parallel zur Normalstellung der Schraubung, dann versagt das eben erläuterte Verfahren den Dienst.

Ist T die Tangente und O die Osculationsebene im Punkte e einer Curve auf einer Schraubungsfläche, so könnten wir nach dem Gesagten auch die Krümmung dieser Curve im Punkte e aufsuchen. Wir ermitteln nämlich den zu T conjugirten Durchmesser L der Indicatrix und denken uns der Schraubungsfläche die Cylinderfläche von der Richtung L umschrieben, zu welcher wir nach Früherem diejenige Cylinderfläche zweiten Grades construiren, welche sich ihr längs L anschmiegt und von den Normalebenen der Schraubung in Kreisen geschnitten wird. Der Schnittkegelschnitt dieser Cylinderfläche zweiten Grades mit O osculirt die erwähnte Curve in e. Diese Construction gestaltet sich am einfachsten, wenn in einer Normalebene der Schraubung die Spur von O senkrecht ist zur Spur der Tangentialebene in e, auf welchen Fall der allgemeine mit Hilfe des Satzes von Meusnier zurückgeführt werden kann. Indessen ist die Darstellung dieser an sich einfachen Construction umständlicher, als diejenige der früher und in »CI« abgeleiteten, diesen Gegenstand betreffenden Constructionen.

9. Projiciren wir die Schraubungsfläche parallel zur Normalstellung der Schraubung, dann lässt sich das Problem der Conturbestimmung stets auch auf den Fall der Orthogonal-

---

[1] Zeitschrift für Math. u. Phys., 1880, Bd. 25, S. 214, oder Chr. Wiener, Lehrb. der darst. Geom., Bd. 1, S. 218.

on in eine zur Schraubungsaxe Z parallele Ebene
'ühren.

ıs diesem Grunde, dann wegen der häufigsten Verwen-
ınd der überaus einfachen Darstellung wollen wir
zt insbesondere mit der Construction der Contur
onturevolute der Orthogonalprojection einer
ubungsfläche A in eine zur Axe Z parallele
N näher befassen.[1] — Fig. 7. —

ɜse Contur C_{II} ist die Projection der Berührungscurve C
raubungsfläche mit der sie berührenden zu N normalen
rfläche. Wir wollen den Mittelpunkt k_{II} des Krümmungs-
von C_{II} in irgend einem Punkte e_{II} construiren.

ir sehen, dass die Projection der Flächennormale in
'unkte von C auch die Normale von C_{II} in der Projection
Punktes ist. Bezeichnen wir also die Normale der
ɔungsfläche im Punkte e mit N und die Normale des
ıtiven Punktes auf C mit N', so können wir k_{II} als
ɔunkt von N_{II} mit N'_{II} auffassen. Denken wir uns durch
len Normalen N, N' eine Regelfläche zweiten Grades, so
ɜselbe von der projicirenden Ebene Y der Normale N im
k berührt, dessen Projection der verlangte Krümmungs-
ınkt k_{II} ist. Es kommt somit nur auf die Ermittelung
erartigen Regelfläche zweiten Grades an. Als solche
wir ein besonderes hyperbolisches Paraboloid P. Wir
zu dem Zwecke die Tangente T der Curve C in e, dann
ır M der Ebene (TN) in einer Normalebene der Schrau-
I. Die durch M zur Axe Z parallel gelegte Ebene Z_{μ}
ı wir als Richtebene des Paraboloides P an, wodurch
e unzweideutig bestimmt ist. Die in der durch e gehen-
rmalebene der Schraubung gelegene, die Axe Z schnei-
und zu N parallele Gerade J gehört gleichfalls dem
oid an.[2]

zt kann man auch schon ohneweiters den Berührungs-
der Ebene Y mit P aufsuchen. Man hat bloss durch Z_{I}

---

[1] Vir bezeichnen diese Projection als die zweite, die Hauptprojection als
behaltend und stellen beide Orthogonalprojectionen im üblichen Zu-
ange dar.

[2] :I, S. 911, Fig. 1.

die Parallele J_I zu N_I zu ziehen und auf dieselbe die Senkrechte von e_I zu fällen. Die Parallele zu M_I durch den Schnittpunkt i_I dieser Senkrechten mit J_I schneidet N_I im Punkte k_I, aus dem man dann k_{II} als die zweite Projection von k ableitet.

Wie man vorzugehen hätte, wenn bei Anwendung des Paraboloides P sich die Constructionen nicht mit nöthiger Genauigkeit darstellen lassen, ist aus der soeben citirten Abhandlung ersichtlich. Ist insbesondere die Tangentialebene der Schraubungsfläche in e normal zur Schnittgeraden X unserer Projectionsebene mit der Hauptprojectionsebene, so kann man folgendermassen zum Ziele kommen. Man construirt die Axen A, B der Indicatrix in e, nimmt auf Z denjenigen Punkt an, welcher von der dem Punkte e gehörigen Normalebene der Schraubung in positivem Sinne um den Parameter p entfernt ist, zieht durch ihn die Parallelen A', B' zu A respective B und lässt die Ebene $(A'B')$ um Z eine Vierteldrehung im Sinne der Schraubung vollziehen. Alsdann wird N von A' im Hauptkrümmungsmittelpunkte a des Schnittes (BN) und von B' im Hauptkrümmungsmittelpunkte b des Schnittes (AN) getroffen. Eine Regelfläche durch die benachbarten Normalen N, N' wird von den Ebenen (AN), (BN), (TN), (ZN), beziehungsweise in a, b, t und dem unendlich fernen Punkte berührt, wodurch die Ermittelung von k als des Berührungspunktes der projicirenden Ebene Y auf mannigfache Weise vorgenommen werden kann.[1]

10. In Fig. 7 ist die Construction des vorigen Artikels für eine allgemeine Schraubungsregelfläche dargestellt worden. Aus der Construction lässt sich leicht eine Formel zur Berechnung des Krümmungshalbmessers ρ von C_{II} gewinnen. An dieselbe anschliessend möge eine Gleichung der Conturevolute entwickelt werden.

Im Folgenden setzen wir den Parameter p der gegebenen Schraubungsregelfläche A, den Drehungsradius s für die Strictionshelix S, den Drehungsradius r für die Rückkehrhelix O der asymptotischen Schraubenfläche von A als bekannt voraus.

[1] Man vergl. Cl, S. 913.

)ie Lage irgend einer geraden Erzeugenden P der Schrau-
;regelfläche lässt sich fixiren, wenn man noch den Punkt c
t. in welchem sie die Strictionshelix schneiden soll.
:hten wir die durch Z zur Axe X, in der sich unsere
ı Projectionsebenen schneiden, senkrechte Ebene Z als
ige, von der aus die Drehung um Z gemessen wird, so
n wir den Winkel φ, welchen die Ebene (Zc) mit Z ein-
sst, als veränderlichen, die Erzeugende P bestimmenden
ıeter in unsere Entwickelung einführen. Dabei ist zu be-
n, dass einem in Z als Anfangspunkt angenommenen
ω von S die Amplitude 0 zukommt und entsprechend
ntstehung von S man auch alle ausserhalb des Inter-
-2π liegenden Amplituden zu berücksichtigen hat
ie Ebene M des vorigen Artikels wählen wir jetzt von c
Entfernung p im negativen Sinne gemessen und be-
en sie mit M'. Dieselbe schneide N im Punkte m, T im
: m' und P im Punkte m''. Den Schnittpunkt von N_1
$'_1 m''_1$) bezeichnen wir mit j_1. Es ergeben sich nach ein-
die folgenden Ausdrücke:

$$\overline{e_1 m''_1} = r,\quad \overline{j_1 e_1} = r\cos\varphi,\quad \overline{e_1 m_1} = \frac{p^2}{r.\cos\varphi},$$

$$\overline{j_1 m_1} = \frac{p^2 + r^2\cos^2\varphi}{r\cos\varphi}.$$

$_1c_1$) und N_1 schneiden sich bekanntlich im Punkte o_1 auf
reise O_1; die Tangente dieses Kreises in o_1 schneide Z_1
rägt man $\overline{o_1 f_1} = \overline{z_1 o_1}$ auf diese Tangente auf, so erhält
der Verbindungsgeraden $(f_1 e_1)$ die Tangente T_1. Fällen
ch von f_1 auf N_1 die Senkrechte, deren Fusspunkt g_1
ı möge, so findet man weiter

$$\overline{f_1 g_1} = \frac{r\sin^2\varphi}{\cos\varphi},\qquad \overline{e_1 g_1} = \frac{r(1+\sin^2\varphi)\pm s}{\sin\varphi}$$

$$\overline{m'_1 j_1} = \frac{r^2\sin^3\varphi}{r(1+\sin^2\varphi)\pm s}.$$

Aus den Dreiecken $(i_1 e_1 k_1)$, $(m'_1 j_1 m_1)$ folgt

$$\overline{e_1 k_1} = \frac{p^2 + r^2 \cos^2\varphi}{r^2 \sin^3\varphi} \cdot [r(1+\sin^2\varphi) \pm s],$$

so dass schliesslich für den gesuchten Radius sich ergibt

$$\rho = \frac{r(1+\sin^2\varphi) \pm s}{pr^2 \sin^3\varphi} \cdot (p^2 + r^2 \cos^2\varphi)^{3/2}.$$

Für die Scheitelpunkte der Conturcurve ist $\sin\varphi = 1$, $\cos\varphi = 0$, somit der Krümmungsradius $\rho_0 = \frac{p^2}{r^2} \cdot (2r \pm s)$.

Die Gleichungen der Contur und Conturevolute entwickeln wir in rechtwinkeligen Coordinaten, und zwar wählen wir für das Coordinatensystem die Projection ω_{II} des zuvor hervorgehobenen Punktes ω als Ursprung, Z_{II} der Lage und dem Sinne nach als Y-Axe; was die X-Axe der Coordinaten anbelangt, so nehmen wir bei rechtsseitiger Schraubung den einen, bei linksseitiger den anderen Sinn derselben als positiv an, etwa wie in der Figur angedeutet worden ist. Dieser Anordnung zufolge ist, wie leicht aus dem Zusammenhange der Constructionslinien zu entnehmen, die Conturcurve ausgedrückt durch die beiden Gleichungen

$$x = \frac{r \cos^2\varphi \pm s}{\sin\varphi}, \qquad y = p\left(\varphi - \frac{r \pm s}{r} \cot\varphi\right)$$

und mit Berücksichtigung des Ausdruckes für ρ ergeben sich aus diesen Gleichungen die beiden Gleichungen für die Conturevolute

$$x = \frac{1}{r^2 \sin^3\varphi} \left\{ p^2 r(1+\sin^2\varphi) + r^3 \cos^2\varphi (1 + 2\sin^2\varphi) \pm s(p^2 + r^2) \right\},$$

$$y = p\varphi + \frac{\cos\varphi}{pr \sin^3\varphi} \left\{ p^2 r + r^3 \cos^2\varphi (1 + \sin^2\varphi) \pm s(p^2 + r^2) \cos^2\varphi \right\}.$$

Für $s = 0$ folgen aus unseren Gleichungen die Gleichungen für die Conturcurven und Conturevoluten axialer (geschlossener)

ıbungsregelflächen in ähnlicher Form wie sie Herr Tesař
rt hat.[1]

l. Für die Schraubungsregelflächen ergeben sich nebst-
ɔch andere Lösungen des in Art. 9 behandelten Problems,
· noch besprechen wollen.

s sei wie vordem e_{II} die Projection des Berührungspunktes
rch die Erzeugende P gelegten projicirenden Ebene mit
hraubungsregelfläche und wir wollen wieder den Mittel-
k_{II} des zu e_{II} gehörigen Krümmungskreises von C_{II} con-
n.

'ir denken uns das die Schraubungsfläche längs P oscu-
Hyperboloid H. Der Conturkegelschnitt F_{II} seiner Pro-
osculirt C_{II} in e_{II}, hat also für diesen Punkt mit C_{II} den-
Krümmungsmittelpunkt. F_{II} ist die Projection eines
chnittes F von H, auf dessen Darstellung es bei unserer
ɔe lediglich ankommt. Da wir von diesem Kegelschnitt
Punkt e kennen, so reicht es zu seiner Bestimmung hin,
wir etwa noch seine Durchmesserinvolution ausdrücken.
. 8.

ie Senkrechte vom Centralpunkte c der Erzeugenden P
Schraubungsaxe Z trifft die Rückkehrhelix O im Mittel-
o des Hyperboloids H, somit auch des Kegelschnittes
durch o zur Tangente T der Curve C im Punkte e ge-
: Parallele G bildet mit (oe) ein Paar conjugirter Durch-
von F, deren Projectionen G_{II} P_{II} und $(o_{II}e_{II})$ ein Paar
irter Durchmesser in Bezug auf F_{II} sind. Bezeichnen wir
ıtur der ersten Projection von H mit H_{I}. Dieselbe ist die
ion des Kegelschnittes H auf H. Die Ebenen von H und
eiden sich in einem Durchmesser V' des Hyperboloids,
Polare in Bezug auf dasselbe unendlich fern durch die
lstellung zu X gegeben ist. Deshalb schneidet die durch
echt zu X gelegte Ebene die Ebene von F in dem zu V'
irten Durchmesser V dieses Kegelschnittes. Zu dem
nesser V' führt uns folgende Überlegung. Da der Kreis
Kegelschnitt H_{I} im Scheitel c_{I} osculirt, so kann man

[1] Tesař, »Conturevolute axialer Schraubenflächen«, diese Sitzungs-
Bd. 94, Abth. II, S. 181.

81*

beide als sich doppelt berührende Kegelschnitte auffassen; P_{I} ist die Berührungssehne. Die Polaren irgend eines Punktes in Bezug auf solche Kegelschnitte schneiden sich auf der Berührungssehne. Aus diesem Grunde ist der Schnittpunkt i_{I} der durch Z_{I} zu X_{I} gezogenen Parallelen X'_{I} mit P_{I} auch schon ein Punkt von V'_{I}. Die Ebene von H geht durch die Tangente T_3 in c an die Strictionshelix S; somit ist i_{I} die Projection des Punktes i auf T_3, der dem Durchmesser V' angehört. Die Gerade T_3 ist dadurch ermittelt worden, dass wir ihren Punkt m^3 in der Normalebene der Schraubung, welche von c die Entfernung $-p$ hat, construirt haben. Es bildet demnach die von o_{II} auf X_{II} gefällte Senkrechte V_{II} mit der Geraden $V'_{\text{II}} \equiv (o_{\text{II}} i_{\text{II}})$ ein zweites Paar conjugirter Durchmesser von F_{II}.

Zieht man durch c_{I} die Parallele zu $(o_{\text{I}} Z_{\text{I}})$, bis sie X'_{I} in j_{I} trifft, so ist $(o_{\text{I}} j_{\text{I}})$ parallel zur ersten Spur der Ebene von F.[1] Irgend eine Normalebene der Schraubung $\mathbf{M}'$ werde von der asymptotischen Ebene (oP) in der Geraden M' getroffen. Alsdann ist die durch den Schnittpunkt von M'_{I} mit $(c_{\text{I}} o_{\text{I}})$ zu $(o_{\text{I}} j_{\text{I}})$ gezogene Parallele L'_{I} die Projection der Spurgeraden, in welcher die Ebene des Kegelschnittes F von $\mathbf{M}'$ geschnitten wird.

Denken wir uns ferner durch o die zu P parallele Erzeugende P' der asymptotischen Schraubungsfläche, so schneidet die durch P' zu Z parallel gelegte Ebene die Gerade L' im Mittelpunkte l des Spurkegelschnittes U in $\mathbf{M}'$ für den asymptotischen Kegel des Hyperboloids **H**, wie leicht einzusehen ist. Übrigens lässt die Darstellung von l verschiedene Variationen zu. Die Verbindungsgerade Q der Punkte l und o ist ein Durchmesser von F; die zu ihm in Bezug auf den asymptotischen Kegel von **H**, also in Bezug auf **H** selbst conjugirte Durchmesserebene ist parallel zu $\mathbf{M}'$ und trifft die Ebene von F in dem zu (lo) conjugirten Durchmesser. Hiemit repräsentirt Q_{II} und $(o_{\text{II}} c_{\text{II}})$ ein drittes Paar conjugirter Durchmesser von F_{II}.

Die Ermittlung des Durchmessers Q vereinfacht sich noch erheblich, wenn wir statt einer beliebigen Normalebene der Schraubung $\mathbf{M}'$ diejenige $\mathbf{M}_c$ wählen, welche durch den Punkt c selbst geht. Wenden wir nämlich jetzt die soeben durchgeführte

[1] Monatshefte a. a. O.

struction an, so ergibt sich, wenn wir auf $(c_I o_I)$ die Länge $= \overline{Z_I o_I}$ auftragen, dass $(q'_I e_I)$ die Gerade P'_I in der Projection s Schnittpunktes q von Q mit M_e trifft.

Da das Durchmesserpaar G_{II} $(o_{II} e_{II})$ unmittelbar gegeben ist, icht es hin, bloss eines der Paare $V_{II} V'_{II}$, Q_{II} $(o_{II} c_{II})$ noch zu truiren, wodurch dann die Durchmesserinvolution von F_{II} mmt ist.

Den Krümmungsmittelpunkt k_{II} können wir auf N_{II} etwa r Weise ermitteln, dass wir den Parameter d der Involution, elcher P_{II} von der Durchmesserinvolution getroffen wird, ıchen. Dieser Parameter gibt die Länge des zu $(o_{II} e_{II})$ con- en Durchmessers von F_{II} an. Ist weiter t die Entfernung Punktes o_{II} von P_{II}, so ergibt sich k_{II} aus der bekannten hung $\rho = \frac{d^2}{t}$, wenn wir wieder für $\overline{e_{II} k_{II}}$ kurzweg ρ setzen.

Für den Fall einer axialen Schraubungsfläche ist U eine e, hiemit F_{II} eine Hyperbel. Die Construction von k_{II} kann wie folgt vorgenommen werden. — Fig. 9. —

Wir legen die Normalebene der Schraubung M' in der rnung $2p$ von c etwa im negativen Sinne gemessen. Ist m' purpunkt von P in dieser Ebene, so ist der auf O_I liegende p_I von P_I, welcher in der Mitte von $\overline{c_I m'_I}$ liegt, ein Brenn- von U; machen wir $\overline{o_I l_I} \# \overline{c_I p_I}$, so ist l_I der Mittelpunkt $\overline{c_I}$ die Länge der Hauptaxe von V_I. Legen wir desshalb c_I den Kreis, welcher in l_I seinen Mittelpunkt hat, so wird be von der durch p_I zu X_I gezogenen Parallelen in zwei ı Punkten $g_I g'_I$ geschnitten, welche als Projectionen zweier e in der Ebene M' aufzufassen sind. Die Geraden $(g_{II} o_{II})$, sind die Asymptoten von F_{II}. Schneidet also etwa $(g_{II} o_{II})$ erade P_{II} in h_{II}, so repräsentirt $\overline{h_{II} e_{II}}$ die Länge d, so dass h obiger Formel jetzt ohne weiters erhalten wird.

Einfacher gelangt man auch hier zum Ziele, wie man im ten Artikel sehen wird, wenn man die Durchmesser- tion von F_{II} darstellt.

rägt man $cj = \overline{ec}$ auf die Erzeugende P auf und fällt von enkrechte auf Z, so ist der Fusspunkt dieser Senkrechten iher mit i bezeichnete Punkt, so dass (io) auch jetzt der messer V' von F ist. Dies leuchtet sogleich ein, wenn

man den Berührungspunkt von Z_{II} mit F_{II} nach dem Satze von Brianchon sucht.

Wollte man den zu $(c_{II}o_{II})$ conjugirten Durchmesser Q_{II} von F_{II} darstellen, so könnte man hier ebenso einfach wie den Punkt q, auch den Punkt l von Q in der zuletzt angenommenen Ebene M', dessen Projection l_{I} soeben benutzt worden ist, construiren.

Durch nachstehende Modification wird die Construction dieses Artikels noch vereinfacht.

Wir legen nämlich durch o die Parallele G zu T und bestimmen auf ihr die Involution conjugirter Punkte bezüglich der Fläche II. Der Parameter dieser Involution wird abermals durch d repräsentirt. Der Mittelpunkt o und der unendlich ferne Punkt $g\infty$ von G bilden ein Paar dieser Involution. Die Polarebene eines beliebigen Punktes u auf G schneidet G in dem conjugirten Punkte u' von u und durch uu' ist ein zweites Paar besagter Involution bestimmt. Die zu G conjugirte Durchmesserebene von II geht durch (oc) und ist senkrecht zu unserer zweiten Projectionsebene. Die Polarebene von u muss zu dieser Ebene parallel sein; sie wird deshalb bestimmt sein, wenn wir noch einen ihrer Punkte aufsuchen. Wählen wir nun den Punkt u im Schnitte der Tangentialebene der Schraubungsfläche, also auch der Fläche II in einem beliebig auf P angenommenen Punkte, so geht durch diesen auch schon die Polarebene des Punktes u und ist dem Gesagten zufolge bereits vollkommen bestimmt.

In unserem Falle haben wir u im Schnitte der Centralebene durch P mit G angenommen, so dass die Polarebene von u durch den Centralpunkt c geht. Es schneidet somit die durch c_{II} zu $(c_{II}o_{II})$ gezogene Parallele den Durchmesser G_{II} im Punkte u'_{II}.

Die Involution $o_{II}g\infty_{II}$, $u_{II}u'_{II}, \ldots$ auf G_{II} kann man behufs Construction von d schon im Vorhinein in der Richtung von $(o_{II}c_{II})$ verschieben, bis sie auf die Gerade P_{II} beziehungsweise nach $e_{II}p_{\infty II}$, $v_{II}c_{II}, \ldots$ zu liegen kommt.

Haben wir nun d construirt, so wird ρ wieder aus obiger Relation erhalten. Statt dessen können wir auch in folgender Art verfahren.

Wir projiciren die Involution $e_{II}p_{\infty II}$, $v_{II}c_{II}, \ldots$ von o_{II} aus durch eine Strahleninvolution, die wir als Durchmesserinvolution

durch e_{II} gehenden Kegelschnittes F'_{II} auffassen wollen.
i können wir F'_{II} im Sinne von Chr. Wiener als die durch
ichtung von P_{II} gegebene Imaginärprojection von F_{II} be-
ten. Die Kegelschnitte F_{II}, F'_{II} haben in e_{II} der Grösse nach
ıe, dem Sinne nach entgegengesetzte Krümmungsradien.
e Aufgabe ist also gelöst, wenn wir den Krümmungs-
punkt k'_{II} von F'_{II} in e_{II} aufsuchen, zu welchem Zwecke
wa nach der im folgenden Artikel erläuterten Construction
ıen.

ass man auch hier aus dem Zusammenhange der Con-
onslinien den analytischen Ausdruck für ρ und die
ung der Conturevolute in früher gegebener Form leicht
uem finden würde, ist selbstverständlich.

e Ableitung der Conturevolute einer beliebigen Parallel-
on oder Centralprojection für irgend eine Schraubungs-
che könnte auf Grund ähnlicher Betrachtungen bewerk-
werden.

Im vorigen Artikel haben wir die Bestimmung von ρ
g gemacht von der Ermittelung des Parameters d einer
on, die zwar rasch durchgeführt werden kann, jedoch
r quadratischen Construction beruht. Linear und zu-
kürzerem Wege kann ρ auf Grund der Betrachtungen
rn C. Pelz in seiner Abhandlung: »Die Krümmungs-
ser-Constructionen der Kegelschnitte als Corollarien
einer'schen Satzes« in den Sitzungsber. der königl.
esellschaft der Wissensch. in Prag, Jhrg. 1879, S. 205,
ı werden.

erwähnten Satz leitet H. Pelz in folgender Form ab:
der Ebene eines Kegelschnittes C um einen beliebigen
lesselben ein Strahl gedreht, so ist die Enveloppe des
ler Lage bezüglich C conjugirten Normalstrahles eine
elche die Kegelschnittaxen, die Tangente und Normale
d zwar die letztere im Krümmungsmittelpunkte des
berührt.«

tellen uns jetzt die Aufgabe: Von einem Kegelschnitte,
ttelpunkt wir mit o bezeichnen wollen, ist ein Punkt t
Tangente T und nebstdem ein Paar conjugirter
ser, welches T in den Punkten a, b treffen möge,

gegeben; es ist der dem Punkte t entsprechende Krümmungsmittelpunkt t_o, eventuell Krümmungsradius ρ des Kegelschnittes zu construiren. — Fig. 9 *a*. —

Wir fällen etwa von a auf (bo) die Senkrechte N_a. Nun ist die Steiner'sche Parabel $\mathfrak{P}$ bestimmt; denn die Geraden T, N_a und die Normale N des Kegelschnittes in t sind drei Tangenten derselben und die Senkrechte zu (to) gibt die Richtung der Axe an. Den Berührungspunkt t_o von N mit $\mathfrak{P}$ ermitteln wir nach dem Satze von Brianchon. Bezeichnen wir N mit 1, 2, T mit 3, N_a mit 4, und die unendlich ferne Gerade mit 5, 6, so ergibt sich aus dem Sechsseit 123456 der Punkt t_o in folgender Weise. Wir errichten in t die Senkrechte zu (to) und in a die Senkrechte zu T und ziehen durch den Schnittpunkt f beider Senkrechten die Parallele zu N_a, welche N in t_o trifft.

Bezeichnen wir noch den Punkt (NN_a) durch a_o und den Schnittpunkt der Normale N mit der von a auf (to) gefällten Senkrechten durch a', so folgt aus den congruenten Dreiecken tt_of, $a'a_oa$, dass $\overline{tt_o} = \overline{a'a_o}$.

Daraus haben wir folgende einfache Lösung der gestellten Aufgabe. Wir errichten von a auf (ob) und auf (ot) die Senkrechten, welche aus der Normale N eine Strecke herausschneiden, die gleich dem gesuchten Radius ρ ist.

Ist die Länge d des zu (to) conjugirten Durchmessers gegeben, dann trägt man $ta = \pm tb = d$ auf die Tangente T auf und erhält die Construction auf S. 228 der citirten Abhandlung: alsdann folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke obt, aa_oa' sogleich auch die im vorigen Artikel verwendete Formel $\rho = \frac{d^2}{t}$.

Zu der eben erwähnten Abhandlung erlaube ich mir hier folgende, unwesentliche Bemerkung zu machen. Die in derselben enthaltenen Krümmungsmittelpunkt-Constructionen werden nach dem Steiner'schen Satze mit Hilfe des Satzes von Brianchon construirt. In der vortheilhaften Wahl des Sechseits liegt die Einfachheit der Construction. Um die Wiederholung dieser Wahl zu vermeiden und das Constructionsresultat directer zu erhalten, kann man sich des folgenden Hilfssatzes bedienen.

»Wenn man in der Richtung der Axe einer Parabel projicirt, so projiciren sich die Abschnitte, welche auf sämmtlichen Tan-

ı dieser Parabel durch zwei feste Tangenten derselben
et werden, auf irgend eine dritte Tangente der Parabel in
e Strecken.«

ieser Satz ergibt sich leicht aus dem Satze von Bri-
›n; übrigens kann er auch in folgender Art abgeleitet
ı.

ehmen wir vorerst als feste Tangenten die Scheiteltan-
A und eine beliebige Tangente B an, bezeichnen mit g
ennpunkt, mit v den Scheitel der Parabel, mit m den auf
enden Fusspunkt des von g auf B gefällten Lothes. und
D eine beliebige Parabeltangente, welche A in n, B in p
möge. Weiter sei A auch diejenige Tangente, auf welche
t wird. Ist p^+ der Fusspunkt der Senkrechten von p auf A,
$\overline{p^+}$ die Projection von $\overline{np}$. Die Punkte g, p, m, n liegen auf
Kreise; die Punkte v und p^+ sind die Projectionen der
ıkte des Durchmessers (gp) dieses Kreises. Projiciren
h den Mittelpunkt desselben auf A, so sehen wir sogleich,
$\overline{p^+} = \overline{vm}$ ist. Damit ist der Satz für unsere specielle
ne bewiesen, und die Richtigkeit des Satzes in der allge-
Fassung leuchtet daraus gleich ein.

der obigen Aufgabe wählen wir T und N als die zwei
N auch schon als die dritte Tangente unseres Hilfssatzes
ɔjiciren die auf den Tangenten N_a und N durch die
festen Tangenten gebildeten Abschnitte $\overline{aa_{,,}}$, $\overline{tt_o}$ nach
pective $\overline{tt_{,,}}$, wir finden sogleich, dass $\overline{tt_o} = \overline{a'a_o}$ ist.

züglich der Anwendung der soeben entwickelten Con-
ı zur Ermittelung des Punktes k_{II} im vorigen Artikel
nun nichts mehr bemerkt zu werden.

Für axiale Schraubungsregelflächen hat Herr J. Tesař
nstruction der Contur und Conturevolute der Ortho-
›jection in eine zur Schraubungsaxe parallele Ebene N
ematischem Wege geliefert. Es geschah dies in zwei
ungen dieser Sitzungsberichte. (Kinematische Bestim-
r Contur einer windsch. Schraubenfläche«, Bd. LXXXVI,
, und »Die Conturevolute axialer Schraubenflächen«,
, II. Abth.)

ɔetrachtet die Projectionen der die Schraubungsfläche
den Geraden als einzelne Lagen einer in der Projections-

ebene N sich bewegenden Geraden und bestimmt die Krümmungsmittelpunkte der von sämmtlichen Lagen dieser Geraden umhüllten Enveloppe. Indem er hiebei die Punktreihe auf der sich bewegenden Geraden als unveränderlich voraussetzt, wird er zu einer Bewegung geführt, die sich aus einer Oscilation und einer Translation zusammensetzen lässt.

Ich will zum Schlusse meiner Untersuchungen noch zeigen, wie man dieses Problem mit den Mitteln der Geometrie der Bewegung allein, ohne dass man Geschwindigkeiten und Beschleunigungen in Betracht zieht, einfach und für Schraubungsregelflächen überhaupt lösen kann.

Eine Schraubungsregelfläche A' wird durch Schraubung einer Geraden P' um eine Axe Z' erzeugt;[1] bei dieser Bewegung beschreibt jeder Punkt der Geraden eine Helix; die Punktreihe auf P' bleibt aber in allen Lagen unveränderlich.

Da nun durch Parallelprojection in eine Ebene eine Punktreihe in eine ähnliche Punktreihe projicirt wird, so können wir mit Bezug darauf unsere Aufgabe folgendermassen formuliren: »Ein ähnlich veränderliches System bewegt sich in der Ebene N so, dass jeder Punkt des Systems eine Sinusoide beschreibt; es sind einzelne Punkte und die ihnen zugehörigen Krümmungsmittelpunkte der von der Systemgeraden P während der Bewegung umhüllten Enveloppe C zu construiren.«

Wir wollen den Punkt c von C auf der Geraden P sowie den ihm entsprechenden Krümmungsmittelpunkt k ermitteln — Fig. 10. —

Die Bahntangenten aller Punkte von P umhüllen eine Parabel $\mathfrak{P}$, welche von der Geraden P im Punkte c der Contur berührt wird. Die Tangenten dieser Parabel sind Projectionen von Erzeugenden eines hyperbolischen Paraboloids, dessen Axe senkrecht zur Schraubungsaxe Z' ist. Daraus folgt, dass die Axe der Parabel $\mathfrak{P}$ senkrech ist zur Projection Z der Schraubungsaxe. Demnach reicht es zur Bestimmung von $\mathfrak{P}$

[1] Der Übersichtlichkeit wegen wird in diesem Artikel bei den Symbolen der Projectionen in die Ebene N der Zifferindex unterdrückt; den Symbolen der projicirten Raumgebilde wird dafür ein Strich beigesetzt. Auch wird es nicht beirren, dass die Symbole der Projectionen auch zur Bezeichnung ihrer Abbildungen in Fig. 10 beibehalten worden sind.

nn wir ausser P noch zwei Tangenten dieser Parabel

r werden also noch die Tangenten T'_γ, T'_δ in zwei
c', respective d' von P' an die zugehörigen Schrauben-
n A' durch ihre Projectionen T_γ, T_δ auszudrücken haben.
mitteln wir den Berührungspunkt e der Tangente P
'arabel vortheilhaft nach dem Hilfssatze des 12. Artikels.
wählen hier T_δ und P als die festen Tangenten und
dritte in dem Satze erwähnte Tangente der Parabel $\mathfrak{P}$.
en angenommenen Tangenten bestimme T_γ den Ab-
$\overline{p}$, welcher nach $\overline{cp^+}$ auf P projicirt wird; die zu P
ı benachbarte Tangente der Parabel bestimmt auf den-
vei Tangenten einen Abschnitt, der nach $\overline{ed}$ projicirt
st also $\overline{de} = \overline{p^+c}$, wodurch e in einfacher Weise con-
'd.

haben bei unserer Darstellung zwei beliebige Tan-
T_δ der Parabel ermittelt; wir können jedoch statt einer
vortheilhaft die Scheiteltangente T_α construiren. Zu
'e denken wir uns die zur Projectionsebene $\mathfrak{N}$ parallele
›ene der Schraubungsfläche und bringen die Gerade
im Punkte a' zum Schnitte. Die Scheiteltangente T_α
a und ist parallel zu Z; sie ist die Projection der
T'_α der dem Punkte a' in der Schraubung gehörigen
eine axiale Schraubungsregelfläche fällt T'_α mit der
ɔ T_α mit Z zusammen.

·en wir somit etwa den Schnittpunkt q von T_γ mit
ıt zu Z auf die Gerade P nach q^+, so hat man aber-
$\overline{q^+c}$ zu machen, um den Punkt e zu erhalten.[1]

vir zur Construction von k selbst schreiten, schicken
: Erwägung voraus.

ichst P irgend eine Gerade in unserem ähnlich ver-
Systeme, e der Punkt auf ihr, in welchem sie von
hncurve berührt wird und o der Schnittpunkt der
in e zu der Geraden P mit der Bahnnormale irgend
es x auf P, so können wir o als momentanen

[1] rgleiche damit die Entwickelung dieser Construction durch
ı diesen Sitzungsberichten, Bd. 87, II. Abth.

Drehungspol für eine Bewegung eines unveränderlichen ebenen Systems in der Ebene N betrachten, welche, was die Gerade P und den auf ihr liegenden Punkt x anbelangt, unsere Bewegung im ähnlich veränderlichen System vollständig ersetzt.

Kennt man den dem Punkte x entsprechenden Krümmungsmittelpunkt x^+ der Bahncurve von x, sowie den dem Punkte e entsprechenden Krümmungsmittelpunkt k der Hüllbahncurve von P, so lässt sich auch leicht der Wendekreis der ersetzenden Bewegung ermitteln. Für die Umkehrung dieser Bewegung geht nämlich der Wendekreis W durch o, k und durch einen Punkt x_0 auf (xo), welcher aus der quadratischen Verwandtschaft zwischen den Punkten des bewegten, unveränderlichen Systems und den Krümmungsmittelpunkten ihrer Bahnen leicht ermittelt wird.

Je näher nun der Punkt x auf P zu dem Punkte e rückt, desto näher rückt der Punkt x_0 dem Punkte k, bis er an der Grenze mit ihm zusammenfällt.

Daraus entnehmen wir folgende Construction des fraglichen Krümmungsmittelpunktes k unserer Enveloppe C.

1. Wir construiren den Schnittpunkt o der Normale N von C im Punkte e mit der Bahnnormale des zu e consecutiven Punktes von P.

2. Wir construiren den Krümmungsmittelpunkt e^+ der sinusoidischen Bahn, welche der mit e incidente Punkt x von P beschreibt.

3. Wir ermitteln schliesslich den Punkt auf N, welcher dem Wendekreise für die umgekehrte der hervorgehobenen ersetzenden Bewegung gehört und bereits der gesuchte Krümmungsmittelpunkt k ist.

Die Bahnnormalen für alle Punkte auf P umhüllen eine Parabel $\mathfrak{P}_+$, denn sie verbinden die Punktreihe auf P mit einer zu ihr projectiven Punktreihe auf der unendlich fernen Geraden der Ebene. Die letztere Punktreihe wird aus irgend einem Punkte der Ebene im Endlichen durch einen Strahlenbüschel projicirt, welcher congruent mit demjenigen Strahlenbüschel ist, durch welchen die unendlich ferne, durch die Tangenten von $\mathfrak{P}$ erzeugte Punktreihe aus demselben Punkte projicirt wird; beide Strahlenbüschel differiren nur der Lage nach um eine Vierteldrehung.

Daraus ergibt sich, dass die Parabeln $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_+$ denselben Brennpunkt f im Endlichen besitzen, und dass ihre Axen mit einander einen Winkel von 90° einschliessen. In Folge dessen ist die in a zu Z errichtete Senkrechte N_a die Axe von $\mathfrak{P}_+$. Der Punkt c liegt auf der Directrix von $\mathfrak{P}_+$, weshalb die in f zu (ef) errichtete Senkrechte die Normale N in ihrem Berührungspunkte mit der Parabel $\mathfrak{P}_+$ trifft. Dieser Berührungspunkt ist der momentane Drehungspol o.

Daraus folgt sogleich, dass man den Punkt o erhält, wenn man die durch T_a und N_a auf der Normale N herausgeschnittene Strecke auf dieselbe von e nach $\overline{eo}$ überträgt.

Der Punkt e^+ ist der Krümmungsmittelpunkt des Kegelschnittes, in welchen der Krümmungskreis im Punkte e der diesem Punkte in der Schraubung zugehörigen Helix auf die Ebene N projicirt wird. Oder, denkt man sich die Schnittellipse der Osculationsebene in e für die erwähnte Helix mit dem durch e gehenden Rotationscylinder von der Axe Z' in die Ebene N projicirt, so ist e^+ auch der Mittelpunkt des Krümmungskreises dieser Projection in e. Für diese Projection ist der Fusspunkt g der Senkrechten von e auf Z der Mittelpunkt. Zieht man in der Entfernung des Parameters p von e die Senkrechte zu Z, so schneidet dieselbe P im Punkte v und $\overline{ev}$ ist die Länge d des zu (ge) conjugirten Durchmessers der besagten Projection. Bezeichnen wir die Entfernung des Punktes g von P wieder durch t, so ist alsdann $\overline{ee^+} = \frac{d^2}{t}$. Nach dieser Relation wurde in der Figur e^+ dargestellt.

Ist schliesslich e^0 der zu o in Bezug auf e^+ symmetrische Punkt, so ist nach einer bekannten Regel[1] der in Frage stehende Punkt k als dem Wendekreise W gehörend der durch das Punktepaar oe^0 von e harmonisch getrennte Punkt und wird als solcher einfach erhalten.

Aus der eben abgeleiteten Construction lässt sich der früher gewonnene Ausdruck für ρ gleichfalls sehr einfach entwickeln, Wir erhalten die Werthe

---

[1] Man sehe etwa Dr. Arthur Schoenflies: Geometrie der Bewegung 1886, S. 26.

$$\overline{eo} = \frac{(p^2+r^2\cos^2\varphi)^{3/2}}{pr\sin\varphi}, \quad \overline{ee^+} = \frac{(p^2+r^2\cos^2\varphi)^{3/2}.\sin\varphi}{-p(r\cos^2\varphi\pm s)},$$

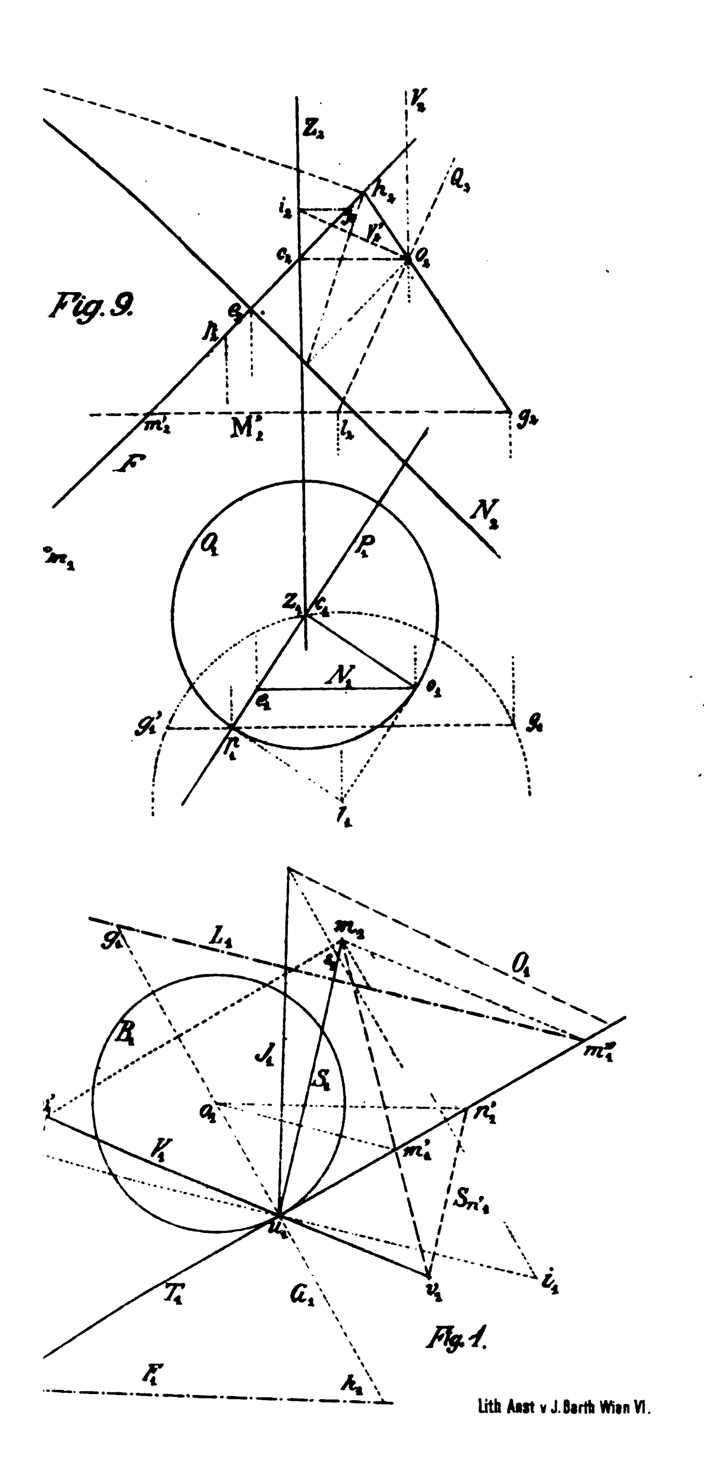
$$\overline{e^+o} = \frac{(p^2+r^2\cos^2\varphi)^{3/2}(r\pm s)}{pr\sin\varphi\,(r\cos^2\varphi\pm s)},$$

aus welchen etwa nach der Formel $\frac{2}{\rho} = \frac{1}{\overline{eo}} + \frac{1}{\overline{ee^+} + \overline{oe^+}}$ der Ausdruck sich ergibt

$$\rho = \frac{(p^2+r^2\cos^2\varphi)^{3/2}}{pr^2\sin^3\varphi}[r(1+\sin^2\varphi)\pm s],$$

aus dem die Gleichungen der Conturevolute selbst wie früher hergeleitet werden.

Wir haben die Construction der Conturcurven und Conturevoluten der Schraubungsregelflächen für die Orthogonalprojection in eine zur Schraubungsaxe parallele Ebene durchgeführt. Es ist klar, dass unsere Entwickelungen Schritt für Schritt fortbestehen bleiben für irgend eine Parallelprojection in eine gegen die Schraubungsaxe wie immer geneigte Ebene; die Bahnen einzelner Punkte des in der Projectionsebene beweglichen ähnlich veränderlichen Systems sind zwar keine Sinusoiden mehr, aber die Krümmungskreise ihrer Punkte kann man wie vorher construiren. Die Scheiteltangente der Parabel 𝔓 hat allgemein nicht mehr die ausgezeichnete Lage wie zuvor, aber dies setzt unserer Construction keine Schwierigkeiten in den Weg.



Lith Anst v J. Barth Wien VI.



XIV. SITZUNG VOM 16. NOVEMBER 1893.

Der Vorsitzende gibt Nachricht von dem am 12. November l. J. erfolgten Hinscheiden

Seiner Excellenz

des Ehrenmitgliedes und ehemaligen Curators der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften

Herrn

DR. ALEXANDER FREIHERRN VON BACH.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrer Trauer über diesen Verlust durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Ferner theilt der Vorsitzende mit, dass Seine k. u. k Apostolische Majestät mit Allerhöchstem Handschreiben vom 12. November d. J. den ersten Präsidenten des Obersten Gerichts- und Cassationshofes Se. Excellenz Herrn Dr. Karl von Stremayr zum Curator-Stellvertreter der kaiserl Akademie der Wissenschaften zu ernennen geruht haben.

Der Secretär theilt den Inhalt einer Note des k. u. k. Reichs-Kriegs-Ministeriums (Marine-Section) vom 11. d. M mit, worin bezugnehmend auf die mehrjährigen Tiefsee-Expeditionen im östlichen Mittelmeere an die kaiserliche Akademie die Anfrage gerichtet wird, ob dieselbe nicht auch einer künftigen Untersuchung des organischen Lebens in den grossen Tiefen des Adriatischen Meeres einen wissenschaftlichen Werth beilegen würde, nachdem die in den letzten Decennien vorgenommenen Untersuchungen der Adria sich vornehmlich nur mit physikalischen Aufgaben beschäftigt haben.

Von den akademischen Publicationen ist erschienen das Heft IX (November 1893) des 14. Bandes der Monatshefte für Chemie.

Herr Prof. Dr. Ph. Knoll in Prag übersendet eine Abhandlung: »Über die Blutkörperchen der wirbellosen Thiere«.

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine aus Bern eingesandte Abhandlung der Herren St. v. Kostanecki und J. Tambor: »Synthese des Gentisins«.

Herr Prof. Ad. Lieben überreicht ferner eine Mittheilung des Herrn Prof. R. Přibram aus Czernowitz: »Beobachtungen über das Drehungsvermögen weinsaurer Salze«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Koelliker A., Handbuch der Gewebelehre der Menschen. (Sechste umgearbeitete Auflage). II. Bd., I. Hälfte: Elemente des Nervensystems, Rückenmark des Menschen und der Thiere, verlängertes Mark, Ursprünge der Hirnnerven, Brücke, Hirnstiele und kleines Gehirn. (Mit Textfiguren Nr. 330—548). Leipzig, 1893; 8°.

V. SITZUNG VOM 30. NOVEMBER 1893.

; w. M. Herr Hofrath V. v. Ebner macht die Mittheilung, k. k. Universität in Graz am heutigen Tage die Jubel- dreissigjährigen Thätigkeit des wirklichen Mitgliedes erlichen Akademie Herrn Regierungsrathes Dr. Ale- Rollet als Professor der Physiologie an der medici- Facultät dieser Universität begeht und überreicht der e im Namen der Verfasser ein Exemplar der dem us diesem Anlasse von seinen früheren und gegen- Assistenten gewidmeten Festschrift.

k. u. k. Reichs-Kriegs-Ministerium (Marine- übermittelt das von dem k. u. k. Linienschiffs-Lieute- n Wilhelm Kesslitz vorgelegte Elaborat über die sen Leitung in Gemeinschaft mit dem k. u. k. Linien- hnrich Herrn Sigmund Schluet v. Schluetenberg 1893 im Auftrage der kaiserlichen Akademie der haften ausgeführten »Erdmagnetischen Beobach- n Bosnien und in der Herzegowina«.

ecretär übergibt ein versiegeltes Schreiben behufs der Priorität von Herrn Leopold Dietmann vulgo k. u. k. Lieutenant a. D., Historien- und Porträtmaler elches die Aufschrift trägt: »Perspectograph«.

. M. Herr Director E. Weiss überreicht eine Abhand- Dr. B. Max Lersch in Aachen, betitelt: »Notizen Kometenerscheinungen in früheren Jahr- n« (II. Mittheilung).

. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht drei aboratorium an der Universität in Wien ausgeführte

1. Ad. Lieben: »Über Bestimmung von Ameisensäure«.
2. L. Panics: »Darstellung von Pentadecylalkohol aus Palmitinsäure«.
3. J. König: »Zur Kenntniss der Methyl-2-Pentansäure-5 und der Löslichkeit ihrer Calcium-, Baryum- und Silbersalze«.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht eine Arbeit aus dem I. chem. Universitäts-Laboratorium in Wien: »Über einige Derivate der δ-Oxycapronsäure« von Julius Zellner.

Herr Anton Handlirsch, Assistent am k. k. naturhistorischen Hofmuseum in Wien, überreicht den VII. Theil seiner »Monographie der mit *Nysson* und *Bembex* verwandten Grabwespen.«

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Bergbohm, J., Entwurf einer neuen Integralrechnung auf Grund der Potential-, Logarithmal- und Numeralrechnung. II. Heft: Die irrationalen, experimentalen, logarithmischen und cyclometrischen Integrale. Leipzig, 1893; 8°.

Cayley, A., The collected Mathematical Papers. Vol. VI. (Mit dem Porträt des Verfassers.) Cambridge, 1893; 4°.

Fleischl von Marxow, Ernst, Gesammelte Abhandlungen. I. Anatomie; II. Physiologie; III. Physik; IV. Vermischte Schriften. (Mit dem Porträt des Verfassers und einer biographischen Skizze von Prof. Sigm. Exner.) Herausgegeben von Dr. Otto Fleischl von Marxow. Leipzig, 1893; 8°.

---

tizen über Kometenerscheinungen in früheren Jahrhunderten

(II. Mittheilung)

gesammelt von

Dr. **B. Max. Lersch.**

nachfolgenden Notizen bilden eine Fortsetzung der im
:. Bande dieser Sitzungsberichte, II. Abth., S. 767 ff. von
:r dem gleichen Titel veröffentlichten Sammlung von
ten über Kometenerscheinungen in früheren Jahrhun-
ie wurde, wie die frühere, bei fortgesetzter Durch-
; älterer Geschichtswerke nach bemerkenswerthen
gnissen verschiedener Art angelegt und enthält ausser
en von Kometen, die in der ersten Abhandlung noch
commen, weitere Notizen über manche der bereits dort
ten.

iesichtspunkte, welche bei dem Anlegen dieser Samm-
ten, sind dieselben geblieben wie bei der ersten Ab-
ich kann mich daher begnügen, in Bezug darauf auf
:ingangs Vorausgeschickte hinzuweisen.

:hr.:
ıet nach chinesischer Nachricht.
sser Sternschnuppenfall in China gesehen.)
iese Angabe aus Kaulen, Assyrien.
950 Feuerkugel. Homer's Il. IV.
schnuppenfall in China gesehen. Biot.)
'on Meteorsteinen in China. Biot.)
Villiams Obs. of Comets from B. C. 611 to A. D. 1640
372 von den Chinesen in diesem Zeitraume gesehene
:n namhaft.

Äschylus (um 500) und Hippokrates zufolge nehmen die Kometen zuweilen erst beim Weggehen von der Sonne einen Schweif an.

Zu 480. Ceratias cornus speciem habet, qualis fuit cum Graecia apud Salamina depugnavit. Plin. H. N. II, 25. Cerastes ut luna cornutus, qui quo tempore Xerxes in Atticam venit, dicitur apparuisse. J. Lydus de mens. IV, 73. Vergl. 351. In der Anmerkung lies Stein statt Strom und statt im Süden lies in südlichen Ländern.

Zu 467. Plinius berichtet nach Aristot. Meteor. I, 7: Lapis ille, qui apud Aegopotamos ostenditur, ex aëre cecidit, vento sublatus excidit interdiu, comete quoque illis noctibus flagrante.

ca. 467. Tempore Anaxagorae ingens cometa 75 dies arsit; tanta ventorum insecuta tempestas etc. Niceph. XII, 1. Das bei 449 Bemerkte gehört zu 480 (Schlacht bei Salamis).

Zu 428. Porro magistratum gerente Eucle Molonis[1] (Menonis? L.) filio mense Januario sole circa solstitium hiberno existente in regione coeli sub septentrionibus crinitum sidus apparuit. Arist. I, 6. Nach Petav war 427 oder 426 Euklides Archont. — Aristoteles scribit crinitam stellam ad ursam apparuisse mense Gamelione, sole circa brumam existente. Gazae de mensib.

373? Unter Archont Aristäus. 373 war Astius, 372 Aristhenes Archont. Cf. Klinkerfues' Abhandlung über diesen Kometen, 1880.

Zu 373/2. In diesem Jahre, Ol. 101, 4, war das Erdbeben, vor welchem der von Aristoteles, Seneca und Diodor erwähnte Komet erschien. Aristoteles (I, 6) berichtet: »Magnus ille cometes, qui haud ita multo ante factus est, quam Achaia terrae motu quateretur et in eam maris inundatio introrumperet, et ab occasu aequinoctiali emicuit. Et in austrina coeli regione iam multi facti sunt.... Magnum illud sidus, de quo supra mentionem fecimus, tempore hiberno, rigente gelu atque coelo sereno vesperi *Aristaeo* praetore apparuit. Ac prima quidem die visum non est, quod ante solis

[1] Ein Molon war Ol. 104, 3 Archont.

ıccasum delituerit, postea autem apparuit, nam quam ıinima fieri potest distantia solem reliquit et mox occuuit. Lumen vero ad tertiam coeli partem instar saltus orrigebatur, unde et viae nomen accepit. Porro ad usque altheum conscendit Orionis, ibique dissolutum fuit. Atque emocritus opinionem suam adstruere contendit. Nam post ›metarum dissolutionem sidera quaedam fuisse conspecta ;severat etc. Von einer Theilung ist also keine Rede; daher t S. 3 dritte Zeile zu streichen.

› (= Ol. 106, 1). Nach Plin. II, 25 war Ol. 108 (109 in ·osse's Übersetzung unrichtig) oder, wie Ideler las, Ol. ᵛI, 2, welches Jahr 355 v. Chr. begann, und u. c. 398) nach mehreren alten Codices) = 356 v. Chr. der Komet, ssen Mähne speerförmig wurde.

:comacho Athenis imperante circa aequinoctialem circun paucis diebus cometes apparuit, exortu suo nequaam vespere facto, quo adhuc regnante ventum illum, i circa Corinthum debacchatus est, factum esse accidit. stot. met. I, 7.

. Die angeführte Stelle von Plinius (II, 25) bezieht sich folgende Notiz aus Aristot. met. I: Cometes non pauci ra signiferum visi sunt. Deinde et plures uno saepe ul fiunt. Quotquot nostra tempestate visi sunt, sine asu supra horizontem evanuerunt, paulatim ita emarceıtes atque absumpti, ut non unius stellae corpus nec ium reliquerint. Stella quaedam ex his, quae in cani.e coxa sunt, comam habuit, languidam tamen atque :uram. Qui enim eam intentis oculis aspectabant, splenm agnoscebant exiguum, qui vero sensim conspectum ım quasi obiter jactabant, majusculum.

Zeit von Attilius regulus. (Attilius wurde 252 besiegt.) ross wie die Milchstrasse. Senec. VII, 15.

ıet? Cassini sol per aliquot horas noctis visus ... 160: e species solis Pisauri adfulsit. Diese beiden Notizen Jul. Obsequens vielleicht zu identificiren mit einer rn bei Senec. VII, 15, wonach ein sonnenähnlicher ɜt zur Zeit des Syrerkönigs Demetrius (162?) ernen ist.

147? Komet? Temporärer Stern? P. Africano et Lalio (Livio? oder Fulv. Flacco?) Css. Stella arsit per 32 dies. Jul. Obs.

(134? Juli. Temporärer Stern. Chines. Beob.)

137 und 121. Die auf Mithridat's Zeit bezogenen Kometen gehören wohl in die Jahre 137 und 121, da derselbe im Jahre 64 v. Chr. 73 Jahre alt starb, nachdem er seit 121 nach Forbiger zur Regierung gekommen. Der Komet von 137, auf 29. April berechnet, wurde in China gesehen. Von beiden berichtet Justinus XXXVII, 2: »Sowohl im Jahre, wo er geboren wurde, als auch in dem, wo er seine Regierung begann, leuchtete ein Schweifstern 70 Tage lang so hell, dass der ganze Himmel in Feuer zu stehen schien. Er hatte nämlich nicht nur an Grösse den vierten Theil des Himmels eingenommen, sondern auch durch sein Licht den Glanz der Sonne übertroffen. Sein Auf- und Untergang dauerte 4 Stunden.«

44 st. 43. Ludis, quos primo consecratos ei heres Augustus edebat, stella crinata per 7 dies continuos fulsit, exoriens circa undecimam horam; creditumque est, animam esse Caesaris in coelum recepti, et hac de causa simulacro eius in vertice additur stella. Sueton. J. Caes. 88. — Stella ingens crinita, quae cum post Caesaris interitum ad 7 usque noctes eximio fulgore apparuisset, postea nunquam visu comperta. Solis praeterea lumen caligine obsessum ac toto namque illius anni spatio pallens globus et sine splendore oriens. Plutarchi vita Caes.

? Niemals sonst entzuckten dem heiteren Himmel so viele Leuchtungen, niemals brannten so oft grauenvolle Kometen. Virgil. Georg. I.

Zu 27. Die aus Baco angeführte Stelle bezieht sich offenbar auf die oben erwähnte Bemerkung von Aristoteles.

Zu 12. Lies: apparuisset in faces. Vor dem Tode Agrippa's. 11 Halley's Komet.

Jahr 4, Februar bis April, 70 Tage lang Komet, nach chinesischen Tafeln.

Nach Christi Geburt:

und 58. Beide Kometen beruhen auf falschen Angaben, espective Verwechslung.

. Inter quae et sidus cometes effulsit, de quo vulgi opinio st, tanquam mutationem regis portendat. Taciti Ann. IV, 22.

Stella crinita, quae summis potestatibus exitium porndere vulgo putatur, per continuas noctes oriri coeperat. nxius ea re, ut ex Babilo astrologo didicit, solere reges lia ostenta caede aliqua expiare etc. Sueton. Neronis vita 36. Sueton erwähnt dies vor der Erzählung vom Brande ms (19. Juli 64). Nach Tacitus (XV, c. 47) war der Komet Ende des Jahres: Fine anni volgantur prodigia...sidus metes sanguine inlustri semper Neroni expiatum.

14 oder 26. Halley'scher Komet im Perihel.

Tito Cons. V.

a, kurz vor der Zerstörung Jerusalems (79). ...Supra em sydus ensi oblongo simile consistit et cometa ad ium integrum radios suos funderet. Euseb. III, c. 8.

t Vespasians (von December 69 bis Juni 79) erschien Komet, den Vespasian auf den Partherkönig, nicht sich bezog, weil er ja einen kahlen Kopf habe. Dio C. VI, 17.

(Juni 79) dem Tode Vespasian's erschien ein Komet. ton. c. 23.

met nach dem Erdbeben in Asien (155 wahrscheinlich). is Capitol. 9.

, 389, 393 temporäre Sterne.) 373 Halley's Komet.

XIIII Kal. Aug. apparuit stella ab oriente ardens usque nensem Septembrem. Annot. ad cycl. Dion. in: Mon. 1. hist. IX, 2, 755. — Sol eclipsim fecit XIV Kal. Aug. parte orientis stella ardens per dies XXX. Excerpta all. in: Mommsen, Chron. min. I, 1892, 300. Nach verdenen dort citirten Autoren blieb der Komet, wenn n solcher war, bis September sichtbar, nicht septem es, wie Marcellin berichtet.

ium (?) apparuit in caelo VIII. Kal. Aug. hora noctis .. Chron. min. I, 300.)

(428. Signum apparuit in caelo stella ardens sicut facula III non. Mart. Chr. min. I, 300.)

Zu 451. Stella apparuit ardens in caelo per dies XXX. Excerpta Sangall.

Zu 527. Postquam earum rerum veritatem cum observatio constans comprobavit, tum nuper factus stellae crinitae ortus (ea figura quam hippea vocant) et ob hunc ortum consecuta impurorum Persarum irruptio, quae ad Orontis usque partes evagata etc. Lyd. de ostentis. Lydius, seit 511 in Constantinopel, schrieb etwa im Jahre 552. — De mens. IV, 73 erklärt L.: Hippias a cursu et velocitate ita nominatus obliquos et exiles radios dispergit; ähnlich De ost. 11: Hippeus cometa Veneris est, a celeritate invenit nomen, obliquas trahens atque ardentes iubas, proiicit radios lucis, rursusque in angustum glomerat orbem, velocitate atque impetu incredibili, modo circumspergens modo contrahens crines quod vocant, is quando ardens oritur et ab occidente ad orientem iaculatur, tumultum Parthicum nuntiat. Nach Procopius war der Komet von 527 aber schwertförmig oder bärtig, Xiphias oder Pogonias, welche Lydius so beschreibt: Xiphias instar gladii vel lanceae longae se extendens apparet, pallidus autem et nebulosus, Pogonias iubam non de capite, sed deorsum dispergit instar barbae. Es ist also zweifelhaft, ob die Angaben Beider sich auf dasselbe Object beziehen.

528? Terribile in coelo signum columnae per omnia simile apparet (nach einer Lesart: per dies XXX). Chron. Gall. in: Monum. Germ. hist. IX, 2.

Ol. 327 (529?). Signum in coelo mirabile. Ibid. 636.

Zu 530 (Halley's Komet) als Lampadias beschrieben. Nach Lydius: Lamp. igneus et instar ignei lapidis aut arboris flagrantis solet perfulgere. — Zonaras Ann. XIV, 5, 6.

551. Anno tricesimo imp. Justiniani cometa ardens, quasi species lanceae a Septentrione usque ad Occidentem. Paul. Diac. l. XVI.

608. Halley'scher Komet.

Zu 678 (al. 677). Cometa apparuit. Beda.

683. Ende des Jahres. Beda.

ler 685 zwischen Weihnachten und 6. Januar, unter
enedikt († Mai 685) soll einige Tage Tag und Nacht ein
ern erschienen sein. Platina vita Pontif. Komet?
pparuit in caelo stella ardens sicut facula. Exc. Sangall.
: Mommsen, Chron. min. I, 1892.
(nach dem angegebenen Ostertage; unrichtig 728 nach
gne 95, 282). Anno domini incarnationis 729 apparuerunt
netae duae circa solem multum intuentibus terrorem
utientes. Unus quippe solem praecedebat mane orien-
ı, alter vespere sequebatur occidentem. ... Portabant
em ignis contra aquilonem... apparebant mense Januario
luabus ferme septimanis permanebant. Quo tempore
vissima Sarracenorum lues Gallias misera clade vasta-
et ipsi non multum post in eadem provincia dignae
e perfidiae poenas luebant. Quo anno sanctus vir
ertus... ipso die paschae (24. April), ut supra memo-
mus, migravit ad Dominum et mox peracto pascha,
7. id. Majarum die Osric rex vita decessit. Bedae,
. Angl. V, 23 r. 24.
Übrigens ist die in obigen Worten erwähnte Nieder-
der Sarracenen erst 732, also nach Beda's Tod, wenn
ewöhnliche Angabe darüber richtig wäre.

unter Gregor II. Cometes extensa ad septentrionem
a. Platina.

mber bis 744 September. A. 3. imperii Constantini
12.) apparuit signum in Aquilone et cinis descendit
ca fitque terrae motus magnus in Caspiis portis. Paul.
22.

ta ingens penes Syriam in coelo visus. Theophan.

no 4. imperii Constantini cometa magnus in Syria
Paul. Diac. 22.

50 Sternschnuppenfall nach Chron. Flandr. 474.)

nnenfinsterniss vom 18. Kal. Sept. und Ostern 8. id.
ichern das Jahr. Die Finsterniss war gleich nach
ometen.) Eodem anno Docetes clarissima in Oriente
it per decem dies et iterum ad Occidentem diebus
et uno. Paul. Diac. 22.

Der nach Theophanes angegebene Komet, wohl derselbe, den Anastasius (H. E.) ins 22. Regierungsjahr setzt (Docites in Oriente), ist vielleicht ein anderer. Cf. 764.

Zu 802. Prima die nonas (4.?) Novembris apparuit cometes in figura duarum lunarum fulgentium, adunantium se atque separantium in diversa schemata, ita ut in acephali viri fictionem formarentur. (Es folgt eclipsis quarta idus maji = 12. Mai st. 10. Mai 803.) Paul. Diac. hist. l. 24.

Der Zweimonde-Komet der Jahre 811 und 813 ist wohl zu streichen. Cf. Theoph. Bonn. A. p. 778. Doch wird auch C. valde singularis et terribilis drei Jahre vor Karls Tod (Januar 814) erwähnt. 813 cometa exarsit nach Eckström H. Eccl.

816. Leo III. moritur (Ende December 795 stirbt sein Vorgänger; 796 ist also wohl als erstes Jahr gerechnet) 21. pontificatus sui anno, quo etiam cometes apparuit. Platina. Es wird der Komet von Februar 817 sein.

824? Im Codex Nr. 927 der vatikanischen Bibliothek wird eine Kometenerscheinung und eine Begebenheit aus dem Jahre 824 erwähnt. Seroux d'Agincourt's Samml. v. Denkm., Text zur Malerei S. 67.

Zu 827. Am 11. April Komet nach Ann. Eginh.

Zu 835. Der von Solinus erwähnte Komet ist wohl der von 837. — 836, 11. April Komet in der Wage, drei Tage lang. Mezeray. Vergl. aber 837.

Zu 837 scheint noch folgende Nachricht zu gehören: (Ostern war 837 am 1., 838 am 14. April.) »Während des Osterfestes (838) erschien ein furchtbares und trauriges Wunderzeichen, ein Komet im Sternbilde der Jungfrau in dem Theile des Zeichens, wo man unterhalb des Gewandes zugleich den Schwanz der Wasserschlange und den Raben verbindet. Dies Gestirn, das sich nicht, wie die sieben Planeten, nach Osten bewegte, durchschritt in 25 Tagen, was wundervoll zu hören, das Zeichen des Bären, des Krebses und der Zwillinge und legte endlich am Kopfe des Stieres unter den Füssen des Fuhrmanns den feurigen Leib mit dem langen Schweife, den es nach allen Seiten hinstreckte, nieder.« Astronomus. (Mezeray II erwähnt ihn auch.)

. 1. Januar. Im Winter desselben Jahres, und zwar am
Januar erschien ein furchtbarer Komet im Zeichen des
orpions nicht lange nach Sonnenuntergang. Diesem
›henden Zeichen folgte bald der Tod Pippins. Astro-
nus.

Cometa visus manifestissime. Mar. Scotus.

880. Komet mit zwei durch Brücke verbundenen
ıweifen. Mezeray, H. de France, 1685, II, 45.

. Nach Andern waren es zwei Kometen. Schnurrer,
'on. der Seuchen.

Cometae visae. Ann. Colon.

Grosses Sterben nach einem Kometen. Güthe in
iring. Centralbl. 1883.

osser Meteorstein. Cf. Ekkehard in Monum. Germ. VI.)
Augusto mense ind. 3. cometa exstitit, quem Pogoniam
ınt et visus est usque ad octavam mensem ind. 4.; is
monstrabat imperatoris obitum (976). Cedrenus. —
einem Codex gibt Migne (Patrol. ser. 2, vol. 95, 423)
;endes: Regnante Ottone minore imp. mense Augusto
n apparuit stella cometis percurrente indictione 3. In
anno hoc fuit 13. Kal. febr.: luna amisit lumen suum
i hora una. (Mondfinsterniss des Jahres 976.) Vergl.
c's oder Reslhuber's Beschr. der Kometen von 975,
, 1556, 1857.

'ergl. Boucquet, X, 228.

0. oder 20. August.

lepidani, Ann. St. Galli.

Cf. Chr. Flandr.

. oct. stella ab occasu versus ortum traiicere visa.
rkugel.) Eadem que die classis Romana haud exi-
est passa cladem. Cedrenus.)

8. Juli, sechs Wochen lang ein Stern, die ganze Erde
:htend, von Süden nach Norden gehend. Cedrenus.

. mundi 6543, quo ipso die Sarraceni Myra ceperunt.
s IV.

d. 11 (September 1043 beginnend), a. m. 6551, 6. oct.
a ab oriente ad occasum proficiscens totoque illo
fulsit. Cedrenus. — Per paucos dies iterum apparuit

eadem stella a parte occidentis et splendor eius ad orientem tendebat. Ann. Colon.?

Zu 1065. Nach Andern war es 1064.

Zu 1066. Cometa apparens ad occidentalem plagam. Sigeb.

Zu 1067. Das Excerpt ist aus Cedren: Im folgenden Mai stirbt der Kaiser etc. — Apparuit stella cometa. Lup. protosp. in Migne.

(Zu 1095. Mense Aprili in nocte 5. feria (es gibt aber auch eine andere Lesart) subito visi sunt igniculi. In ganz Apulien, ja auf der ganzen Erde gesehen. Lup. protosp.)

Zu 1098. De mense octobr. apparuit stella cometa. Lup. protosp.

1099—1018 unter Paschalis: Apparuisse cometem mirae magnitudinis affirmant, qui in occasu cadente sole statim apparebat. Platina vit. pont.

Zu 1105. Komet. Anon. Casin. Chron.

Zu 1106. 16. Februar Komet mit nordöstlich gerichtetem Schweif, 35 Tage sichtbar. Simeon Dunelm. H. Angl. — 16. Februar, Freitag. Nach dem Referat in Bronn van de Gesch. der Nederl. 1867 erzählen die Ann. Egmundanae: Mense februar., 14. Kal. mart. luna 10., 6. feria, ebdomada prima quadragesimae oritur in oriente cometa admodum etc. (Das Folgende, wie im Chron. Alberici, bis cadere.) — Die Kölner Annalen beschreiben den zur Fastenzeit auf drei Wochen erschienenen Komet: Circa quadragesimam novum et tremendum in celo signum apparuit. Nam per continuas tres ebdomadas vel amplius versus occidentem stella oriebatur radios latissimos adinstar solaris lampadis vespere occidentis emittens et longam coeli partem versus occidentem hoc splendore illuminabat (Mon. Germ. VI). Aschermittwoch war 9. Februar.

Zu 1107. (2. Februar. 4. non. febr. stella visa est per diem in coelo ab hora 3. usque ad 9. quasi cubito distans a sole. (12. Februar) 2. id. febr. apud Barum Italiae stellae visae sunt in coelo per diem, nunc quasi inter se discurrentes, nunc quasi in terram cadentes.).... Toto mense februario cometes apparuit. Ann. Egmund.

Zu 1109. December. Komet in (circa) der Milchstrasse mit östlich gerichtetem Schweif. Sim. Dunelm. — Cf. Anon. Casin. Chr.



0. 8. Juni, drei Wochen sichtbar. Sim. Dunelm.

3. Fast sieben Tage sichtbarer Komet. (Sonnenfinsterniss
ı 2. August 1133!) Joh. Hagustald.

Komet nach Anon. Casin. Chron.

5. 1. Zeile lies: 17. Kal. maji, 2. Zeile: St. Georg. Mediol.
Monum. Germ. XVIII.

3. Komet nach Radulf. de Diceto.

'. Das japanische Datum ist 19. August, nach Schram's
fstafeln berechnet.

:hulhof citirt einen grossen Kometen dieses Jahres.

. Cometa. Ann. Floreff.

. Anfang Juli, acht Tage sichtbar. Guil. de Nangis Chr. —
ley's Komet.

Vom 11. Juli an in Westphalen gesehen.

. Am 25. Juli Sternschnuppen nach Ryccard. de S. Germ.)
Cometa. Ann. Blandin. — Per duos menses. Ann. S.
b. Salisb. — Cometes visa 8 diebus. A. Polon. — Sicht-
von Mitte Juli bis Ende September. Guil. de Podio,
Albig. — Com. tam notabilis, ut scribit frater Martinus
ıronicis suis, quod tunc nullus vivens talem antea
it. Ab oriente enim cum magno fulgore surgens usque
ıedium hemisphaerii versus occidentem comam per-
am pertrahebat...cum plusquam per 3 menses dura-
..eadem nocte qua papa mortuus est, disparuit. Chr.
Trivetti (d'Achery, Spic. III, 199). Fast wörtlich gibt
'nur sagt er: cum maximo fulgore usque ad medium
vesperum versus occ.) Matth. Marenchale Bappen-
in Cheapeville episc. II, 293. — Cometes qualis nun-
tunc apparuit ab oriente cum magno fulgore con-
ıs ut ad medium hemisphaerii comam perlucidam
hebat. J. Hocsem in Cheap. II, 294.

ugust. Komet. Chr. Guil. de Nangis.

et und feurige Drachen. Matth. of Westminst.

ersus finem januarii per dies plures cometes visus
ıoctis crepusculo apparuisse. de Nangis.

ense sept. circa noctis crepusculum inflammationis
ıdios s. caudam praecipue versus partes orientis
s. de Nangis.

1313. Int iaer daer an openbaerde een sterre in der luchten, die man een comete hiet, mit langen reijen, dat wel een teijken was der iammerliker plagen. Kron. v. Holland (Bronn. v. d. Gesch. d. Nederl. 1867, 163. — Komet, Blutregen u. dergl. auch in der Kr. d. Gesch. van de Friez. 1743 erwähnt.

Zu 1314 und 15? Circa natale stella cometa apparuit cursum suum per noctem faciens circa polum comamque suam longam nunc versus orientem nunc versus occidentem et aliquando ad partes alias protendebat duravitque usque in finem mensis februarii. Paulo post (wie es scheint nach dem Tode Heinrichs VII., der 24. August 1313 starb) apparuit secunda cometa in parte orientali, sed minor quam alia videbatur. Baluzii vita pont. I.

Zu 1315. 21. December. Komet. Mezeray II.

1336? und 37. Zwei Kometen »l'un étendant sa chevelure pleine de feu et de flamme, l'autre serpentant sa longue queuë.« Mezeray, II, 597.

1337. Circa festum J. Papt. (also gegen 24. Juni) cometa in signo Geminorum. Chr. Gu. de Nangis cont. in d'Achery, Spicileg., III, 100.

1338. Hoc anno 15. die aprilis apparuit altera cometa satis prope et erat parum clara et jocunda sine capillis et sic fuerunt duae cometae in uno anno. de Nangis.

Zu 1340. Circa annum 1340 apparuit cometa in parte meridionali versus partem occidentalem, qui emittebat radios suos versus partes orientales declinantes ad partes septentrionales. de Nangis cont. in d'Achery, III, 140.

Zu 1348. Ephemerer Komet? Im August erschien über Paris ein »Komet« nach der Abendstunde, als die Sonne untergehen wollte und war noch sichtbar nach Sonnenuntergang beim Nahen der Nacht an derselben Stelle: nocte jam veniente valde grossa in plures et diversos radios dispersa totaliter disparuit. de Nangis cont. Wird anderwärts als ungemein glänzender Fixstern bezeichnet. Häser, Geschichte der Med.

Zu 1351. Circa hoc tempus praeluxit boream versus comatum sidus, exortique ventus ingentes ac simul de nocte trabs ignea ex aëre in terram prolabi visa. Pontani, Hist. Gelr.

2. De mense Martia visus cometa in provincia inter
um et aquilonem ante ortum dies, comas suas versus
ıilonem protendens. Baluzii, I, 355.

}. 9. April. A. D. 1368 inchoando annum in paschate
ıd tunc fuit 9. die mensis aprilis (aureo num. illo anno 1)
lie paschae praesenti visa fuit cometa i. e. stella comata
am apparuerat per plures dies in hebdomade sancta
ecedente et duravit eius apparitio per magnum tempus.
arebat in principio noctis vel in nocte satis cito et hoc
arte septemtrionali, quasi inter partem occidentalem et
emtrionalem plagam et hoc versus mare oceanum erat
ıt sive stella illa et projiciebat caudam suam comatam
us partes orientales, aliquando declinante ad septem-
alem in alto tamen radios suos emittebat et quasi
idem rubeam ad modum flammae unius campanilis
imi totaliter inflammati vel ardentis radios suos emit-
valde sursum; unde quando ego dictam cometam
) vidi, ex abrupto credidi, quod esset campanile ad
: ignitum et mirabiliter inflammatum, nam pyramidem
spidem rubeam ad modum flammae sursum versus
m et versus partes, ubi tunc eram, scil. Remis, emit-
et quasi totus populus etc. d'Achery III, 140.

n der Charwoche zwischen Nord und West erschei-
mit dem Schweif gegen Osten gerichtet: il lançoit en
les rayons en forme d'une grande pyramide enflam-
Mezeray. — In der Kölner Chronik als der Komet
lem langen stertze« bezeichnet.

. Nov. In die omnium sanctorum post laudes cometa
ıit. Notae Altah. in Script. Germ. XVII, 423.

'halin bezeichnet einen der Kometen als ungemein

et nach Papon; die dabei erwähnte thüringische
ar aber 1393.

omet am 15. Februar erschienen, bis 19. März sicht-
hronik des Hauses Geull (zwischen Aachen und
ht).

sine horrore sidus crinitum se ostendit. Pontani
elr.

Zu 1429. In Japan am 5. Tage des 8. Monats gesehen, d. i. nach Schram's Hilfstafel am 3. September.

Zu 1433. Perihel am 7. November, von Weiss neu berechnet.

1449. 9. December im Perihel nach Weiss, vom 11. Januar bis 11. Februar sichtbar.

Zu 1455 bis 1458. Unter Calixtus III. Apparente per aliquot dies cometa crinito et rubeo. Platina S. 32, Z. 6 lies: Georg. Phrantzae IV, 7. — 1456 cometa plus quam duo coeli signa occupavit. Johnston.

Zu 1461. Jedenfalls war es éin Komet, wovon in dem Citat von Meiran Rede ist. Mezeray berichtet über diesen schrecklichen Kometen, der im Juli über Paris stand: il jettait ses flâmes en bas de telle sorte, qu'il sembloit que toute la ville fut en feu.

Zu 1469. Wenn der Komet in diesem Jahre gewesen, dann ist das japanische Datum (IX, 10) der 15. October.

Zu 1472. Das japan. Datum (XII, 1) = 11. Jänner. — Mense Januario circa festum Agnetis (21.) videri coepit cometes horribilis et duravit diebus 80, quo nondum dissoluta alter apparuit. Chapeaville III, 175. Auch Mezeray erwähnt die achtzigtägige Dauer. — Toto mense summa celeritate a Libra retro totum suo cursu confecit Zodiacum initio 40 partes, 120 postea in singulos dies. Sennert. IV, epit. c. 2.

Zu 1499. 6. September sichtbar.

Zu 1506. 3. September sichtbar.

1509. Ein Komet 18 Tage lang. Surius.

Zu 1527. Am 11. August Morgens in ganz Europa gesehen. Öfters mit dem Phänomen vom 11. October verwechselt. Pingré I, 485. Spangenberg Mansfeld. Chr. 1572. Angelus Ann. March. Brand. 1598.

Zu 1529. War der sogenannte vierfache Komet. Cf. Pingré.

Zu 1531. Das japan. Datum (VI, 29) = 11. August. In Europa vom 1. August bis 3. December. — Mense Augusto pervigilia (14. Aug.) assumptionis B. M. et diebus 8 sequentibus visus est cometes multorum obituum, ut putabatur, praenuncius. Siquidem obiere per hos dies Ludovica Francisci regis Galliae mater etc. Chapeaville III, 316.

32. 2. September bis 25. December in China gesehen. In
uropa vom 2. October bis 8. November nach Spangen-
erg.
33. Am 1. Juli von Widmann gesehen. Vom 18.—25. Juli
ıch Apian, von Mitte Juni bis August nach Anderen
chtbar.
Überaus grosser, röthlicher Komet. Mezeray.
Cometa cum cauda versus aquilonem, ex eo flamma dra-
nis instar devolavit, rivum exhausit, agri fructus ab-
mpsit. Sennert.
Cardanus in comment. supra quadr. Ptolemaei l. 2 tr. 52
e quodam inquit«: Volo narrare ostentum, quod ostendi
n juvenis essem atque studerem. Apparuit cometes,
us pars solida erat rotundae figurae, triplo major Venere,
us claritate totus orbis illustrabatur, eratque lux eius
ınta si quarta pars lunae luceret.
. M. martio ingens cometes illuxit diebus pene duo-
im in 8. librae gradu notatus. Chapeaville III, 377.
? Am 14. September unter dem Haar der Berenice,
of nach Norden, Schweif gegen Spanien. Mezeray. —
hel am 13. September nach Weiss.
emporärer Stern in der Cassiopeia, einige Monate sicht-
Kron. v. E. Phebens, ed. 1867.)
Das japan. Datum (IX, 23) = 2. November. — Grösster
ıet im Schützen und Scorpion, gegen Westen gerichtet,
Überlingen schon am 18. October, anderwärts am
November gesehen. Mezeray III, 449. — Zu Leitmeritz
10.—20. November etc. gesehen. Katzerowsky. —
die 10. aut 9. terribilis admodum cometes e genere
atorum... ac multo tempore ibi visus est hominibus.
nc anno sequenti 1578 et alius sed multo minor sub-
us est. Kron. v. E. Phebens, ed. 1867. (1578 Februar,
engrosser, temporärer Stern. Ma-tuan-lin.)
Am 20. Mai nach dem Leitmeritzer Stadtschreiber.
Martii mense visus jam denuo est cometa, exiguus
m ille. v. Phebens.
Rother Komet in der Provence und Dauphiné ge-
. Langer flammender Schweif. Mezeray III, 976.

1607. (26. October. Halley'scher Komet.) 26. September. Komet gross wie Jupiter, Farbe wie die des Saturns, Schweif über 9°. Bis Ende October sichtbar. Mezeray III, 1279, Röslin's Monographie 1609.

Zu 1618. Cf. Ann. des hist. Ver. des Niederrheins 19, 176. — Der erste Komet am 17. August, der zweite am 8. November.

1652. »Dunkler Komet« vom 12. November bis 8. December.

(1654. Ungewöhnlicher Stern. Hübner.)

Zu 1664. Brewer's Schrift: CrInItVM poLI sIDVs.

Am 17. November in Spanien gesehen. Bis 20. März im Fernrohr sichtbar.

1665. 19. März. Zwei Kometen. Chr. v. Neustadt a. d. H.

1680. Cf. Ann. d. hist. V. am Niederrh. 19, 184.

1702 oder 1703. 2. März. In signo Caete trabs coelestis, blass, schleierartig, wenige Tage sichtbar.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CII. BAND. X. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



XXVI. SITZUNG VOM 7. DECEMBER 1893.

Der Secretär legt das erschienene Heft VIII (October 1893) des 102. Bandes der Abtheilung II.b der Sitzungsberichte vor.

Das k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht übermittelt ein im Wege des k. italienischen Ministeriums des Äussern eingelangtes Exemplar des III. Bandes (I. Theil) der Werke Galileo Galilei's. (Edizione nazionale sotto gli auspicii Sua Maestà il Re d'Italia.)

Herr Prof. Dr. Eduard Reyer in Wien dankt für die ihm bewilligte Subvention behufs Ausführung geologischer Experimente, insbesonders über specielle Fälle der Faltung, Ruptur, Eruptionen und Contraction der Erdkruste.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Lang übersendet eine Abhandlung von Prof. J. Dechant in Wien: »Über magnetische Verzögerungen in Eisenkernen infolge periodisch wechselnder magnetisirender Kräfte«.

Herr Dr. Jaroslav J. Jahn in Wien übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: »*Duslia*, eine neue Chitonidengattung aus dem böhmischen Untersilur, nebst einigen Bemerkungen über die Gattung *Triopus* Barr«.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. »Über einige particuläre Lösungen der Differentialgleichung für die Wärmeleitung in einem

Kreiscylinder und deren Anwendung«, von Prof. Dr. E. Kobald an der k. k. Bergakademie in Leoben.

2. »Beiträge zur Untersuchung der Bewegung eines schweren Punktes auf einer Rotationsfläche vierter Ordnung«, von Herrn Friedrich Schmitt, Oberingenieur i. R. in Wien.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. C. Claus überreicht eine Mittheilung, betitelt: »Die postembryonale Entwickelung der Halocypriden«.

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer in Wien überreicht eine Abhandlung: »Über eine Relation des Herrn Nasimof«.

Herr Franz Kossmat in Wien überreicht eine Arbeit: »Über einige Kreideversteinerungen vom Gabun«.

Der Secretär überreicht eine Abhandlung von Dr. Max Margules, betitelt: »Luftbewegungen in einer rotirenden Sphäroidschale« (III. Theil).

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Göttert, G. A., Lösung des 210jährigen Räthsels der Schwerkraft. (Hiezu ein Atlas mit 27 Figurentafeln.) Posen, 1893; 8°.

Über eine Relation des Herrn Nasimof

von

Leopold Gegenbauer,
c. M. k. Akad.

In einer in den Schriften der mathematischen Gesellschaft in Moskau enthaltenen, in russischer Sprache verfassten Abhandlung[1] hat Herr Nasimof vor zehn Jahren für die Summe der Werthe, welche eine willkürliche Function $f(x)$ annimmt, wenn ihr Argument alle dem Intervalle $1 \ldots m$ angehörigen ganzen Zahlen durchläuft, welche zu einer gegebenen Zahl n theilerfremd sind, folgenden Ausdruck angegeben

$$\sum_{x=1}^{x=m} \left(\frac{n}{x^2}\right) f(x) = \sum_{d} \mu(d) \left(\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{m}{d}\right]} f(dx) \right),$$

wo die Summation bezüglich d über alle Theiler von n zu erstrecken ist, und aus demselben durch Specialisirung die Relationen

$$\varphi^{(0)}(m, n) = \sum_{d} \left[\frac{m}{d}\right] \mu(d)$$

$$\varphi^{(1)}(m, n) = \sum_{d} \frac{d\left[\frac{m}{d}\right]\left\{\left[\frac{m}{d}\right]+1\right\}}{2} \mu(d)$$

$$= \frac{m\varphi^{(0)}(m, n)}{2} + \sum_{d} \frac{R_d\left\{\left[\frac{m}{d}\right]+1\right\}}{2} \mu(d)$$

$$= \frac{s^2 n \varphi(n)}{2} + sn\varphi^{(0)}(\varkappa, n) + \varphi^{(1)}(\varkappa, n)$$

$$(m = sn+\varkappa;\ 0 \leqq \varkappa \leqq s-1)$$

---

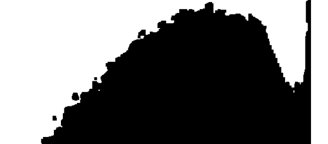
[1] »Von der Summe der Zahlen, welche relative Primzahlen gegen eine gegebene Zahl N sind und eine andere gegebene Zahl P nicht überschreiten.« Matematiczki Swornik, 11. Bd., p. 603—610.

abgeleitet, wo R_x den Rest der Division von m durch x vorstellt und mit $\varphi^{(x)}(m, n)$ die Summe der x^{ten} Potenzen der zu n theilerfremden ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots m$ ausgedrückt wird. Die erste von diesen Formeln ist übrigens wiederholt angegeben worden, sie findet sich beispielsweise schon in Legendre's »Théorie des nombres«, in einer Arbeit des Herrn Minine[1] und in verschiedenen Mittheilungen von den Herren Meissel, Cesarò, Rogel und mir. Eine interessante Erweiterung der Nasimof'schen Relation stellte vor Kurzem Herr K. Zsigmondy in seiner im letzten Bande des von L. Fuchs herausgegebenen Journals für die reine und angewandte Mathematik enthaltenen Note: »Zur Verallgemeinerung der Function $\varphi(m)$ in der Zahlentheorie«[2] auf, indem er eine der obigen völlig analoge Darstellung für die Summe der Werthe angab, welche eine willkürliche Function $f(x)$ erhält, wenn ihr Argument alle durch r gegebene, zu einander theilerfremde ganze Zahlen nicht theilbaren ganzzahligen Individuen eines vorgeschriebenen Intervalles annimmt. Es mag bei dieser Gelegenheit nur darauf hingewiesen werden, dass die Zsigmondy'sche Verallgemeinerung der Euler-Gauss'schen Function $\varphi(m)$ ein Glied aus einer Kette von wesentlichen Erweiterungen bekannter zahlentheoretischer Theoreme bildet, auf welche man durch folgende einfache Überlegung geführt wird.

In der Theorie der Theilung der ganzen Zahlen wird gezeigt, dass man zur multiplicativen Bildung aller ganzen Zahlen unendlich viele Elemente, die Primzahlen, nöthig hat und dass unter Benützung dieser Elemente jede ganze Zahl nur auf eine einzige Weise multiplicativ erzeugt werden kann. Da eine wesentliche Eigenschaft des Systems aller Primzahlen darin besteht, dass je zwei Elemente desselben zu einander theilerfremd sind, so kann man eine grosse Anzahl derjenigen in diesem Capitel der Zahlentheorie zur Erörterung gelangenden Fragen, welche in letzter Linie auf der Darstellung der ganzen Zahlen als Producte von Primzahlpotenzen basiren, in der Weise verallgemeinern, dass man dieselben nicht für alle ganzen

[1] »Nouveaux théorèmes de la théorie des nombres«.

[2] A. a. O. Bd. 111, S. 344—347.



Zahlen, sondern nur für diejenigen behandelt, welche als Producte von Potenzen mit ganzzahligen, nicht negativen Exponenten der verschiedenen Elemente eines Systems von r ganzen, unter einander theilerfremden Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ darstellbar sind. Indem ich mir vorbehalte, auf diese Erweiterungen demnächst ausführlich einzugehen, will ich in den folgenden Zeilen nur einige wenige specielle Fälle derselben hervorheben, die zu besonders interessanten Beispielen einer zunächst im ersten Paragraphen aufzustellenden allgemeinen Formel führen, in welcher die Relationen der Herren Nasimof und Zsigmondy als specielle Fälle enthalten sind.

§. 1. In der Summe

$$\sum_{d_{\rho,n}} \chi(d_{\rho,n})\chi_1\left(\frac{n}{d_{\rho,n}}\right)\left(\sum_{x_1,x_2,\ldots,x_s=1}^{x_1,x_2,\ldots,x_s=\left[\frac{m}{d_{\rho,n}}\right]} f(d_{\rho,n}\varkappa x_1, d_{\rho,n}\varkappa x_2, \ldots, d_{\rho,n}\varkappa x_s)\right),$$

welche über alle Theiler $d_{\rho,n}$ der ganzen Zahl n zu erstrecken ist, die eine bestimmte (durch den Index ρ charakterisirte) arithmetische Eigenschaft besitzen, hat $f(\varkappa x_1^{(0)}, \varkappa x_2^{(0)}, \ldots, \varkappa x_s^{(0)})$ den Factor

$$\sum_{d'_{\rho,n}} \chi(d'_{\rho,n})\chi_1\left(\frac{n}{d'_{\rho,n}}\right),$$

wo die Summation bezüglich $d'_{\rho,n}$ über diejenigen unter den Theilern $d_{\rho,n}$ ausgedehnt wird, welche zugleich Theiler von $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_s^{(0)}$ sind, d. i. also über alle mit der durch den Index ρ charakterisirten Eigenschaft begabten Theiler $d_{\rho,[n,x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_s^{(0)}]}$ des grössten gemeinsamen Theilers $[n, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_s^{(0)}]$ von $n, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_s^{(0)}$. Man hat daher die Relation

$$\sum_{x_1,x_2,\ldots,x_s=1}^{x_1,x_2,\ldots,x_s=m} f(\varkappa x_1, \varkappa x_2, \ldots, \varkappa x_s) \cdot \left(\sum_{d_{\rho,[n,x_1,x_2,\ldots,x_s]}} \chi(d_{\rho,[n,x_1,x_2,\ldots,x_s]})\chi_1\left(\frac{n}{d_{\rho,[n,x_1,x_2,\ldots,x_s]}}\right)\right) =$$

$$\sum_{d_{\rho,n}} \chi(d_{\rho,n})\chi_1\left(\frac{n}{d_{\rho,n}}\right)\left(\sum_{x_1,x_2,\ldots,x_s=1}^{x_1,x_2,\ldots,x_s=\left[\frac{m}{d_{\rho,n}}\right]} f(d_{\rho,n}\varkappa x_1, d_{\rho,n}\varkappa x_2, \ldots, d_{\rho,n}\varkappa x_s)\right), \quad 1)$$

welche, falls die Function $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ für alle in Betracht kommenden ganzzahligen Werthepaare $x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots; x_s, y_s$ der Gleichung

$$f(x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_s y_s) = f(x_1, x_2, \ldots, x_s) f(y_1, y_2, \ldots, y_s)$$

genügt, in die folgende übergeht

$$\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = m} f(x_1 \varkappa, x_2 \varkappa, \ldots, x_s \varkappa) \cdot \left(\sum_{d_{\rho, [n, x_1, x_2, \ldots, x_s]}} \chi(d_{\rho, [n, x_1, x_2, \ldots, x_s]}) \chi_1 \left(\frac{n}{d_{\rho, [n, x_1, x_2, \ldots, x_s]}} \right) \right) =$$

$$= \sum_{d_{\rho, n}} \chi(d_{\rho, n}) f(\varkappa d_{\rho, n}, \varkappa d_{\rho, n}, \ldots, \varkappa d_{\rho, n}) F_\varkappa \left(\left[\frac{m}{d_{\rho, n}} \right] \right) \chi_1 \left(\frac{n}{d_{\rho, n}} \right), \qquad 2)$$

wo

$$F_\varkappa(r) = \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = r} f(x_1 \varkappa, x_2 \varkappa, \ldots, x_s \varkappa)$$

ist, und, wenn $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ homogen von der Dimension $\varkappa_1$ ist, die Gestalt

$$\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = m} f(x_1, x_2, \ldots, x_s) \cdot \left(\sum_{d_{\rho, [n, x_1, x_2, \ldots, x_s]}} \chi(d_{\rho, [n, x_1, x_2, \ldots, x_s]}) \chi_1 \left(\frac{n}{d_{\rho, [n, x_1, x_2, \ldots, x_s]}} \right) \right) =$$

$$= \sum_{d_{\rho, n}} \chi(d_{\rho, n}) d_{\rho, n}^{\varkappa_1} F \left(\left[\frac{m}{d_{\rho, n}} \right] \right) \chi_1 \left(\frac{n}{d_{\rho, n}} \right)$$

annimmt.

Setzt man in der abgeleiteten allgemeinen Gleichung beispielsweise

$$\varkappa = 1 \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_s) = x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \ldots x_s^{\varkappa_s}; \;\; \lambda(x_1 x_2 \ldots x_s) x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \ldots x_s^{\varkappa_s}$$

so erhält man die speciellen Beziehungen

$$\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = m} x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \ldots x_s^{\varkappa_s} \cdot \left(\sum_{d_{\rho, [n, x_1, x_2, \ldots, x_s]}} \chi(d_{\rho, [n, x_1, x_2, \ldots, x_s]}) \chi_1 \left(\frac{n}{d_{\rho, [n, x_1, x_2, \ldots, x_s]}} \right) \right) =$$

$$= \sum_{d_{\rho, n}} \chi(d_{\rho, n}) d_{\rho, n}^{\varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_s} \chi_1 \left(\frac{n}{d_{\rho, n}} \right) S_{\varkappa_1} \left(\left[\frac{m}{d_{\rho, n}} \right] \right) S_{\varkappa_2} \left(\left[\frac{m}{d_{\rho, n}} \right] \right) \ldots$$

$$\ldots S_{\varkappa_s} \left(\left[\frac{m}{d_{\rho, n}} \right] \right) \qquad 4)$$

$$\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = m} \lambda(x_1 x_2 \ldots x_s) x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \ldots x_s^{\varkappa_s} \cdot \left(\sum_{d_{\rho, [n, x_1, x_2, \ldots, x_s]}} \chi(d_{\rho, [n, x_1, x_2, \ldots, x_s]}) \chi_1 \left(\frac{n}{d_{\rho, [n, x_1, x_2, \ldots, x_s]}} \right) \right) =$$

$$= \sum_{d_{\rho, n}} \chi(d_{\rho, n}) \lambda^s (d_{\rho, n}) d_{\rho, n}^{\varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_s} \chi_1 \left(\frac{n}{d_{\rho, n}} \right) \Lambda_{\varkappa_1} \left(\left[\frac{m}{d_{\rho, n}} \right] \right) \Lambda_{\varkappa_2} \left(\left[\frac{m}{d_{\rho, n}} \right] \right) \ldots$$

$$\ldots \Lambda_{\varkappa_s} \left(\left[\frac{m}{d_{\rho, n}} \right] \right), \qquad 5)$$

wo

$$S_\varkappa(r) = \sum_{\mu = 1}^{\mu = r} \mu^\varkappa$$

$$\Lambda_\varkappa(r) = \sum_{\mu = 1}^{\mu = r} \lambda(\mu) \mu^\varkappa$$

ist.

Ist

$$F(r) = \{ A (\log r)^t + B \} r^{s_1} + C_r \quad (t = 0, 1),$$

wo A und B von r unabhängige Grössen vorstellen und

$$\lim_{r = \infty} \frac{C_r}{r^{s_1}} = 0$$

ist, so verwandeln sich die zwei letzten Gleichungen in die folgenden

$$\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = m} f(\varkappa x_1, \varkappa x_2, \ldots, \varkappa x_s) \cdot \left(\sum_{d_{\rho, [n, x_1, x_2, \ldots, x_s]}} \chi(d_{\rho, [n, x_1, x_2, \ldots, x_s]}) \chi_1\left(\frac{n}{d_{\rho, [n, x_1, x_2, \ldots, x_s]}} \right) \right) =$$

$$= \left(\{A (\log m)^t + B\} \sum_{d_{\rho, n}} \frac{\chi(d_{\rho, n}) f(d_{\rho, n} \varkappa, d_{\rho, n} \varkappa, \ldots, d_{\rho, n} \varkappa) \chi_1\left(\frac{n}{d_{\rho, n}}\right)}{d_{\rho, n}^{s_1}} - \right.$$

$$\left. - At \sum_{d_{\rho, n}} \frac{\chi_1\left(\frac{n}{d_{\rho, n}}\right) (d_{\rho, n}) \log d_{\rho, n} f(d_{\rho, n} \varkappa, d_{\rho, n} \varkappa, \ldots, d_{\rho, n} \varkappa)}{d_{\rho, n}^{s_1}} \right) m^{s_1} + D_m \quad 6)$$

$$\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = m} f(x_1, x_2, \ldots, x_s) \cdot \left(\sum_{d_{\rho, [n, x_1, x_2, \ldots, x_s]}} \chi(d_{\rho, [n, x_1, x_2, \ldots, x_s]}) \chi_1\left(\frac{n}{d_{\rho, [n, x_1, x_2, \ldots, x_s]}} \right) \right) =$$

$$= \left(\{A (\log m)^t + B\} \sum_{d_{\rho, n}} \frac{\chi(d_{\rho, n})}{d_{\rho, n}^{s_1 - \varkappa_1}} - At \sum_{d_{\rho, n}} \frac{\chi(d_{\rho, n}) \log d_{\rho, n}}{d_{\rho, n}^{s_1 - \varkappa_1}} \right) m^{s_1} + D'_m, \quad 7)$$

wo

$$\lim_{m = \infty} \frac{D_m}{m^{s_1}} = 0, \quad \lim_{m = \infty} \frac{D'_m}{m^{s}} = 0$$

ist.

Nach 5) ist demnach speciell

$$\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = m} x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \ldots x_s^{\varkappa_s} \cdot \left(\sum_{d_{\rho, [n, x_1, x_2, \ldots, x_s]}} \chi(d_{\rho, [n, x_1, x_2, \ldots, x_s]}) \chi_1\left(\frac{n}{d_{\rho, [n, x_1, x_2, \ldots, x_s]}} \right) \right) =$$

$$= \frac{m^{\varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_s + s}}{(\varkappa_1 + 1)(\varkappa_2 + 1) \ldots (\varkappa_s + 1)} \sum_{d_{\rho, n}} \frac{\chi(d_{\rho, n}) \chi_1\left(\frac{n}{d_{\rho, n}}\right)}{d_{\rho, n}^{s}} + D''_m \quad 8)$$

wo

$$\lim_{m=\infty} \frac{D''_m}{m^{\varkappa_1+\varkappa_2+\cdots+\varkappa_s+s}} = 0$$

ist.

Es sollen nun einige besonders bemerkenswerthe specielle Fälle dieser allgemeinen Formeln angegeben werden.

§. 2. Es bezeichne $d_{\rho,n}$ einen Theiler der ganzen Zahl n, welcher eine ρ^{te} Potenz ist, und es werden

$$\chi(x) = \bar{\mu}(\sqrt[\rho]{x}), \quad \chi_1(x) = 1, \varkappa = 1$$

gesetzt, wo die zahlentheoretische Function $\bar{\mu}(x)$ gleich 0 ist, wenn x nicht von der Form $n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_r^{\alpha_r}$ ist, oder wenn, falls es diese Form besitzt, auch nur einer der ganzzahligen, nicht negativen Exponenten $\alpha_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, r)$ grösser als 1 ist, und in allen anderen Fällen den Werth $(-1)^{\bar{\omega}_1(x)}$ hat, wenn $\bar{\omega}_1(x)$ die Anzahl der verschiedenen unter einander theilerfremden Zahlen n_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, r)$ vorstellt, welche zur angegebenen Darstellung von x nothwendig sind. Da aus dieser Definition die Gleichung

$$\bar{\mu}(N n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_r^{\alpha_r}) = \bar{\mu}(N) \bar{\mu}(n_1^{\alpha_1}) \bar{\mu}(n_2^{\alpha_2}) \ldots \bar{\mu}(n_r^{\alpha_r})$$

folgt, in welcher N eine durch keine der Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ theilbare ganze Zahl vorstellt, so hat die über alle Theiler $d_{\rho,n}$ der ganzen Zahl

$$n = N n_1^{\alpha'_1 \rho + \varepsilon_1} n_2^{\alpha'_1 \rho + \varepsilon_2} \ldots n_r^{\alpha'_r \rho + \varepsilon_r} \qquad (0 \leqq \varepsilon_\lambda < \rho;\ \lambda = 1, 2, \ldots, r),$$

welche ρ^{te} Potenzen sind, ausgedehnte Summe

$$\sum_{d_{\rho,n}} \bar{\mu}(\sqrt[\rho]{d_{\rho,n}}) = \bar{\mu}_\rho(n)$$

den Werth

$$\prod_{\varkappa=1}^{r}{}' \{1 + \bar{\mu}(n_\varkappa)\},$$

wo die Marke am Productzeichen anzeigt, dass nur jene Werthe des angegebenen Intervalles zu nehmen sind, für welche $\alpha'_\varkappa > 0$ ist, und ist demnach gleich Null, wenn auch nur einer der

Exponenten $\alpha'_\varkappa \rho + \varepsilon_\varkappa (\varkappa = 1, 2, \ldots, r)$ grösser als $\rho - 1$ ist, d. h. wenn n durch die ρ^{te} Potenz einer der Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ theilbar ist, während sie in allen anderen Fällen den Werth $+1$ hat.

Auf Grund des eben ermittelten Werthes von $\bar{\mu}_\rho(n)$ ergibt sich aus der im §. 1 aufgestellten allgemeinen Relation, dass der Ausdruck

$$F^{\rho, s}(m, n) = \sum_{d_{\rho, n}} \bar{\mu}(\sqrt[\rho]{d_{\rho, n}}) \left(\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = \left[\frac{m}{d_{\rho, n}}\right]} f(d_{\rho, n} x_1, d_{\rho, n} x_2, \ldots, d_{\rho, n} x_s) \right),$$

in welchem die Summation bezüglich $d_{\rho, n}$ über alle Theiler der ganzen Zahl n auszudehnen ist, welche ρ^{te} Potenzen sind, die Summe derjenigen Werthe vorstellt, welche die Function $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ annimmt, wenn ihr Argumentensystem alle Systeme von s (gleichen oder verschiedenen) beliebig dem Intervalle $1 \ldots m$ entnommenen ganzen Zahlen durchläuft, deren grösster gemeinsamer Theiler mit n keine der Zahlen n_λ^ρ $(\lambda = 1, 2, \ldots, r)$ als Factor enthält, so dass also speciell

$$\varphi_{\rho, s}(m, n) = \sum_{d_{\rho, n}} \left[\frac{m}{d_{\rho, n}}\right]^s \bar{\mu}(\sqrt[\rho]{d_{\rho, n}})$$

die Anzahl der eben genannten Argumentensysteme ist.

Als specieller Fall der letzteren Summe ergibt sich sofort, dass der Ausdruck

$$\mathfrak{Q}_\rho^{(s)}(n) = \sum_{x=1}^{x = [\sqrt[\rho]{n}]} \left[\frac{n}{x^\rho}\right] \mu(x)\ [1]$$

[1] In einer im 13. Bande der Schriften der mathematischen Gesellschaft in Moskau (S. 535—543) enthaltenen, in russischer Sprache abgefassten Abhandlung stellt Herr Minine folgendes Theorem auf: Ist

$$g(n, m) = \sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{x}{m}\right].$$

die Anzahl derjenigen Systeme von s (gleichen oder verschiedenen) ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots n$ vorstellt, deren grösster gemeinsamer Theiler keine der ρ^{ten} Potenzen $n_1^\rho, n_2^\rho, \ldots, n_r^\rho$ als Factor enthält, aus welcher sofort die Relation

$$\mathfrak{Q}_\rho^{(s)}(n) = n^s \prod_1^r \lambda \left(1 - \frac{1}{n_\lambda^{\rho s}}\right) + A_n n^{s-1+\frac{1}{\rho}}$$

folgt, in der A_n eine für alle Werthe von n endliche Grösse ist, dieselbe liefert das Theorem:

Ist

$$\lim_{\tau_1, n = \infty} \frac{\tau_1}{n} = 0$$

$$\lim_{\tau_1, n = \infty} \frac{n^{\frac{1}{\rho}}}{\tau_1} = 0,$$

so beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass eine aus dem Intervalle $n - \tau_1 + 1 \ldots n + \tau_1$ willkürlich herausgegriffene Zahl nicht durch

so besteht die Beziehung

$$n^2 = g(n,1) - \sum_{x=2}^{x=n} g(n,x)\,\mu(x).$$

Diese Formel lässt sich unmittelbar aus der Relation

$$\sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right] \mu(x) = 1,$$

welche ein specieller Fall der im Texte aufgestellten Gleichung ist, ableiten, wie man sofort erkennt, wenn man dieselbe in der Gestalt

$$n^2 = 2g(n,1) - \sum_{x,y=1}^{x=n,\, y=x} \left[\frac{x}{y}\right] \mu(y)$$

schreibt und beachtet, dass $g(n,1) = \frac{n(n+1)}{2}$ ist.

die ρ^{te} Potenz einer der r unter einander theilerfremden ganzen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ theilbar ist, im Mittel

$$\prod_{\lambda=1}^{r} \left\{ 1 - \frac{1}{n_\lambda^\rho} \right\}.$$

Setzt man in der eben aufgestellten allgemeinen Gleichung

$$\rho = 1,\ n = n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_r^{\alpha_r},$$

so entsteht die Zsigmondy'sche Beziehung, nimmt man sodann noch überdies für $n_1, n_2, \ldots, n_r$ die Primtheiler von n, so erhält man die Relation des Herrn Nasimof.

Von anderen speciellen Theoremen, welche in dieser Formel enthalten sind, mögen noch die folgenden leicht zu ermittelnden hier besonders hervorgehoben werden:

Die Summe der $\varkappa^{ten}$ Potenzen derjenigen unter den ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots m$, deren grösster gemeinsamer Theiler mit n keinen Divisor von der Form $(n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_r^{\alpha_r})^\rho$ ($n_\varkappa$ und n_λ theilerfremd für $\varkappa \gtrless \lambda$) ausser 1 besitzt und welche aus einer geraden Anzahl von (gleichen oder verschiedenen) Primzahlen zusammengesetzt sind, ist gleich

$$\frac{1}{2} \sum_{d_{\rho,n}} \mu(\sqrt[\rho]{d_{\rho,n}})\, d_{\rho,n}^\varkappa \left\{ S_\varkappa\left(\left[\frac{m}{d_{\rho,n}}\right]\right) + \lambda(d_{\rho,n})\, \Lambda_\varkappa\left(\left[\frac{m}{d_{\rho,n}}\right]\right)\right\},$$

während die Summe der $\varkappa^{ten}$ Potenzen derjenigen unter ihnen, deren grösster gemeinsamer Theiler mit n keinen Divisor der angegebenen Form besitzt und welche aus einer ungeraden Anzahl von (gleichen oder verschiedenen) Primzahlen zusammengesetzt sind, den Werth

$$\frac{1}{2} \sum_{d_{\rho,n}} \mu(\sqrt[\rho]{d_{\rho,n}})\, d_{\rho,n}^\varkappa \left\{ S_\varkappa\left(\left[\frac{m}{d_{\rho,n}}\right]\right) - \lambda(d_{\rho,n})\, \Lambda_\varkappa\left(\left[\frac{m}{d_{\rho,n}}\right]\right)\right\}$$

hat, wo die Summationen bezüglich $d_{\rho,n}$ über alle Theiler von n zu erstrecken sind, welche ρ^{te} Potenzen sind.

Die Summe der $\varkappa^{ten}$ Potenzen derjenigen unter den ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots m$, deren grösster gemeinsamer Theiler mit n keinen Divisor von der Form $(n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_r^{\alpha_r})^\rho$

($n_\varkappa$ und n_λ für $\varkappa \gtrless \lambda$ theilerfremd) ausser 1 besitzt, verhält sich für sehr grosse m zu $m^{\varkappa+1}$ nahezu wie die über alle Theiler $d_{\rho,n}$ von r, welche ρ^{te} Potenzen sind, ausgedehnte Summe

$$\sum_{d_{\rho,n}} \frac{\bar{\mu}(\sqrt[\rho]{d_{\rho,n}})}{d_{\rho,n}}$$

zu $\varkappa+1$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der grösste gemeinsame Theiler einer aus dem Intervalle $1 \ldots m$ beliebig herausgegriffenen ganzen Zahl und der ganzen Zahl n keinen Theiler von der Form $(n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_r^{\alpha_r})^\rho$ ($n_\varkappa$ und n_λ für $\varkappa \gtrless \lambda$ theilerfremd ausser 1 besitzt, ist für sehr grosse m im Mittel gleich

$$\sum_{d_{\rho,n}} \frac{\bar{\mu}(\sqrt[\rho]{d_{\rho,n}})}{d_{\rho,n}},$$

wo die Summation bezüglich $d_{\rho,n}$ über alle Theiler von n zu erstrecken ist, welche ρ^{te} Potenzen sind.

§. 3. Es bezeichne ferner $d_{\rho,n}$ irgend einen Theiler der ganzen Zahl n und es werde

$$\chi(x) = \bar{\lambda}_s(x), \; \chi_1(x) = 1, \; \varkappa = 1$$

gesetzt, wo mit $\bar{\lambda}_s(x)$ eine zahlentheoretische Function dargestellt wird, welche den Werth 0 hat, wenn der Quotient aus x und der grössten in dieser ganzen Zahl enthaltenen σ^{ten} Potenz einer ganzen Zahl von der Form $n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_r^{\alpha_r}$ ($n_\varkappa$ und n_λ für $\varkappa \gtrless \lambda$ theilerfremd) einen quadratischen Theiler ausser 1 besitzt gleich $+1$ ist, wenn dieser Quotient das Product einer geraden Anzahl von nur verschiedenen Primfactoren ist, und endlich den Werth -1 hat, wenn die eben genannte Anzahl ungerade ist

Da aus dieser Definition unmittelbar die Gleichung

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\bar{\lambda}_s(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s) \prod_{\lambda=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{n_\lambda^{\sigma s}}\right)} -$$

folgt, so ist die über alle Theiler d einer ganzen Zahl m erstreckte Summe

$$\sum_d \bar{\lambda}_\sigma(d)$$

gleich 1 oder 0, je nachdem m_1 die σte Potenz einer ganzen Zahl von der Form $n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_r^{\alpha_r}$ ist oder nicht, und daher stellt der Ausdruck

$$F_2^{(\sigma,\rho)}(m, n) = \sum_d \bar{\lambda}_\sigma(d) \left(\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = \left[\frac{m}{d}\right]} f(dx_1, dx_2, \ldots, dx_s) \right),$$

in welchem die auf d bezügliche Summation sich über alle Theiler der ganzen Zahl n erstreckt, die Summe der Werthe vor, welche die willkürliche Function $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ annimmt, wenn ihr Argumentensystem alle Systeme von s ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots m$ durchläuft, deren grösster gemeinsamer Theiler mit n die σte Potenz einer ganzen Zahl von der Form $n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_r^{\alpha_r}$ ($n_\varkappa$ und n_λ für $\varkappa \gtrless \lambda$ theilerfremd) ist, so dass also speciell

$$\sum_d \left[\frac{m}{d}\right]^s \bar{\lambda}_\sigma(d)$$

die Anzahl der eben genannten Argumentensysteme und

$$\sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right]^s \bar{\lambda}_\sigma(x) = Q_\sigma^{(s)}(n)$$

die Anzahl derjenigen s-gliederigen Systeme von ganzen (gleichen oder verschiedenen) Zahlen des Intervalles $1 \ldots n$ ist, deren grösster gemeinsamer Theiler eine Zahl von der Form $n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_r^{\alpha_r}$ ist.

Von den speciellen Fällen, welche in diesem allgemeinen Theoreme enthalten sind, mögen die folgenden besonders angeführt werden:

Die Summe der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots m$, deren grösster gemeinsamer Theiler mit n

die σ^{te} Potenz einer ganzen Zahl von der Form $n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \dots n_r^{\alpha_r}$ ($n_\varkappa$ und n_λ für $\varkappa \lessgtr \lambda$ theilerfremd) ist und welche aus einer geraden Anzahl von (gleichen oder verschiedenen) Primzahlen zusammengesetzt sind, ist gleich

$$\frac{1}{2} \sum_d \overline{\lambda}_\sigma(d) d^\varkappa \left\{ S_\varkappa\left(\left[\frac{m}{d}\right]\right) + \lambda(d) \Lambda_\varkappa\left(\left[\frac{m}{d}\right]\right) \right\},$$

während die Summe der $\varkappa^{ten}$ Potenzen derjenigen unter ihnen, deren grösster gemeinsamer Theiler mit n die σ^{te} Potenz einer ganzen Zahl von der Form $n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \dots n_r^{\alpha_r}$ ist und welche aus einer ungeraden Anzahl von (gleichen oder verschiedenen) Primzahlen gebildet sind, den Werth

$$\frac{1}{2} \sum_d \overline{\lambda}_\sigma(d) d^\varkappa \left\{ S_\varkappa\left(\left[\frac{m}{d}\right]\right) - \lambda(d) \Lambda_\varkappa\left(\left[\frac{m}{d}\right]\right) \right\}$$

hat, wo die Summationen bezüglich d über alle Theiler der ganzen Zahl n zu erstrecken sind.

Die Summe der $\varkappa^{ten}$ Potenzen derjenigen ganzen Zahlen des Intervalles $1 \dots m$, deren grösster gemeinsamer Theiler mit n die σ^{te} Potenz einer ganzen Zahl von der Form $n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \dots n_r^{\alpha_r}$ ($n_\varkappa$ und n_λ für $\varkappa \gtrless \lambda$ theilerfremd) ist, verhält sich bei sehr grossem m zu $m^{\varkappa+1}$ ungefähr, wie die über alle Theiler d der ganzen Zahl n ausgedehnte Summe

$$\sum_d \frac{\overline{\lambda}_\sigma(d)}{d}$$

zu $\varkappa + 1$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der grösste gemeinsame Theiler einer aus dem Intervalle $1 \dots m$ beliebig herausgegriffenen ganzen Zahl und der Zahl n die σ^{te} Potenz einer ganzen Zahl von der Form $n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \dots n_r^{\alpha_r}$ ist, ist für sehr grosse m im Mittel gleich der über alle Theiler d von n ausgedehnten Summe

$$\sum_d \frac{\overline{\lambda}_\sigma(d)}{d}.$$

§. 4. Es werde ferner wieder für $d_{\rho,n}$ irgend ein Theiler der ganzen Zahl n genommen und

$$\chi(x) = \bar{\alpha}(x),\ \chi_1(x) = 1,\ \varkappa = 1$$

gesetzt, wo die zahlentheoretische Function $\bar{\alpha}(x)$ den Werth 0 hat, wenn x durch keine der Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ theilbar ist, oder wenn es auch nur eine derjenigen Zahlen n_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, r)$, welche durch kein Quadrat ausser 1 theilbar sind, in einer höheren Potenz als der zweiten oder mindestens zwei in einer höheren als der ersten Potenz enthält, oder wenn dasselbe durch das Quadrat einer der übrigen Zahlen n_λ oder durch ein Product von solchen theilbar ist, oder endlich, wenn eine Primzahl in x in einer um mehr als eine Einheit höheren Potenz als einer der Grössen n_λ enthalten ist, während dieselbe gleich $(-1)^{\bar{\omega}\left(\frac{x}{n_\mu}\right)} f_1(n_\mu)$ ist, wenn x durch das Quadrat der nur verschiedene Primfactoren enthaltenden Zahl n_μ oder durch eine der Zahlen $n_\lambda(n_\mu)$ mit quadratischen Divisoren theilbar ist und endlich die Relation

$$\bar{\alpha}(x) = \sum_{\mu=1}^{\mu=s} (-1)^{\bar{\omega}\left(\frac{n}{n_\mu}\right)} f_1(n_\mu)$$

besteht, wenn x das Product von nur verschiedenen Primzahlen und den Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_s$, die keinen quadratischen Theiler ausser 1 besitzen, ist.

Da für diese Function, wie man leicht zeigt, die über alle Theiler d einer ganzen Zahl n erstreckte Summe

$$\sum_d \bar{\alpha}(d)$$

den Werth $f_1(n)$ oder 0 hat, je nachdem n mit einer der Zahlen n_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, r)$ übereinstimmt oder nicht, so erkennt man auf Grund der Entwicklungen des Paragraphes 1), dass der Ausdruck

$$F_3(m, n) = \sum_d \bar{\alpha}(d) \left(\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = \left[\frac{m}{d}\right]} f(dx_1, dx_2, \ldots, dx_s) \right),$$

in welchem die Summation nach d über alle Theiler der ganzen Zahl n zu erstrecken ist, die Summe der Producte vorstellt, welche entstehen, wenn man den Werth der Function $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ für ein dem Intervalle $1 \ldots m$ angehöriges Argumentensystem, dessen grösster gemeinsamer Theiler mit n eine der Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ ($n_\varkappa$ und n_λ für $\varkappa \gtrless \lambda$ theilerfremd) ist, mit dem Werthe multiplicirt, welchen die Function $f_1(x)$ für diesen gemeinsamen Theiler erhält. Speciell wird die Summe der Werthe, welche die Function $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ annimmt, wenn ihr Argumentensystem die eben genannten Zahlen des Intervalles $1 \ldots m$ durchläuft, durch die über alle Theiler d von n ausgedehnte Summe

$$\sum_d \bar{\alpha}_0(d) \left(\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = \left[\frac{m}{d}\right]} f(dx_1, dx_2, \ldots, dx_s) \right) = F_3^{(0)}(m, n)$$

gegeben, wenn mit $\bar{\alpha}_0(x)$ diejenige Specialisirung der Function $\bar{\alpha}(x)$ bezeichnet wird, für welche die obigen allgemeinen Gleichungen übergehen in

$$\bar{\alpha}_0(x) = 0$$

$$\bar{\alpha}_0(x) = (-1)^{\omega\left(\frac{x}{n_\mu}\right)}$$

$$\bar{\alpha}_0(x) = \sum_{\mu=1}^{\mu=s} (-1)^{\omega\left(\frac{x}{n_\mu}\right)}.$$

Von den speciellen Theoremen, welche in dieser allgemeinen Formel enthalten sind, mögen die folgenden besonders erwähnt werden:

Die Summe der Producte aus den $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen im Intervalle $1 \ldots m$ liegenden ganzen Zahlen, deren grösster gemeinsamer Theiler mit n einer der unter einander theilerfremden ganzen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ ist und welche aus einer geraden Anzahl von beliebigen (gleichen oder verschiedenen) ganzen Zahlen zusammengesetzt sind, und dem Werthe, welchen die Function $f_1(x)$ für diesen gemeinsamen Theiler

erhält, ist gleich der über alle Theiler d der ganzen Zahl n ausgedehnten Summe

$$\frac{1}{2}\sum_{d}\bar{\varkappa}(d)\,d^{\varkappa}\left\{S_{\varkappa}\left(\left[\frac{m}{d}\right]\right)+\lambda(d)\,\Lambda_{\varkappa}\left(\left[\frac{m}{d}\right]\right)\right\},$$

während die Summe der Producte aus den $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen unter den Zahlen des genannten Bereiches, deren grösster gemeinsamer Theiler mit n eine der Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ ist und welche aus einer ungeraden Anzahl von beliebigen (gleichen oder verschiedenen) Primzahlen zusammengesetzt sind, und dem Werthe, welchen die Function $f_1(x)$ für diesen gemeinsamen Divisor annimmt, den Werth

$$\frac{1}{2}\sum_{d}\bar{\varkappa}(d)\,d^{\varkappa}\left\{S_{\varkappa}\left(\left[\frac{m}{d}\right]\right)-\lambda(d)\,\Lambda_{\varkappa}\left(\left[\frac{m}{d}\right]\right)\right\}$$

hat.

Die Summe der Producte aus den $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen dem Intervalle $1\ldots m$ angehörigen ganzen Zahlen, deren grösster gemeinsamer Theiler mit n eine der unter einander theilerfremden ganzen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ ist, und dem Werthe, welchen die Function $f_1(x)$ für diesen Theiler annimmt, verhält sich für sehr grosse m zu $m^{\varkappa+1}$ nahezu wie die über alle Theiler d der ganzen Zahl n ausgedehnte Summe

$$\sum_{d}\frac{\bar{\varkappa}(d)}{d}$$

zu $\varkappa+1$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der grösste gemeinsame Theiler einer aus dem Intervalle $1\ldots m$ beliebig herausgegriffenen ganzen Zahl und der Zahl n eine der r unter einander theilerfremden ganzen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ ist, beträgt für sehr grosse m im Mittel

$$\sum_{d}\frac{\bar{\varkappa}_0(d)}{d},$$

wo die Summation über alle Theiler d von n zu erstrecken ist.

§. 5. Jeder der drei in den vorigen Paragraphen benützten zahlentheoretischen Functionen $\overline{\mu}_\rho(x)$, $\overline{\lambda}_\rho(x)$, $\overline{\alpha}(x)$ lässt sich eine neue an die Seite stellen, welche durch die über alle Theiler d der ganzen Zahl x, beziehungsweise über diejenigen $d_{\rho,x}$ unter ihnen, welche ρ^{te} Potenzen sind, ausgedehnte Summe

$$\sum_{d_{\rho,x}} \beta\left(\frac{x}{d_{\rho,x}}\right) \mu(\sqrt[\rho]{d_{\rho,x}}) = \mu'_\rho(x)$$

$$\sum_d \overline{\mu}_1\left(\frac{x}{d}\right) \overline{\lambda}_\rho(d) = \lambda'_\rho(x)$$

$$\sum_d \overline{\mu}_1\left(\frac{x}{d}\right) \overline{\alpha}(d) = \alpha'(x)$$

definirt wird, wo $\beta(x)$ den Werth 1 oder 0 hat, je nachdem x von der Form $n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_r^{\alpha_r}$ ist oder nicht.

Dieser Definitionsgleichung nach hat

$\mu'_\rho(x)$ den Werth 0, wenn x nicht von der Form $n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_r^{\alpha_r}$ ist, oder wenn, falls es diese Gestalt besitzt, auch nur einer der Exponenten $\alpha_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots r)$ grösser als $\rho - 1$ ist, während diese Function in allen anderen Fällen gleich 1 ist;

$\lambda'_\rho(x)$ den Werth 0, wenn x nicht von der Form $n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_r^{\alpha_r}$ ist, oder wenn, falls es diese Form besitzt, auch nur einer der Exponenten $\alpha_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, r)$ nach dem Modul ρ einer von 0 oder 1 verschiedenen Zahl congruent ist, während diese Function in allen anderen Fällen gleich $(-1)^\tau$ ist, wo τ die Anzahl derjenigen Exponenten $\alpha_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, r)$ vorstellt, welche die Form $\varkappa\rho + 1$ haben;

$\alpha'(x)$ den Werth 0, wenn x nicht von der Form $n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_r^{\alpha_r}$ ist, oder wenn, falls es diese Form besitzt, einer der Exponenten $\alpha_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, r)$ grösser als 2, oder mindestens zwei von ihnen grösser als 1 sind, den Werth $(-1)^{\overline{\omega}_1(x)} f_1(n_\varkappa)$, wenn $\alpha_\varkappa = 2$ ist und die übrigen Exponenten unterhalb 2 liegen, endlich den Werth

$$(-1)^{\overline{\omega}_1(x)+1} \sum_{\mu=1}^{\mu=t} f_1(n_\mu)$$

wenn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ gleich 1, $\alpha_{t+1}, \alpha_{t+2}, \ldots, \alpha_r$ aber Null sind.

Von den zahlreichen Relationen, welche für die angegebenen zahlentheoretischen Functionen bestehen, mögen die folgenden hier Platz finden:

$$\bar{\lambda}_\rho(x) = \sum_{d_{\rho,x}} \beta(\sqrt[\rho]{d_{\rho,x}})\, \mu\left(\frac{x}{d_{\rho,x}}\right)$$

$$\lambda'_\rho(x) = \sum_{d_{\rho,x}} \beta(\sqrt[\rho]{d_{\rho,x}})\, \bar{\mu}\left(\frac{x}{d_{\rho,x}}\right)$$

$$\sum_d \beta\left(\frac{x}{d}\right) \lambda'_\rho(d) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

$$\sum_d \mu(d)\, \bar{\mu}_\rho\left(\frac{x}{d}\right) = \begin{cases} \bar{\mu}(\sqrt[\rho]{x}) \\ 0 \end{cases}$$

$$\sum_d \bar{\mu}(d)\, \mu'_\rho\left(\frac{x}{d}\right) = \begin{cases} \bar{\mu}(\sqrt[\rho]{x}) \\ 0 \end{cases},$$

je nachdem x die ρ^{te} Potenz einer Zahl von der Form $n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \dots n_r^{\alpha_r}$ ist oder nicht,

$$\sum_d \beta\left(\frac{x}{d}\right) \alpha'(d) = \begin{cases} f_1(x), \\ 0 \end{cases}$$

je nachdem x eine der Zahlen n_λ ($\lambda = 1, 2, \dots, r$) ist oder nicht.

$$\sum_d \lambda'_\rho(d)\, \mu'_\rho\left(\frac{x}{d}\right) = \begin{cases} 1 & (x = 1) \\ 0 & (x > 1) \end{cases}$$

$$\sum_d \bar{\lambda}_\rho(d)\, \bar{\mu}_\rho\left(\frac{x}{d}\right) = \begin{cases} 1 & (x = 1) \\ 0 & (x > 1) \end{cases}.$$

Die letzten zwei Gleichungen zeigen, dass die Functionen $\bar{\lambda}_\rho(x)$ und $\lambda'_\rho(x)$, beziehungsweise $\bar{\mu}_\rho(x)$ und $\mu'_\rho(x)$ conjugirt sind.

Auf Grund der eben abgeleiteten Relationen folgt aus dem allgemeinen Theoreme des Paragraphes 1, dass der Ausdruck

$$\sum_{d_{\rho,n}} \beta\left(\frac{n}{d_{\rho,n}}\right) \bar{\mu}(\sqrt[\rho]{d_{\rho,n}}) \left(\sum_{x_1, x_2, \dots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \dots, x_s = \left[\frac{m}{d_{\rho,n}}\right]} f(d_{\rho,n} x_1, d_{\rho,n} x_2, \dots, d_{\rho,n} x_s) \right),$$

in welchem die Summation nach $d_{\rho,n}$ über alle Theiler von n zu erstrecken ist, welche ρ^{te} Potenzen sind, die Summe der Werthe vorstellt, welche die Function $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ annimmt, wenn ihr Argument alle s-gliederigen Systeme von ganzen (gleichen oder verschiedenen) Zahlen des Intervalles $1 \ldots m$ durchlauft, deren grösster gemeinsamer Theiler mit n eine Zahl von der Form $n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_r^{\alpha_r}$ ($n_\varkappa$ und n_λ für $\varkappa \gtreqless \lambda$ theilerfremd) ist, in welcher keiner der Exponenten $\alpha_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, r)$ die Zahl $\rho - 1$ übersteigt, ferner die über alle Theiler von n ausgedehnten Summen

$$\sum_d \mu(d)\bar{\mu}_\rho\left(\frac{n}{d}\right)\left(\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = \left[\frac{m}{d}\right]} f(dx_1, dx_2, \ldots, dx_s)\right) = F_4^{(\rho, s)}(m, n)$$

$$\sum_d \bar{\mu}(d)\mu'_\rho\left(\frac{n}{d}\right)\left(\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = \left[\frac{m}{d}\right]} f(dx_1, dx_2, \ldots, dx_s)\right) = F_5^{(\rho, s)}(m, n)$$

das Aggregat vorstellen, welches entsteht, wenn jeder der Werthe, den die Function $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ annimmt, wenn für ihr Argumentensystem irgend eines der s-gliederigen Systeme von beliebigen (gleichen oder verschiedenen) ganzen Zahlen des Bereiches $1 \ldots m$ gesetzt wird, deren grösster gemeinsamer Theiler mit n die ρ^{te} Potenz einer ganzen Zahl von der Form $n_1^{\varepsilon_1} n_2^{\varepsilon_2} \ldots n_r^{\varepsilon_r}$ ($\varepsilon_\lambda < 2$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, r)$; $n_\varkappa$ und n_λ für $\varkappa \gtreqless \lambda$ theilerfremd) ist, mit

$$(-1)^{\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=r} \varepsilon_\lambda}$$

multiplicirt wird, weiters die über alle Theiler d von n ausgedehnte Summe

$$\sum_d \beta\left(\frac{n}{d}\right)\alpha'(d)\left(\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = \left[\frac{m}{d}\right]} f(dx_1, dx_2, \ldots, dx_s)\right)$$

die Summe der Producte angibt, welche dadurch entstehen, dass man den Werth, welchen die Function $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$

erhält, wenn für ihr Argumentensystem irgend eines der s-gliederigen Systeme von beliebigen (gleichen oder verschiedenen) ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots m$ gesetzt wird, deren grösster gemeinsamer Theiler mit n eine der unter einander theilerfremden ganzen Zahlen n_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, r)$ ist, mit $f_1(n_\lambda)$ multiplicirt, sodann die über alle Theiler d von n erstreckte Summe

$$\sum_d \beta\left(\frac{n}{d}\right) \lambda'_\rho(d) \left(\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = \left[\frac{m}{d}\right]} f(dx_1, dx_2, \ldots, dx_s) \right) = F_6^{(\rho, s)}(m, n)$$

die Summe der Werthe ist, welche die willkürliche Function $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ annimmt, wenn für ihr Argumentensystem alle dem Intervalle $1 \ldots m$ entnommenen s-gliederigen Systeme beliebiger ganzer Zahlen gesetzt werden, deren grösster gemeinsamer Theiler mit n die ρ^{te} Potenz einer ganzen Zahl von der Form $n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_r^{\alpha_r}$ ($n_\varkappa$ und n_λ für $\varkappa \gtrless \lambda$ theilerfremd) ist, endlich die über alle Theiler d von n, beziehungsweise über diejenigen $d_{\rho, n}$ unter ihnen, welche ρ^{te} Potenzen sind, ausgedehnte Summe

$$\sum_d \mu_1\left(\frac{n}{d}\right) \lambda_\rho(d) \left(\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = \left[\frac{m}{d}\right]} f(dx_1, dx_2, \ldots, dx_s) \right) = F_7^{(\rho, s)}(m, n)$$

$$\sum_{d_{\rho, n}} \beta(\sqrt[\rho]{d_{\rho, n}})\, \mu\left(\frac{n}{d_{\rho, n}}\right) \left(\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = \left[\frac{m}{d_{\rho, n}}\right]} f(d_{\rho, n} x_1, d_{\rho, n} x_2, \ldots, d_{\rho, n} x_s) \right)$$

das Aggregat der mit dem Zeichen

$$(-1)^{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=r} \varepsilon_\lambda}$$

versehenen Werthe, welche die Function $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ erhält, wenn für ihr Argumentensystem alle s-gliederigen Systeme von beliebig dem Intervalle $1 \ldots m$ entnommenen ganzen Zahlen gesetzt werden, deren grösster gemeinsamer Theiler mit n eine

$\lambda = 1, 2, \ldots, r)$ ist. ... (n_x und n_λ für $x \gtrless \lambda$ theilerfremd; $0 \leqq \varepsilon_\lambda \leqq \rho$,

Auf die zahlreichen speciellen Theoreme, welche sich aus diesen Formeln ergeben, soll hier nicht weiter eingegangen werden.

§. 6. Den bisherigen Erörterungen mögen in diesem Paragraphe noch folgende Bemerkungen angeschlossen werden. Es ist

$$\sum_{y=1}^{y=[\sqrt[\rho]{n}]} \mathfrak{Q}_\rho^{(s)}\left(\left[\frac{n}{y^\rho}\right]\right) = \sum_{x,y=1}^{x,y=[\sqrt[\rho]{n}]} \left[\frac{n}{(xy)^\rho}\right]^s \mu(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\rho]{n}]} \left[\frac{n}{x^\rho}\right]^s \overline{\mu}_1(x)$$

$$= \sum_{x, y_1, y_2, \ldots, y_s = 1}^{x=[\sqrt[\rho]{n}],\, y_1, y_2, \ldots, y_s = n} \varepsilon\left(\frac{n}{x^\rho y_1}\right) \varepsilon\left(\frac{n}{x^\rho y_2}\right) \ldots \varepsilon\left(\frac{n}{x^\rho y_s}\right) \overline{\mu}_1(x)$$

$$= \sum_{y_1, y_2, \ldots, y_s = 1}^{y_1, y_2, \ldots, y_s = n} \varepsilon\left(\frac{n}{y_1}\right) \varepsilon\left(\frac{n}{y_2}\right) \ldots \varepsilon\left(\frac{n}{y_s}\right) \left(\sum_{d_{\rho,[y_1, y_2, \ldots, y_s]}} \overline{\mu}_1\left(\sqrt[\rho]{d_{\rho,[y_1, y_2, \ldots, y_s]}}\right)\right)$$

$$= \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = n} \varphi_{0,\rho}([x_1, x_2, \ldots, x_s]) = \Psi_{0,\rho}^{(s)}(n),$$

wenn mit $\bar{\psi}_{\varkappa,\rho}(x)$ die Summe der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen Theiler von x bezeichnet wird, welche ρ^{te} Potenzen von ganzen Zahlen sind, die keine der unter einander theilerfremden ganzen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ als Factor enthalten.

Aus dieser Gleichung folgt sofort die Relation

$$\bar{\Psi}^{(s)}_{0,\rho}(n) = n^s \zeta(\rho s) \prod_1^r \lambda \left\{1 - \frac{1}{n_\lambda^{\rho s}}\right\} + B_n n^{s-1+\frac{1}{\rho}} \log n \quad (\rho > 1),$$

wo B_n eine für alle Werthe von n endliche Grösse ist; dieselbe liefert u. A. folgende Theoreme:

Ist

$$\lim_{\eta, n=\infty} \frac{\eta}{n} = 0$$

$$\lim_{\eta, n=\infty} \frac{n^{\frac{1}{\rho}} \log n}{\eta} = 0,$$

so hat jede dem Intervalle $n-\eta+1 \ldots n+\eta$ angehörige ganze Zahl im Mittel

$$\zeta(\rho) \prod_1^r \lambda \left\{1 - \frac{1}{n_\lambda^\rho}\right\}$$

Theiler, welche ρ^{te} Potenzen von ganzen Zahlen sind, die keine der unter einander theilerfremden ganzen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ als Factor enthalten.

Ist

$$\lim_{\eta, n=\infty} \frac{\eta}{n} = 0$$

$$\lim_{\eta, n=\infty} \frac{n^{\frac{1}{2\rho}} \log n}{\eta} = 0,$$

so hat jede dem Bereiche $n-\eta+1 \ldots n+\eta$ angehörige ganze Zahl im Mittel

$$\frac{(2\pi)^{2\rho} B_\rho}{2\Pi(2\rho)} \prod_1^r \lambda \left\{1 - \frac{1}{n^{2\rho}}\right\}$$

Theiler, welche $(2\rho)^{\text{te}}$ Potenzen von ganzen Zahlen sind, die keine der unter einander theilerfremden ganzen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ als Factor enthalten.

Ist

$$\lim_{\tau, n=\infty} \frac{\eta}{n} = 0$$

$$\lim_{\tau, n=\infty} \frac{\sqrt{n} \log n}{\eta} = 0,$$

so hat jede im Intervalle $n-\eta+1 \ldots n+\eta$ befindliche ganze Zahl im Mittel

$$\frac{\pi^2}{6} \prod_{\lambda=1}^{r} \left\{1 - \frac{1}{n_\lambda^2}\right\}$$

quadratische Theiler, deren Quadratwurzeln durch keine der unter einander theilerfremden ganzen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ theilbar sind.

Aus der Definition der Function $\bar{\mu}(x)$ folgt leicht, dass

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{l_\rho(n)}{n^s} = \rho \zeta(s) \prod_{\lambda=1}^{r} \left\{1 - \frac{1}{n_\lambda^{\rho s}}\right\}^2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\beta(n) \log n}{n^s}$$

ist, wenn die über alle Theiler $d_{\rho,n}$ von n, welche ρ^{te} Potenzen sind, ausgedehnte Summe

$$\sum_{d_{\rho,n}} \bar{\mu}(\sqrt[\rho]{d_{\rho,n}}) \log d_{\rho,n} = l_\rho(n)$$

gesetzt wird. Da nach dieser Formel

$$\ldots(n) = \sum_{\beta_{x_1}, \beta_{x_2}, \ldots, \beta_{x_\sigma}=0}^{\beta_{x_1}, \beta_{x_2}, \ldots, \beta_{x_\sigma}=1} \{\beta_{x_1} \log n_{x_1} + \beta_{x_2} \log n_{x_2} + \ldots + \beta_{x_\sigma} \log n_{x_\sigma}\} \,.$$
$$. \bar{\mu}(n_{x_1}^{\beta_{x_1}}) \bar{\mu}(n_{x_2}^{\beta_{x_2}}) \ldots \bar{\mu}(n_{x_\sigma}^{\beta_{x_\sigma}})$$

…st, falls nur für $\lambda = x_1, x_2, \ldots, x_\sigma$ $\left[\frac{n_\lambda}{\rho}\right] \geqq 1$ wird, so hat $l_\rho(n)$ den …erth $-\rho \log n_\lambda$ oder 0, je nachdem n die mit einem $\rho-1$ über-

steigenden Exponenten versehene Potenz einer der Zahlen n_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, r)$ ist oder nicht.

Die angegebene Gleichung verwandelt sich daher sofort in die folgende

$$\zeta(s) = \frac{\log \prod_{\lambda=1}^{r} n_\lambda^{\frac{1}{n_\lambda^{\rho s} - n_\lambda^{(\rho-1)s}}}}{\log \prod_{x=1}^{\infty} x^{\frac{1}{\xi(x)\, x^{\rho s}}} \prod_{\lambda=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{n_\lambda^{\rho s}}\right)^{2}},$$

aus welcher sich bei geradem $s = 2\tau$ für die τ^{te} Bernoulli'sche Zahl der folgende bemerkenswerthe Ausdruck ergibt

$$B_\tau = \frac{2\Pi(2\tau)}{(2\pi)^{2\tau}} \frac{\log \prod_{\lambda=1}^{r} n_\lambda^{\frac{1}{n_\lambda^{2\rho\tau} - n_\lambda^{2(\rho-1)\tau}}}}{\log \prod_{x=1}^{\infty} x^{\frac{1}{\xi(x)\, x^{2\rho\tau}}} \prod_{\lambda=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{n_\lambda^{2\rho\tau}}\right)^{2}},$$

der, falls $\rho = 1, r = \infty$ gesetzt und für $n_1, n_2, \ldots$ alle Primzahlen genommen werden, in die bekannte von Herrn Bugajef herrührende Relation

$$B_\tau = \frac{2\Pi(2\tau)}{(2\pi)^{2\tau}} \frac{\log \left(2^{\frac{1}{2^{2\tau}}} 3^{\frac{1}{3^{2\tau}}} 4^{\frac{1}{4^{2\tau}}} 5^{\frac{1}{5^{2\tau}}} \ldots\right)}{\log \left(2^{\frac{1}{2^{2\tau}-1}} 3^{\frac{1}{3^{2\tau}-1}} 5^{\frac{1}{5^{2\tau}-1}} 7^{\frac{1}{7^{2\tau}-1}} \ldots\right)}$$

übergeht.

Man hat ferner

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\rho]{n}]} \left[\frac{n}{x^\rho}\right] \bar{\mu}(x) \log x = \sum_{x,y=1}^{x=[\sqrt[\rho]{n}],\, y=n} \varepsilon\left(\frac{n}{x^\rho y}\right) \bar{\mu}(x) \log x$$

$$= \frac{1}{\rho} \sum_{x=1}^{x=n} \varepsilon\left(\frac{n}{x}\right) \left(\sum_{d_{\rho,x}} \bar{\mu}(\sqrt[\rho]{d_{\rho,x}}) \log d_{\rho,x}\right)$$

$$= \frac{1}{\rho} \sum_{x=1}^{x=n} l_\rho(x).$$

Beachtet man, dass in dem Intervalle $1 \ldots n$ entweder keine oder $\left[\frac{\log n}{\log n_x}\right] - \rho + 1$ die $(\rho - 1)^{te}$ übersteigende Potenzen von n_x vorkommen, je nachdem $\log n \lesseqgtr \rho \log n_x$ ist, so erkennt man, dass sich die auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Summe auch in folgender Weise darstellen lässt

$$-\sum_{x=1}^{x=r} \varepsilon\left(\frac{\log n}{\rho \log n_x}\right) \log n_x \left\{\left[\frac{\log n}{\log n_x}\right] - \rho + 1\right\}$$

und daher hat man die Beziehung

$$\prod_{x=1}^{[\sqrt[\rho]{n}]} x^{\bar{\mu}(x)\left[\frac{n}{x^\rho}\right]} = \prod_{x=1}^{r} n_x^{-\varepsilon\left(\frac{\log n}{\rho \log n_x}\right)\left\{\left[\frac{\log n}{\log n_x}\right] - \rho + 1\right\}},$$

welche, falls das Product derjenigen unter den Grössen $n_1, n_2, \ldots, n_r$, welche nicht grösser als a sind, mit $P(a)$ bezeichnet wird, die folgende Form annimmt

$$\prod_{x=1}^{[\sqrt[\rho]{n}]} x^{\bar{\mu}(x)\left[\frac{n}{x^\rho}\right]} \prod_{\lambda=\rho}^{\left[\frac{\log n}{\log n_1}\right]} P(\sqrt[\lambda]{n}) = 1,$$

wo mit n_1 die kleinste der Zahlen n_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, r)$ bezeichnet wird.

Ist $\delta_{\rho, n}$ der zu $d_{\rho, n}$ complementäre Theiler von n, so hat man

$$\sum_{d_{\rho, n}} \bar{\mu}(\sqrt[\rho]{d_{\rho, n}}) \{\log d_{\rho, n} + \log \delta_{\rho, n}\} = \bar{\mu}_\rho(n) \log n$$

und daher ergeben sich die Relationen

$$\sum_{x=1}^{x=n} \bar{\Omega}_\rho^{(1)}\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right) \log x = \sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right] \bar{\mu}_\rho(x) \log x - \sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right] l_\rho(x)$$

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\rho]{n}]} \bar{\mu}(x) \log\left(\left[\frac{n}{x^\rho}\right]!\right) = \sum_{x=1}^{x=n} \bar{\mu}_\rho(x) \log x - \sum_{x=1}^{x=n} l_\rho(x),$$

welche unmittelbar zu folgenden Beziehungen führen

$$\prod_{y=1}^{n} y^{\bar{\Omega}_\rho^{(1)}\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right)} = \prod_{x=1}^{n} x^{\bar{\mu}_\rho(x)\left[\frac{n}{x}\right]} \prod_{r=1}^{\varkappa} n_\varkappa^{\rho\left\{\left[\frac{n}{n_\varkappa^\rho}\right]+\left[\frac{n}{n_\varkappa^\rho+1}\right]+\left[\frac{n}{n_\varkappa^\rho+2}\right]+\cdots\right\}}$$

$$\log n! = \sum_{y=1}^{y=[\sqrt[\rho]{n}]} \left\{\mathrm{M}\left(\left[\frac{n}{y^\rho}\right]\right)\beta(y)\right\} + \log \prod_{\lambda=\rho}^{\left[\frac{\log n}{\log n_1}\right]} P\left(\sqrt[\lambda]{\frac{n}{y^\rho}}\right)\beta(y),$$

wo

$$\mathrm{M}(a) = \sum_{x=1}^{x=a} \bar{\mu}(x) \log x$$

ist.

§. 7. Beachtet man, dass

$$\left[\frac{n}{x}\right] - \left[\frac{n-1}{x}\right]$$

den Werth 1 oder 0 hat, je nachdem x ein Theiler von n ist oder nicht, so erkennt man, dass der Ausdruck

$$\Phi_{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\sigma}(m, n) = \sum_{d_{\rho_1}, n} f_{\rho_1}(d_{\rho_1}) \sum_{d_{\rho_2}, \frac{n}{d_{\rho_1}}} f_{\rho_2}(d_{\rho_2}) \sum_{d_{\rho_3}, \frac{n}{d_{\rho_1} d_{\rho_2}}} f_{\rho_3}(d_{\rho_3}) \ldots$$

$$\ldots \sum_{d_{\rho_{\sigma-1}}, \frac{n}{d_{\rho_1} d_{\rho_2} \ldots d_{\rho_{\sigma-2}}}} f_{\rho_{\sigma-1}}(d_{\rho_{\sigma-1}}) .$$

$$. F^{(\rho, \sigma)}_{d_{\rho_1} d_{\rho_2} \ldots d_{\rho_{\sigma-1}}}\left(\frac{m}{d_{\rho_1} d_{\rho_2} \ldots d_{\rho_{\sigma-1}}}, \frac{n}{d_{\rho_1} d_{\rho_2} \ldots d_{\rho_{\sigma-1}}}\right),$$

in welchem die Summation nach $d_{\rho_\varkappa}$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, \sigma-1, \sigma$) über alle mit der durch den Index $\rho_\varkappa$ charakterisirten arithmetischen Eigenschaft behafteten Theiler der an das betreffende Summenzeichen angefügten zweiten ganzen Zahl zu erstrecken ist und zur Abkürzung

$$\ldots \left(d_{\rho_1}, d_{\rho_2}, \ldots, d_{\rho_\sigma}\right)\Big| d_{\rho_\sigma}, \frac{n}{d_{\rho_1} d_{\rho_2} \cdots d_{\rho_{\sigma-1}}} \quad \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1} f(d_{\rho_1} d_{\rho_2} \ldots d_{\rho_\sigma} x_1, d_{\rho_1} d_{\rho_2} \ldots d_{\rho_\sigma} x_2, \ldots, d_{\rho_1} d_{\rho_2} \ldots d_{\rho_\sigma} x_s)\Big) =$$

$$= \bar{F}^{\rho,\sigma}_{d_{\rho_1} d_{\rho_2} \ldots d_{\rho_{\sigma-1}}} \left(\frac{m}{d_{\rho_1} d_{\rho_2} \ldots d_{\rho_{\sigma-1}}}, \frac{n}{d_{\rho_1} d_{\rho_2} \ldots d_{\rho_{\sigma-1}}}\right)$$

gesetzt wurde, gleich der Summe

$$\sum_{y_{\rho_1}, y_{\rho_2}, \ldots, y_{\rho_\sigma}} \left\{\left[\frac{n}{y_{\rho_1} y_{\rho_2} \ldots y_{\rho_\sigma}}\right] - \left[\frac{n-1}{y_{\rho_1} y_{\rho_2} \ldots y_{\rho_\sigma}}\right]\right\} f_{\rho_1}(y_{\rho_1}) f_{\rho_2}(y_{\rho_2}) \ldots f_{\rho_\sigma}(y_{\rho_\sigma}) \chi\left(\frac{n}{y_{\rho_1} y_{\rho_2} \ldots y_{\rho_\sigma}}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = \left[\frac{m}{y_{\rho_1} y_{\rho_2} \ldots y_{\rho_\sigma}}\right]} f(y_{\rho_1} y_{\rho_2} \ldots y_{\rho_\sigma} x_1, y_{\rho_1} y_{\rho_2} \ldots y_{\rho_\sigma} x_2, \ldots, y_{\rho_1} y_{\rho_2} \ldots y_{\rho_\sigma} x_s)\right)$$

ist, in welcher die Summation nach y_{ρ_λ} ($\lambda = 1, 2, \ldots, \sigma$) über alle dem Intervalle $1 \ldots n$ angehörigen ganzen Zahlen auszudehnen ist, welche eine bestimmte durch den Index ρ_λ charakterisirte arithmetische Eigenschaft besitzen. Es ist demnach die Function $\Phi_{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s}(m, n)$, welche, wie man leicht erkennt, auch gleich

$$\sum_{D_{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\sigma}} \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = \left[\frac{m}{D_{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\sigma}}\right]} f(D_{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\sigma} x_1, D_{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\sigma} x_2, \ldots, D_{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\sigma} x_s) \chi\left(\frac{n}{D_{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\sigma}}\right) \sum_{d_{\rho_1}, D_{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\sigma}} f_{\rho_1}(d_{\rho_1}) \cdot$$

$$\cdot \sum_{d_{\rho_2}, \frac{D_{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\sigma}}{d_{\rho_1}}} f_{\rho_2}(d_{\rho_2}) \ldots \sum_{d_{\rho_{\sigma-2}}, \frac{D_{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\sigma}}{d_{\rho_1} d_{\rho_2} \cdots d_{\rho_{\sigma-3}}}} f_{\rho_{\sigma-2}}(d_{\rho_{\sigma-2}}) \sum_{d_{\rho_{\sigma-1}}, \frac{D_{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\sigma}}{d_{\rho_1} d_{\rho_2} \cdots d_{\rho_{\sigma-2}}}} f_{\rho_{\sigma-1}}(d_{\rho_{\sigma-1}}) f_{\rho_\sigma}\left(\frac{D_{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\sigma}}{d_{\rho_1} d_{\rho_2} \ldots d_{\rho_{\sigma-1}}}\right)$$

ist, wo die Summation nach $D_{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\sigma}$ über alle Theiler der ganzen Zahl n zu erstrecken ist, welche ein Product von der Gestalt $x_{\rho_1} x_{\rho_2} \ldots x_{\rho_\sigma}$ sind, eine symmetrische Function von $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\sigma$ ist.

Nimmt man speciell $\sigma = 2$ und setzt voraus, dass unter den Theilern $D_{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\sigma}$ von n auch die Zahl 1 enthalten ist, so hat man, falls $f_{\rho_1}(x)$ und $f_{\rho_2}(y)$ die Gleichung

$$\sum_{d_{\rho_1}} f_{\rho_1}(d_{\rho_1}) f_{\rho_2}\left(\frac{D_{\rho_1, \rho_2}}{d_{\rho_1}}\right) = \begin{cases} 1 & (D_{\rho_1, \rho_2} = 1) \\ 0 & (D_{\rho_1, \rho_2} > 1) \end{cases}.$$

erfüllen, die Relation

$$\chi(m) \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = m} f(x_1, x_2, \ldots, x_s) =$$

$$= \sum_{d_{\rho_1, n}} f_{\rho_1}(d_{\rho_1}) \bar{F}^{(\rho_2, s)}_{d_{\rho_1}}\left(\frac{m}{d_{\rho_1}}, \frac{n}{d_{\rho_1}}\right) = \sum_{d_{\rho_2, n}} f_{\rho_2}(d_{\rho_2}) \bar{F}^{(\rho_1, s)}_{d_{\rho_2}}\left(\frac{m}{d_{\rho_2}}, \frac{n}{d_{\rho_2}}\right).$$

Auf Grund der in den vorigen Paragraphen angegebenen Entwicklungen ergeben sich aus dieser Gleichung die Beziehungen

$$\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s} f(x_1, x_2, \ldots, x_s) = \sum_{d_{\rho, n}} \beta\left(\sqrt[\rho]{\frac{n}{d_{\rho, n}}}\right) F^{(\rho, s)}_{\frac{n}{d_{\rho, n}}}\left(\frac{m}{d_{\rho, n}}, \frac{n}{d_{\rho, n}}\right)$$

(n und $d_{\rho, n}$ ρ^{te} Potenzen)

und speciell

$$\sum_{x=1}^{x = [\sqrt[\rho]{n}]} \mathfrak{Q}^{(s)}_{\rho}\left(\left[\frac{n}{x^\rho}\right]\right) \beta\left(\frac{n}{x^\rho}\right) = n^s$$

$$\sum_{d_\rho} \beta\left(\sqrt[\rho]{\frac{n}{d_\rho}}\right) \varphi_{\rho, s}\left(\frac{m}{d_\rho}, \frac{n}{d_\rho}\right) = m^s,$$

welche Relation für $\rho = s = 1$ in eine von Herrn Zsigmondy a. a. O. bewiesene Gleichung übergeht,

$$\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1} [illegible] (x_1, x_2, \ldots, x_s) = \sum_{d_{\rho, n}} \mu\left(\sqrt[\rho]{\frac{n}{d_{\rho, n}}}\right) F'^{(\rho, s)}_{\frac{n}{d_{\rho, n}}}\left(\frac{m}{d_{\rho, n}}, \frac{n}{d_{\rho, n}}\right)$$

$$\left(F'^{(\rho, s)}_{\varkappa}(m, n) = \sum_{d_{\rho, n}} \beta(\sqrt[\rho]{d_{\rho, n}}) \left(\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = \left[\frac{m}{d_{\rho, n}}\right]} f(\varkappa d_{\rho, n} x_1, \varkappa d_{\rho, n} x_2, \ldots, \varkappa d_{\rho, n} x_s)\right)\right)$$

$$= \sum_{d} F^{(\rho, s)}_{2, \frac{n}{d}}\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right) \bar{\mu}_\rho(d)$$

$$= \sum_{d} F'^{(\rho, s)}_{2, \frac{n}{d}}\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right) \bar{\lambda}_\rho(d)$$

$$\left(F'^{(\rho, s)}_{2, \varkappa}(m, n) = \sum_{d} \bar{\mu}_\rho(d) \left(\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = \left[\frac{m}{d}\right]} f(dx_1 \varkappa, dx_2 \varkappa, \ldots, dx_s \varkappa)\right)\right)$$

$$\mu(m) \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = m} f(x_1, x_2, \ldots, x_s) = \sum_{d} F^{(\rho, s)}_{4, \frac{n}{d}}\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right) \bar{\lambda}(d)$$

ist, wo die Summation nach $D_{\rho...}$ ganzen Zahl n zu erstrecken ist, ... Gestalt $x_{\rho_1} x_{\rho_2} \ldots x_{\rho_\sigma}$ sind, eine ... $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\sigma$ ist.

Nimmt man speciell $\sigma = 2$ ... den Theilern $D_{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\sigma}$ von n ... hat man, falls $f_{\rho_1}(x)$ und $f_{\rho_2}(x)$ ...

$$\sum_{d_{\rho_1}} f_{\rho_1}(d_{\rho_1}) f_{\rho_2} \left(\frac{D}{d} \right) \ldots$$

erfüllen, die Relation

$$\chi(m) \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_g = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_g = m} f(x_1, \ldots$$

$$= \sum_{d_{\rho_1}, n} f_{\rho_1}(d_{\rho_1}) F \ldots$$

Auf Grund ... Entwicklungen ... ziehungen

$$\sum_{x_1, x_2, \ldots} \ldots$$

und spe...

›bachtungen der normalen atmosphärischen Elektricität auf dem Sonnblick

von

J. Elster und **H. Geitel,**

Oberlehrern am herzogl. Gymnasium zu Wolfenbüttel.

(Mit 10 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 2. November 1893.)

I. *Ziel* der Untersuchung.

Bekanntlich ist die Intensität des durch Wolken- und .ierschlagsbildung nicht gestörten elektrischen Feldes an Erdoberfläche einer täglichen und einer jährlichen Periode rworfen.

Dass der Grund dieser doppelten Schwankung nicht in .r Veränderlichkeit des Potentialniveaus des zusammengend leitenden Erdkörpers liegen kann, geht daraus hervor, .s die beiden Perioden für Orte beliebiger Lage auf der Erde ht zeitlich zusammenfallen, vielmehr in gewisser Beziehung Insolation stehen. Man ist desshalb genöthigt, die Ursache Wechsels oberhalb der Erdoberfläche zu suchen und sie ieden Ort der Erde von der Tages- und Jahreszeit abhängig lenken.

Man erhält eine der beobachteten angenähert entsprechende ›dicität unter der Voraussetzung, dass die Luft über dem achtungsorte veränderliche Mengen negativer Elektricität der Erdoberfläche zugeführt erhält, und zwar sind diese en im Allgemeinen um so grösser anzunehmen, je intendie Bestrahlung durch die Sonne an dem betreffenden st.

:s erhebt sich nun die Frage: Wie kann man die Existenz r elektrischer Massen in der Luft erkennen und zugleich

ein Urtheil über ihre Entfernung von der Erdoberfläche gewinnen?

Setzt man voraus, was bei normal geschichteter Atmosphäre offenbar zutrifft, dass der Gehalt an freier negativer Elektricität nur eine Function der Höhe über der Erdoberfläche ist, so muss, wie schon Herr F. Exner hervorhob, das elektrische Feld mit wachsender Höhe in dem Maasse zunehmen, wie der in der freien Luft gedachte Beobachtungsort die elektrischen Massen unter sich zurücklässt. Sobald er aus der obersten noch wirksamen Schicht emporgetaucht ist, bleibt das Potentialgefälle bei weiterer Erhebung nahe constant, so lange man nicht Höhen annimmt, die dem Erdradius vergleichbar sind. Schwankungen in der elektrischen Ladung jener Schichten werden unmittelbar das Potentialgefälle an der Erdoberfläche in Mitleidenschaft ziehen, für höhere Punkte der Atmosphäre dagegen wird sich dasselbe um so mehr einem constanten Werthe nähern, je vollständiger die veränderlichen Massen unter dem Beobachtungsorte liegen.

Es stellt sich demnach als wünschenswerth heraus, um über die verticale Erstreckung dieser elektrischen Schichten Erfahrungen zu sammeln, Messungen des Potentialgefälles in verschiedenen Höhen und zu verschiedenen Tages- und Jahreszeiten anzustellen.

Unmittelbar scheinen diesem Zwecke die Beobachtungen vermittelst fliegender Drachen oder vom Luftballon aus zu entsprechen. Allein abgesehen davon, dass im ersten Falle die Bestimmung der Höhe, auf welche die Resultate zu beziehen sind, unsicher ist, und im zweiten die — wahrscheinlich veränderliche — elektrische Eigenladung des Ballons die Herstellung reiner Bedingungen erschwert, sind diese Methoden nicht geeignet, ein zur Feststellung periodischer Veränderungen genügend reiches Material zusammenhängender Messungen zu liefern. Doch haben sie in den Händen der Herren L. Weber[1] und F. Exner[2] schon das bemerkenswerthe Resultat ergeben, dass die unteren atmosphärischen Schichten an den Beob-

[1] L. Weber, Elektrotechnische Zeitschrift, 10, S. 387, 1889.

[2] F. Exner, Rep. der Physik, XXII, S. 463.

achtungstagen thatsächlich freie negative Elektricität enthielten. Man wird, da man auf eine systematische Erforschung des elektrischen Feldes der Erde in grösseren Höhen auf diesem Wege vorderhand noch verzichten muss, sich, wie auf anderen Gebieten der Meteorologie, auch hier mit den Aufzeichnungen der Gipfelstationen zu begnügen haben.

Allerdings ist das elektrische Feld an einer auf einem Berge gelegenen Station in noch weit höherem Maasse, als alle anderen meteorologischen Elemente, von localen Bedingungen abhängig und verschieden von dem ihm in gleicher Höhe über der Meeresfläche in der freien Atmosphäre entsprechenden Werthe.

Die fern vom Gebirge nahe äquidistant und dem Erdboden parallel verlaufenden elektrischen Niveauflächen drängen sich nämlich um die Bergspitzen eng zusammen und bewirken so eine von deren Form abhängige Steigerung der Feldstärke,[1] die sich der Berechnung entzieht. Eine Identificirung des auf einem Berggipfel gemessenen Potentialgefälles mit dem in gleicher Höhe in der Luft herrschenden ist desshalb unzulässig und auch für eine rechnerische Reduction fehlen die Grundlagen.

Ist so die Kenntniss der absoluten Werthe der elektrischen Kraft auf Bergspitzen nur von untergeordneter Bedeutung, so können doch die relativen, in willkürlichem Maasse gemessenen zu Untersuchungen über periodische Veränderungen des elektrischen Zustandes der Atmosphäre sehr wohl verwendet werden. Zwar werden die Curven, welche die beobachtete Veränderlichkeit des elektrischen Feldes über dem Berggipfel für ein bestimmtes Zeitintervall darstellen, den für die freie Atmosphäre und gleiche Höhe geltenden keineswegs geometrisch ähnlich sein, doch wird, wie eine einfache Betrachtung zeigt, der Sinn der Veränderungen für beide Fälle in groben Zügen übereinstimmen.

Denkt man sich, um die einfachste Vorstellung zu Grunde zu legen, einen Berg steil aus einer Ebene aufragen, und setzt zunächst voraus, dass die Luft frei von Elektricität, die Erde aber auf ein constantes negatives Potentialniveau geladen sei,

---

[1] Exner, Rep. der Physik, XXII, S. 455.

so wird am Fusse des Berges, wie auf seiner Spitze je ein bestimmtes positives Potentialgefälle herrschen. Nimmt man nun an, dass die Erdoberfläche unterhalb des Berges ihre Ladung nahezu vollständig an die ihr aufliegende Luft abgibt und dass diese Elektricität auf einer Ebene ausgebreitet bleibt, die der horizontalen Erdoberfläche parallel allmälig nach oben vorrückt, so wird die Wirkung auf die Bergspitze in elektrischer Beziehung nahe dieselbe sein, als ob die Höhe des Berges um die Strecke vermindert würde, um welche die elektrische Luftschicht sich hebt. Das Potentialgefälle auf dem Gipfel wird daher abnehmen müssen, und zwar zunächst sehr wenig, so lange die Höhe jener Luftschicht klein im Vergleiche zu der des Berges bleibt, während es in der Ebene nahe auf Null gesunken ist.

Erreicht sie die Höhe des Berges und erhebt sie sich über diesen, so erzeugt sie auch hier ein elektrisches Feld, das dem der Erde entgegengesetzt ist; sie bewirkt also eine entschiedene Abnahme des Potentialgefälles auf dem Gipfel, das nun bei weiterem Aufsteigen der elektrischen Schicht sich nicht mehr wesentlich ändert. So lange sie oberhalb des Berges liegt, wird jede Schwankung ihrer elektrischen Dichtigkeit eine proportionale des Potentialgefälles auf der Spitze wie in der Ebene bewirken, liegt sie dagegen weit unter dem Gipfel, so muss sich diese Veränderlichkeit sehr viel deutlicher in der Tiefe erkennen lassen.

Man kann sich von der Richtigkeit der Betrachtung ohne Rechnung dadurch überzeugen, dass man von der formellen Übereinstimmung Gebrauch macht, die zwischen den Gleichungen für die Temperatur in einem wärmeleitenden Mittel und dem Potential in einem elektrischen Felde besteht. Man hat nur der gesammten Erdoberfläche einschliesslich der des Berges eine constante Temperatur, dem Weltraume eine hiervon verschiedene und der Luft ein Wärmeleitungsvermögen (unter Ausschluss von Convectionsströmungen) zuzuschreiben. Man denke sich nun parallel der ebenen Erdoberfläche in der Luft eine Fläche gelegt, deren Temperatur zwischen dem ihr bei stationärem Wärmeflusse zukommenden Werthe bis zu der der Erde schwankt und vergegenwärtige sich die entsprechenden

Schwankungen des Temperaturgefälles auf dem Berge wie in der Ebene für die Fälle, dass jene Fläche veränderlicher Temperatur tief unterhalb des Gipfels oder oberhalb desselben liegt. Die für das Temperaturgefälle geltenden Ergebnisse sind dann den für das elektrische Potentialgefälle angegebenen analog. An der Betrachtung ändert sich nichts Wesentliches, wenn man statt der Fläche eine elektrische Luftschicht von endlicher Dicke annimmt.

Fassen wir das Ergebniss zusammen, so erhalten wir die Regel: Ist das Potentialgefälle auf einer Höhenstation Schwankungen unterworfen, deren Amplitude der in der Tiefe beobachteten etwa proportional ist, so liegt die Ursache dieser Veränderungen über dem Gipfel, ist es oben entweder constant oder verhältnissmässig weit weniger veränderlich, als unten, so ist dieselbe in den tieferen Luftschichten zu suchen. Ein genauerer Aufschluss über die Höhe und elektrische Dichtigkeit der Massen, von denen jene Wirkungen ausgehen, kann auf diesem Wege allerdings nicht erwartet werden, dazu würden Beobachtungen in der freien Atmosphäre erforderlich sein, doch ist nach dem Vorigen wohl zuzugeben, dass diese letzteren wenigstens zum Theil durch Aufzeichnungen von Höhenstationen ersetzbar sind.

Erwägungen wie diese bewogen uns, die Ausführung regelmässiger Messungen des Potentialgefälles der atmosphärischen Elektricität an ungestörten Tagen auf dem Sonnblickgipfel zu veranlassen. Vereinzelte Beobachtungen dieser Art lagen bereits vor, so eine Messungsreihe des Herrn F. Exner vom Schafberge, aus der derselbe schon den Schluss zog, dass dieser Gipfel einen Theil der wasserdampfhaltigen Luftschicht überragt, die nach Herrn Exner der Träger der negativen Elektricität in der Luft ist. Auch hatten wir selbst vor einigen Jahren während eines Aufenthaltes auf dem Sonnblick Gelegenheit, einige Beobachtungsreihen auszuführen. Umfangreicher sind die hierher gehörigen Aufzeichnungen des Herrn M. Smith[1] vom Dodabetta in Indien, auf die wir noch

[1] M. Smith, Transactions of the Royal Society of Edinburgh, 32, III, p. 583.

zurückkommen werden. Leider ist es, wie wir früher schon mittheilten, wegen der störenden Elektrisirung der Luft durch die Wasserfälle im Thale nicht möglich, das elektrische Potentialgefälle auf der Spitze des Sonnblick direct mit dem am Fusse herrschenden zu vergleichen, es bleibt uns nichts anderes übrig, als den Verlauf desselben auf dieser Höhenstation mit dem im Tieflande, in Wolfenbüttel, beobachteten zusammenzustellen. Dies ist der Zweck der vorliegenden Abhandlung.

II. Methode der Beobachtung.

Wir betrauten mit der Ausführung der elektrischen Messungen den ständigen Beobachter der Sonnblickwarte, Herrn Peter Lechner. Bei der Schwierigkeit elektrischer Messungen im Allgemeinen musste es unser Bestreben sein, die mechanischen Verrichtungen möglichst zu vereinfachen. Hierbei kam uns die natürliche Intensität des elektrischen Feldes auf dem Sonnblickgipfel zu Hilfe. Ein metallischer Conductor (der benutzte besteht aus einem geschlossenen Blechcylinder von etwa 10 *cm* Länge und 6 *cm* Durchmesser, es ist derselbe, der auch zur Vorzeichenbestimmung des Elmsfeuers dient) an einem isolirenden Griffe etwa 1 *m* weit aus dem Fenster der Station gehalten und nach momentaner Ableitung zur Erde zurückgezogen, erweist sich bei normalem Wetter stark genug elektrisirt, um an einem Exner'schen Elektroskope eine leicht ablesbare Divergenz hervorzubringen. (Bekanntlich ist diese Methode schon von Peltier vorgeschlagen; sie erfordert indessen bei Beobachtungen in der Ebene ein empfindliches Elektroskop.)

Um bei jeder Messung dieselbe Lage des Cylinders zu sichern, war an dem Halter desselben eine Marke (Marke *o*) angebracht, bis zu welcher dieser, einer bestimmten Ecke der nach Osten gerichteten Fensteröffnung des sogenannten Gelehrtenzimmers genau anliegend, ins Freie hinausgeschoben wurde. Für den Fall, dass diese Normalstellung ein über den Bereich des Elektroskops hinausgehendes Potential ergab (bei wolkenlosem, windstillem Wetter trat dies nie ein), waren an dem Halter noch Reservemarken (I, II, III) für kleinere Abstände des Cylinders von der Fensteröffnung angebracht, für welche

Factoren zur Reduction auf die Normalstellung be-
ıatten. Diese Umrechnung bezweckt demnach nur die
hrung eines einheitlichen Maasses für alle auf dem Sonn-
fundenen Feldstärken, die Einheit derselben ist von der
:hen Capacität der Beobachtungsapparate, wie der ört-
ıeschaffenheit der Expositionsstelle abhängig, eine Ver-
ıg der so gefundenen Zahlen mit dem nach Herrn
s Vorgange auf die Einheit $\frac{\text{Volt}}{\text{Meter}}$ bezogenen ist daher
aubt. Die Beobachtungen (eine jede aus drei Ablesungen
ıd) wurden bei völlig oder nahe wolkenlosem Himmel
lichen Intervallen von 7 a. bis 8 p. ausgeführt. Zur Aus-
ıg der Skalentheile in Volt gaben wir dem Elektroskope
belle bei, doch wurden, um eine Controle zu ermög-
auch die abgelesenen Divergenzen selbst in die Beob-
sprotocolle eingetragen. Das Vorzeichen des Potential-
wurde an einem Bohnenberger'schen Elektroskope
ıt, es erwies sich durchgehends als das positive.
sondere Sorgfalt war auf die Isolation zu verwenden.
ıen desshalb die Anweisung, diese bei jeder Beobach-
prüfen, und für den Fall, dass sie ungenügend war, so-
en Hals des Elektroskops, wie auch den Griff des
chen Conductors schwach zu erwärmen. Es ist natür-
möglich, eine Bürgschaft dafür zu übernehmen, dass
:h jene Fehlerquelle durchweg beseitigt wurde, besonders
in den Sommermonaten die Luftfeuchtigkeit schädlich
Um die Sicherheit möglichst zu erhöhen, besuchten
ährlich im Juli die Sonnblickwarte zum Zwecke einer
; des elektrischen Apparates. Da sich immer eine geringe
ıe der Isolation des Elektroskops herausstellte (die aber
:rwärmen vorübergehend zu beseitigen war), liessen wir
ıl die Ebonitfassung desselben durch einen Mechaniker
n und entwarfen eine andere Reductionstabelle zur Um-
ng der Skalentheile in Volt. Durch den mit diesen Ände-
am Instrumente verbundenen Zeitverlust haben wir die
Juli, August und September für die Beobachtungen ein-
. Für diese Zeit war ohnehin keine reiche Ausbeute zu
n theils wegen der Seltenheit wolkenloser Tage in jenen

Monaten, theils wegen der Inanspruchnahme des Beobachters durch den Touristenverkehr.

Das gesammte uns vorliegende Material umfasst 185 Beobachtungstage mit 2073 Messungen, es stammt aus der Zeit vom October 1890 bis Juni 1893.

III. Resultate.

Um zu zeigen, welcher Art die von Peter Lechner gemachten Aufzeichnungen sind, legen wir zunächst die Proto-

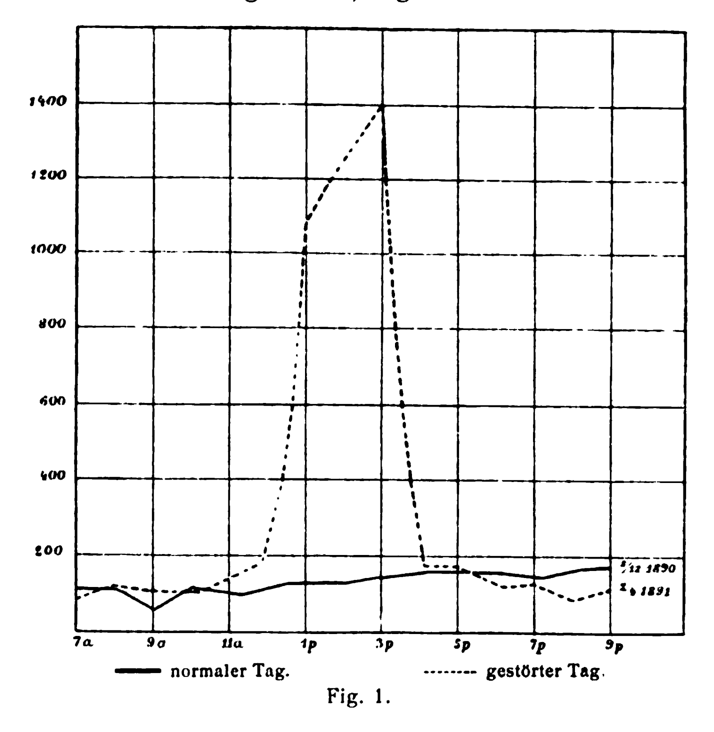


Fig. 1.

kolle zweier Tage vor. An dem ersten, dem 8. December 1890, war der Himmel wolkenlos, der Verlauf des Potentialgefälles, abgesehen von einer Schwankung um 9 a., im Ganzen regelmässig. An dem zweiten, dem 2 April. 1891, setzt gegen Mittag Schneetreiben ein, das von einer starken Steigerung des Potentials begleitet ist. Abends, nach Verlauf der Störung, ergeben sich wieder normale Werthe.

I.

A. **Beobachtungsprotokoll vom 8. December 1890.**

Stunde	Skalentheile			Mittel	Marke	Zeichen	Volt	Volt reducirt auf Marke 0	Bemerkungen
7 a.	8 1	8·2	8·0	8·1	0	+	104	104	Ringsum alles klar.
8	9·0	9·4	9·2	9·2	0	+	117	117	
9	4·0	3·6	3·8	3·8	0	+	53	53	
10	9·2	9·5	10·0	9·6	0	+	121	121	
11	8·0	8·2	9·0	8·4	0	+	108	108	
12	8·8	9·9	9·1	9·0	0	+	115	115	
1 p.	11·0	11·2	11·4	11·2	0	+	137	137	
2	10·5	10·8	11 0	10·8	0	+	133	133	
3	11·5	12·0	12·0	11·8	0	+	142	142	
4	13·2	13·3	13·6	13·4	0	+	156	156	
5	13·4	13·6	14·0	13·7	0	+	159	159	
6	11·6	12·0	12·4	11·9	0	+	143	143	
7	11·0	11·1	11·2	11·1	0	+	136	136	
8	13·8	13·7	14·0	13·8	0	+	160	160	
9 p.	14·0	14·0	14·1	14 0	0	+	161	161	

Temperatur ° C.		
7 a.	2 p.	9 p.
—12·8	—12·0	—12·2

Mittlere Bewölkung: 0·0

Relative Feuchtigkeit		
7 a.	2 p.	9 p.
52	54	49

B. **Beobachtungsprotokoll vom 2. April 1891.**

Stunde	Skalentheile			Mittel	Marke	Zeichen	Volt	Volt reducirt auf Marke 0	Bemerkungen
7 a.	7·4	7·2	7·6	7·4	0	+	96	96	Im SW—S Cirrusstreifen am Horizont, sonst klar.
8	10·0	10·2	10·5	10·2	0	+	128	128	Ringsum am Horizont dunstig; hie und da Verdunstungsschichten; sonst klar.
9	9·0	9·0	9·1	9·0	0	+	115	115	Im S Nebel am Horizont, sonst klar.
10	8·6	9·0	9 0	8·9	0	+	114	114	Schneetreiben, sonst dasselbe.
11	10·0	9·9	10·0	10·0	0	+	126	126	Starkes Schneetreiben, sonst dasselbe.
12	16 6	16·6	16·9	16·7	0	+	183	183	Starkes Schneetreiben; im S und SW obere Schichtenwolken am Horizont.
1 p.	12·4	14·0	13·2	13 2	III	+	154	1078	
2	16·4	16·0	16·0	16·1	III	+	178	1256	Schwaches Schneetreiben. Im S und SW obere Schichtenwolken; sonst klar.
3	18·4	19·6	18·6	18·9	III	+	199	1400	
4	14·2	14·6	14·3	14 4	0	+	165	165	
5	15·0	15·0	14·9	15·0	0	+	170	170	
6	12 6	13·0	13·0	12·9	0	+	152	152	Schneetreiben vorbei; klar.
7	10·0	10·4	10·6	10·3	0	+	129	129	Im SW und S obere Schichtenwolken; sonst klar.
8	6·0	6·2	6·2	6·1	0	+	82	82	Ringsum klar.
9 p.	8·0	7·9	7·8	7·9	0	+	102	102	

Temperatur ° C.

7 a.	2 p.	9 p.
−19·6	−16·4	−15·4

Mittlere Bewölkung: 0·7

Relative Feuchtigkeit in %

7 a.	2 p.	9 p.
67	89	77

Der Verlauf an beiden Tagen ist in Fig. 1 graphisch dargestellt. Wir wählten den zweiten aus, um zu zeigen, dass Anomalien durch die Beobachtungsmethode in unzweideutiger Weise aufgedeckt werden. Selbstverständlich sind Störungen wie diese bei der Bearbeitung des Materials ausgeschlossen.

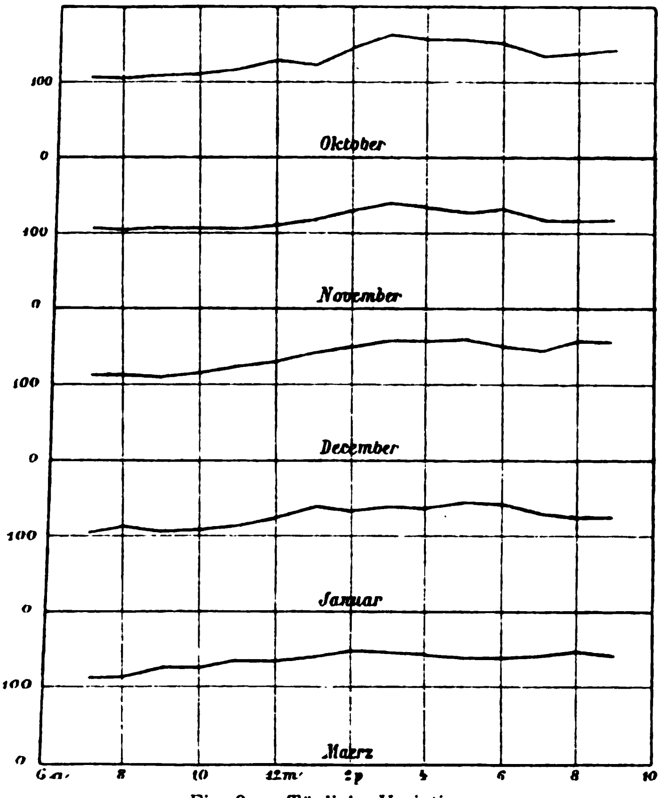


Fig. 2 *a*. Tägliche Variation.

Wir stellen nun die tägliche Schwankung des Potentialles für die Monate October bis Juni zusammen (Tabelle II). zu gehören die graphischen Darstellungen Fig. 2 *a* und 2 *b*. erkennt, dass im Allgemeinen das elektrische Feld auf Sonnblick gegen Mittag hin an Intensität zunimmt und ein mum zwischen 1 p. bis 6 p. erreicht; ein durchgreifender ıss der Jahreszeit auf den Verlauf ist nicht zu erkennen; m meisten von den übrigen abweichende Curve vom

Tabelle II.

Monate	Anzahl der		7 a.	8	9	10	11	12	1 p.	2	3	4	5	6	7	8	9	Bemerkungen
	Beob-achtungs-tage	Einzel-beobach-tungen																
X	7	105	105	104	106	107	116	128	124	149	**162**	159	154	150	135	139	145	21 Werthe interpolirt.[1]
XI	10	150	105	101	105	104	100	102	112	125	**131**	130	127	130	120	116	118	
XII	20	300	114	119	110	116	121	130	142	148	158	**159**	155	144	148	156	154	
I	14	210	103	111	105	109	114	122	134	134	137	138	**142**	141	127	123	123	1 Werth interpolirt.
III	10	150	113	113	124	125	132	132	140	**147**	146	144	140	140	141	146	140	1 Werth interpolirt.
IV	10	150	111	118	118	119	131	135	146	159	161	**164**	161	159	147	136	120	2 Werthe interpolirt.
V	3	45	121	123	129	123	131	138	164	169	183	195	190	**199**	190	158	134	
VI	2	30	134	132	134	140	129	127	**144**	135	138	135	134	138	141	139	140	1 Werth interpolirt.

[1] Im October 1890 konnte nur alle zwei Stunden beobachtet werden; die fehlenden Werthe wurden interpolirt.

Monat Juni verliert dadurch an Gewicht, dass sie aus nur zwei Beobachtungstagen abgeleitet ist.

Zieht man nun zum Vergleiche die Wolfenbüttler Beobachtungen heran, so findet man (unter Ausschluss der Zeit vom Juli bis September, für welche, wie bemerkt, vom Sonnblick kein Material vorliegt) in den Monaten October, April, Mai, Juni keinerlei Übereinstimmung. Im Tieflande liegt das

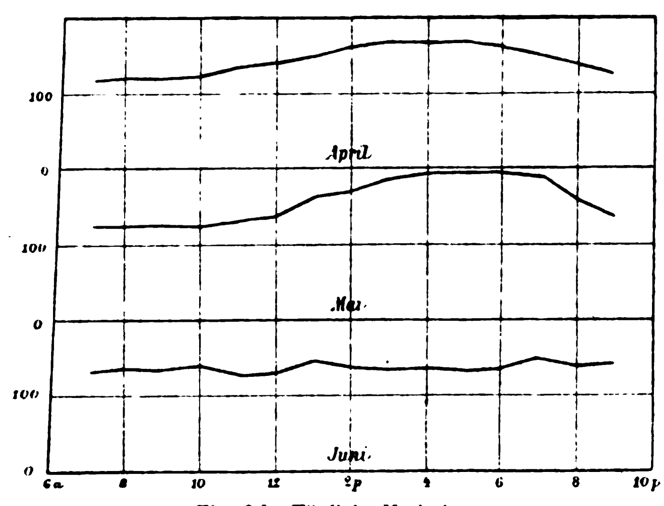


Fig. 2 *b*. Tägliche Variation.

ıximum in der Nähe von 8 a. bis 9 a., während das Minimum den Nachmittagsstunden, gegen Sonnenuntergang, eintritt. ı bei der Verschiedenheit des Maassstabes (den Wolfen-tler Zahlen liegt die absolute Einheit $\frac{\text{Volt}}{\text{Meter}}$ zu Grunde) den lauf an beiden Orten vergleichbar zu machen, führten wir jede Reihe als neue Einheit das Tagesmittel ein und er-:en für die Monate October, April, Mai, Juni folgende ımmenstellung:

Tabelle III.

Monat	Orte	Tagesmittel	7 a.	8	9	10	11	12	1 p.	2	3	4	5	6	7	8	9	Bemerkungen
October	Sonnblick	132·2	0·79	0·79	0·80	0·81	0·88	0·97	0·94	1·13	1·23	1·20	1·17	1·13	1·02	1 05	1·10	October 1890—1892
	Wolfenbüttel	200·0	1·10	1·50	1·06	1·07	0·99	1·03	0·97	0·97	1·04	0·81	0·88	0·84	0 94	1·02	0·92	October 1889—1891
April	Sonnblick	139·0	0·80	0·85	0·85	0·86	0·94	0·97	1·05	1·14	1·16	1·18	1·16	1·14	1·05	0·98	0·86	April 1891, 1892 und 1893
	Wolfenbüttel	109·5	1·29	1·55	1·45	1·36	1·13	1·01	1·01	0·95	0 91	0·92	0·81	0·61	0·55	0·68	0·74	
Mai	Sonnblick	156.0	0·81	0·79	0·82	0·80	0·83	0·95	1·05	1·08	1·15	1·26	1·17	1·19	1·17	1·05	0·91	Gleichzeitige Beobachtungen vom 25. bis 28. Mai 1893
	Wolfenbüttel	61·2	1·83	2·37	1·63	1·21	0 62	0·57	0·61	0·87	0·74	0·62	0·67	0·92	0·74	0·57	1·04	
Juni	Sonnblick	136 0	0·99	0·97	0·99	1·03	0·95	0·93	1·06	0·99	1·02	0 99	0 99	1·02	1·04	1·02	1·03	Juni 1891, 1892 und 1893
	Wolfenbüttel	57·1	0·70	2·18	1·89	1·80	1·14	0·88	0·75	0·86	0·81	0·75	0·89	0·89	0·51	0·47	0·46	Zwei wolkenlose Tage (10. und 28.) des Jahres 1892.

Hierzu die Curven Fig. 3 *a*, 3 *b*, 3 *c* und 3 *d*. Der Vergleich für den Monat Mai bietet noch das besondere Interesse,

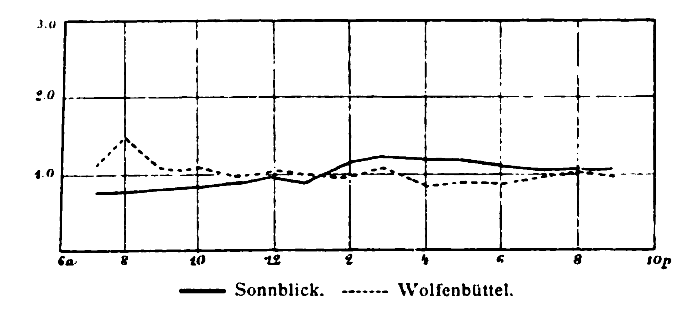


Fig. 3 *a*. Tägliche Variation im October.

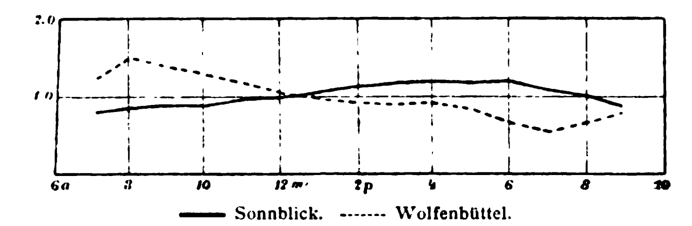


Fig. 3 *b*. Tägliche Variation im April.

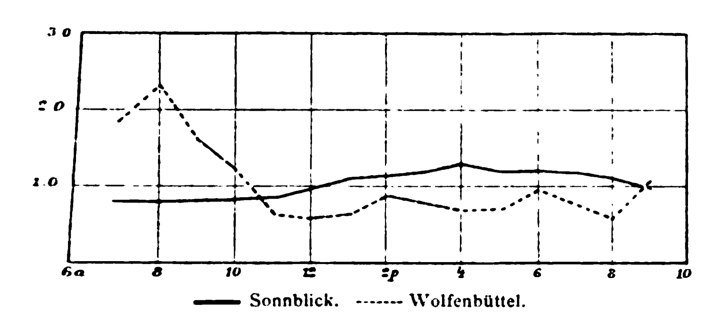


Fig. 3 *c*. Tägliche Variation im Mai.

er sich auf Beobachtungen stützt, die an beiden Stationen entischen Tagen erhalten sind.

'iel kleiner wird der Gegensatz des Verlaufes, wenn man esammtmaterial vom Sonnblick mit den Beobachtungen nirt, die in Wolfenbüttel nur in den Wintermonaten

November—März) gesammelt wurden. Siehe Tabelle VI. (Vergl. die Curven Fig. 4.)

Hierzu ist allerdings die Bemerkung erforderlich, dass die mittlere Tagescurve für den Winter in Wolfenbüttel (wie wir

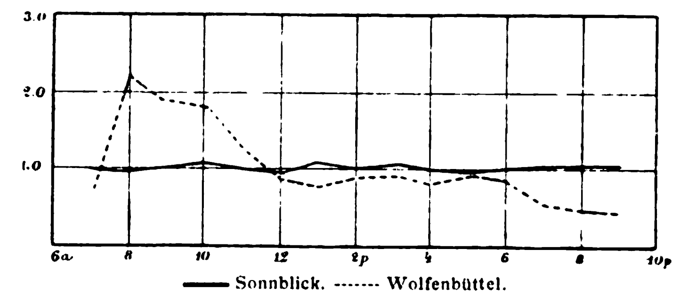


Fig. 3 *d*. Tägliche Variation im Juni.

schon an anderer Stelle ausgesprochen haben) keineswegs den wahrscheinlichen Verlauf an einem Wintertage wieder-

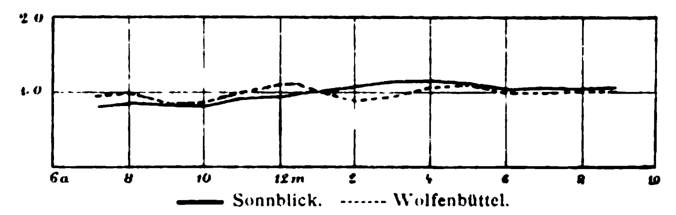


Fig. 4. Tägliche Variation in den Wintermonaten.

gibt, dass vielmehr die Maxima und Minima um diese Jahreszeit anscheinend regellos auftreten, nur das Bestreben,

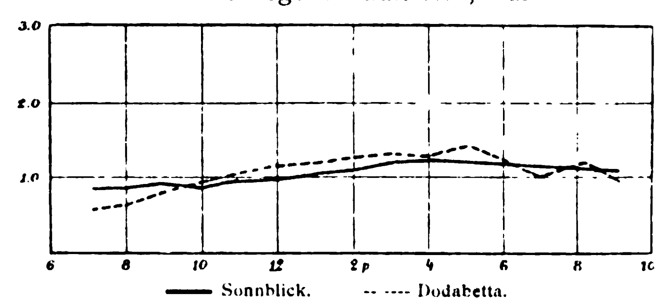


Fig. 5. Tägliche Variation.

gegen Abend anzusteigen, ist wohl im Allgemeinen den Tagescurven gemeinsam.

Orte	Tagesmittel	7 a.	8	9	10	11	12	1 p.	2	3	4	5	6	7	8	9	Bemerkungen
Sonnblick	132·1	0·83	0·86	0·85	0·86	0·91	0·95	1·03	1·09	1·14	1·14	1·12	1·10	1·05	1·04	1·02	Wintermonate 1890, 1891, 1892.
Wolfenbüttel	363·4	0·85	0·95	1·00	0·88	0·88	1·08	1·11	1·03	0·90	0·97	1·06	1·11	1·04	1·04	1·10	Wintermonate 1889 bis 1891, 27 Tage mit 344 Beobachtungen.

Tabelle V.

Orte	Mittel	7 a.	8	9	10	11	12	1 p.	2	3	4	5	6	7	8	9
Sonnblick	132·1	0·83	0·86	0·85	0·86	0·91	0·95	1·03	1 09	1·14	1·14	1·12	1·10	1·05	1·04	1·02
Dodabetta[1]	82·5	0·53	0·60	0·78	0·86	1·02	1·10	1·15	1·20	1·24	1·19	1·38	1·19	0·99	1.15	0·91

[1] Zu den Beobachtungen von Dodabetta ist zu bemerken, dass während der Nachmittagsstunden Nebelbildung vorkam.

Wir fügen zum Vergleich noch die vom Herrn M. Smith auf dem Dodabetta erhaltenen Beobachtungen, ebenfalls auf das Tagesmittel als Einheit bezogen, bei. (Siehe Tabelle V und Fig. 5

Man sieht, dass auch auf dem Dodabetta das Maximum in die Nachmittagsstunden fällt, die Extreme sind im Ganzen etwas mehr verschieden als auf dem Sonnblick. Bemerkenswerth ist, dass Herr Exner in Ceylon eine Tagescurve beobachtete, die der für die Sommermonate in Wolfenbüttel sehr ähnlich ist, sie zeigt das Morgenmaximum um 9 a., es scheint demnach in den Tropen derselbe Gegensatz hinsichtlich der

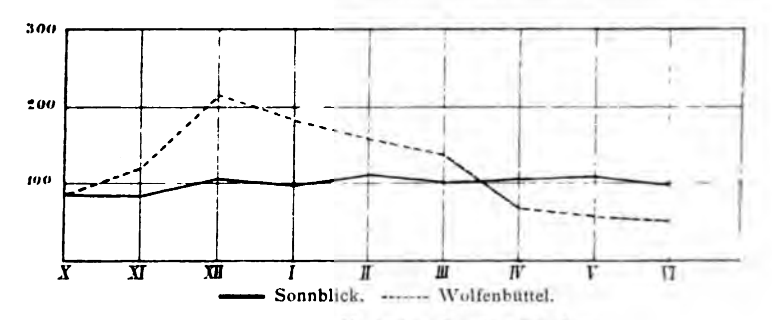


Fig. 6. Jährliche Variation October bis Juni.

Tagesperioden zwischen Höhen- und Tiefenstationen zu bestehen wie in Mitteleuropa.

In der folgenden Tabelle (VI) sind die Tagesmittel des Potentialgefälles auf dem Sonnblick für die Monate October bis Juni in den drei Beobachtungsjahren mitgetheilt. Von anderen meteorologischen Elementen fügten wir die Temperaturen, die Dampfdrucke und die mittleren Bewölkungsziffern bei. In Tabelle VII stellten wir die jährliche Variation (wiederum mit Ausschluss der Zeit von Juli bis September), bezogen auf das Jahresmittel als Einheit mit dem in gleicher Weise behandelten Verlaufe für Wolfenbüttel zusammen. (Vergl. hierzu die Curve Fig. 6.)

Sieht man von dem auffallend niedrigen Werthe für den November 1890 ab (der nach Ausweis der hohen Bewölkungsziffer wohl nicht störungsfrei ist), so bemerkt man, dass die jährliche Schwankung des Potentialgefälles auf dem Sonnblick, wie die tägliche im Vergleiche mit der in Wolfenbüttel beobachteten sehr gering ist.

Tabelle VI.

Monat	Jahr	Anzahl der Beobachtungstage	Anzahl der Einzelbeobachtungen	Mittlere Temperatur ° C.	Mittlerer Dampfdruck	Mittlere Bewölkung	Volt
October	1890	12	65	— 1·8	2·5	1·8	107
	1891	4	40	— 6·5	1·9	3·0	152
	1892	6	75	— 2·9	2·7	1·5	112
Mittel und Summen..		**22**	**180**	**— 3·7**	**2·4**	**2·1**	**117**
November	1890	6	64	— 9·0	2·0	4·5	87
	1891	5	61	—10·2	1·6	2·3	146
	1892	13	146	— 8·3	1·5	1·8	112
Mittel und Summen..		**24**	**271**	**— 9·2**	**1·7**	**2·9**	**112**
December	1890	14	190	—15·2	0·9	0·9	141
	1891	7	76	— 6·2	1·8	2·1	144
	1892	12	145	—11·0	1·1	2·3	138
Mittel und Summen..		**33**	**411**	**—10·8**	**1·3**	**1·8**	**141**
Jänner	1891	11	139	—13·4	1·0	1·1	122
	1892	6	83	—11·7	1·1	1·5	148
	1893	8	95	—13·0	1·3	1·9	134
Mittel und Summen..		**25**	**317**	**—12·7**	1·1	1·5	132
Februar	1891	—	—	—	—	—	—
	1892	2	19	— 9·3	2·2	4·4	165
	1893	4	49	—12·6	1·6	1·2	146
Mittel und Summen..		**6**	**68**	**—10·9**	**1·9**	**2·8**	**152**

Monat	Jahr	Anzahl der Beob-achtungstage	Anzahl der Einzel-beobachtungen	Mittlere Temperatur ° C.	Mittlerer Dampfdruck	Mittlere Bewölkung	Volt
März	1891	5	66	— 8·1	1·6	1·7	138
	1892	10	132	—15·5	1·3	1·9	134
	1893	9	113	— 9·9	1·7	1·5	132
Mittel und Summen		**24**	**311**	**—11·2**	**1·5**	**1·7**	**134**
April	1891	9	82	—11·5	1·5	3·5	132
	1892	10	135	— 5·2	2·2	1·4	151
	1893	9	104	— 6·8	1·8	1·9	143
Mittel und Summen . .		**28**	**321**	**— 7·8**	**1·8**	**2·3**	**142**
Mai	1891	9	59	— 2·5	3·0	5·3	136
	1892	6	79	+ 1·4	4·0	1·4	155
	1893	1	7	— 0·7	3·9	6·3	134
Mittel und Summen . .		**16**	**145**	**— 0·6**	**3·6**	**4·3**	**143**
Juni	1891	5	20	— 1·8	3·8	6·4	134
	1892	—	—	—	—	—	—
	1893	2	29	+ 0·4	4·0	1·2	136
Mittel und Summen . .		**7**	**49**	**— 0·7**	**3·9**	**3·8**	**135**

Tabelle VII.

Orte	Jahres-mittel	Monate								
		X	XI	XII	I	II	III	IV	V	VI
Sonnblick	134·1	0·87	0·84	1·05	0·98	1·13	1·00	1·06	1·07	1·01
Wolfenbüttel ...	221·4	0·85	1·17	2·12	1·77	1·53	1·33	0 62	0·50	0·46

Das ungestörte elektrische Feld der Erde zeigt also im Allgemeinen die Neigung, sich auf dem Sonnblick einem constanten Werthe zu nähern.

Aus der im Vergleich zu den Wolfenbüttler Beobachtungen sowie den von anderen im Tieflande gelegenen Stationen sehr geringen täglichen Variabilität des Potentialgefälles auf dem Sonnblick glauben wir den Schluss ziehen zu dürfen, dass in der wärmeren Jahreszeit an wolkenlosen Tagen veränderliche negativ elektrische Massen in den unteren Luftschichten vorhanden sind, welche das Niveau von etwa 3000 *m* nicht erreichen und in der Tiefe die tägliche Periode der atmosphärischen Elektricität bedingen. Auch für die winterlichen Schwankungen an tiefgelegenen Orten haben wir die Ursachen in der Nähe des Erdbodens zu suchen, und zwar sind sie hier wegen des unregelmässigen Charakters jener Veränderungen wahrscheinlich auf Luftmassen von geringem Umfange beschränkt.

Auffallend ist die vollständige Unabhängigkeit, ja der Gegensatz im Verlaufe der täglichen Periode zwischen der Höhen- und Tiefenstation. Es liegt nahe, an die oft hervorgehobene Übereinstimmung in dem Gange des Luftdrucks und des Potentialgefälles zu denken, vielleicht liegt auch hier ein Fall jenes noch räthselhaften Parallelismus vor.

Aus der geringen Veränderlichkeit des Potentials im Laufe eines Jahres auf dem Sonnblick geht hervor, dass der grössere Gehalt an freier negativer Elektricität, den die Atmosphäre im Allgemeinen während der Sommermonate zeigt, gleichfalls über das Niveau von etwa 3000 *m* nicht vordringt.

Man darf sagen, dass die Beobachtungen vom Sonnblick keiner der Theorien der atmosphärischen Elektricität wider-

sprechen, die von einer gegebenen negativen Ladung des Erdkörpers ausgehen und die Änderungen des Potentialgefälles an der Erdoberfläche auf den Übergang elektrischer Massen von dieser aus in die Luft zurückführen.

Ob dieser Übergang mittelbar oder unmittelbar durch die Insolation bewirkt wird, ob nämlich entweder eine Convection mit dem Dampfe des durch die Sonnenwärme vergasten Wassers im Sinne Herrn Exners, oder eine lichtelektrische Wirkung der Sonnenstrahlen vorliegt, darüber vermögen die Beobachtungen keine Entscheidung zu geben.

Über Flächen constanter Krümmung

von

Emil Waelsch,

Privatdocent an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 13. Juli 1893.)

In einer soeben erschienenen Note[1] ergaben sich die Flächen constanter Krümmung als die einzigen Flächen, deren geodätische Linien eine Gruppirung von einer gewissen Eigenschaft zulassen. Im Folgenden möchte ich die zugehörigen Entwicklungen vorführen, welche sich anschliessen an die der hohen Akademie in der letzten Sitzung vorgelegte Arbeit.[2] Hierbei wird ein Pfaff'sches Problem auftreten, von dessen Integrabilitätsbedingung noch eine geometrische Deutung gegeben werden soll.

1. Gruppirung der geodätischen Linien. Ein Flächenelement ist gegeben durch die Coordinaten x, y, z, p, q; man kann Beziehungen zwischen mehreren Flächenelementen mit den Coordinaten x, y, z, p, q; x', y', z', p', q';... betrachten, wie dies Herr Bäcklund gethan hat.[3] Speciell kann man zwei Flächenelemente M_1, M_2 so annehmen, dass die Ebenen der Elemente die Punkte enthalten. Ein solches Doppelelement bilden die Brennpunkte und Brennebenen eines Strahles einer Strahlencongruenz.

Dann kann man Mannigfaltigkeiten solcher Doppelelemente, deren es ∞^8 gibt, betrachten, und hier ist es zunächstliegend, das eine Element M_1 eine gegebene Fläche F be-

[1] Siehe Sur les surfaces à élément de Liouville et les surfaces à courbure constante. Comptes rendus, t. 116, p. 1435.

[2] Über Tangentencongruenzen einer Fläche. Sitzungsber. vom 6. Juli.

[3] Siehe Math. Annalen, Bd. 19.

schreiben zu lassen, während das andere M_2 durch mehrere Gleichungen an dieses Element gebunden ist.

Nehmen wir an, dass eine dieser Gleichungen die Ebenen des Doppelelements zu einander senkrecht macht. Besteht dann M_1 aus dem Punkte a der Fläche F und seiner Tangentialebene T_a, so besteht das andere Element M_2 aus einem Punkte a' der Tangentialebene T_a und einer zu T_a senkrechten Ebene $T_{a'}$, welche a enthält. Eine weitere Gleichung zwischen den Flächenelementen wird den Punkt a' auf einer Curve $\mathfrak{A}$ leiten. Man erhält so für jeden Punkt der Fläche eine Curve $\mathfrak{A}$: alle diese Curven bilden eine Congruenz ($\mathfrak{A}$). Man erhält ∞^3 Doppelelemente, und das zweite Element M_2 bestimmt dann ein Pfaff'sches Problem; man kann fragen: »Wie muss man die Curven der Congruenz ($\mathfrak{A}$) annehmen, damit das Pfaff'sche Problem integrabel wird, dass sich also die ∞^3 zweiten Elemente M_2 zu ∞^1 Flächen F' anordnen?«

Jede Fläche F'_0 der ∞^1 Fläche F', welche sich auf diese Weise ergeben, ist mit F' zusammen Brennfläche einer Strahlencongruenz, welche die gemeinsamen Tangenten aa' der Flächen F, F'_0 enthält, und diese Congruenz ist eine Normalencongruenz N_0, weil die Brennebenen T_a, $T_{a'}$ aufeinander senkrecht sind.

Die Strahlen der Congruenz N_0 ordnen sich zu Developpablen, welche ihre Rückkehrcurve auf der Fläche F haben und diese Curven sind geodätische Linien der Fläche F. Man erhält so ∞^1 geodätische Linien der Fläche entsprechend F'_0; für alle Flächen F' und die zugehörigen Normalcongruenzen N ∞^1 Schaaren von ∞^1 geodätischen Linien oder eine Gruppirung der geodätischen Linien der Fläche F.

Wenn demnach die Curven ($\mathfrak{A}$) so bestimmt sind, dass das zugehörige Pfaff'sche Problem integrabel wird, so ergeben sich zunächst die Integralflächen F' durch Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung. Sind diese bekannt, so ergeben sich durch Integration einer weiteren Differentialgleichung erster Ordnung die developpablen Flächen der Congruenz N und damit die geodätischen Linien der Fläche F.

In den oben angeführten Arbeiten ergab sich, dass Curven ($\mathfrak{A}$) für Flächen, deren Bogenelement die Liouville'sche

Form hat, allgemeine Strophoiden sind, für Flächen mit Lie'schem Bogenelement gewöhnliche Strophoiden und für auf Rotationsflächen abwickelbare Flächen Kreise, die durch die Punkte a gehen. In den beiden letzten Fällen lassen sich also die Curven $\mathfrak{A}$ durch Rotation und Streckung in einander überführen.

Man kann nun allgemeiner fragen: »Wann sind die Curven der Congruenz ($\mathfrak{A}$), welche ein integrables Pfaff'sches Problem liefern, von besonderer Art, z. B. algebraisch?« Dies letztere ist immer der Fall, wenn die Differentialgleichung der geodätischen Linien ein intermediäres erstes Integral besitzt, welches algebraisch von der willkürlichen Constanten abhängt, wie dies z. B. bei den Flächen mit Liouville'schem Bogenelement der Fall ist.

Ferner kann man fragen: »Wann gehen die Curven der Congruenz ($\mathfrak{A}$) durch dieselbe Transformation oder die Transformationen einer Gruppe aus einander hervor? Speciellst: »Wann sind die Figuren, welche aus dem Punkte a und der Curve $\mathfrak{A}$ bestehen, zu einander congruent? Es wird sich zeigen, dass dann die Fläche F constante Krümmung haben, dass aber zu jeder dieser Flächen ∞^2 Congruenzen ($\mathfrak{A}$) gehören, so dass die geodätischen Linien einer solchen Fläche auf ∞^2 Arten so gruppirt werden können, dass die entsprechenden Curven $\mathfrak{A}$ aus einander durch Rotation um den Punkt a hervorgehen.

2. Das Pfaff'sche Problem bei Congruenz der Figuren (a, $\mathfrak{A}$). Wir nehmen also an, dass in den Tangentialebenen T_a der Fläche zu einander congruente Curven $\mathfrak{A}$ gegeben seien, und zwar sollen auch die Figuren, welche aus $\mathfrak{A}$ und dem Punkte a bestehen, zu einander congruent sein. Zeichnen wir in der Tangentialebene T_a einen rechten Winkel, dessen Scheitel a ist, und der zu dieser Figur congruent liegt; wir können dann die Schenkel dieses Winkels als Axen eines Cartesischen Coordinatensystems wählen. Die Gleichung der Curve $\mathfrak{A}$ bezüglich dieses Systems wäre dann $y = f(x)$. Gleichzeitig können wir die Schenkel dieses Winkels als Tangenten der Coordinatencurven $u =$ const., $v =$ const. auf der Fläche

wählen. Dann ist die Gleichung eines Punktes der Tangentialebene[1]

$$a+x\frac{b}{\beta}+y\frac{c}{\gamma}=0,$$

wobei $\beta=\sqrt{E}$, $\gamma=\sqrt{G}$ gesetzt wurde.[2]

Demnach ist

$$a'\equiv a+x\frac{b}{\beta}+f(x)\frac{c}{\gamma}$$

ein Punkt der Curve $\mathfrak{A}$. Haben hierin u, v, x bestimmte Werthe, so erhält man einen Punkt des Raumes a'. Durch diesen Punkt a' und die Normale n_a des Punktes a geht die Ebene $T_{a'}$. Sie entspricht dem Punkte a' in dem Pfaff'schen Problem, von welchem oben die Rede war.

Um die Differentialgleichung dieses Pfaff'schen Problems zu bestimmen, müssen wir u, v, x solche Zuwächse ertheilen, dass der Nachbarpunkt

$$\bar{a}'=a'+da'$$

in die Ebene $T_{a'}$ fällt. Es müssen also die Richtungen der Normale n_a, der Geraden aa' und $a'\bar{a}'$ in einer Ebene liegen, d. h. es muss das Matricenproduct

$$\begin{vmatrix} b \\ c \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a'-a \\ da' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b \\ c \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \frac{b}{\beta}x+\frac{c}{\gamma}y \\ da' \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{(bb)}{\beta}(cda')x-\frac{(cc)}{\gamma}(bda')y=\beta x(cda')-\gamma y(bda')=0 \qquad (1)$$

sein.

---

[1] Vergl. die oben angeführte Arbeit, Art. 5.

[2] Der Punkt a habe die Entwicklung

$$a+(bdu+cdv)+\frac{1}{2}(edu^2+2fdudv+gdv^2)+\ldots$$

Wird der aus $m_1, m_2, m_3;\ n_1, n_2, n_3$ gebildete Ausdruck

$$m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3$$

mit (mn) bezeichnet, so ist das Bogenelement der Fläche

$$ds^2=(bb)du^2+2(bc)dudv+(cc)dv^2,$$

also

$$E=(bb),\quad F=(bc),\quad G=(cc).$$

Nun ist

$$da' = bdu + cdv + \left(\frac{db}{\beta} - \frac{d\beta}{\beta^2}b\right)x + \left(\frac{dc}{\gamma} - \frac{d\gamma}{\gamma^2}c\right)y +$$
$$+ \frac{b}{\beta}dx + \frac{c}{\gamma}dy,$$

und

(da $(bdb) = \frac{1}{2}d(bb) = \frac{1}{2}d\beta^2 = \beta . d\beta$ und $(cdc) = \gamma . d\gamma$ ist)

$$(bda') = \beta^2 du + \frac{(bdc)}{\gamma}y + \beta dx,$$

$$(cda') = \gamma^2 dv + \frac{(cdb)}{\beta}x + \gamma dy.$$

Daher wird Gleichung (1):

$$(\gamma dv + \frac{(cdb)}{\beta\gamma}x + dy) - y(\beta du + \frac{(bdc)}{\beta\gamma}y + dx) = 0$$

oder, da wegen $(bc) = 0$ auch $(bdc) + (cdb) = 0$ ist,

$$x\gamma dv - y\beta du + \frac{(x^2+y^2)}{\beta\gamma}(cdb) + xdy - ydx = 0.$$

Diese Gleichung wird (Da $(cdb) = (ce)du + (cf)dv$ und ferner $\frac{\partial(bc)}{\partial u} = 0$, also $(ce) + (bf) = 0$ ist, so ist

$$(ce) = -(bf) = -\frac{1}{2}\frac{\partial(bb)}{\partial v} = -\beta\beta_v, \quad (cf) = \frac{1}{2}\frac{\partial(cc)}{\partial u} = \gamma\gamma_u,$$

also $(cdb) = -\beta\beta_v du + \gamma\gamma_u dv$)

$$\left(\beta y + (x^2+y^2)\frac{\beta_v}{\gamma}\right)du - \left(\gamma x + (x^2+y^2)\frac{\gamma_u}{\beta}\right)dv - (xdy - ydx) = 0.$$

Führt man hier statt x, y Polarcoordinaten r, φ ein, so geht diese Gleichung über in

$$\left(\beta \sin\varphi + r\frac{\beta_v}{\gamma}\right)du - \left(\gamma\cos\varphi + r\frac{\gamma_u}{\beta}\right)dv - rd\varphi =$$
$$= Pdu + Qdv - rd\varphi = 0. \qquad 2)$$

Dies ist also die zur Congruenz ($\mathfrak{A}$) zugehörige Pfaff'sche Gleichung in den Coordinaten u, v, φ. Ihre Integrabilitätsbedingung ist

$$PQ_{\varphi}-QP_{\varphi}-r(P_v-Q_u) =$$

$$= \beta\gamma-r^2\left\{\left(\frac{\beta_v}{\gamma}\right)_v+\left(\frac{\gamma_u}{\beta}\right)_u\right\}-\frac{dr}{d\varphi}(\gamma_u \sin\varphi-\beta_v \cos\varphi) = 0. \quad (3)$$

Nun ist nach einer Formel von Codazzi[1]

$$-\frac{1}{\beta\gamma}\left\{\left(\frac{\beta_v}{\gamma}\right)_v+\left(\frac{\gamma_u}{\beta}\right)_u\right\} = K,$$

das Krümmungsmass der Fläche im Punkte a, und ferner sind

$$\lambda = \frac{\gamma_u}{\beta\gamma}, \quad \mu = -\frac{\beta_v}{\beta\gamma}$$

die respectiven geodätischen Krümmungen der Coordinatenlinien $u =$ const., $v =$ const. im Punkte a, so dass die Integrabilitätsbedingung (3) wird

$$r' = \frac{1+Kr^2}{\lambda \sin\varphi+\mu \cos\varphi}. \quad (4)$$

3. Nur Flächen constanter Krümmung. Es können nun zwei Fälle eintreten. Entweder verschwindet in der letzten Gleichung r' für alle Werthe von φ oder nicht. Im ersten Falle muss $1+Kr^2=0$ sein, also $r^2 = -\frac{1}{K}$. Nun war vorausgesetzt, dass die Gleichung der Curve $\mathfrak{A}$ in allen Tangentialebenen T_a der Fläche dieselbe $y = f(x)$ sei, dass also r nicht von u, v abhängt; es muss demnach vermöge der letzten Gleichung K von u, v unabhängig sein. Die Fläche hat daher constante Krümmung und die Curve $\mathfrak{A}$ ist ein Kreis R_a mit dem Mittelpunkt a und dem Radius $\sqrt{-\frac{1}{K}}$. Dies gibt die bekannte Lie'sche unendlichdeutige Transformation der Flächen con-

[1] Siehe Stahl und Kommerell, Die Grundformeln der Flächentheorie, S. 32.

stanter Krümmung. Denn die Integralflächen F' des Pfaff'schen Problems sind hier wieder Flächen constanter Krümmung und die Lie'sche Transformation besteht eben darin, dass man von dem Flächenelement M_1 der Flächen F zu dem Element M_2 der Fläche F' übergeht.

Wäre im zweiten Falle r' ein Werth, welcher von Null verschieden ist, so ist

$$\frac{1+Kr^2}{r'} - (\lambda \cos \varphi + \mu \sin \varphi) = 0; \tag{5}$$

diese Gleichung soll bestehen für alle Werthe von u, v; es muss demnach

$$K_u \frac{r^2}{r'} - (\lambda_u \cos \varphi + \mu_u \sin \varphi) = 0,$$

$$K_v \frac{r^2}{r'} - (\lambda_v \cos \varphi + \mu_v \sin \varphi) = 0$$

sein. Dies gibt, dass die Functionaldeterminanten von K, λ, μ verschwinden, dass also λ und μ Functionen von K sind.

In Gleichung (4) sind demnach λ und μ Functionen von K. Werden in diese Gleichung die Werthe von φ, r, r' eines Punktes der Curve $\mathfrak{A}$ eingesetzt, so muss diese Gleichung auch bestehen für den congruenten Punkt in den anderen Tangentialebenen. Man hat demnach für alle Punkte der Fläche dieselbe Gleichung für K; daher ist K constant, also auch λ und μ.

Die Curvenschaaren $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ haben demnach die constanten geodätischen Krümmungen

$$\lambda = c_1, \quad \mu = c_2;$$

die Curven dieser Schaaren schneiden sich zudem orthogonal. Diese Schaaren müssen folglich nach einem bekannten Satze isometrische Schaaren sein. Daher kann man in dem Bogenelemente der Fläche $E = G$ oder $\beta = \gamma$ setzen. Es wird demnach

$$\lambda = \frac{\beta_u}{\beta^2} = c_1 \text{ und } \mu = -\frac{\beta_v}{\beta^2} = c_2.$$

Dies gibt

$$\frac{\beta_u}{\beta_v} = \frac{c_1}{c_2}$$

oder

$$\beta = f(c_1 u + c_2 v).$$

Da aber $\frac{\beta_u}{\beta^2} = c_1$ ist, folgt

$$\frac{f'}{f^2} = 1 \quad \text{oder} \quad f = \frac{1}{-(c_1 u + c_2 v) + c}.$$

Es ergibt sich demnach

$$E = G = \frac{1}{(c_1 u + c_2 v + c)^2}.$$

Wir können hier $c = 0$ setzen und haben dann das Bogenelement

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(c_1 u + c_2 v)^2} \tag{6}$$

und daher

$$K = -(c_1^2 + c_2^2).$$

4. Die Curven $\mathfrak{A}$. Die Differentialgleichung (4) geht nun über in

$$r' = \frac{1 - r^2(c_1^2 + c_2^2)}{c_1 \sin \varphi + c_2 \cos \varphi},$$

oder wenn

$$\sqrt{-K} = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sigma, \quad \frac{c_1}{\sigma} = \cos \vartheta, \quad \frac{c_2}{\sigma} = \sin \vartheta$$

gesetzt wird, in

$$\frac{\sigma dr}{1 - \sigma^2 r^2} = \frac{d\varphi}{\sin(\vartheta + \varphi)} = \frac{d(\vartheta + \varphi)}{\sin(\vartheta + \varphi)}.$$

Führen wir neue Veränderliche ein

$$\sigma r = \rho, \quad \vartheta + \varphi = \psi,$$

so wird diese Gleichung

$$\frac{d\rho}{1 - \rho^2} = \frac{d\psi}{\sin \psi}.$$

Diese Gleichung gibt integrirt

$$\frac{1-\rho}{1+\rho} = c\,\mathrm{tg}^2\,\frac{\psi}{2}$$

und, wenn $\frac{c+1}{c-1}$ als neue Constante C eingeführt wird

$$\rho = \frac{1+C\cos\psi}{C+\cos\psi}$$

oder

$$\sigma r = \frac{1+C\cos\psi}{C+\cos\psi}.$$

Führt man wieder Cartesische Coordinaten ein, so wird diese Gleichung

$$C^2(\sigma(x^2+y^2)-1)^2 = (x^2+y^2)(1-\sigma x)^2. \qquad (7)$$

Für $C^2 = 1$ wird diese Gleichung

$$\{\sigma^2(x^2+y^2)-1\}y^2 = 0;$$

hierin ist $\sigma^2(x^2+y^2)-1$ die Gleichung des Kreises R_a (siehe Art. 3), da $\sqrt{-\frac{1}{K}} = \frac{1}{\sigma}$ ist. Daher kann (6) auch geschrieben werden in der Form

$$R_a y^2 - \lambda R'^2 = 0, \qquad (8)$$

worin $R' = \sigma(x^2+y^2)-x = 0$ die Gleichung des Kreises R' ist, welcher durch a geht und den Kreis R_a im Punkte a' berührt, und λ ein Parameter ist.

Wir erhalten somit in Gleichung (7) oder (8) als Gleichungen der Curven $\mathfrak{A}$ ein Büschel von Curven vierter Ordnung. Da aber eine Fläche constanter Krümmung in ∞^1 Weisen das Bogenelement (6) erhalten kann, so kann dieses Büschel noch um a gedreht werden. Dann tritt in Gleichung (8) an Stelle von y^2 ein t^2, wobei $t = 0$ die Gleichung einer beliebigen Tangente des Punktes a ist, so dass die Gleichung einer Curve $\mathfrak{A}$ wird

$$R_a t^2 + \lambda R'^2 = 0. \qquad (9)$$

Es gibt demnach für jede Fläche constanter Krümmung ∞^2 Curven $\mathfrak{A}$, für welche das zugehörige

Pfaff'sche Problem integrabel wird. Diese Curven sind im Allgemeinen von vierter Ordnung; eine jede derselben gehört einem Büschel an, welches die Curven vierter Ordnung enthält, die bestehen

a) aus dem Kreise R_a und einer doppeltgezählten Tangente t des Punktes a;

b) aus dem doppeltgezählten Kreise R', welcher den Kreis R_a im Schnittpunkte a' mit der Geraden t berührt und durch den Punkt a geht;

c) aus der doppeltgezählten Tangente $\tau_{a'}$ des Kreises R_a im Punkte a und den beiden Minimalgeraden des Punktes a.

Diese Curven vierter Ordnung sind symmetrisch, bicircular, haben in a einen Doppelpunkt und berühren in a' den Kreis R_a mit zwei Zweigen.

Wird in Formel (5) r' unendlich für alle Werthe von φ, so ist die Curve $\mathfrak{A}$ eine Gerade, welche den Punkt a enthält; es muss dann der Nenner $\lambda \sin \varphi + \mu \cos \varphi$ des Bruches Null sein. Nimmt man diese Geraden als Tangenten an die Curven $v =$ const., so ist in diesem Nennner $\varphi = 0$ zu setzen, er wird also gleich μ. Da er aber verschwindet, so ist $\mu = 0$, d. h. die geodätische Krümmung der Linien $v =$ const. ist Null, oder diese Linien sind geodätische Linien. Daher ist es möglich, als Curve $\mathfrak{A}$ bei einer beliebigen Fläche eine Tangente des Punktes a zu nehmen, und die Congruenz ($\mathfrak{A}$), welche ein integrables Pfaff'sches Problem liefert, besteht dann aus den Tangenten einer Schaar geodätischer Linien der Fläche. In der That geben die developpablen Flächen einer Schaar geodätischer Linien (da sie die Tangentialebenen der Fläche F orthogonal durchschneiden) die Integralflächen eines Pfaff'schen Problems der verlangten Art; hier sind die Ebenen der Flächenelemente, deren Punkte auf einer Erzeugenden $\mathfrak{A}$ dieser Developpablen liegen, alle identisch.

Es fragt sich nun noch, wie man in dem obigen zweiten Falle die Curve $\mathfrak{A}$ eines Punktes a findet, wenn die Curve $\mathfrak{A}_0$ des Punktes a_0 gegeben ist, wie also die Curven einer Con-

gruenz ($\mathfrak{A}$), die ein integrables Pfaff'sches Problem liefert, zusammengeordnet sind.

Es sei unter den ∞^2 möglichen Curven $\mathfrak{A}$ des Punktes a_0 die Curve $\mathfrak{A}_0$ ausgewählt; diese berührt den Kreis R_{a_0} in einem Punkte a_0'. Es gibt dann eine Fläche F', welche den Punkt a_0' enthält und der Fläche F in der Lie'schen unendlichdeutigen Transformation entspricht, wie sich dies im obigen ersten Falle ergab. Diese Fläche schneidet den Kreis R_a des Punktes a in dem Punkte a' orthogonal und in diesem Punkte berührt die gesuchte Curve $\mathfrak{A}$ den Kreis R_a.

5. Die reduciblen Curven $\mathfrak{A}$. Unter den oben angeführten reduciblen Curven vierter Ordnung ergibt sich im Falle a) der Kreis R_a, der schon für den ersten Fall des Art. 3 hervortrat. Es ergibt sich gleichzeitig die doppeltgezählte Tangente t_a des Punktes a. Diese Tangenten t_a bilden eine Strahlencongruenz von Tangenten einer Schaar geodätischer Linien; wir befinden uns in dem obigen Specialfalle, in welchem $r' = \infty$ für alle Werthe φ.

Im Falle b) ergibt sich der Kreis R', der den Punkt a enthält. Wird die Fläche auf die Rotationsfläche abgewickelt, so schneidet dieser Kreis die Rotationsaxe im Punkte a' und ist senkrecht zum Meridian des Punktes a. Da aber die Kreise R' alle gleich sind, so muss das Stück der Tangente $\overline{aa'}$ des Meridians constant sein, der Meridian ist also die Tractrix der Rotationsaxe. Es folgt die bekannte Thatsache, dass die Flächen constanter negativer Krümmung auf die Rotationsfläche der Tractrix der Geraden abwickelbar sind. Da es aber ∞^1 Kreise R' gibt, die durch a gehen und den Kreis R_a berühren, so gibt es auch ∞^1 solcher Abwickelungen dieser Flächen auf die Pseudosphäre, wie ebenfalls bekannt ist.

Die Tangente $\tau_{a'}$, welche sich im Falle c) ergibt, ist senkrecht auf der Fläche F', welche den Punkt a' enthält und alle Kreise R_a orthogonal schneidet. F' hat dieselbe constante Krümmung wie F und ist mit F zusammen die Centrafläche einer Fläche Φ. Die Fläche Φ hat die Eigenschaft, dass die Hauptkrümmungsmittelpunkte aa' einer Normale einen constanten Abstand haben. Die Normale der einen Schale der Centrafläche ist n_a, die der anderen $\tau_{a'}$, und man sieht, dass

hier eine Lösung der folgenden Aufgabe vorliegt: »Auf der Normale der einen Schale der Centralfläche einer Fläche nehme man einen Punkt an als Punkt eines Flächenelements und die Ebene dieses Elements lasse man durch die entsprechende Normale der anderen Schale der Centralfläche gehen. Man erhält so für sämmtliche Normalen der ersten Schale ∞^3 Flächenelemente und es fragt sich nun, wann ist das zugehörige Pfaff'sche Problem integrabel?« Nach dem Obigen ergibt sich, dass dies jedenfalls für die beiden Schalen einer Fläche Φ stattfindet, deren Hauptkrümmungsradien für alle Punkte eine constante Differenz haben.

6. Congruenz ebener Curven. Es mögen nun noch einige Resultate über Congruenzen ebener Curven und eine geometrische Deutung der Integrabilitätsbedingung eines hierbei auftretenden Pfaff'schen Problems, sowie des Pfaff'schen Problems, mit dem wir uns bisher beschäftigt haben, hier ihren Platz finden.

Die Tangenten einer 1-Schaar von Curven (einer Schaar von ∞^1 Curven) auf einer Fläche F bilden eine Strahlencongruenz. Für die Tangente t_a, welche im Punkte a berührt, ist a der eine Brennpunkt, der andere sei a'; die eine Brennebene ist die Tangentialebene T_a des Punktes a, die andere heisse $T_{a'}$. Ist eine 1-1-Schaar (d. h. ∞^1 Schaaren von ∞^1 Curven) S_{11} gegeben, so entspricht jeder S_1 derselben eine Strahlencongruenz. Die Punkte a' dieser Congruenzen bilden in der Ebene T_a eine Curve C_a. Diese Curven C_a für alle Punkte der Fläche bilden eine Curvencongruenz (C_a), welche »als zu S_{11} zugehörig« bezeichnet werden soll.

Es gibt also soviel Congruenzen (C_a), als es S_{11} auf der Fläche F gibt. Liegt umgekehrt eine Congruenz (C) ebener Curven vor, so umhüllen die Ebenen dieser Curven eine Fläche F und es lässt sich zeigen, dass die Congruenz (C) zu soviel Schaaren S_{11} gehört, als sich ∞^2 Curven zu 1-1-Schaaren anordnen lassen.

Jeder S_{11} entspricht zunächst eine 2-Schaar (C) von Raumcurven oder ein System von totalen Differentialgleichungen im Raume. Denn durch jeden Punkt a' des Raumes geht eine

(eine in einem gehörig begrenzten Gebiete) Curve C_a der zu S_{11} zugehörigen Congruenz (C_a).

Die Gerade $a'a$ gibt demnach für den Punkt a' ein Linienelement; diese Linienelemente bestimmen das gesuchte System, dessen Integralcurven die Curven $(\mathfrak{C})$ sind. Die Tangenten dieser Integralcurven sind auch Tangenten der Fläche F; daher wird jede Integralfläche F' des Systems als von solchen Curven $\mathfrak{C}$ erzeugt, mit F zusammen Brennfläche einer Strahlencongruenz sein. Die Strahlen dieser Congruenz sind Tangenten an eine 1-Schaar von Curven der Fläche F; der zweite Brennpunkt des Strahles, welcher in a berührt, liegt auf C_a. Nimmt man demnach ein Integral des Systems, also ∞^1 Integralflächen F', so bewegt sich dieser Brennpunkt auf C_a und man hat demnach (C_a) als zugehörig zu einer S_{11} construirt. (C_a) gehört also zu soviel S_{11}, als es Integrale des gefundenen Systems gibt.

Die zu einer 1-Schaar conjugirten Curven bilden eine 1-Schaar, welche ihre »conjugirte 1-Schaar« heissen möge. Die conjugirten 1-Schaaren der 1-Schaaren einer S_{11} bilden »die conjugirte Schaar Σ_{11} der gegebenen S_{11}«. Die ∞^2 Curven dieser Σ_{11} sind Integralcurven einer Differentialgleichung zweiter Ordnung und so gehört zu jeder S_{11} eine conjugirte Σ_2 oder eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Man kann nun leicht zeigen, dass die Congruenz (C_a) für diejenigen S_{11} dieselbe ist, welche dieselbe Σ_2 haben. Hierzu beachte man, dass einer der obigen Curven $(\mathfrak{C})$ eine Developpable umschrieben ist, welche die Fläche F längs einer Curve $\mathfrak{c}$ berührt. Allen ∞^2 Curven $(\mathfrak{C})$ entsprechen ∞^2 Curven $(\mathfrak{c})$, welche die gesuchte Schaar Σ_2 bilden. Denn nimmt man aus dieser 2-Schaar eine 1-Schaar Σ_1 und von dieser die conjugirte Schaar S_1, so liegt der Brennpunkt a' der Tangentencongruenz der Curvenschaar S_1 auf der Curve C_a.

Wenn also eine S_{11} gegeben ist, und alle anderen 1-1-Schaaren zu finden sind, welchen dieselbe (C_a) zugehört, suche man die zu S_{11} gehörige Schaar Σ_2; jeder 1-1-Schaar dieser Σ_2 ist eine 1-1-Schaar conjugirt, welche dieselbe Congruenz (C_a) liefert.

Nehmen wir z. B. eine Fläche mit der constanten Krümmung $-\frac{1}{\rho^2}$; sie lässt sich als Brennfläche von ∞^1 Normalencongruenzen auffassen, für welche die Brennpunkte einer Normale den constanten Abstand ρ haben. Daher kann man auch sagen, dass sich die geodätischen Linien dieser Flächen zu einer 1-1-Schaar anordnen lassen, deren zugehörige Congruenz (C_a) aus Kreisen mit dem Radius ρ und dem Mittelpunkt a besteht. Hier bilden die Flächen F', die zweiten Mäntel der Centraflächen dieser Normalensysteme, Integralflächen des obigen Systems totaler Differentialgleichungen; die Integralcurven dieses Systems sind geodätische Linien auf diesen Flächen. Die Flächen F' entsprechen der Fläche F in der Lie'schen unendlichdeutigen Transformation der Flächen constanter Krümmung. Man findet nach Obigem alle Tangentencongruenzen der Flächen constanter Krümmung, für welche die Brennpunkte eines Strahles den constanten Abstand ρ haben.

Es sei nun in den Tangentialebenen der Fläche F die Curvencongruenz (C_a) gegeben. Ferner sei ein Gesetz gegeben, vermöge dessen jedem Punkte a' von C_a eine Ebene $T_{a'}$ zugeordnet ist, welche den Punkt a enthält. Dann ist also jedem Punkte a' des Raumes (als auf einer C_a liegend) eine durch ihn gehende Ebene zugeordnet; es ist demnach ein Pfaff'sches Problem gegeben. Wir wollen nun einen geometrischen Ausdruck für dessen Integrabilitätsbedingung suchen. Hiezu müssen wir Einiges vorausschicken.

Es sei auf der Fläche F die Curvenschaar S_1 mit ihrer Tangentencongruenz (t) gegeben. Weist man dann dem Brennpunkt a die Brennebene $T_{a'}$ des anderen Brennpunktes a' als entsprechend zu, so geschieht dieses Entsprechen in der Nachbarschaft des Punktes a in einem linearen Complex (dem Begleitcomplex des Strahles t_a);[1] in diesem Complex entspricht dem Punkt a' die Ebene T_a. Es gilt ferner:

Ist τ_a die conjugirte Tangente der Tangente t_a für die Fläche F und $\tau_{a'}$ die conjugirte Tangente der Brennfläche F', so

[1] Siehe hierfür und das Folgende: »Zur Infinitesimalgeometrie der Strahlencongruenzen und Flächen. Diese Sitzungsber., 1891, S. 164.

entsprechen sich diese Geraden τ_a und $\tau_{a'}$ als conjugirte Polaren dieses Begleitcomplexes. Schreitet man mit a' auf $\tau_{a'}$ weiter, so dreht sich $T_{a'}$ um t_a, mit a auf t_a, so bewegt sich a' auf $\tau_{a'}$.

Wenn nun das obige Pfaff'sche Problem integrabel ist, dann sei F' eine Integralfläche. Dann muss nach dem soeben Gesagten, wenn a auf t_a in den Nachbarpunkt $\bar{a}_1$ geht, der entsprechende Punkt a' auf $\tau_{a'}$ nach $\bar{a}'_1$ gehen, d. h. es muss die Curve C_a die Gerade $\tau_{a'}$ schneiden. Diese Bedingung ist daher nothwendig zur Integrabilität, sie ist aber auch hinreichend.

Nach Voss lässt sich nämlich die Integrabilitätsbedingung für ein Pfaff'sches Problem folgendermassen ausdrücken: Jedem Nachbarpunkt $\bar{a}'$ von a' auf der Fläche F' entspricht eine Ebene $T_{\bar{a}'}$, welche $T_{a'}$ in einer Geraden schneidet, die der Verbindungslinie $a'\bar{a}'$ involutorisch entsprechen muss. Da nun nach Voraussetzung der Punkt $\bar{a}'_1$ auf $\tau_{a'}$ liegt, so muss die Ebene $T_{\bar{a}'_1}$, die ja die Gerade $\bar{a}_1\bar{a}'_1$ enthält, die Ebene $T_{a'}$ in der Geraden aa' schneiden. Soll die Beziehung involutorisch sein, so muss dann noch dem Punkte $\bar{a}'_2$, welcher auf aa' zu a' benachbart liegt, wieder die Gerade $\tau_{a'}$ entsprechen. Denn dem Punkte $\bar{a}'_2$ entspricht der Punkt a_2, welcher auf τ_a liegt und die Ebene $T_{\bar{a}'_1}$ entspricht nach Obigem dem Punkte $\bar{a}_2$ im Begleitcomplex; sie muss daher die conjugirte Polare $\tau_{a'}$ von τ_a enthalten.

Wir haben demnach folgende nothwendige und hinreichende Bedingung für die Integrabilität des Pfaff'schen Problems:

J e d e m P u n k t a v o n F w e i s e m a n d i e E b e n e $T_{a'}$ z u i n d e r N ä h e v o n a e n t s p r i c h t d a n n d e r P u n k t $\bar{a}$ d e r E b e n e $T_{\bar{a}'}$ i n e i n e m l i n e a r e n C o m p l e x. D e r c o n j u g i r t e n T a n g e n t e τ_a d e r T a n g e n t e t_a i s t b e z ü g l i c h d e s l i n e a r e n C o m p l e x e s e i n e G e r a d e $\tau_{a'}$ c o n j u g i r t. W e n n m a n m i t a a u f t_a f o r t s c h r e i t e t, s o m u s s d i e z u g e h ö r i g e C u r v e C_a d i e s e G e r a d e $\tau_{a'}$ s c h n e i d e n.

Ist die Strahlencongruenz (t) eine Normalencongruenz, so kann man diese Bedingung in anderer Weise ausdrücken. In diesem Falle enthält die Ebene $T_{a'}$ die Normale n_a des Punktes a für die Fläche F, und der Begleitcomplex des Punktes a enthält daher die Normale n_a und

die zu ihr benachbarten Normalen der Fläche F. Er enthält daher auch[1] die Centrallinien der Normale in ihren Hauptkrümmungsmittelpunkten c_1, c_2. Die Geraden τ_a, $\tau_{a'}$ sind dann die Krümmungsaxen der Krümmungslinien der Flächen Φ, deren Normalencongruenz (t) ist. Da sie bezüglich des Begleitcomplexes conjugirt sind, so ist der Nullpunkt ω der Ebene, welche n_a und t_a verbindet, derjenige Punkt, in welchem n_a von $\tau_{a'}$ geschnitten wird.

Durch den Begleitcomplex entsprechen demnach projectiv:

Den Hauptkrümmungsmittelpunkten c_1, c_2 die Tangentialebenen C_2, C_1 der Centrafläche von Φ und

den Punkten a, ω, respective die Ebenen, welche n_a mit a' und τ_a verbinden. Diese Projectivität ist dadurch, dass c_1, c_2, a den Ebenen C_2, C_1, $(n_a t_a)$ entsprechen, bestimmt und ω ist dann der entsprechende Punkt zur Ebene $(n_a \tau_a)$. Da nun die Geraden t_a und τ_a einander in der Dupin'schen Tangenteninvolution entsprechen, so folgt, dass die Beziehung zwischen ω und t_a eine (1, 2)-deutige ist. Man findet für diese Beziehung leicht: Fällt ω mit c_1, respective c_2 zusammen, so liegt die bei den entsprechenden Tangenten t_a in C_1, respective C_2; fällt ω nach a, so sind die Tangenten t_a identisch mit den Inflexionstangenten der Fläche Φ.

Dieselben Paare sind aber entsprechend in der Beziehung, welche besteht zwischen t_a und dem Kreuzungspunkt der Normale n_a mit der Normale $n_{\bar{a}}$ des Nachbarpunktes a, welcher auf τ_a liegt. Zunächst gilt demnach der Satz:

Sind c_1, $\bar{c}_1$ die Nachbarpunkte, in welchen die Hauptbrennlinie des Punktes c_1 die Centrafläche schneidet, n_1, $\bar{n}_1$ die Normalen der Centrafläche für diese Punkte und $\varkappa$ der Kreuzungspunkt der Geraden n_1 und $\bar{n}_1$ (Schnittpunkt von n_1 mit der kürzesten Transversale zu n_1), dann ist die Gerade, welche $\varkappa$ mit c_2 verbindet, Krümmungsaxe des Punktes a der Krümmungslinie der Fläche Φ.

Es sei nun eine Curvencongruenz (C_a) gegeben und die Brennebenen T_a, $T_{a'}$ seien aufeinander senkrecht. Dann ist die

[1] Siehe »Zur Infinitesimalgeometrie etc.«, S. 168.

Gerade $\tau_{a'}$, welche zu t_a auf F' conjugirt ist, Krümmungsaxe. Nach dem letzten Satze liegt der Kreuzungspunkt der Normale des Punktes a und ihrer Nachbarnormale, die τ_a schneidet, auf dieser Krümmungsaxe. Wir erhalten demnach den Satz:

Damit die Curvencongruenz (C_a) ein integrables Pfaff'sches Problem liefere, dessen Integralflächen mit F zusammen Centraflächen sind, ist Folgendes nothwendig und hinreichend. Ist $\varkappa$ der Kreuzungspunkt der Normalen der Nachbarpunkte a, $\bar{a}$ von F, wobei $\bar{a}$ auf der conjugirten Tangente τ^a von t_a liegt, so muss die Curve $C_{\bar{a}}$ die Gerade schneiden, welche $\varkappa$ mit dem Schnittpunkte a' von t_a mit C_a verbindet.

Über magnetische Verzögerungen in Eisenkernen infolge periodisch wechselnder magnetisirender Kräfte

von

J. Dechant,

Professor an der k. k. Staatsoberrealschule im II. Bezirke in Wien.

(Mit 2 Textfiguren.)

Von den zahlreichen Rotationserscheinungen im periodisch wechselnden Magnetfelde, wie sie namentlich von E. Thomson[1] bekannt gemacht wurden, lässt sich eine Gruppe dadurch in einheitlicher Weise erklären, dass man die Wirkung in Betracht zieht, welche zwei periodisch wechselnde magnetisirende Kräfte, deren Phasendifferenz zwischen 0° und 180° gelegen ist, in einem Eisenkerne hervorbringen.

Leitet man um einen langen derartigen Stab durch eine kurze Drahtspule einen Strom, so pflanzt sich von der direct magnetisirten Stelle aus die Magnetisirung so fort, dass die magnetischen Momente der einzelnen Schichten oder die Intensitäten ihrer Magnetisirung abnehmen. Als Gesetz dieser Abnahme wird bei Anwendung von Gleichströmen das einer geometrischen Progression angenommen.[2] Wenn wir vorläufig dasselbe auch für Wechselströme als giltig annehmen, und wenn M_1 das Maximum des magnetischen Momentes an der direct magnetisirten Stelle ist, so wird das Moment in der Entfernung x von dieser Stelle gleich $M_1 q^{-x}$ zu setzen sein, wobei $q > 1$ ist.

Der Vorstellung entsprechend, dass eine Schichte durch Vertheilung die folgende magnetisirt, muss ferner eine gewisse

---

[1] Lum. électr., 30, 1888, p. 341 und Beibl., 13, S. 243.

[2] G. Wiedemann, Elektr., III, S. 541.

Zeit vergehen, bis die Veränderungen des magnetischen Zustandes von einer Stelle bis zu einer entfernten fortschreiten, und in der That bestätigen die Versuche verschiedener Forscher[1] das Vorhandensein solcher Verzögerungen. Allein dieselben sind bei Eisenkernen, die der Länge nach untertheilt sind, so geringfügig, dass wir vorläufig davon absehen und im Gegentheil annehmen können, dass alle Schichten unseres Stabes gleichzeitig ihren Magnetismus ändern. Nehmen wir noch diesen Wechsel als sinusartig an, so ist das durch diese erste Kraft (I) an irgend einer Stelle erzeugte wechselnde Moment

$$m_1 = M_1 q^{-x} \sin \frac{2\pi t}{T}.$$

In ähnlicher Weise wird eine zweite periodisch wechselnde Kraft (II), die an einer von I um die Länge l entfernten Stelle einwirkt und deren Phasenwechsel um $\vartheta < \frac{T}{2}$ später erfolgt, für einen zwischen I und II gelegenen Punkt ein veränderliches Moment erzeugen:

$$m_2 = M_2 q^{-(l-x)} \sin \frac{2\pi}{T}(t-\vartheta).$$

Wenn nun die Intensität der Magnetisirung mit der magnetisirenden Kraft proportional angenommen wird, so ergibt sich als beiläufiger Ausdruck für das resultirende Moment

$$m_1 + m_2 = M \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi\right),$$

wobei

$$M^2 = M_1^2 q^{-2x} + M_2^2 q^{-2(l-x)} + 2 M_1 M_2 q^{-l} \cos \frac{2\pi\vartheta}{T}$$

und

$$\cot \varphi = \cot \frac{2\pi\vartheta}{T} + \frac{M_1 q^{-x}}{M_2 q^{-(l-x} \sin \frac{2\pi\vartheta}{T}} =$$

$$= \cot \frac{2\pi\vartheta}{T} + \frac{M_1}{M_2} \cdot \frac{q^l}{\sin \frac{2\pi\vartheta}{T}} \cdot q^{-2x}.$$

---

[1] G. Wiedemann, Elektr., IV, S. 262.

Aus der letzten Formel ist unmittelbar zu ersehen, dass für wachsende x auch die Verzögerung φ zunimmt. Dies gilt auch dann noch, wenn die Abnahme der magnetischen Momente nicht nach einer geometrischen Progression erfolgt, sondern wenn nur überhaupt der Factor von M_1 eine mit x abnehmende und der von M_2 eine mit x zunehmende Function bedeutet.

Über die durch diese Verzögerung bedingten Magnetisirungsverhältnisse des Stabes kann man sich passend auf graphischem Wege eine Übersicht verschaffen. Die Gerade

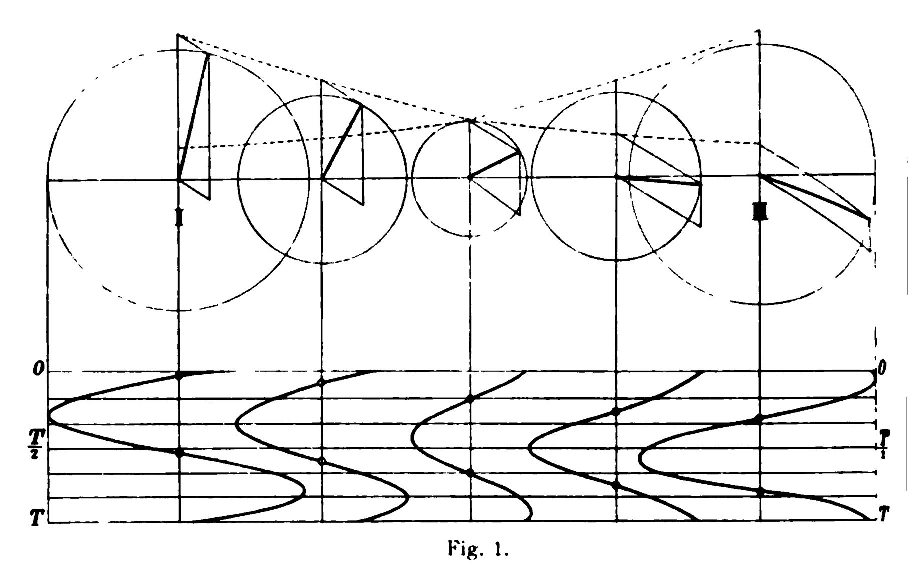


Fig. 1.

I—II (Fig. 1) bedeutet den untertheilten Eisenstab, auf den bei I und II die beiden magnetisirenden Kräfte von gleicher Stärke und von einer Phasendifferenz $= 120° = \frac{T}{3}$ einwirken. Die punktirten Linien stellen die Abnahme der magnetischen Momente längs des Stabes vor. Construirt man aus denselben und der angenommenen Phasendifferenz für verschiedene Stellen des Stabes Parallelogramme, so geben die Diagonalen derselben die Grösse und Phase des resultirenden Momentes an. Aus der Lage derselben erkennt man wieder die allmälig von I gegen II hin wachsende Phasenverzögerung. Darunter ist für fünf ver-

schiedene Punkte der Wechsel der Magnetisirung während einer Periode längs einer zum Stabe Normalen abgewickelt, um daraus auch die Richtung der Magnetisirung, die ja eine longitudinale ist, zu ersehen. Der Anblick der Figur lehrt, dass die Maxima der Magnetisirung von I gegen II vorrücken, und zwar in der Zeit der zwischen den Stellen I und II bestehenden Phasendifferenz $= \vartheta'$. Nach $\frac{T}{2} - \vartheta'$ beginnt das entgegengesetzte Maximum bei I, um wieder während der Zeit ϑ' von I bis II zu wandern. Noch besser kann man dieses Vorrücken an den Minimis der Magnetisirung, d. i. an den Stellen, wo die Curven die Normalen durchschneiden, beobachten. Diese Minima stellen gewissermassen Folgepunkte vor, da zu beiden Seiten derselben die Magnetisirungsrichtung entgegengesetzt ist, mithin die Elementarmagnete sich die gleichnamigen Pole zuwenden werden. Da ferner von einem solchen Folgepunkte aus nach beiden Seiten hin die magnetischen Momente zunehmen, so herrscht auf der ganzen Länge des Stabes zwischen I und II gleichzeitig derselbe freie Magnetismus. Nehmen wir an, dass in den Phasen, wo die Curven sich aneinander drängen, Nordmagnetismus herrscht, so findet dort, wo sie auseinander weichen, südmagnetischer Zustand statt. Kurz, wir haben hier Verhältnisse, die den fortschreitenden longitudinalen Wellen ähnlich sind.

Es ergibt sich hieraus, dass zwei periodisch wechselnde magnetisirende Kräfte von einer gewissen Phasendifferenz, die auf verschiedene Stellen eines Eisenstabes einwirken, fortschreitende magnetische Wellen von veränderlicher Amplitude, aber verhältnissmässig geringer Fortpflanzungsgeschwindigkeit erzeugen. Wir finden die letztere, wenn wir die Distanz der Stellen, wo die Kräfte einwirken, durch die Phasendifferenz dividiren. Wächst ϑ', oder auch T, so nimmt daher die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ab. Für $T = \frac{1}{43}$ Sec., $\vartheta' = \frac{T}{4}$ und $l = 10\,cm$ ist $c = 17\,m$.

Ich habe nun diesen Fall folgendermassen experimentell verwirklicht: Auf einen aus $^1/_2\,mm$ dicken Lamellen bestehenden

Eisenstab von 45 *cm* Länge und von rechteckigem Querschnitt ($4 \times 3 \cdot 5\ cm^2$) werden zwei Drahtspiralen von je 150 Windungen und 2 *cm* Länge geschoben. Dieselben werden von den Zweigströmen eines Wechselstromes durchflossen, von denen der eine durch einen Kupfervitriolwiderstand, der andere durch Selbstinduction auf gleiche Stärke (3 Amp.) gebracht ist. Der letztere, der durch eine Spule von 500 Windungen mit einem untertheilten Eisenkerne geht, wird in seiner Phase gegenüber dem ersten nahezu um 90° verzögert. Die in den gleichen Spulen I und II stattfindende Selbstinduction hat auf den Unterschied der Phasen keinen Einfluss, wohl aber wird er durch die gegenseitige Induction der beiden Spulen noch etwas vergrössert. Werden beide Spiralen in demselben Sinne durchflossen, und zwar die Spirale I von dem nicht verzögerten Strome, so wird nach dem Früheren die Verzögerung von I gegen II zunehmen, oder die magnetische Welle wird in dem angegebenen Sinne fortschreiten. Wechselt man in einer Spule die Stromesrichtung, so wird die Phasendifferenz um $\frac{T}{2}$ geändert, sie ist also $\vartheta' - \frac{T}{2} = -\left(\frac{T}{2} - \vartheta'\right)$, d. h. der Phasenwechsel des Stromes in II erfolgt um $\frac{T}{2} - \vartheta'$ früher, und die Welle wird die entgegengesetzte Fortpflanzungsrichtung haben

Die Mittel zum Nachweise dieser Verzögerungen sind im Allgemeinen dieselben wie diejenigen, welche bei Ferraris' magnetischem Drehfelde zur Anwendung kommen.

Man kann also zunächst eine auf einer Spitze schwebende Magnetnadel anwenden. Dieselbe wird im allmälig verzögerten Magnetfelde wohl nicht immer in Drehung versetzt werden, es kommt dabei auf ihre anfängliche Lage zum Eisenstabe an. Allein ertheilt man ihr im Sinne der Fortpflanzung der magnetischen Wellen einen Stoss, so dass sie infolge desselben eine Umdrehung macht, so wird sie bei jedem folgenden Vorübergang am Eisenstabe einen neuen Antrieb im Sinne ihrer Bewegung erfahren, der ihre Geschwindigkeit steigert, bis die Widerstände mit der treibenden Kraft ins Gleichgewicht kommen.

Man könnte auch eine um ihren Mittelpunkt drehbare Kupferscheibe anwenden, indem man sie so aufstellt, dass

der Stab parallel einer Sehne ist, die beiläufig um den halben Radius der Scheibe vom Mittelpunkte entfernt ist. Allein da man die Scheibe nicht zu dünn wählen darf, damit die in derselben inducirten Ströme nicht zu schwach werden, so wird sie im Allgemeinen schwerer in Bewegung zu setzen sein.

Das empfindlichste Prüfungsmittel ist aber eine Eisenscheibe, die entweder auf einer Spitze schwebt oder um eine horizontale Axe drehbar ist und so aufgestellt wird, dass der Stab tangential zum Rande der Scheibe liegt. Ich verwendete Eisenscheiben von 0·15 *mm* Dicke, die mithin nur ein geringes Trägheitsmoment hatten und daher bald die grösstmögliche Rotationsgeschwindigkeit annahmen. Dieses Maximum hängt nicht nur von der Stärke des Magnetfeldes ab, sondern auch von der Dauer der Einwirkung der vorbeiziehenden Welle. Bei sehr grosser Fortpflanzungsgeschwindigkeit kann die Scheibe einen geringeren Antrieb erfahren als bei einer mässigen.

Eine solche Scheibe nimmt nun nicht nur zwischen den Spulen I und II eine der Fortpflanzungsrichtung der magnetischen Wellen entsprechende Rotationsrichtung an, sondern sie rotirt auch — allerdings langsamer —, wenn sie ausserhalb derselben dem Stabe gegenüber aufgestellt wird, und zwar stets im selben Sinne wie zwischen den Spulen. Würde die Abnahme der magnetischen Momente nach einer geometrischen Progression erfolgen, so könnte für die Punkte ausserhalb der beiden Spulen keine weitere Phasenverzögerung mehr stattfinden. Denn für die Punkte ausserhalb der Spule II wäre

$$\cot\varphi = \cot\frac{2\pi\vartheta}{T} + \frac{M_1 q^{-x}}{M_2 q^{-x-l}\sin\frac{2\pi\vartheta}{T}} =$$

$$= \cot\frac{2\pi\vartheta}{T} + \frac{M_1}{M_2}\cdot\frac{q^{-l}}{\sin\frac{2\pi\vartheta}{T}},$$

also constant. Um die vorhandene Verzögerung zu erklären, müsste man daher annehmen, dass der Quotient der Abnahme pro Längeneinheit in der Nähe der magnetisirenden Spulen kleiner sei als in grösserer Entfernung von denselben. Ähnlich verhält es sich vor der Spule I. Dort wäre

$$\cot \varphi = \cot \frac{2\pi\vartheta}{T} + \frac{M_1 q^{-x}}{M_2 q^{-(x+l)} \sin \frac{2\pi\vartheta}{T}} =$$

$$= \cot \frac{2\pi\vartheta}{T} + \frac{M_1}{M_2} \frac{q^l}{\sin \frac{2\pi\vartheta}{T}}.$$

Wenn man hier eine langsamere Rotation der Scheibe beobachtet als nach der Spule II, so erklärt sich dies wohl daraus, dass das Anwachsen der Stärke des Magnetfeldes im Sinne der Fortpflanzung der Drehung hinderlich ist, während die Abnahme die entgegengesetzte Wirkung hat.

Während hier magnetische Verzögerungen längs des Eisenstabes durch eine etwas umständliche Stromtheilung bewirkt wurden, die aber den Vortheil bot, die Verhältnisse symmetrisch zu gestalten und die Fortpflanzungsrichtung der Wellen umzukehren, hat E. Thomson einfacher solche Verzögerungen hervorgebracht, indem er ausser der primären, von einem Wechselstrom durchflossenen Spirale eine in sich geschlossene secundäre Spirale von wenig Windungen auf einen Eisenstab aufschob. Da die in der letzteren inducirten Ströme eine zwischen 90° und 180° gelegene Phasendifferenz besitzen, so erzeugen sie durch ihr Zusammenwirken mit dem primären Strome ähnliche von I gegen II hin zunehmende Verzögerungen. Die secundäre Spirale kann man auch in vortheilhafter Weise durch einen Kupferring oder eine Metallröhre ersetzen. Auch den Fall, dass man Verzögerungen durch Aufsetzen eines massiven Eisenstabes auf den untertheilten und direct magnetisirten Eisenkern hervorbringt, kann man als hieher gehörig betrachten, indem die in der Eisenmasse auftretenden Wirbelströme nicht nur die Phase der Magnetisirung längs des massiven Stabes verzögern, sondern auch verzögernd auf den untertheilten Eisenstab zurückwirken.

Schiebt man die primäre Spirale auf die Mitte unseres Eisenkernes und bringt man auf beiden Seiten secundäre Stromkreise an, so werden natürlich nach beiden Enden hin Verzögerungen auftreten, und die Eisenscheibe wird zu beiden Seiten der Magnetisirungsspirale entgegengesetzte Rotationsrichtungen annehmen. Gegenüber der primären Spirale selbst

wird sie in Ruhe bleiben, wenn die Rückwirkung der secundären Ströme beiderseits gleich ist. Sie wird sich hingegen nach jener Richtung bewegen, wo die verzögernde Kraft bedeutender ist. Ähnlich verhält es sich, wenn ein massiver Eisenstab in seiner Mitte wechselnd magnetisirt wird. Die Eisenscheibe wird wieder auf beiden Seiten nicht nur entgegengesetzt rotiren, sondern sie wird gegenüber der magnetisirenden Spirale nur dann in Ruhe sein, wenn der Stab symmetrisch bezüglich derselben ist. Sonst dreht sie sich nach jener Seite hin, wo der Stab mehr hervorragt.

Zum Schlusse sollen noch zwei Versuche beschrieben werden, welche beweisen sollen, dass ausser den zwei magnetisirenden Kräften mit einer zwischen 0° und 180° gelegenen Phasendifferenz auch die Abnahme der Intensität der Magnetisirung längs des Stabes eine nothwendige Bedingung zum Zustandekommen dieser Verzögerungen ist.

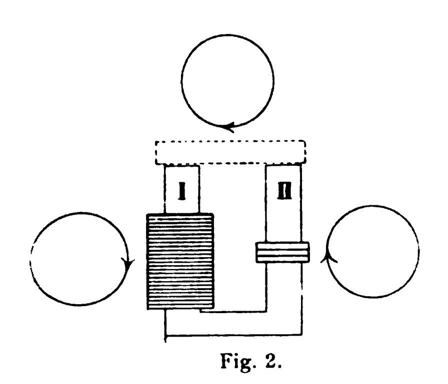


Fig. 2.

Wenn man ein hufeisenförmiges, lamellirtes Eisenstück mit primärem und secundärem Stromkreise umgibt (Fig. 2), so rotirt die Eisenscheibe gegenüber beiden Schenkeln wie früher von I gegen II hin. Nebenbei sei bemerkt, dass sich auch gegenüber den beiden Polen Rotation einstellt, und zwar von II gegen I. Diese Drehungsrichtung erklärt sich leicht, wenn man bedenkt, dass die Pole ungleichnamig sind, was einer Veränderung ihres Phasenunterschiedes um 180° gleichkommt, so dass der von der secundären Spirale umgebene Pol in seinem Phasenwechsel dem andern voraus ist. Setzt man nun ein lamellirtes Eisenstück auf die Pole, so nimmt die Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe ab oder wird bei schwächerer Magnetisirung Null. Denn in dem geschlossenen magnetischen Kreis fallen die magnetischen Momente von den direct magnetisirten Stellen langsamer ab als im offenen, und daher sind auch die Phasenänderungen geringer.

Ein zweiter Versuch ist folgender: Wenn man um die Schenkel desselben hufeisenförmigen Eisenstückes Wechselströme in entgegengesetztem Sinne herumleitet, so dass an den Enden entgegengesetzte Phasen der Magnetisirung auftreten, und wenn man ein massives Eisenstück als Anker vorlegt, so zeigt eine über demselben aufgestellte Eisenscheibe keine Rotation. Denn trotz der Wirbelströme, die in dem Anker auftreten, findet keine Phasenverzögerung statt, da derselbe nahezu gleich stark in allen Theilen magnetisirt ist. Sobald man aber den Anker soweit zurückzieht, dass er nur mehr den Rand des einen Poles berührt, so tritt sofort Rotation ein nach der Richtung, als die magnetischen Momente abnehmen. Die Drehungsrichtung geht in die entgegengesetzte über, wenn man den Anker so weit vorschiebt, dass er nur den Rand des andern Poles berührt.

XXVII. SITZUNG VOM 14. DECEMBER 1893.

Der Secretär legt den 60. Band (Jahrgang 1893) der Denkschriften vor.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Lang übersendet eine Arbeit aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität zu Innsbruck von Dr. Gustav Benischke, betitelt: »Zur Frage der Wärmetönung durch dielektrische Polarisation«.

Ferner übersendet Herr Hofrath v. Lang eine im physikalischen Cabinete der k. k. Universität in Wien von Dr. Josef Tuma ausgeführte Arbeit, betitelt: »Zur Theorie der Herstellung hochgespannter Ströme von hoher Frequenz mittelst oscillatorischer Condensatorentladungen«.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. Dr. C. Freiherr v. Ettingshausen übersendet eine Arbeit aus dem phyto-paläontologischen Institute der k. k. Universität in Graz, betitelt: »Die Pliocän-Buche der Auvergne«, von Prof. Franz Krašan.

Das c. M. Herr Prof. Zd. H. Skraup übersendet zwei im chemischen Institute der k. k. Universität in Graz ausgeführte Untersuchungen, und zwar:

1. »Über neue Verbindungen der Chinaalkaloide mit Äthyljodid«, von Zd. H. Skraup und F. Konek v. Norwall.
2. »Über den Nachweis von Aluminium im qualitativen Gang«, von Dr. G. Neumann.

Ferner übersendet Herr Prof. Skraup aus demselben Institute folgende Mittheilung: »Über die Verwandlung von Citraconsäure in Mesaconsäure«, von Mag. pharm. R. Franz.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht eine im I. chemischen Universitäts-Laboratorium in Wien ausgeführte Arbeit von Th. v. Smoluchowski: »Über die Zersetzung der α'-Oxynicotinsäure durch nascirenden Wasserstoff.«



Zur Frage der Wärmetönung durch dielektrische Polarisation

von

Dr. **Gustav Benischke.**

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Innsbruck.

(Mit 1 Textfigur.)

Bekanntlich hat schon W. Siemens[1] mittelst Thermoströmen die Erwärmung eines Glascondensators durch Ladung nachgewiesen. Ausserdem liessen die vielen Ähnlichkeiten zwischen magnetischen und elektrostatischen Erscheinungen erwarten, dass auch die magnetische Hysteresis ihr Analogon in einer dielektrischen Hysteresis haben werde. In dieser Hoffnung hat C. P. Steinmetz[2] Messungen an einem Paraffinpapier-Condensator von drei Mikro-Farad Capacität derart vorgenommen, dass derselbe in einen Wechselstromkreis von 1000 Volt und 170 Perioden eingeschaltet und durch Volt-, Amper- und Wattmesser der Energieverlust in demselben bestimmt wurde. Da aber Paraffinpapier ein zu unvollkommenes Dielektricum ist, um darauf sichere Schlüsse aufbauen zu können, unternahm ich es, die durch dielektrische Polarisation etwa auftretende Wärme an einem Paraffincondensator zu untersuchen.

Während ich mit der Zusammenstellung der Versuchsmethode beschäftigt war, erschienen die einschlägigen Arbeiten

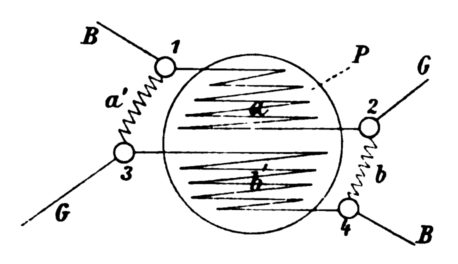
---

[1] W. Siemens, Monatsber. der Berl. Akad., 1861, October.

[2] Steinmetz, Elektrot. Zeitschr., 13, S. 227, 1892.

von Fritz[1] und Kleiner.[2] Ersterer untersuchte Glascondensatoren mittelst des Eiscalorimeters und mittelst Thermoströmen, letzterer solche aus verschiedenen dielektrischen Stoffen mittelst Thermoströmen. Aus diesen Versuchen ergab sich für Paraffin und Colophonium keine Erwärmung, wohl aber für Glas, Glimmer, Ebonit und andere minder vollkommene Dielektrica.

Ich bemerke gleich, dass auch ich bei meinem Paraffincondensator keine Erwärmung constatiren konnte, wohl aber bei einem Paraffinpapier-Condensator, so dass ich zu der Ansicht gelangte, dass durch reine dielektrische Polarisation überhaupt keine Wärme erzeugt wird, und dass die bisher bei anderen Stoffen nachgewiesene Wärme nichts Anderes ist als zum Theil Joule'sche, zum Theil durch mechanische Vorgänge erzeugte Wärme.



Das Folgende wird, wie ich glaube, diese Ansicht rechtfertigen.

Zur Bestimmung der Temperaturerhöhung des Dielektricums musste die Versuchsmethode besonders zwei Bedingungen erfüllen; sie musste erstens sehr empfindlich sein, zweitens einen Wärmeverlust möglichst vermeiden. Diesen Bedingungen entsprach ein aus zwei nicht correspondirenden Zweigen einer Wheatstone'schen Brücke bestehendes Bolometer, das sich mitten in dem zu untersuchenden Dielektricum befand.

Alle vier Zweige dieser Wheatstone'schen Brücke bestanden aus je einem circa 0·025 *mm* dicken, 239 *cm* langen Platindrahte mit einem Widerstande von $w = 511·4\ \Omega$ bei 17° C. Sind a, b, a', b' die vier Brückenzweige, so waren a und b' in die Paraffinplatte des Condensators P von 161 *mm* Durchmesser eingeschmolzen. Dies geschah in der Weise, dass diese beiden Drähte auf eine jener Paraffinplatten, die ich bei einer früheren

[1] Fritz, Inaug.-Dissert., Zürich, 1893.

[2] Kleiner, Vierteljahrschr. der Naturforsch. Ges. in Zürich, 37, 1893 und Wied. Ann., 50, S. 138, 1893.

Untersuchung[1] zur Bestimmung der Dielektricitätsconstante verwendet hatte, so wie es die Figur zeigt, aufgespannt wurden. Bei der Feinheit der Drähte genügte das blosse Andrücken, um sie haften zu machen. Darüber wurde dann Paraffin in mehreren Schichten gegossen und daraus auf der Drehbank eine ebene. 2·5 *mm* dicke Platte derart abgedreht, dass die beiden so gespannten Drähte sich mitten in der Paraffinplatte befanden So wurde erreicht, dass die im Dielektricum auftretende Wärme ohne Verlust nach aussen gemessen werden konnte. Die Enden dieser äusserst dünnen Drähte waren zunächst an dickere Platindrähte, welche aus der Paraffinplatte herausragten, und diese an dickere Kupferdrähte gelöthet, welche in die Quecksilbernäpfchen 1, 2, 3, 4 tauchten. Jeder der beiden anderen Zweige b und a' war auf ein Stück einer dicken Glasröhre aufgewickelt und die Enden aus Kupferdraht diametral durch die die Röhre verschliessenden Korke gesteckt. Das ganze mit Ausnahme der in die Quecksilbernäpfchen tauchenden Kupferdrähte wurde mit einer schützenden Paraffinschichte überzogen.

Alle vier Brückenzweige waren demnach qualitativ und quantitativ gleich, so dass ich sowohl von äusseren Temperaturschwankungen als auch von der im Stromkreise der Wheatstone'schen Brücke selbst auftretenden Joule'schen Wärme vollständig unabhängig wurde.

Die Drähte G führen zu einem Spiegelgalvanometer, die Drähte B zu einer Batterie von einem Daniell.

Haben alle vier Brückenzweige gleiche Temperatur, so zeigt das Galvanometer auf Null; ändert sich aber die Temperatur der Zweige a und b' und damit ihr Widerstand, so gibt die Nadel einen Ausschlag, der durch einen zu a' zugeschalteten Widerstand compensirt werden kann. Ist der Widerstand jedes Brückenzweiges w und vermehrt sich derselbe infolge der Temperaturerhöhung in jedem der eingeschmolzenen Zweige a und b' um x und ist r der zu a' zugeschaltete Compensationswiderstand, so besteht für das Gleichgewicht in der Wheatstone'schen Brücke folgende Beziehung:

$$w+x : w = w+r : w+x;$$

[1] Diese Sitzungsberichte, 102 (II. a), S. 530, 1893.

daraus ist

$$w + x = \pm \sqrt{w^2 + wr}$$

und

$$x = -w + \sqrt{w^2 + wr}.$$

Man ersieht daraus die Empfindlichkeit der Methode, da der Compensationswiderstand r unter der Quadratwurzel vorkommt. Derselbe bestand aus einem Rheochord von verschwindend kleinen Temperaturcoëfficienten.

Die Ladung des Condensators geschah, so wie in meiner früher citirten Arbeit, mittelst des durch die Spule eines Ruhmkorff'schen Inductoriums auf höhere Spannung transformirten Wechselstromes des Elektricitätswerkes Innsbruck. Ein Ende des secundären Stromkreises und eine Platte des Condensators waren zur Erde abgeleitet. Störungen wurden weder durch die Ladungen des Condensators, noch durch das magnetische Feld des Transformators verursacht, so dass ich auch, während beide in Thätigkeit waren, messen konnte. Der Condensator wurde demnach in der Secunde 80mal entgegengesetzt geladen und entladen; und obwohl ich dies durch 10 Minuten geschehen liess und bis zu einer am absoluten Schutzring-Elektrometer gemessenen Spannung der einzelnen Ladungen von rund 1700 Volt ging, zeigte das Galvanometer dennoch keinen Ausschlag; das heisst, es trat keine Erwärmung im Condensator auf.

Ich ging nun daran, einen Condensator aus Paraffinpapier in ähnlicher Weise zu untersuchen, da bei solchen schon wiederholt eine starke Erwärmung unzweifelhaft constatirt worden ist. Um das mühsame Abmessen und Spannen der Platindrähte nicht nochmals durchführen zu müssen, legte ich auf beide Seiten meiner Paraffinplatte ein Blatt Papier und darauf wieder die Condensatorplatten. Indem ich nun dieselben erwärmte, schmolz das Paraffin von beiden Seiten gleichmässig ab, und schliesslich hatte ich die Platindrähte in unveränderter Lage zwischen den beiden Papieren, welch letztere sich natürlich in gut durchgetränkte Paraffinpapiere verwandelt hatten. Da schon nach dem ersten Versuche ein Funke diese beiden Paraffinpapiere durchbrochen hatte, war ich genöthigt, noch je ein Paraffinpapier auf jede Seite hinzuzufügen, so dass das Dielek-

tricum aus einer vierfachen Schichte Paraffinpapier bestand, in deren Mitte sich der Bolometerdraht befand.

Damit machte ich nun zwei verschiedenartige Messungen, welche entscheiden sollten, ob die in ihm auftretende Wärme Joule'sche Wärme sei oder nicht. Einmal legte ich meine Condensatorplatten auf die vierfache Schichte von Paraffinpapier, das anderemal nahm ich zwei Blätter Stanniol und presste sie gut an das Paraffinpapier an, so dass sie ohne Falten hafteten. Ich hatte also im ersten Falle infolge der Unebenheit des Paraffinpapieres Berührung blos an einigen Stellen, im zweiten Falle jedoch auf der ganzen Fläche. Die Capacität unterschied sich in beiden Fällen kaum merklich. Hat nun die Erwärmung ihre Ursache in dielektrischer Polarisation, so konnte kein wesentlicher Unterschied zwischen beiden Fällen auftreten. Ist die Wärme hingegen Joule'sche Wärme, so musste sie im zweiten Falle beträchtlich grösser sein als im ersten, weil auch die Stromstärke, die den Condensator passirt, grösser ist.

Es war nun für die oben angegebene Versuchsdauer und Spannung im ersten Falle der zugeschaltete Widerstand $r = 0\cdot91\,\Omega$ (als Mittel aus mehreren Versuchen); daraus $x = 0\cdot46\,\Omega$. Nun ist für eine Temperaturerhöhung des Condensators um 1° C. $x = 1\cdot52\,\Omega$, welchen Werth ich praktisch mit Hilfe von Wasserbädern ermittelt habe. Demnach beträgt die im ersten Versuche auftretende Temperaturerhöhung 0·30°.

Für den zweiten Versuch war $r = 3\cdot31\,\Omega$, daraus $x = 1\cdot66\,\Omega$, was einer Temperaturerhöhung des Condensators um 1·09 entspricht. Die im zweiten Falle auftretende Wärmemenge ist also nahezu viermal grösser als im ersten Falle.

Ist die vorhin gegebene Erklärung richtig, so muss die auf solche Weise gemessene Erwärmung wenigstens in der Grössenordnung mit der aus dem Joule'schen Gesetze berechneten übereinstimmen. Ich bestimmte daher die specifische Wärme des Paraffinpapieres nach der Mischungsmethode und erhielt dafür 0·4. Dann ergibt sich für die im Condensator entwickelte Wärme $2\cdot08\,g$ Cal. Der Widerstand des Condensators wurde mittelst eines Batteriestromes und eines Quadranten-Elektrometers durch Vergleichung des Potentialgefälles mit dem in einem Graphitwiderstande von $10^6\,\Omega$ ermittelt und ergab sich

gleich 145.10[6] Ω. Daraus berechnet sich die Joule'sche Wärme[1] zu 1·5 *g* Cal. Man sieht, dass die beiden Werthe wenigstens in der Grössenordnung übereinstimmen. Eine bessere Übereinstimmung ist nicht zu erwarten, da die specifische Wärme des Paraffinpapieres und der Widerstand des Condensators nur beiläufige Werthe sind.

Es deuten übrigens auch die Messungen von Steinmetz[2] und Kleiner[2] darauf hin, dass die im Condensator auftretende Wärme Joule'sche Wärme sei. Beide fanden nämlich für unvollkommene Dielektrica den Verlust an elektrischer Energie proportional dem Quadrate der Spannung, letzterer ausserdem verkehrt proportional der Dicke der dielektrischen Platte. Das ist also das Joule'sche Gesetz. Allerdings bemerkt Steinmetz, dass die von ihm angegebenen Werthe bereits um die durch den Leitungswiderstand verlorene Energie vermindert sind. Die Werthe, die er dann für den Energieverlust durch »dielektrische Hysteresis« erhält, sind so klein (58600 bis 1900.000 Erg, das sind etwa 0·001 bis 0·05 *g* Cal.), dass dieselben gewiss unter die Fehlergrenze fallen.

Endlich kommt für die Erwärmung, die in der Regel bei den in der Praxis verwendeten Paraffinpapier-Condensatoren auftritt, noch eine mechanische Wirkung in Betracht. Dieselben lassen immer ein mehr oder minder starkes summendes Geräusch hören; auch kann immer ein Vibriren der einzelnen Blätter constatirt werden, was aus der Anziehung zwischen beiden Belegungen leicht zu erklären ist. Es tritt demnach auch eine mechanische Energie auf, welche sich zum Theile in Wärme, zum Theile in Schall umsetzt.

Während der Durchführung dieser Untersuchung sind noch einige weitere Arbeiten zu diesem Gegenstande erschienen.

[1] Das Joule'sche Gesetz lautet $A = 0 \cdot 24 \frac{E^2}{W} t$, wenn t die Zeit in Secunden bedeutet. Für E^2 ist in diesem Falle der Mittelwerth aus der Summe aller E^2 zu setzen. Diesen Werth erhält man direct durch das absolute Elektrometer; in diesem Falle gleich 1,461.000. Die früher angegebene Zahl für die Spannung des Wechselstromes bedeutet die maximale Spannung E_{max}. Zwischen dem Mittel aus der Summe der E^2 und dem E_{max} besteht bekanntlich die Beziehung: $E^2 = \frac{1}{2} E^2_{max}$.

[2] L. c.

Arnò[1] zeigte, dass ein Hohlcylinder aus einem Dielektricum in einem rotirenden elektrostatischen Felde ebenfalls in Rotation geräth und erklärt dies aus einer im Dielektricum auftretenden dielektrischen Hysteresis. Abgesehen davon, dass die diesen Versuchen unterzogenen Cylinder alle aus unvollkommenen dielektrischen Stoffen bestanden und demnach jene Erscheinung aus der Rückstandsbildung erklärt werden kann, haben Graetz und Fomm[2] nachgewiesen, dass es eine Eigenschaft vollkommen homogener und isotroper dielektrischer Körper ist, im homogenen elektrostatischen Felde Drehungsbewegungen auszuführen.

Hess[3] ist durch eine theoretische Betrachtung zu dem Resultate gekommen, dass, wenn man das Dielektricum mit leitenden Theilchen vermischt betrachtet, ein Verlust an elektrischer Energie entsprechend dem Joule'schen Gesetze auftreten muss.

Endlich hat Janet[4] den Verlust elektrischer Energie in einem Dielektricum bei schnellen elektrischen Schwingungen bestimmt. Er geht dabei von dem Grundsatze aus, »dass bei gänzlicher Abwesenheit der Erscheinungen der Hysteresis oder Viscosität der Quotient $\frac{Q}{V}$ constant und gleich der Capacität des Condensators sein müsse.« Dieser Grundsatz ist unrichtig, da die Erscheinungen der Rückstandsbildung die Inconstanz dieses Quotienten hinlänglich begründen. Die Erscheinungen der Rückstandsbildung ohneweiters als dielektrische Hysteresis aufzufassen, geht auch nicht an, denn unter Hysteresis versteht man einen wirklichen Energieverlust durch Umsetzung in Wärme. Die Rückstandsbildung jedoch bedeutet keinen derartigen Verlust, da die für den Augenblick verschwundene elektrische Energie allmälig von selbst wieder erscheint. Ich glaube demnach, dass eine dielektrische Hysteresis nicht existirt

---

[1] Arnò, Atti della R. Accad. dei Lincei, 1892, I, 2, S. 248; 1893, II, 1, S. 341.

[2] Graetz und Fomm, Sitzungsber. der mathem.-physik. Classe der k. bayer. Akad. der Wiss., 23, S. 275, 1893.

[3] Hess, Lumière électr., 46, S. 401 und 507, 1892.

[4] Janet, Compt. rend., 116, S. 373, 1893.

Zur Theorie der Herstellung hochgespannter Ströme von hoher Frequenz mittelst oscillatorischer Condensatorentladungen

von

Dr. **Josef Tuma.**

Aus dem physikalischen Cabinete der k. k. Universität Wien.

(Mit 2 Textfiguren.)

In der Entwicklung der Lehre von den oscillatorischen Entladungen haben wir drei Stufen zu unterscheiden. Zuerst waren es Feddersen und W. Thomson, welche diese Erscheinung studirten. Hierauf verbesserte Herz die Methode der Herstellung solcher rascher Wechselströme, so dass dieselben zum Studium anderer höchst interessanter Erscheinungen verwendet werden konnten. Schliesslich hat Tesla Methoden erfunden, rasche elektrische Oscillationen herzustellen, dieselben zu transformiren und für viele Zwecke verwendbar zu machen, für die den mittelst der Herz'schen Anordnung gewonnenen Strömen die nöthige Energie mangelt.

Man erzeugt die elektrischen Oscillationen nach zwei Methoden. Die eine besteht darin, dass man mit eigens zu diesem Zwecke construirten Wechselstrommaschinen direct Ströme von hoher Frequenz herstellt, die zweite, weniger ökonomische, aber für Studienzwecke schon wegen der Billigkeit der zur Verwendung gelangenden Apparate geeignetere, darin, dass man mit Hilfe einer Stromquelle von hoher Spannung einen Condensator ladet und die bei der Entladung zu Stande kommenden elektrischen Oscillationen entweder direct zur Anstellung der verschiedenen Versuche verwendet oder dieselben

noch in einer Inductionsspule mit sehr wenig Windungen auf ein beliebiges Potential transformirt.

Wir wollen uns im Folgenden nur mit der zweiten der angeführten Methoden beschäftigen und unseren Berechnungen die usuelle, in der Schaltungsskizze Fig. 1 dargestellte Anordnung zu Grunde legen.

In den Leitungen *A* und *B* werde ein elektrischer Strom (ob Gleich- oder Wechselstrom ist gleichgiltig) von etwa 10.000 V. zugeleitet. Dieser verzweige sich einerseits bei *a*,

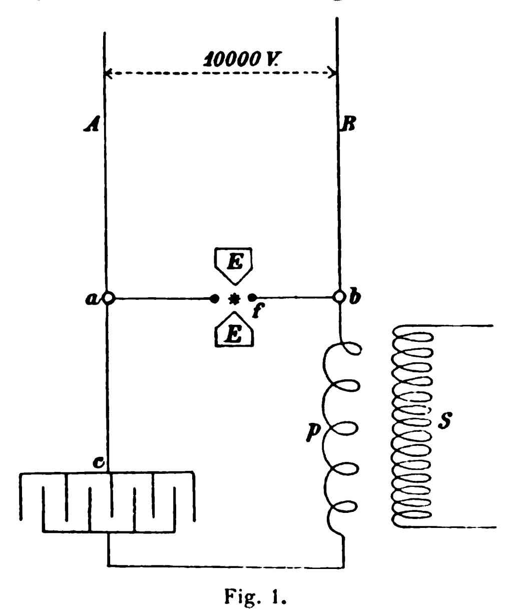


Fig. 1.

und es führe die Leitung von hier zu einer Capacität *c* und zu einer Funkenstrecke in einem magnetischen Felde *f*. Anderseits führe eine Leitung vom Verzweigungspunkte *b* ebenfalls nach *f* und durch die aus etwa 20 Windungen bestehende primäre Spule *p* zur zweiten Belegung des Condensators *c*. Das magnetische Feld, in welchem sich die Funkenstrecke *f* befindet, werde durch den Elektromagneten *E* hergestellt. *s* ist die secundäre Spule (circa 300 Windungen), welche die Spannung der Oscillationen transformirt.

Lassen wir in die Leitungen *A* und *B* den elektrischen Strom von 10.000 V. Spannung eintreten, so wird zunächst

durch p hindurch der Condensator geladen. Ist das genügende Potential hergestellt, so wird sich in f ein Lichtbogen bilden und der oscillatorischen Entladung des Condensators den Durchgang durch die Funkenstrecke ermöglichen.

Damit die Entladung aber überhaupt stattfinden kann, muss das Potential im Punkte b sinken, sobald sich der Lichtbogen gebildet hat. Daher muss die Selbstinduction der Stromquelle, welche den 10.000 Volt betragenden Strom liefert, gross sein.

Wir haben also in f einen Lichtbogen, der die Möglichkeit der Oscillationen bedingt, welche letzteren natürlich eine mit der Zeit abnehmende Amplitude besitzen. Dauert der Lichtbogen länger als die Oscillationen, so geht Strom für unser System verloren. Es ist daher nöthig denselben zu unterbrechen, bevor die Amplitude der Oscillationen merklich abgenommen hat. Dies besorgt das magnetische Feld. Dasselbe zwingt den Lichtbogen sich zu verlängern und zerreisst ihn endlich. Da nun die Dauer der Oscillationen sehr kurz ist, wird man das Magnetfeld möglichst kräftig machen, um die zum Zerreissen des Lichtbogens erforderliche Zeit nach Thunlichkeit abzukürzen und einen ökonomischen Betrieb zu erzielen.

Bei meinen Versuchen verwendete ich wiederholt die in Fig. 1 dargestellte Schaltungsweise. Der zur Verfügung stehende Strom ist von der »Internationalen Elektricitätsgesellschaft« gelieferter Wechselstrom von 100 Volt Spannung, welcher vor dem Gebrauche auf circa 10.000 Volt transformirt wird. Ich bediene mich bei meinen Versuchen theils einer von Ducretet & Lejeune gelieferten Zusammenstellung von Apparaten, die mir Herr Hofrath Prof. V. v. Lang zur Verfügung zu stellen so freundlich war und wofür ich hiemit meinen wärmsten Dank zum Ausdrucke bringe, theils von mir selbst hergestellter Apparate. Zur Transformation des Stromes benützte ich oft zwei Transformatoren, die mir die Firma Siemens & Halske in Wien leihweise überliess und der ich ebenfalls bestens danke.

Um mich bei Anstellung meiner Versuche über die Wirkungsweise der getroffenen Anordnung zu orientiren, stellte ich verschiedene Berechnungen an und lasse diejenigen, die mir die interessantesten Resultate zu liefern scheinen, folgen. In denselben bedeuten:

J die Stromstärke im Generator und den Leitungen A und B.
J_1 die Stromstärke in der Funkenstrecke f,
i_1 die Stromstärke in den primären Windungen p,
i_2 die Stromstärke in der Secundärspule s,
E die elektromotorische Kraft des Generators,
v das Potential in b,
V das Potential in c,
W_1 den Widerstand des Generators,
W den Widerstand der Funkenstrecke f,
w_1 den Widerstand in der Primärspule p,
w_2 den Widerstand in der Secundärspule s,
L_1 die Selbstinduction im Generator,
l_1 die Selbstinduction der Primärspule p,
l_2 die Selbstinduction der Secundärspule s,
m die gegenseitige Induction zwischen Primär- und Secundärspule.

Die Gleichungen des Systems sind dann.

$$JW_1 = E - v - L_1 \frac{\partial J}{\partial t} \tag{1}$$

$$J_1 W = v \tag{2}$$

$$i_1 w_1 = V - v - l_1 \frac{\partial i_1}{\partial t} - m \frac{\partial i_2}{\partial t} \tag{3}$$

$$C \frac{\partial V}{\partial t} = -i_1 \tag{4}$$

$$J_1 = J + i_1 \tag{5}$$

$$i_2 w_2 = -l_2 \frac{\partial i_2}{\partial t} - m \frac{\partial i_1}{\partial t} \tag{6}$$

Für alle folgenden Berechnungen nehmen wir L_1 sehr gross an, was aus Eingangs erwähnten Gründen nothwendig ist. Daraus folgt

$$J = \text{Constans.} \tag{7}$$

I.

Die erste Frage, welche wir uns vorlegen wollen, sei:

Wodurch ist die Änderung der Energieabgabe im primären Stromkreise bedingt bei Änderung der Energieentnahme von der secundären Spule?

Wir wollen voraussetzen, dass der Lichtbogen in f nur so lange bestehen bleibe, dass die Abnahme der Amplitude der Oscillationen unmerklich ist. Es ist dann zunächst die Frage zu beantworten: wie gross ist die Stromstärke J während der Dauer der Oscillationen?

Wenn wir, wie es Eingangs der Abhandlung als nothwendig bezeichnet wurde, L_1 als sehr gross voraussetzen, so wird das Potential in b nur von den Oscillationen abhängen, und wir können dasselbe $v = E \cos \alpha t$ setzen. Man sieht unmittelbar, dass dann die Stromstärke J gleich Null sein muss.

Es wird also die Energieabgabe vom Generator aus lediglich auf die zur Ladung des Condensators nöthige beschränkt sein.

Führen wir dieses Ergebniss in Gleichung (5) ein, so folgt $J_1 = i_1$ und aus Gleichung (2) $i_1 W = v$, wodurch die Gleichung (3) die Form erhält:

$$i_1 \Omega + l_1 \frac{\partial i_1}{\partial t} + m \frac{\partial i_2}{\partial t} = V \qquad \Omega = W + w_1.$$

Wenn wir von der secundären Spule Strom abnehmen, wird die Intensität in der primären bei gleichbleibender Klemmenspannung grösser sein. Wir wollen uns daher gestatten, dies im weiteren Verlaufe unserer Betrachtung als einer Verminderung der Selbstinduction in der primären Spule gleichwerthig anzusehen. Demnach vereinfacht sich vorige Gleichung noch weiters, und wir erhalten

$$i_1 \Omega + l_1 \frac{\partial i_1}{\partial t} = V,$$

in welcher l_1 eine unabhängige Variabele bedeutet. Diese Gleichung und Gleichung (4) sind identisch mit jenen des Thomson'schen Entladungsproblems, und ihre Lösung hat die bekannte Form:

$$i_1 = A\, e^{-\frac{\Omega}{2 l_1} t} \sin \alpha t.$$

Daraus sieht man aber, dass die Amplitude der Oscillationen umso rascher abnimmt, je kleiner die Selbstinduction ist.

Es muss also bei belastetem, secundärem Stromkreise der Generator die zur Ladung der Capacität nöthige Energie öfter abgeben als bei unbelastetem.

Demnach ist die Quantität der in der Zeiteinheit zu liefernden Energie bedingt durch das logarithmische Decrement der Schwingungen, welches sich mit der Stromabgabe des Secundärkreises ändert.

II.

Schreiben wir wieder die Gleichung (3) in der Form:

$$\Omega i_1 = V - l_1 \frac{\partial i_1}{\partial t} - m \frac{\partial i_2}{\partial t}$$

J als sehr klein vernachlässigt.

Substituiren wir ferner in diese Gleichung und in Gleichung (6) den Werth von i_1 nach Gleichung (4), so erhalten wir:

$$V + \Omega C \frac{\partial V}{\partial t} + l_1 C \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - m \frac{\partial i_2}{\partial t} = 0 \tag{8}$$

und

$$i_2 w_2 + l_2 \frac{\partial i_2}{\partial t} - mC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0. \tag{9}$$

Differentiirt man die erste dieser beiden Gleichungen zweimal nach t und substituirt $\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^3 V}{\partial t^3}$, $\frac{\partial^4 V}{\partial t^4}$ aus der zweiten Gleichung, so erhält man eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung. Die Lösung derselben hat die Form $i_2 = A e^{\alpha t}$. Durch Substitution dieses Werthes erhält man eine Bestimmungsgleichung dritten Grades für α. Von den drei Wurzeln α_1, α_2, α_3 müssen, wenn überhaupt Oscillationen stattfinden, eine reell und zwei complex sein. Wir erhalten also die Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$\frac{l_1 l_2 - m^2}{m} \frac{\partial^3 i_2}{\partial t^3} + \frac{\Omega l_2 + w_2 l_1}{m} \frac{\partial^2 i_2}{\partial t^2} + \frac{C \Omega w_2 + l_2}{mC} \frac{\partial i_2}{\partial t} + \frac{w_2}{mC} i_2 = 0, \tag{9}$$

ferner die Bestimmungsgleichung

$$\frac{l_1 l_2 - m^2}{m} \alpha^3 + \frac{\Omega l_2 + w_2 l_1}{m} \alpha^2 + \frac{C \Omega w_2 + l_2}{mC} \alpha + \frac{w_2}{mC} = 0. \tag{10}$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung (9) wird also die Form haben:

$$i_2 = Ae^{\alpha_1 t} + e^{qt}(Be^{rit} + De^{-rit}),$$

wenn wir $\alpha_2 = q + ri$ und $\alpha_3 = q - ri$ setzen. Da $\frac{n'_2}{C(l_1 l_2 - m^2)} =$ $= -\alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3$ eine positive Grösse ist (weil $l_1 l_2 > m^2$), ist α_1 nothwendig negativ.

Es liegt in der Natur der Sache, dass q ebenfalls negativ ist. Demnach können wir, wenn wir statt $\alpha_1 \ldots -\beta$ und statt

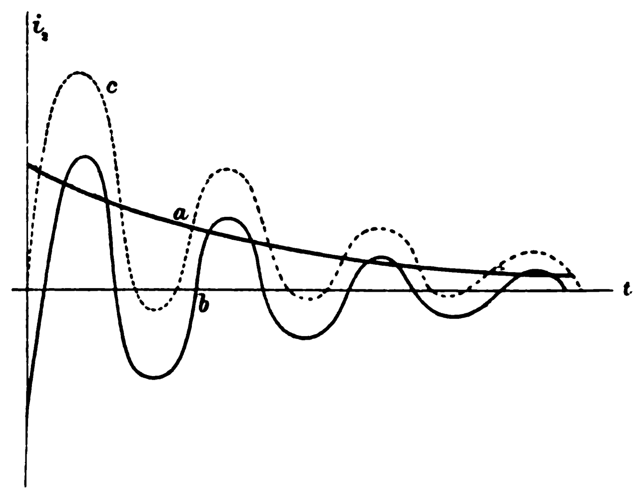


Fig. 2.

$q \ldots -q$ schreiben und die imaginären e-Potenzen durch trigonometrische Functionen ausdrücken, folgende Form für i_2 ableiten

$$i_2 = Ae^{-\beta t} + e^{-qt}(B \sin rt + D \cos rt). \qquad (10)$$

Der aus der secundären Spule erhaltene Strom wird also in der Übereinanderlagerung eines nach einer e-Potenz abnehmenden Gleichstromes und eines Wechselstromes, dessen Amplitude ebenfalls nach einer e-Potenz abnimmt, bestehen.

Fig. 2 veranschaulicht einen solchen Vorgang durch Curven. Als Abscissen sind die Zeiten, als Ordinaten die Werthe von i_2 aufgetragen.

Die mit a bezeichnete Curve stellt $A_1 e^{-\vartheta t}$, die mit b bezeichnete Curve stellt die Oscillationen dar. Die Curve c ist die wirklich herrschende Stromstärke.

Hier muss bemerkt werden, dass der Werth $l_1 l_2 - m^2$ wesentlich von der Form der Spule ps (Fig. 1) abhängt. Wäre es möglich, dieselbe so zu machen, dass die von einer primären Windung eingeschlossene Fläche gleich der von einer secundären eingeschlossenen wäre, dann wäre bekanntlich $l_1 l_2 - m^2 =$ $= 0$. Die Gleichung (9) wäre dann von der zweiten Ordnung, Gleichung (10) vom zweiten Grade, und die Oscillationen würden genau das Schwingungsgesetz eines Pendels im widerstehenden Mittel befolgen. Da man aber aus Gründen der Isolation einen bedeutenden Zwischenraum zwischen p und s lassen muss, ist diese Bedingung nicht annähernd zu erfüllen.

Wenn also der bei Anstellung der Versuche benützte primäre Strom Gleichstrom ist, wird sich immer zeigen, dass dann, wenn im secundären Stromkreise eine so grosse Funkenstrecke eingeschaltet ist, dass nur mehr Büschelentladungen stattfinden, die Büschel der einen Elektrode stärker sind als die der anderen. Gewöhnlich verwendet man aber zu diesen Versuchen Wechselstrom, und doch wurde diese Beobachtung auch da von mir und anderen zuweilen gemacht. Es gilt aber auch für diesen Fall die gegebene Erklärung. Das von einer Wechselstrommaschine gelieferte Potential hat, namentlich, wenn die Spulen Eisen enthalten, nicht nach beiden Richtungen den gleichen Werth. Diese Unregelmässigkeit macht sich noch mehr geltend, wenn man den ursprünglichen Werth des Potentials auf das 100fache erhöht. Macht man dann die Funkenstrecke f so gross, dass man eben noch disruptive Entladungen erhält, so werden dieselben nur nach einer Richtung erfolgen, daher die Ladung der Capacität c bei Beginn jeder Serie von Oscillationen dasselbe Vorzeichen hat, wodurch die secundäre Entladung in ihrem Beginne, also wenn sie am intensivsten ist, immer dieselbe Richtung erhält.

Anhang.

Ich will hier noch in Kürze eine brillante Lichterscheinung erwähnen, die sich mit Tesla'schen Strömen hervorbringen

lässt. Man bereitet sich eine Gypsplatte vor, in welche man zwei Drähte so befestigt, dass sie die Platte quer durchsetzen, auf der vorderen Seite nur wenig vorschauen, rückwärts aber lang genug sind, um an dieselben die Enden der secundären Spule *s* (Fig. 1) anschliessen zu können. Die Drähte müssen so weit von einander entfernt sein, dass kein Funken zwischen ihnen überspringt. Man befestigt dann noch an dem einen Pole der Spule einen biegsamen Draht, den man mittelst einer isolirenden Handhabe halten kann und berührt mit diesem Drahte die Gypsplatte nahe bei dem mit dem anderen Ende der Spule verbundenen Drahtstücke. Es bildet sich dann ein Funkenstrom auf der Oberfläche des Gypses. Führt man nun den Draht langsam über die Platte hin, so folgt der Funkenstrom den Bewegungen des Drahtes, und man kann so auf die Platte Buchstaben, deren Form dazu geeignet ist, in flammender Schrift schreiben.

Erhalten die Curven, welche man so auf die Platte zeichnet, einen zu kleinen Krümmungsradius, so beginnt sich an dieser Stelle der Funkenstrom zu strecken, wobei derselbe vor sich her eine Staubwolke bildet.

Die Erklärung dieser Erscheinung ist wohl sehr naheliegend. Es erwärmt sich unter Einwirkung des Funkenstromes die Gypsplatte, und indem jener nunmehr die warmen und besser leitenden Stellen bevorzugt, verfolgt er immer die eingeschlagene Bahn.



Über einige particuläre Lösungen der Differentialgleichung für die Wärmeleitung in einem Kreiscylinder und deren Anwendung

von

E. Kobald in Leoben.

Denkt man sich in der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \qquad 1)$$

für w gesetzt:

$$w = u.v,$$

wobei v nur eine Function von y, z und t sein soll, dagegen u nur von x und t abhänge, so ergibt sich:

$$-\frac{\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{u} = \frac{\frac{\partial v}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)}{v}.$$

Indem beide Seiten dieser Gleichung nur Functionen von t allein sein können, setze man:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + vf(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - uf(t).$$

Macht man aber die Substitutionen:

$$v = v'.e^{\int f(t)\,dt}$$

$$u = u'.e^{-\int f(t)\,dt},$$

so ergeben sich die einfacheren Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u'}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} \\ \frac{\partial v'}{\partial t} &= a^2 \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2}\right)\end{aligned}\right\} \qquad 1a)$$

Nachdem so die vorgelegte Gleichung 1) in die zwei Gleichungen 1 *a*) gespalten ist, denke man sich dieselbe auf einen nach beiden Seiten unbegrenzten Kreiscylinder, bei welchem rings um die Axe Alles symmetrisch ist, bezogen. Durch Einführung von Cylindercoordinaten nimmt dann die zweite der Gleichungen 1 *a*) mit Weglassung der Accente die Form an:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r}\right). \qquad 2)$$

Eine particuläre Lösung dieser Gleichung ist:

$$v = e^{-a^2 q^2 t} . J(qr), \qquad 3)$$

wo q eine beliebige Constante und $J(qr)$ die Bessel'sche Function 0ter Ordnung, erster Art bedeuten möge. In bekannter Weise erhält man aus 3) die weitere particuläre Lösung:

$$v = \int_0^{\infty} e^{-a^2 t q^2} J(qr)\, dr.$$

Sieht man von einem constanten Factor ab, so kann gesetzt werden:

$$J(qr) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(qr \cos\omega)\, d\omega.$$

Setzt man dies in den Ausdruck für v ein, so erhält man hiefür:

$$v = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^{\infty} e^{-a^2 t . q^2} \cos(qr \cos\omega)\, dq.$$

Nun ist aber:

$$\int_0^\infty e^{-a^2 t \cdot q^2} \cos(qr\cos\omega)dq = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot e^{-\frac{r^2\cos^2\omega}{4a^2t}}.$$

Mit Weglassung eines constanten Factors ergibt sich also:

$$v = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{r^2\cos^2\omega}{4a^2t}} . d\omega.$$

Führt man statt ω eine neue Variable φ mittelst der Substitution $\omega = \frac{1}{2}\varphi$ ein, so wird mit Unterdrückung des Factors $\frac{1}{2}$:

$$v = \frac{e^{-\frac{r^2}{8a^2t}}}{\sqrt{t}} \int_0^\pi e^{-\frac{r^2}{8a^2t}.\cos\varphi} d\varphi.$$

Das in dem Ausdrucke auf der rechten Seite dieser Gleichung auftretende Integral ist aber eine Cylinderfunction 0ter Ordnung; man kann daher auch setzen:

$$v = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot e^{-\frac{r^2}{8a^2t}} . J\left(\frac{r^2}{8a^2t}i\right). \qquad 4)$$

Um das so gewonnene Resultat zu verallgemeinern, transformire man die Gleichung 2) dadurch, dass man an Stelle der unabhängigen Variablen t und r zwei andere, ρ und τ, welche durch die Gleichungen

$$\tau = l(t)$$
$$\rho = \frac{r^2}{4a^2t}$$

definiert sind, einführe. Man erhält dann:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{r}{2a^2t} \cdot \frac{\partial v}{\partial \rho}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{1}{a^2t}\left\{\rho\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{2}.\frac{\partial v}{\partial \rho}\right\}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{t}\left\{\frac{\partial v}{\partial \tau} - \rho\frac{\partial v}{\partial \rho}\right\}.$$

Die transformirte Gleichung ist also:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + (1+\rho) \frac{\partial v}{\partial \rho} \cdot \tag{5}$$

Sucht man derselben durch einen Ansatz von der Form:

$$v = e^{m\tau} . u,$$

wo u eine Function des Argumentes ρ allein ist, zu genügen, so hat man zur Bestimmung von u die Gleichung:

$$\rho \frac{d^2 u}{d\rho^2} + (1+\rho) \frac{du}{d\rho} - mu = 0. \tag{5a}$$

Jenes particuläre Integral der Gleichung $5a$), welches für $\rho = 0$ endlich bleibt, lässt sich in Reihenform leicht darstellen; man erhält nämlich:

$$u_\rho = 1 + \frac{m_1}{1!} \rho + \frac{m_2}{2!} \rho^2 + \frac{m_3}{3!} \rho^3 + \ldots, \tag{6}$$

wenn mit $m_1, m_2, \ldots$ die Binomialcoëfficienten bezeichnet werden Eine Lösung der Gleichung 5) ist also:

$$v = t^m . u \left(\frac{r^2}{4a^2 t} \right) . \tag{7}$$

Das zweite particuläre Integral von $5a$) lässt sich in bekannter Weise durch ein bestimmtes Integral darstellen. Man erhält nämlich

$$u = \int e^{t\rho} . \frac{(t+1)^m}{t^{m+1}} dt,$$

wobei die Grenzen aus der Bedingung

$$\left[e^{t\rho} . \frac{(t+1)^{m+1}}{t^m} \right] = 0$$

zu bestimmen sind. So lange $(m+1) > 0$ ist, genügt man derselben für einen positiven Werth von ρ, wenn $-\infty$ und -1 als Grenzen gewählt werden. Man erhält also:

$$u = \int_1^{\infty} e^{-\rho t} . \frac{(t-1)^m dt}{t^{m+1}} . \tag{8a}$$

Wenn $0 > m > -1$ ist, wird die obige Bedingung auch erfüllt, wenn als Grenzen die Zahlen -1 und 0 genommen werden. Man erhält dann, abgesehen von einer Constanten, für die Lösung 6) auch den Ausdruck:

$$u = \int_0^1 e^{-\rho t} \frac{(1-t)^m}{t^{m+1}} dt. \tag{8b}$$

Für $m = -\frac{1}{2}$ erhält man als Lösungen die beiden Integrale:

$$\int_1^\infty e^{-\rho t} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - t}} = e^{-\frac{1}{2}\rho} \int_1^\infty e^{-\frac{1}{2}\rho t} \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$$

und

$$\int_0^1 e^{-\rho t} \cdot \frac{dt}{\sqrt{t-t^2}} = e^{-\frac{1}{2}\rho} \int_{-1}^{+1} e^{-\frac{1}{2}\rho t} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Die auf den rechten Seiten dieser Gleichungen auftretenden Integrale sind aber nichts Anderes als Cylinderfunctionen. Man erhält also als Verallgemeinerung der Gleichung 4) die Lösung:

$$v = \frac{e^{-\frac{r^2}{8a^2t}}}{\sqrt{t}} \cdot \left\{ A J\left(\frac{r^2}{8a^2t} i\right) + B Y\left(\frac{r^2}{8a^2t} i\right) \right\}, \tag{9}$$

wo A und B willkürliche Constanten bedeuten. Zu demselben Resultate kommt man auch durch Transformation der Gleichung 5a), indem man setzt:

$$u = e^{m\rho} . w;$$

dadurch wird:

$$\frac{d^2 w}{d\rho^2} + \left(2m + 1 + \frac{1}{\rho}\right) \frac{dw}{d\rho} + m(m+1) w = 0. \tag{10}$$

Setzt man nunmehr $m = -\frac{1}{2}$, so erhält man die Differentialgleichung für die Cylinderfunctionen mit dem Argumente $\frac{1}{2}\rho$.

Für $m = -1$ ist $w = \text{Const.}$ eine Lösung der Gleichung 10). Dies ergibt für die vorgelegte Gleichung 2) das particuläre Integral

$$v = \frac{e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}}{t}. \tag{11}$$

Beachtet man, dass nach Gleichung 6) für $m = -1$

$$u = e^{-\rho}$$

ist, so kommt man zu dem gleichen Resultate wie in der Gleichung 11).

Es soll nun eine Lösung hergestellt werden, welche die Eigenschaft hat, dass für $t = 0$

$$v = f(r)$$

wird. Zu dem Zwecke multiplicire man die Gleichung 3) mit

$$qdq\,.\,f(\rho)J(q\rho)\rho d\rho$$

und integrire zuerst bezüglich ρ von 0 bis R, wo R den Radius des Cylinders bedeutet, und sodann bezüglich q von 0 bis ∞. Dann ist das gesuchte Integral

$$v = \int_0^\infty e^{-a^2tq^2}\,.\,J(qr)\,qdq \int_0^R f(\rho)\,J(q\rho)\rho d\rho. \tag{12}$$

Man denke sich nunmehr diese Gleichung auf den Verlauf einer elektrischen Störung innerhalb eines Querschnittes eines unendlich langen cylindrischen Drahtes angewendet. Durch die Gleichungen 1a) ist gezeigt, wie die Ausbreitung in der Richtung der Axe des Drahtes von jener in der Richtung des Radius getrennt dargestellt werden kann. Wenn die Störung von einer unendlich dünnen Schicht an der Oberfläche des Drahtes, deren Dicke mit ε bezeichnet werde, ausgeht, so hat die Function f nur für solche Werthe des Argumentes, welche von dem Werthe R nur um eine unbegrenzt kleine Grösse differiren, einen von Null verschiedenen Werth. Setzt man also:

$$\int_{R-\varepsilon}^R \rho f(\rho)d\rho = F,$$

so wird:

$$v = F\int_0^\infty e^{-a^2tq^2}\,.\,J(qr)\,J(qR)\,qdq.$$

Der Werth dieses Integrals kann aber wieder durch eine Cylinderfunction ausgedrückt werden; es ist nämlich:[1]

$$\int_0^\infty e^{-a^2tq^2}.J(qr)J(qR)qdq = \frac{1}{2a^2t}e^{-\frac{r^2+R^2}{4a^2t}}.J\left(\frac{rR}{2a^2t}i\right).$$

Demnach kann bei Weglassung constanter Factoren auch gesetzt werden:

$$v = \frac{1}{t}e^{-\frac{r^2+R^2}{4a^2t}}.J\left(\frac{rR}{2a^2t}i\right). \tag{13)}$$

Nun ist das Verhalten der Function $J(xi)$ für sehr grosse Werthe von x wie das der Function $\frac{e^x}{\sqrt{x}}$; für sehr kleine Werthe von t wird also:

$$v = \frac{1}{\sqrt{rt}}\cdot e^{-\frac{(R-r)^2}{4a^2t}}.$$

Daher ist für $t=0$ v überall gleich Null, ausgenommen an der Oberfläche des Drahtes, wie es auch der angenommenen Bedingung der Aufgabe entspricht. Für $t=\infty$ ist bei beliebigem Werthe von r die Grösse $v=0$.

Macht man die allerdings nicht realisirbare Annahme, dass die anfängliche Störung sich nur auf die Punkte der Axe des Drahtes erstreckt, so kommt man analog wie vorhin zu einer Lösung von der Form:

$$v = \int_0^\infty e^{-a^2tq^2}J(qr)qdq = \frac{1}{2a^2t}\cdot e^{-\frac{r^2}{4a^2t}};$$ [2]

diese ist identisch mit der in Gleichung 11) gegebenen.

---

[1] Man vergl. Sonine, Math. Annalen, Bd. 16, S. 40.

[2] A. a. O. S. 35.



Luftbewegungen in einer rotirenden Sphäroidschale

(III. Theil)

von

Max Margules.

(Mit 2 Tafeln.)

In den zwei vorhergehenden Theilen dieser Abhandlung wurden die freien Bewegungen der Luft in einer rotirenden Niveauschale von constanter Temperatur untersucht; es liessen sich nicht nur die Bewegungen in reibungsloser Luft, soweit zu ihrer Behandlung die linearen Glieder der aërodynamischen Gleichungen ausreichen, vollständig classificiren, die allgemeinen Entwicklungen durchführen und an Beispielen erläutern, sondern man konnte auch die Reibung in Rechnung ziehen, wenn man sich mit einer Flächenreibung begnügen wollte.

Die bei diesem Anlass gewonnene Erfahrung lud dazu ein, den Einfluss der Reibung auf Wellen zu untersuchen, welche durch Temperaturschwingungen oder durch periodische Kräfte entstehen. Das Problem der erzwungenen Wellen hat eine Beziehung zu der Erscheinung der täglichen Barometerschwankung und es schien mir nützlich, die Rechnungen, welche in einer Abhandlung: »Über die Schwingungen periodisch erwärmter Luft«[1] nur für reibungslose Luftbewegungen durchgeführt waren, ausführlicher zu behandeln. Die Wiederholung mancher dort angeführten Überlegungen und Rechnungen lässt sich dabei nicht vermeiden.

---

[1] Sitzungsber., Bd. XCIX, 1890, im Folgenden als »Abh. 1890« bezeichnet.

Der auf den Sonnentag bezogene mittlere Gang des Luftdrucks in einem Orte A wird, wenn man die wahre Zeit als Abscisse, die Abweichung des Druckes vom Mittelwerthe als Ordinate aufträgt, durch eine unregelmässige Curve dargestellt. Zerlegt man diese in mehrere Sinuscurven, welche den Perioden von 24, 12, 8... Stunden zugehören, so haben die erste und die zweite beträchtliche Amplituden (in continentalen tropischen Orten von der Grössenordnung $^1/_{760}$ des normalen Druckes), während die dritte und die folgenden ziemlich unbedeutende, vorläufig ausser Acht zu lassende Glieder sind. Für den Ort A kann man den mittleren täglichen Gang des Luftdruckes an irgend einem Tage des Jahres beinahe ausreichend darstellen durch

$$C_1 \sin(\nu\vartheta+\delta_1)+C_2 \sin(2\nu\vartheta+\delta_2).$$

C_1, C_2, δ_1, δ_2 sind Functionen der Jahreszeit, $2\pi/\nu$ der Tag, ϑ die wahre Ortszeit in A.

In einem nahen Orte B, welcher sich nur in der geographischen Länge von A unterscheidet, gilt dieselbe Formel für den täglichen Gang des Luftdruckes, wenn ϑ jetzt die Ortszeit in B bezeichnet.

Wäre die Erdoberfläche durchaus gleichartig, oder auch wenn ihre Beschaffenheit nur mit der geographischen Breite veränderlich wäre, so müsste das, was von den Orten A und B gesagt wurde, für alle Orte eines Parallelkreises gelten. Bezeichnet man nun mit t die wahre Zeit im Meridian Null, mit λ die östliche Länge, so wäre auf einer solchen idealen Erde der tägliche Gang des Luftdruckes dargestellt durch

$$E_1 \sin(\lambda+\nu t+\delta_1)+E_2 \sin(2\lambda+2\nu t+\delta_2),$$

zwei einfache, westwärts wandernde Wellen. E_1, E_2, δ_1, δ_2 wären Functionen der Breite, der Höhe und der Jahreszeit.

Als die wahrscheinliche Ursache der täglichen Barometerschwankung ist die tägliche Temperaturschwankung anzusehen. Für das erste Glied, die 24-stündige Schwingung, ist der Zusammenhang empirisch nachgewiesen. Für das zweite Glied, die halbtägige Schwingung, besteht nach dieser Richtung ein noch nicht überwundenes Hinderniss.

Aufgabe der Rechnung wäre es, zu untersuchen, welche Druckwellen auf einer Erde von der eben beschriebenen regelmässigen Beschaffenheit durch westwärts wandernde Temperaturwellen oder durch andere periodische Anregungen erzeugt werden. Aber auch dieses Problem bietet zu grosse Schwierigkeiten, wenn man es durch eine einzige, alle wesentlichen Umstände umfassende Rechnung lösen will. Es empfiehlt sich, die Aufgabe zu theilen und an mehreren einfachen Systemen den Einfluss einzelner Umstände zu untersuchen.

Der einfachste Fall, die Druckwelle, welche in einer Röhre durch eine fortschreitende Temperaturwelle erzeugt wird, soll als Einleitung dienen. Der kürzeren Rechnung wegen wird auch hier angenommen, die Reibung sei der Geschwindigkeit der Lufttheilchen proportional; die Röhre ist als ruhend vorausgesetzt, ihre Axe sei die x-Axe. T absolute Temperatur p Druck im Ruhezustande der Luft, RT das Verhältniss von Druck und Dichte, demnach $\sqrt{RT}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer freien, streng isothermen Welle. $T(1+\tau)$ die veränderliche Temperatur, $p(1+\varepsilon)$ der Druck der bewegten Luft.

Ist τ ein sehr kleiner Bruch, so wird im Allgemeinen auch ε ein solcher sein und auch die Geschwindigkeit u wird gering bleiben.

Die Bewegungsgleichungen und die Continuitätsgleichung sind,[1] wenn keine äusseren Kräfte auf die Luft wirken,

$$-RT\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + lu, \qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

l ist die Reibungsconstante.

Setzt man

$$\tau = A \sin(mx+nt),$$

so wird bei positiven Werthen von m und n eine nach der Richtung $-x$ fortschreitende Temperaturwelle angenommen.

$m = 2\pi/L$, $n = 2\pi/\Theta$, L die Wellenlänge, Θ die Schwingungsdauer, $L/\Theta = n/m = V$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle.

---

[1] Man vergl. die Abh. 1890.

Mit diesem Werthe von τ erhält man

$$s = KA \sin(mx+nt+\eta), \quad u = MA \sin(mx+nt+\zeta),$$

wobei die Constanten K, M, η, ζ aus den Bewegungsgleichungen zu bestimmen sind. (Am schnellsten findet man die Lösung, wenn man vorläufig $\tau = Ae^{i(mx+nt)}$, $s = Be^{i(mx+nt)}$, $u = Ce^{i(mx+nt)}$ setzt; B und C sind complexe Grössen.) Dazu kämen noch alle freien Bewegungen, welche in einer Röhre von constanter Temperatur möglich sind. Von diesen, welche in der Einleitung des zweiten Theiles angegeben wurden, ist hier abzusehen, da wir es nur mit der erzwungenen Welle zu thun haben.

Setzt man zur Abkürzung

$$a^2 = n^2 - RTm^2, \quad \sqrt{a^4+n^2l^2} = b^2, \quad \sqrt{n^2+l^2} = n',$$

so ist

$$K = \frac{nn'}{b^2}, \quad \cos\eta = \frac{n}{n'} \cdot \frac{a^2+l^2}{b^2}, \quad \sin\eta = \frac{l}{n'} \cdot \frac{RTm^2}{b^2}.$$

$$M = \frac{RTmn}{b^2}, \quad \cos\zeta = -\frac{a^2}{b^2}, \quad \sin\zeta = -\frac{nl}{b^2}.$$

Alle Wurzeln sind mit positivem Vorzeichen genommen.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass

$$n^2 - RTm^2 > 0, \tag{1}$$

oder $V > \sqrt{RT}$, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Temperaturwelle, also auch der erzwungenen Druckwelle, grösser ist, als diejenige einer freien isothermen Welle in reibungsloser Luft (welche 279·9 m/sec. beträgt bei $T = 273°$).

Für $l = 0$ ist $\eta = 0$ und $\zeta = \pi$. Mit wachsendem l nimmt ζ beständig zu, bis es für $l = \infty$ den Werth $3\pi/2$ erreicht. η wächst anfangs mit l, erreicht ein Maximum, wenn $l = a$ und nimmt dann wieder ab; sein Werth bleibt stets zwischen Null und $\pi/2$.

Bei reibungsloser Bewegung fällt das Maximum des Druckes mit dem Maximum der Temperatur zusammen und im

Orte des Maximums herrscht die grösste Geschwindigkeit in der Richtung der Fortpflanzung.

Bei Reibung wandert das Druckmaximum vor dem Temperaturmaximum, aber stets innerhalb des nächsten Viertels der Wellenlänge; in demselben Intervall liegt der Ort stärksten Windes in der Fortpflanzungsrichtung, welcher bei sehr grosser Reibung nahe an den Ort mittlerer Temperatur heranrückt. Im folgenden Schema sind die Verhältnisse für $l = 0$ und für grosse Reibung veranschaulicht. Die grossen Pfeile zeigen die Fortpflanzungsrichtung der Welle, die kleinen Pfeile die Windrichtung.

$$V > \sqrt{RT}$$

Reibungslos ←

0	τ Max.	0	τ Min.	0
0	ε Max.	0	ε Min.	0
0	u Min. ←	0	u Max. →	0

Reibung ←

0	τ Max.	0	τ Min.	0
	ε Max.	0	ε Min.	0
u Min. ←	0	u Max. →	0	

Wenn

$$n^2 - RTm^2 < 0, \tag{2}$$

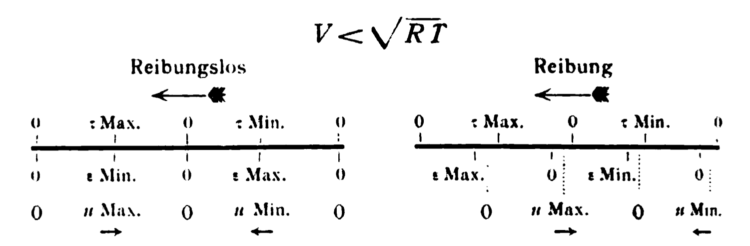
oder $V < \sqrt{RT}$, ist das a^2 in den Formeln für K, η, M, ζ negativ; man ersetze es durch $-a'^2$.

Für $l = 0$ ist $\eta = \pi$, $\zeta = 0$; lässt man l von Null bis ∞ wachsen, so nimmt η beständig ab von π bis 0, ζ von 0 bis $-\pi/2$.

Bei reibungsloser Bewegung fällt hier das Minimum des Druckes mit dem Maximum der Temperatur zusammen; bei Reibung wandert das Druckminimum hinter dem Temperaturmaximum und kommt bei sehr grossem l nahe an das Temperaturminimum heran.

Die Orte stärksten Windes, welche bei reibungsloser Bewegung mit denen der Druckextreme zusammenfallen, rücken bei grosser Reibung gegen die Orte mittleren Druckes zurück.

$$V<\sqrt{RT}$$



Je grösser die Reibung, desto geringer wird der Einfluss der Fortpflanzungsgeschwindigkeit auf das Verhältniss der Druckwelle zur Temperaturwelle; in dem Grenzfall $l=\infty$ wird $K=1$, $\eta=0$, $M=0$, gleichviel ob V grösser oder kleiner als $\sqrt{RT}$ ist; wenn die Luft in der Röhre unbeweglich ist, bleibt die Dichte constant und der Druck ändert sich in demselben Maasse, wie die absolute Temperatur.

Bezeichnet μ die Dichte im Ruhezustande, $\mu(1+\sigma)$ die Dichte der bewegten Luft, so ist $\sigma=\varepsilon-\tau$; aus der Continuitätsgleichung

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

folgt

$$\sigma=-\frac{m}{n}M.A\sin(mx+nt+\zeta)=-\frac{u}{V}.$$

Demnach ist in der erzwungenen ebenso wie in der freien Welle der Ort grösster Geschwindigkeit in der Fortpflanzungsrichtung zugleich der Ort grösster Dichte.

Der Fall, dass die Luft durch eine längs der Röhre periodisch fortschreitende Kraft in Bewegung gesetzt wird, lässt sich auf die vorhin behandelte Aufgabe zurückführen. Ist $\partial W/\partial x$ die auf die Masseneinheit in der Richtung x wirkende Kraft und bleibt die Temperatur constant, so sind die Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial(W-RT.\varepsilon)}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial t}+lu,\qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial u}{dx}=0.$$

Führt man ein

$$W-RT\varepsilon=-RT.y,$$

so gehen die Gleichungen über in

$$-RT\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + lu, \qquad \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{W}{RT} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Das sind dieselben Differentialgleichungen, wie im vorigen Falle, nur dass y statt ε und $-W/(RT)$ statt τ steht.

Wenn nun das Potential der periodischen Kraft durch

$$W = C.\sin(mx+nt)$$

gegeben ist, so kommt $C/(RT)$ an Stelle des früheren A. Man erhält

$$u = M.\frac{C}{RT}.\sin(mx+nt+\zeta).$$

M und ζ haben dieselben Werthe wie vorhin. ε findet man am leichtesten aus der Continuitätsgleichung

$$\varepsilon = -\frac{M}{V}\cdot\frac{C}{RT}\sin(mx+nt+\zeta).$$

In den schematischen Darstellungen für die reibungslose Bewegung ist nur τ Max. durch W Min., τ Min. durch W Max. zu ersetzen, um die Druck- und Bewegungsverhältnisse für diesen Fall zu überblicken.

In den zwei anderen für Reibung bleiben die Orte grösster Geschwindigkeit ungeändert: ε Max. fällt mit u Min., ε Min. mit u Max. zusammen.

Es werden zunächst die durch Temperaturwellen erzwungenen Druckwellen in einer rotirenden Schale berechnet. Das Verfahren, welches auf freie Wellen angewendet wurde, reicht hier nicht für alle Fälle aus, aber doch für grosse Gruppen, zu denen auch die in der Abh. 1890 angeführten Beispiele gehören. Diese werden neuerdings sowohl für reibungslose Bewegung, wie für grosse Reibung berechnet, durch Zeichnungen dargestellt, ihre Beziehungen zu den zugehörenden freien Wellen untersucht.

In einem Anhang sind die Bewegungsgleichungen eines Massenpunktes in einer rotirenden Niveaufläche angegeben,

woraus sich die Bewegungsgleichungen der Luft in einer Niveauschale ableiten lassen.

Ein zweiter Anhang enthält Gegenstände, welche nicht dem im Titel der Abhandlung angezeigten Gebiete angehören, deren Behandlung aber für die Theorie der täglichen Luftdruckschwankung nützlich erscheint.

A. Bewegung der Luft in einer verticalen Säule. Ist die Säule unendlich hoch und findet in ihr eine Temperaturschwingung von langer Periode statt, so bleibt der Druck am Boden ungeändert, und der Druck in einer bestimmten Höhe ist gleich demjenigen, welcher dort stattfände, wenn die zur gegebenen Zeit bestehende Temperaturvertheilung constant bliebe. Bei einer ganztägigen oder halbtägigen Schwingung sind die Abweichungen von dem statischen Druck völlig zu vernachlässigen. Die barometrische Höhenformel ist mit grosser Annäherung anwendbar. Das gilt ebenso für eine Säule von begrenzter Höhe, welche oben in die freie Atmosphäre mündet. Die erzwungenen Schwingungen in einer solchen Luftsäule sind leicht zu berechnen. Sie lassen sich auch mit denen vergleichen, welche durch die tägliche Erwärmung in Bergkesseln und in engen Thälern entstehen; danach sind die Unterschiede zu beurtheilen, welche die tägliche Druckschwankung daselbst gegenüber derjenigen auf dem flachen Lande aufweist.

B. Fortschreitende Welle in einer Atmosphäre mit ebener oder cylindrischer Unterlage. In der Schale hatten wir eine Bewegung nach Länge und Breite behandelt, hier betrachten wir eine Bewegung, welche nach Länge und Höhe stattfindet. Wenn die Periode ein Tag oder ein halber Tag, die Wellenlänge von der Grössenordnung des Erdradius ist, genügt es, statt der Gleichung für die verticale Bewegung die barometrische Höhenformel zu setzen. Das wird an einem schon vorher berechneten Fall verificirt und ein anderes Beispiel — die Amplitude der Temperaturwelle hat in einer Höhenschicht einen constanten Werth, ausserhalb der Schicht findet keine Temperaturänderung statt — wird hinzugefügt. Dieses ist in Hinblick auf eine Hypothese von Hann über die Ursache der halbtägigen Druckwelle gerechnet.

In allen Fällen lässt sich der relative Überdruck in einer Höhe z in zwei Theile zerlegen: $s = s_0 + \zeta_z$, wo s_0 den Werth

von ε am Boden bezeichnet. Nur dieses ist noch von Interesse; δ_z kann man mittelst der barometrischen Höhenformel aus der gegebenen Temperaturvertheilung ableiten, oder man kann auch umgekehrt die Temperaturschwingung berechnen, wenn δ_z bekannt ist. Solche Rechnungen hat Hann für zahlreiche Fälle ausgeführt.

Die kritische Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist für die Atmosphäre ebenso gross wie für eine Schicht von constanter Dichte. Das Maximum von ε_0 tritt gleichzeitig mit dem Temperaturmaximum ein, wenn die Welle schneller wandert als eine freie.

Hält man dieses mit dem Resultat zusammen, welches man für die ganztägige Welle in der dünnen rotirenden Luftschale gefunden hat, so schliesst man: wenn eine Temperaturwelle von der Periode eines Tages über die Erde fortschritte, deren Phase in allen Breiten gleich, deren Amplitude nur Function der Breite und der Höhe wäre, dann müsste in der erzwungenen Druckwelle das Maximum von ε_0 mit dem Maximum der Temperatur zusammenfallen.

C. Die beobachteten Erscheinungen der ganztägigen Druckwelle werden in den Hauptzügen nach den Abhandlungen von Hann und von Angot zusammengefasst. Das Maximum von ε_0 fällt nahezu auf dieselbe Zeit, wie das Minimum des ganztägigen Temperaturgliedes.

Man hat zu beachten, dass wegen der Unregelmässigkeit der Erdoberfläche und der Bewölkung die Annahme, welche vorher in Betreff der Temperaturwelle gemacht wurde, den Verhältnissen auf der Erde nicht entspricht. Die tägliche Erwärmung schreitet mit nahezu constanter Amplitude an jedem Tage nur über getrennte, relativ kleine Gebiete fort und hat in jedem solchen Bezirk fast den Charakter einer stehenden Schwingung.

D. Stehende Temperaturschwingungen, welche nur in einem kleinen Gebiet der Atmosphäre stattfinden, bewirken in demselben Druckschwingungen, deren ε_0-Maximum zugleich mit dem Temperaturminimum eintritt, während die Druckschwankung ausserhalb des Gebietes gering ist. Ähnlich wird es sich bei fortschreitenden Temperaturwellen verhalten, wenn sie nur über kleine Längenintervalle wandern.

Die Annahme, dass die ganztägige Druckschwingung auf der Erde durch Erwärmungen dieser Art entsteht, ist wohl allgemein verbreitet. Doch hat man nicht beachtet, dass es dabei wesentlich auf die örtliche Unregelmässigkeit der Wärmewelle ankommt. Auch wurde vorher kein Versuch gemacht, die erzwungene Druckschwingung zu berechnen.

Die Rechnung gibt, wenn die Temperaturamplitude am Boden 3° beträgt und mit der Höhe nach dem Gesetze der Exponentiellen so rasch abnimmt, dass sie schon bei 900 *m* nur 1° ist, die Druckamplitude am Boden gleich 0·7/760 des mittleren Druckes.

Damit ist die Untersuchung der ganztägigen Welle abgeschlossen. Liesse sich die erregende Ursache der regelmässigen halbtägigen Welle angeben, so würden die hier ausgeführten Rechnungen zu einer ziemlich vollständigen Lösung des Problems der täglichen Barometerschwankungen ausreichen.

10. Erzwungene Wellen in der rotirenden Schale.

Behält man alle Voraussetzungen bei, welche den Entwicklungen des 8. Abschnittes zugrunde gelegt sind, mit Ausnahme derjenigen, dass die Temperatur der Schale constant ist, so bleiben die Bewegungsgleichungen im engeren Sinne ungeändert und nur die Continuitätsgleichung enthält ein neues Glied. Wenn T die mittlere absolute Temperatur der Schale bezeichnet, $T(1+\tau)$ die Temperatur in einem Orte zur Zeit t, und wenn τ ein kleiner Bruch ist, so hat man es mit folgenden Gleichungen zu thun.

$$-\frac{RT}{S}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega} = \frac{\partial b}{\partial t} + lb - 2\nu\cos\omega . c,$$

$$-\frac{RT}{S}\frac{\partial\varepsilon}{\sin\omega\,\partial\lambda} = \frac{\partial c}{\partial t} + lc + 2\nu\cos\omega . b,$$

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial\tau}{\partial t} + \frac{1}{S\sin\omega}\left(\frac{\partial(b\sin\omega)}{\partial\omega} + \frac{\partial c}{\partial\lambda}\right) = 0.$$

Es sollen diejenigen Bewegungen der Luft in der rotirenden Schale berechnet werden, welche durch westwärts wandernde Temperaturwellen entstehen. Für $l = o$ (reibungslose Luft) sind

schon a. a. O. specielle Lösungen gegeben worden. Jetzt wollen wir annehmen, dass die Luft in der dünnen Schale eine der relativen Geschwindigkeit proportionale Reibung erfährt. Dabei wird es für die Rechnung bequem sein, die periodische Function als Exponentielle mit imaginärem Exponenten einzuführen. Es sei gegeben

$$\tau = F(\omega)e^{i(h\lambda+nt)}.$$

Druck und Geschwindigkeiten in der erzwungenen Welle versuchen wir in folgenden Formen zu finden

$$b = i\varphi(\omega)e^{i(h\lambda+nt)}, \quad c = \psi(\omega)e^{i(h\lambda+nt)}, \quad \varepsilon = E(\omega)e^{i(h\lambda+nt)}$$

bei gleicher Bezeichnung wie im 8. Abschnitt; auch die abkürzenden Zeichen

$$n-li = r, \quad \frac{2\nu}{r} = q, \quad \frac{nrS^2}{RT} = z$$

werden beibehalten. Man leitet ähnlich wie dort zwei Gleichungen ab

$$(h^2-z\sin^2\omega)E = \frac{rS}{RT}\sin\omega\left(\frac{d(\varphi\sin\omega)}{d\omega}-hq\cos\omega.\varphi\right)-z\sin^2\omega.F \qquad (A)$$

$$\sin^{-hq}\omega\frac{d}{d\omega}(\sin^{hq}\omega.E) = \frac{rS}{RT}(1-q^2+q^2\sin^2\omega).\varphi, \qquad (B)$$

deren erste allein die Temperaturfunction F enthält.

Wir wollen uns auf den Fall beschränken, dass diese Function, folglich auch die erzwungene Druckwelle zu beiden Seiten des Äquators symmetrisch ist (pare Lösungen). Die Rechnung bietet für diese, wie auch für impare Lösungen nach den Entwicklungen für freie Wellen keine Schwierigkeit, sobald $F(\omega)$ bei ungeraden h durch eine endliche Reihe ungerader Potenzen von $\sin\omega$, bei geraden h durch eine solche Reihe gerader Potenzen sich darstellen lässt, und wenn das erste Glied der Reihe $\sin^h\omega$ oder eine höhere Potenz ist.

Pare Lösungen ungerader Classen (insbesondere der ersten Classe). Wenn

$$F(\omega) = \frac{1}{nS}(C_1\sin\omega+C_3\sin^3\omega+\ldots)$$

gegeben ist, so hat man die Coëfficienten in den Reihen

$$\varphi = \cos\omega(a_0 + a_2 \sin^2\omega + a_4 \sin^4\omega + \ldots),$$

$$E = \frac{rS}{RT}(A_1 \sin\omega + A_3 \sin^3\omega + \ldots)$$

zu bestimmen, indem man φ und ε in die Gleichungen (A) und (B) einsetzt. Aus den zwei Systemen von Beziehungen, welche man so erhält, kann man $A_1, A_3 \ldots$ eliminiren; es bleibt eine Folge von Gleichungen zwischen den unbekannten Coëfficienten a_0, $a_2 \ldots$ und den gegebenen Constanten $C_1, C_3 \ldots$

$$h^2 \frac{(1-q^2)a_0}{1+hq} = (1-hq)a_0$$

$$h^2 \frac{(1-q^2)a_2 + q^2 a_0}{3+hq} - z\frac{(1-q^2)a_0}{1+hq} = (3-hq)a_2 - (2-hq)a_0 - C_1 \qquad (1)$$

$$h^2 \frac{(1-q^2)a_4 + q^2 a_2}{5+hq} - z\frac{(1-q^2)a_2 + q^2 a_0}{3+hq} = (5-hq)a_4 - (4-hq)a_2 - C_3$$

. . . .

Erzwungene Wellen erster Classe. Wenn $h = 1$ und wenn C_3, C_5, sowie alle folgenden Coëfficienten der F-Reihe verschwinden, die Temperaturwelle demnach durch

$$\tau = \frac{C_1}{nS}\sin\omega \, . \, e^{i(\lambda + nt)} \qquad (C_1)$$

dargestellt ist, so sind die dritte und die folgenden Gleichungen des Systems (1) identisch mit den entsprechenden Beziehungen zwischen den Coëfficienten a, welche bei freien Schwingungen gelten; man hat allgemein (vergl. Abschnitt 6)

$$\frac{a_j}{a_{j-2}} = \cfrac{(j+3+q)q^2 z}{N_{j+1} - \cfrac{Z_{j+3}}{N_{j+3} - \ldots}} \quad \text{und} \quad \frac{a_2}{a_0} = \cfrac{(5+q)q^2 z}{N_3 - \cfrac{Z_5}{N_5 - \ldots}},$$

wobei die N und Z aus den Gleichungen (P_1) Abschnitt 6 des II. Theiles zu entnehmen sind. Der einzige Unterschied gegenüber den freien Wellen besteht darin, dass jetzt a_0 nicht willkürlich bleibt, sondern durch C_1 bestimmt wird. Folglich

enthalten auch alle übrigen Coëfficienten C_1 als Factor. Im System (1) ist die erste Gleichung identisch erfüllt; setzt man in die zweite den oben angeführten Werth von a_2/a_0 ein, so ergibt sich

$$a_0 = -\frac{(1+q)(3+q)C_1}{N_1 - \dfrac{Z_3}{N_3 - \dots}}$$

(Wenn n, z ein reelles Werthpaar ist, welches zù einer freien Welle im reibungslosen System gehört, wird der Nenner auf der rechten Seite Null, Gleichung (P) Abschnitt 6, und a_0 unendlich. Bei Reibung kann der Nenner nicht verschwinden; ein reelles n und ein complexes z erfüllen die Gleichung (P) nicht, denn es kann bei Reibung keine freie Welle ohne Dämpfung geben.)

Ferner hat man

$$a_2 = \frac{a_2}{a_0}a_0, \quad a_4 = \frac{a_4}{a_2}\frac{a_2}{a_0}a_0, \dots$$

demnach φ, ferner die Coëfficienten der E-Reihe

$$A_1 = \frac{(1-q^2)a_0}{1+q}, \quad A_3 = \frac{(1-q^2)a_2 + q^2 a_0}{3+q}, \quad A_5 = \frac{(1-q^2)a_4 + q^2 a_2}{5+q}, \dots$$

und wenn man noch schreibt

$$\psi = \alpha_0 + \alpha_2 \sin^2\omega + \dots = -\frac{RT}{rS}\frac{E}{\sin\omega} - q\cos\omega \, . \, \varphi,$$

so wird

$$\alpha_0 = -a_0, \quad \alpha_2 = \frac{3q(a_0 - a_2) - a_2}{3+q}, \quad \alpha_4 = \frac{5q(a_2 - a_4) - a_4}{5+q}, \dots$$

[Gleichungen (p_1) des 7. Abschnittes].

Die von der Temperaturwelle (C_1) erzeugte Druckwelle und die zugehörige Windvertheilung sind somit berechnet.

Der Fall, dass nicht C_1 allein, sondern auch C_3 und mehrere andere Coëfficienten der F-Reihe von Null verschieden sind, bietet keine Schwierigkeit. Es wäre überflüssig, die bezüglichen Formeln hier abzuleiten, da sie durch ein ganz ähnliches Verfahren zu finden sind. Wir beschränken uns auch in den folgenden Beispielen auf die Temperaturwelle (C_1).

Für $h = 3$, eine Welle dritter Classe, wäre das System (1) nur brauchbar, wenn $C_1 = 0$, ebenso für $h = 5$ nur dann, wenn $C_1 = C_3 = 0$. In anderen Fällen müsste man die Reihen nach Potenzen von $\cos\omega$ anordnen; es wäre zu setzen

$$F(\omega) = \frac{1}{nS}\sin\omega(K_0+K_2\cos^2\omega+K_4\cos^4\omega+\ldots),$$

$$\varphi = b_1\cos\omega+b_3\cos^3\omega+\ldots, \qquad E = \frac{rS}{RT}\sin\omega(B_0+B_2\cos^2\omega+\ldots)$$

Diese führen zu Entwicklungen, auf welche das Laplace'sche Verfahren der Coëfficientenbestimmung sich nicht anwenden lässt, weil in den Gleichungen des dem (1) analogen Systems vier unbekannte Coëfficienten vorkommen.

Der Gang der Entwicklung (aber nicht eine Methode, welche die vollständige Ausführung der Rechnung zulässt) ist von Lord Kelvin [Phil. Mag. (4) 50, S. 388] angegeben worden. Es liesse sich vielleicht eine Hilfsfunction finden, welche gestattet, nur drei Coëfficienten in jeder Gleichung zu haben.

Für die ruhende Schale hat auch in diesem Falle die Berechnung keine Schwierigkeit.

Beispiel 1. Erzwungene Welle erster Classe bei reibungsloser Bewegung in der rotirenden Schale. Rotationsdauer 24 Stunden, Umlaufsdauer der Welle 24 Stunden.

$$\tau = \frac{1}{273}\sin\omega.\sin(\nu t+\lambda).$$

Wir setzen

$$T = 273°, \qquad R = 287\,\mathrm{m}^2.\mathrm{sec}^{-2}\ \mathrm{Centigrad}^{-1},$$

$$n = \nu = \frac{2\pi}{24.60.60}\mathrm{sec}^{-1}, \quad 2\pi S = 4.10^7\,\mathrm{m}.$$

Durch die Annahmen $n = \nu$, $l = 0$, hat man

$$q = 2, \quad z = \frac{\nu^2 S^2}{RT} = \frac{\varkappa}{4} = 2\cdot735,$$

ferner, da die Amplitude der Temperaturwelle am Äquator $(T\tau)$ 1° angenommen ist,

$$\frac{C_1}{\nu S} = \frac{1}{273}, \qquad C_1 = 1\cdot6959.$$

Schreibt man noch

$$N_1 = 3.(2.3-2)+5.3z,$$
$$N_3 = 5.(4.5-2)+7.3z, \qquad Z_3 = 2.4.3.7.4z,$$
$$N_5 = 7.(6.7-2)+9.3z, \qquad Z_5 = 4.6.5.9.4z,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

so hat man alles beisammen, was man zur Berechnung der Geschwindigkeiten und des Druckes braucht. Man erhält die Lösung in der Form

$$\varepsilon = E(\omega).\sin(\lambda+\nu t), \quad b = \varphi(\omega)\cos(\lambda+\nu t), \quad c = \psi(\omega)\sin(\lambda+\nu t)$$

und für E, φ, ψ folgende Werthe

$$10^3 E(\omega) = 4\cdot 20\sin\omega - 1\cdot 55\sin^3\omega - 1\cdot 28\sin^5\omega - 0\cdot 39\sin^7\omega - 0\cdot 06\sin^9\omega - \ldots$$

$$\varphi(\omega) = \cos\omega\{-0\cdot 71 - 0\cdot 51\sin^2\omega - 0\cdot 17\sin^4\omega - 0\cdot 03\sin^6\omega\ldots\}$$

$$\psi(\omega) = 0\cdot 71 - 0\cdot 14\sin^2\omega - 0\cdot 46\sin^4\omega - 0\cdot 21\sin^6\omega - 0\cdot 05\sin^8\omega.$$

Damit berechnet man die Tabelle, nach welcher Fig. 1 construirt ist. Die Geschwindigkeiten sind in m/sec. angegeben.

ω	$273.\tau$	$10^3\varepsilon$	b	c
0°	0	0	$-0\cdot 71\cos(\lambda+\nu t)$	$0\cdot 71\sin(\lambda+\nu t)$
15	$0\cdot 26\sin(\lambda+\nu t)$	$1\cdot 06\sin(\lambda+\nu t)$	−0·72	0·70
30	0·50	1·86	−0·74	0·64
45	0·71	2·15	−0·72	0·50
60	0·87	1·84	−0·60	0·24
75	0·97	1·22	−0·35	−0·03
90	1·00	0·91	0	−0·15

Die Temperaturamplitude ist 1° am Äquator und 0°71 in 45° Breite; die entsprechenden Druckamplituden sind (beim mittleren Druck 1000) 0·91 und 2·15, also in 45° Breite viel grösser als am Äquator; das hängt mit dem Umstand zusammen, dass der Umfang jenes Breitekreises nahe gleich ist dem Weg,

welchen eine freie Welle in einer Röhre binnen 24 Stunden zurücklegt.

Im II. Theil dieser Abhandlung wurden die Umlaufszeiten westwärts fortschreitender freier Wellen gefunden 13·87, 9·22, 6·63...Stunden für Wellen erster Art; ferner 130·7, 309·5, 572·2...Stunden für Wellen zweiter Art auf einem Sphäroid von der Grösse und Rotationsdauer der Erde. In diesem Beispiel haben wir es mit einer erzwungenen Welle von der Umlaufsdauer 24 Stunden zu thun. Man möchte vermuthen, dass ihr als nächste freie Welle diejenige mit 13·87 Stunden (Typus I erster Art) zugehört; dann müsste, weil die erzwungene langsamer fortschreitet als die freie Welle, am Äquator das Minimum des Druckes mit dem Maximum der Temperatur zusammenfallen. Es ergibt sich jedoch, dass Temperatur- und Druckwelle in allen Breiten die gleiche Phase haben. Unsere erzwungene Welle liegt schon im Gebiete der freien Welle Typus I zweiter Art, 130·7 Stunden Umlaufsdauer, der sie auch in der Form ähnlich ist. (Man vergleiche Fig. 1 mit den Fig. 9 und 11 des zweiten Theils.) Betrachtet man erzwungene Wellen, deren Umlaufszeit von 13·9 ab stufenweise wächst, so kann man den Übergang von denjenigen, welche sich dem Typus I erster Art anschliessen, zu denen, welche unter Typus I zweiter Art fallen, leicht verfolgen. Es genügt zu dem Zwecke, nur noch einen Fall zu berechnen, die erzwungene Welle von 15 Stunden Umlaufsdauer.

$$\tau = \frac{1}{273} \sin(\lambda + nt), \quad \frac{2\pi}{n} = 15 \text{ Stunden}, \quad \frac{2\pi}{\nu} = 24 \text{ Stunden}.$$

Wir stellen den Ausdruck für das zugehörige $10^3 E$ zusammen mit den entsprechenden Ausdrücken für die beiden freien Wellen und für unsere in Fig. 1 dargestellte erzwungene Welle. (Tabelle auf der folgenden Seite.)

In der freien Welle [1] findet eine Umkehrung des Vorzeichens von E bei $\omega = 43°$ statt; dem entsprechend ist in der langsamer fortschreitenden erzwungenen Welle [2] E am Äquator negativ, in hohen Breiten positiv; in der freien Welle [4] hat E für alle Werthe von ω gleiches Vorzeichen, ebenso in der erzwungenen Welle [3]. In [2] ist ε am Äquator negativ, auf

[1] Freie Welle U.-D. 13·87 Stunden	[2] Erzwungene Welle U.-D. 15 Stund.	[3] Erzwungene Welle U.-D. 24 Stund.	[4] Freie Welle U.-D. 130·7 Stunden
	Temp.-Ampl. 1° am Äquator		
Const. } $9\cdot57 \sin\omega$	$7\cdot66 \sin\omega$	$4\cdot20 \sin\omega$	Const. } $10\cdot73 \sin\omega$
$-13\cdot42 \sin^3\omega$	$-6\cdot89 \sin^3\omega$	$-1\cdot55 \sin^3\omega$	$-0\cdot33 \sin^3\omega$
$-15\cdot10 \sin^5\omega$	$-7\cdot07 \sin^5\omega$	$-1\cdot28 \sin^5\omega$	$-5\cdot06 \sin^5\omega$
$-5\cdot11 \sin^7\omega$	$-2\cdot32 \sin^7\omega$	$-0\cdot39 \sin^7\omega$	$-2\cdot05 \sin^7\omega$
$-0\cdot89 \sin^9\omega$	$-0\cdot40 \sin^9\omega$	$-0\cdot06 \sin^9\omega$	$-0\cdot38 \sin^9\omega$
$-0\cdot09 \sin^{11}\omega$ }	$-0\cdot04 \sin^{11}\omega$	$-0\cdot01 \sin^{11}\omega$	$-0\cdot04 \sin^{11}\omega$ }

jener Hemisphäre, wo τ positiv; in [3] sind τ und ε überall gleich bezeichnet; die im Beispiel 1 behandelte Welle ist also im Zusammenhang mit der freien Welle zweiter Art Typus I zu betrachten; ihr Verhalten entspricht demjenigen einer erzwungenen Welle in der Röhre, wenn $V > \sqrt{RT}$.

Beispiel 2. Erzwungene Welle erster Classe bei Reibung. Umlaufsdauer 24 Stunden.

Mit denselben Werthen von R, T, S, ν, n, wie im Beispiel 1 und mit

$$l = \nu$$

wird

$$r = \nu(1-i), \quad q = 1+i, \quad z = 2\cdot735(1-i).$$

Statt $l = \nu$ kann man auch schreiben $l^{-1} = 12/\pi$ Stunden $= 3\cdot82$ Stunden. Die Reibung ist so gross angenommen, dass die Geschwindigkeit einer ebenen, zwischen zwei unbegrenzten Platten ohne Druckdifferenz geradlinig fortschreitenden Luftschicht mit diesem l in $3\cdot82$ Stunden auf $1/e$ ihres Anfangswerthes sinkt.

Setzt man wieder

$$\tau = \frac{1}{273} \sin\omega \sin(\lambda+\nu t)$$

und berechnet, ähnlich wie für freie Wellen

$$b = \varphi_1 \cos(\lambda+\nu t) - \varphi_2 \sin(\lambda+\nu t), \qquad c = \psi_1 \sin(\ ) + \psi_2 \cos(\ ),$$

$$\varepsilon = E_1 \sin(\ ) + E_2 \cos(\ )$$

für Polabstände von je 15°, so erhält man die folgende Tabelle, nach welcher die Figur 2 gezeichnet ist.

ω	$273\,\tau$	$10^3\,\varepsilon$		b		c	
0°	0	0	$\sin(\lambda+\nu t+\ 7°9)$	$-0·49\cos(\lambda+\nu t-36°6)$		$0·49\sin(\lambda+\nu t-36°6$	
15	$0·26\sin(\lambda+\nu t)$	1·04	$+\ 9·0$	$-0·49$	$-36·2$	0·49	$-35·0$
30	0·50	1·92	$+12·2$	$-0·47$	$-34·6$	0·49	$-33·4$
45	0·71	2·48	$+17·6$	$-0·44$	$-30·7$	0·48	$-33·$[illegible]
60	0·87	2·72	$+24·3$	$-0·35$	$-28·0$	0·45	36·9
75	0·97	2·72	$+30·5$	$-0·20$	$-25·9$	0·42	$-45·0$
90	$1·00\sin(\lambda+\nu t)$	$2·69\sin(\lambda+\nu t+33·3)$		0	$\cos(\lambda+\nu t-25·0)$	$0·40\sin(\lambda+\nu t-48·0$	

Die Temperaturwelle hat hier dieselbe Form wie in Fig. 1. Es sind jedoch nur die Orte des Maximums und Minimums eingezeichnet; die Curven 273°5 und 272°5 sind weggelassen, um die Zeichnung nicht zu undeutlich zu machen. Die punktirte Curve verbindet die Orte wo $b = 0$, die gestrichelte jene Orte, wo $c = 0$.

Das Maximum des Druckes wandert in jeder Breite vor dem Maximum der Temperatur, in grösstem Abstand am Äquator, wo das ε-Maximum 2·2 Stunden vor dem τ-Maximum eintritt. Rechnet man immer mit derselben τ-Welle, aber mit Werthen von l, die man von Null bis ∞ wachsen lässt, so nimmt jener Abstand anfangs rasch zu, bis zu einem grössten Werth, der kaum drei Stunden erreicht, nimmt dann wieder bis Null ab, ganz entsprechend dem Verhalten der erzwungenen Welle in der Röhre, wenn $V > \sqrt{RT}$. Bezeichnet Δ den Bogen, um welchen das Maximum des Druckes am Äquator westlich von demjenigen der Temperatur liegt, so ist bei

l	0	$\frac{1}{2}\nu$	ν	3ν	∞
Δ	0	37°6	33°3	14°9	0

Die Form der Druckwelle in Fig. 2 ist dadurch, dass die grösste Amplitude jetzt bei $\omega = \text{arc}\,70°$ eintritt und dass ihr Werth von demjenigen am Äquator wenig verschieden ist, eine

ganz andere als in Fig. 1. Da für $l = \infty$ in jeder Breite die ε-Amplitude gleich wird der τ-Amplitude, so ist es klar, dass die Druckamplituden in manchen Breiten bei Reibung grösser ausfallen, als im reibungslosen System.

Pare Lösungen gerader Classen (insbesondere der zweiten Classe). Wenn h gerade und die Function F im Ausdruck des variablen Temperaturgliedes

$$\tau = F(\omega)e^{i(h\lambda+nt)}$$

gegeben ist durch

$$F(\omega) = \frac{1}{nS}(C_0 + C_2 \sin^2\omega + C_4 \sin^4\omega + \ldots),$$

so sind für φ, E folgende Formen anzunehmen

$$\varphi = \cos\omega(a_1 \sin\omega + a_3 \sin^3\omega + \ldots),$$
$$E = \frac{rS}{RT}(A_0 + A_2 \sin^2\omega + \ldots).$$

Nur im Falle $h = 0$ kann man C_0 von Null verschieden setzen; für jedes andere h muss $C_0 = 0$ sein, da sonst die Temperatur an den Polen keinen bestimmten Werth hätte.

Setzt man die Reihen für F, φ, E in die Gleichungen (A) und (B) ein, so folgen zwei Systeme von Relationen zwischen den Coëfficienten. Zunächst hat man $h^2 A_0 = 0$ und $hqA_0 = 0$, woraus $A_0 = 0$ für alle h ausser $h = 0$. Durch Elimination von $A_2, A_4 \ldots$ ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}
h^2\frac{(1-q^2)a_1}{2+hq} &= (2-hq)a_1 \\
h^2\frac{(1-q^2)a_3+q^2a_1}{4+hq} - z\frac{(1-q^2)a_1}{2+hq} &= (4-hq)a_3-(3-hq)a_1-C_2 \\
h^2\frac{(1-q^2)a_5+q^2a_3}{6+hq} - z\frac{(1-q^2)a_3+q^2a_1}{4+hq} &= (6-hq)a_5-(5-hq)a_3-C_4 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Erzwungene Welle zweiter Classe $h = 2$. Wir beschränken uns wieder der Kürze halber auf den Fall, dass C_2 der erste Coëfficient der F-Reihe allein von Null verschieden ist. Die erste Gleichung des Systems (2) ist eine Identität, aus der dritten und allen folgenden hat man

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{(6+2q)q^2 z}{N_4 - \cfrac{Z_6}{N_6 - \ldots}} \qquad [N, Z \text{ aus } P_2]$$

ganz wie bei freien Schwingungen zweiter Classe und a_1 bestimmt sich aus der zweiten Gleichung, wenn man den eben angegebenen Quotienten einsetzt

$$a_1 = -\frac{(2+2q)(4+2q)C_2}{N_2 - \cfrac{Z_4}{N_4 - \ldots}}.$$

(Mit denjenigen reellen Werthpaaren n, z, welche zu paren freien Wellen zweiter Classe im reibungslosen System gehören, wird der Nenner auf der rechten Seite Null, a_1 unendlich gross.)

Ferner hat man

$$\frac{a_j}{a_{j-2}} = \frac{(j+3+2q)q^2 z}{N_{j+1} - \cfrac{Z_{j+3}}{N_{j+3} - \ldots}}, \qquad j = 3, 5, 7\ldots$$

womit man die Coëfficienten der φ-Reihe berechnet, dann diejenigen der E-Reihe

$$A_0 = 0, \qquad A_2 = \frac{(1-q^2)a_1}{2+2q}, \qquad A_4 = \frac{(1-q^2)a_3 + q^2 a_1}{4+2q}, \ldots$$

endlich die der ψ-Reihe, wenn man setzt

$$\psi = \alpha_1 \sin\omega + \alpha_3 \sin^3\omega + \ldots = -\frac{RT}{rS}\cdot\frac{2E}{\sin\omega} - q\cos\omega\,.\,\varphi,$$

$$\alpha_1 = -a_1, \qquad \alpha_3 = \frac{2q(a_1 - a_3) - a_3}{2+q}, \qquad \alpha_5 = \frac{3q(a_3 - a_5) - a_5}{3+q}, \ldots$$

Auch hier ist für die höheren Classen eine ähnliche Einschränkung zu machen, wie bei den ungeraden. Für $h = 4$ könnte man die Entwicklung nur anwenden, wenn die F-Reihe mit C_4 beginnt; andernfalls wäre die Rechnung so zu führen, dass die Reihen für F, φ, E nach Potenzen von $\cos\omega$ fortschreiten.

Beispiel 3. Erzwungene Welle zweiter Classe bei reibungsloser Bewegung in der rotirenden Schale. Umlaufsdauer der Welle 24 Stunden (Schwingungsdauer 12 Stunden).

Ist die Temperaturwelle durch

$$\tau = \frac{1}{273} \sin^2\omega \sin(2\lambda+2\nu t)$$

gegeben, sind für R, T, ν, S die gleichen Werthe wie in den vorhergehenden Beispielen angenommen, ferner

$$l = 0. \qquad n = 2\nu,$$

folglich

$$q = 1, \qquad z = \frac{4\nu^2 S^2}{RT} = \varkappa = 10\cdot 94,$$

so hat man

$$N_2 = 4.(3.4-2)$$

$$N_4 = 6.(5.6-2) \qquad Z_4 = 2.6.4.8\,\varkappa$$

$$N_6 = 8.(7.8-2) \qquad Z_6 = 4.8.6.10.\varkappa$$

$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{C_2}{2\nu S} = \frac{1}{273}, \qquad C_2 = 3\cdot 3917\ \mathrm{m.sec^{-1}}$$

und man erhält zur Bestimmung des Druckes und der Geschwindigkeiten folgende Ausdrücke

$$10^3 E = -138\cdot 7\sin^4\omega - 84\cdot 2\sin^6\omega - 21\cdot 0\sin^8\omega - 2\cdot 9\sin^{10}\omega - 0\cdot 3\sin^{12}\omega,$$

$$\varphi = \cos\omega(-70\cdot 4\sin\omega - 57\cdot 0\sin^3\omega - 17\cdot 8\sin^5\omega - 3\cdot 0\sin^7\omega - 0\cdot 3\sin^9\omega),$$

$$\psi = 70\cdot 4\sin\omega + 10\cdot 0\sin^3\omega - 25\cdot 1\sin^5\omega - 11\cdot 2\sin^7\omega - 2\cdot 2\sin^9\omega - 0\cdot 3\sin^{11}\omega,$$

woraus man ε, b, c für Polabstände von je 15° berechnet, wonach dann die Fig. 3 gezeichnet ist.

ω	273τ	$10^3\varepsilon$	b	c
0°	0	0	0	0
15	$0\cdot 07\sin(2\lambda+2\nu t)$	$-0\cdot 6\sin(2\lambda+2\nu t)$	$-18\cdot 6\cos(2\lambda+2\nu t)$	$18\cdot 4\sin(2\lambda+2\nu t)$
30	0·25	— 10·1	—37·2	35·6
45	0·50	— 46·6	—51·9	47·8
60	0·75	—120·9	—53·9	50·5
75	0·93	—207·2	—35·4	45·4
90	1·00	—247·1	0	41·7

Die Temperaturamplitude am Äquator ist auch hier 1° gesetzt, um die Vergleichung mit den anderen Beispielen zu erleichtern. Wir erhalten aber mit unserem τ Geschwindigkeiten von über 50 m.sec^{-1} und Druckamplituden, welche ein Viertel des mittleren Druckes erreichen. Die Voraussetzung unserer Rechnung, dass b, c, ε klein sind, trifft nicht mehr zu. Wir sollten also dem τ ein Hundertel des oben angeführten Werthes beilegen, dann würden auch ε, b, c in demselben Verhältniss kleiner.

Schon bei der ersten Berechnung dieser Welle ist dargelegt worden, dass die ε im Vergleich mit den τ deshalb so gross ausfallen, weil die Schwingungsdauer nahe gleich ist derjenigen einer freien Welle. Die Periode der westwärts wandernden freien Welle erster Art, Typus I ist 11·94 Stunden (II. Theil, 7. Abschnitt), also sehr nahe der Schwingungsdauer der erzwungenen Welle von 12 Stunden. Da die letztere langsamer fortschreitet, so fällt das Maximum des Druckes mit dem Minimum der Temperatur zusammen. Ein Unterschied von wenigen Graden in der mittleren Temperatur würde bewirken, dass Druck- und Temperaturwelle gleiche Phase hätten, denn mit denselben Werthen von R, ν, S und mit $T = 266°$ ist die Schwingungsdauer der freien Welle grösser als 12 Stunden. Nahe bei $T = 268°$ wird sie gleich 12 Stunden und für diesen Fall würde im reibungslosen System das ε der erzwungenen Welle unendlich gross, wie klein man auch τ annehmen mag.

Wie sich diese Umstände durch Berücksichtigung der Reibung ändern, ersieht man aus dem folgenden Beispiel 4.

Durch eine neue Publication bin ich gezwungen, nochmals der Einwendungen zu erwähnen, welche gegen die Laplace'sche Constantenbestimmung im Flutproblem erhoben worden sind. Ich füge die Bemerkung an Beispiel 3 an, weil dieses die gleichen Rechnungen erfordert, wie das genannte Problem. Dieselbe Rechnung wurde schon in der Abhandlung 1890 geführt und ist mit ihr in eine Sammlung übergegangen, welche Prof. Cleveland Abbe unter dem Titel: »The mechanics of the earth's atmosphere«, Smithsonian Misc. Coll. Washington 1891 (versendet 1893), herausgegeben hat. Er verweist bei dieser Gelegenheit auf eine dort gleichfalls aufgenommene Abhandlung von Ferrel, welche die Berechtigung der Laplace'schen Methode bestreitet.

Man kann zunächst hervorheben, dass Ferrel selbst die Convergenz seiner Reihenentwicklung an die Beschränkung knüpft, $\beta > 6$. (Sein β ist

unser $\varkappa$.) Diese Bedingung allein kennzeichnet die Rechnung als bedeutungslos, denn die Aufgabe, die erzwungene Welle zu berechnen, muss für jeden positiven Werth von β eine Lösung zulassen; nur eine bestimmte Lösung, welche nicht gestattet, einen Coëfficienten willkürlich zu wählen.

Ein Umstand, der es sehr erschwert, den Fehler in Ferrel's Annahme ($K_1 = o$) in Kürze nachzuweisen, ist die Beschaffenheit der Differentialgleichung von welcher er ausgeht; sie gilt nämlich allein für den speciellen Fall: doppelte Schwingungsdauer gleich der Rotationsdauer des Sphäroids, in unserer Bezeichnung (für $l = o$) $q = 1$. Die hier gegebenen Entwicklungen gestatten jedoch die Welle zu berechnen, was immer die Werthe von n und ν sein mögen. Nun ist der einfachste und durch directe Rechnung am leichtesten zu controlirende Fall derjenige der ruhenden Kugelschale $\nu = 0$, also auch $q = 0$. Für diesen erhält man, wenn $h = 2$, $Z_1 = Z_6 = \ldots = 0$, $N_2 = 2.3.4 - z$, demnach

$$a_1 = -\frac{2.4.C_2}{N_2} = \frac{2\,C_2}{z-6}, \quad A_2 = \frac{1}{2}\,a_1 = \frac{C_2}{z-6},$$

daraus genau dasselbe, was für die ruhende Schale in der Abh. 1890, §. 7 direct abgeleitet wurde. — Airy's und Ferrel's Einwand richtet sich gegen die Art, wie der scheinbar unbestimmte erste Coëfficient von Laplace berechnet wird. In der hier gewählten Entwicklung ist es der Coëfficient a_1, welcher für $h = 2$ in den Gleichungen (2) scheinbar unbestimmt bleibt und dann durch die Kettenbruchrechnung gefunden wird. Für die ruhende Schale wird der Bruch endlich und es ergibt sich aus dieser Rechnung dasselbe Resultat, welches man auf einem anderen einfachen Weg ableitet.

Man konnte die Kettenbruchmethode missverstehen, so lange man sie auf eine specielle Aufgabe, mit besonderen Werthen der Constanten angewendet hat. Sobald man aber die ganze Gruppe von Problemen, welche sich nach Laplace's Methode behandeln lassen, überblickt und wahrnimmt, wie sich die Ergebnisse stetig aneinanderfügen, wenn man von einer ruhenden Schale zu einer erst langsam, dann immer schneller rotirenden Schale übergeht, wie die in der Rotationsrichtung und gegen dieselbe wandernden Wellen in dem zu erwartenden Sinne von den Wellen der ruhenden Schale abweichen (die Belege dafür sind im II. Theil dieser Abhandlung enthalten), kann man an der Richtigkeit des Verfahrens nicht zweifeln.

Ausserdem wäre zur Widerlegung der Ferrel'schen Rechnung nichts besseres anzuführen, als die lange zuvor von Lord Kelvin (Phil. Mag. 1875, [4], 50), gegebene Erläuterung der Laplace'schen Methode.

Bei dieser Gelegenheit muss ich auch auf eine Bemerkung im Vorwort der genannten Sammlung von Abbe entgegnen, dass zwischen den analytischen Entwicklungen von Lord Rayleigh (Phil. Mag. Febr. 1890) und den meinigen kein Widerspruch besteht; der Unterschied liegt allein darin, dass der englische Physiker sich auf die Berechnung der Wellen in der ruhenden Schale beschränkt, während ich die Rechnung auf die rotirende Schale ausgedehnt habe.

Beispiel 4. Erzwungene Welle zweiter Classe bei Reibung. Schwingungsdauer 12 Stunden.

Grösse, Rotationsdauer und Temperatur der Schale wie zuvor und die Reibungsconstante

$$l = \nu$$

wie im Beispiel 2 angenommen, hat man

$$r = \nu(2-i), \quad q = 0\cdot 8+i\,0\cdot 4, \quad z = 10\cdot 94\left(1-\frac{i}{2}\right)$$

zu setzen. Die durch die Temperaturwelle

$$\tau = \frac{1}{273}\sin^2\omega \, . \sin(2\lambda+2\nu t)$$

erzeugte Druckwelle und das Windsystem sind nach den oben angegebenen Entwicklungen zu berechnen. Wir führen nur die Werthe von ε, b, c für Polabstände von je 15° an, die in der Fig. 4 verwendet sind.

ω	273τ	$10^4\varepsilon$	b	c
0°	0	0 sin(2λ+2νt + 9°6)	0 cos(2λ+2νt +99°6)	0 sin(2λ+2νt 80°4)
15	0·07 sin(2 +2νt)	0·25... +11·9	0 32... +99·3	0 32... − 81·0
30	0·25	0·98... +18·2	0·63... +98·7	0·62... − 83·1
45	0·50	2·15... +28·3	0·85.. +98·4	0·83 . −− 86·9
60	0·75	3·66... +38·3	0·86... +98·3	0·93... − 92 9
75	0 93	5·06 .. +45·7	0·56... +98·3	0·89... 100·7
90	1·00 sin(2λ+2νt)	5·66 sin(2λ+2νt +48·7)	0 cos(2λ+2νt +98·5)	0·87 sin(2λ+2νt -104·3)

Die Druckamplituden sind hier gegenüber denen des reibungslosen Systems schon sehr verringert; am Äquator nur doppelt so gross wie bei der analogen Welle erster Classe mit dem gleichen Werth der Reibungsconstante. Ähnlich verhält es sich mit den Geschwindigkeiten.

Auch in Fig. 4 sind (wie in Fig. 2) von der Temperaturwelle nur die Maxima und Minima eingezeichnet. Das Maximum der Druckwelle wandert am Äquator vor demjenigen der Temperatur um 24°3 (1 Stunde 37 Minuten); richtiger um 65°7 hinter dem τ-Minimum. Bei $l = 0$ fallen nämlich ε-Maximum

und τ-Minimum zusammen, mit zunehmendem l kommt ε-Max. hinter τ-Min. immer weiter zurück bis es bei $l = \infty$ mit τ-Max. zusammenfällt, so wie es in der Röhre für $V < \sqrt{RT}$ geschieht. Bezeichnet D die Amplitude von $10^3\varepsilon$ am Äquator und Δ daselbst den Winkelabstand des ε-Max. von τ-Max. (das erste westlich vom zweiten), so hat man für

l	0	$\frac{1}{2}\nu$	ν	∞
D	247	9·3	5·7	3·7
Δ	90°	34°2	24°3	0

Das Windsystem der Fig. 4 ist der Buys-Ballot'schen Regel entgegen, während dasjenige der Fig. 2 der Regel folgt. Erinnert man sich des Unterschiedes, welcher zwischen den westwärts wandernden Wellen erster und zweiter Art besteht, so erkennt man, dass auch in dieser Beziehung die erzwungene Welle erster Classe sich an eine freie Welle zweiter Art anschliesst, diejenige der zweiten Classe an eine freie Welle erster Art.

Ist die erzwungene Welle bekannt und weiss man von der erregenden nur, dass sie in allen Breiten gleiche Phase hat, so wird man aus dem Bild der ersteren sogleich erkennen, ob sich ein grosser Reibungseinfluss geltend macht. In diesem Falle eilt nämlich die Schwingung am Äquator denjenigen in höheren Breiten voraus. Der Umstand, dass in dem regelmässigen Theil der halbtägigen Welle auf der Erde die Phase in allen Breiten nahezu gleich ist, zeigt, dass bei diesen Bewegungen die Reibung eine untergeordnete Bedeutung hat. v. Helmholtz hat bewiesen, dass der Einfluss der inneren Reibung bei Flüssigkeitsbewegungen in grossen Räumen klein wird. In der Nähe des Bodens wird die Reibung immerhin eine Verschiebung des Windsystems gegen das Drucksystem bewirken.

Über die Beziehungen zwischen dem täglichen Gang des Windes und des Luftdrucks. In den angeführten Beispielen und in den Figuren ist der Zusammenhang zwischen Wind und Druckwellen ersichtlich gemacht. Unter der Annahme von Wellen, deren Amplitude nur von der Breite abhängt und

deren Umlaufsdauer einen Tag beträgt, sind die Zustände, welche im Laufe des Tages an einem Punkt eintreten, gleich denjenigen, welche zu einer Zeit auf dem ganzen Umfang des Breitekreises bestehen.

Die Beziehungen zwischen Luftdruck und Wind in der täglichen Welle lassen noch eine allgemeinere Übersicht zu; wir wollen uns dabei auf ein reibungsloses System beschränken.

Setzt man $l = 0$ und für die ganztägige Welle

$$\varepsilon = E(\omega)\sin(\lambda+\nu t),\quad b = \varphi(\omega)\cos(\lambda+\nu t),\quad c = \psi(\omega)\sin(\lambda+\nu t)$$

und ist E gegeben, so werden φ, ψ durch die Bewegungsgleichungen allein folgenderweise bestimmt:

$$\varphi = \frac{RT}{\nu S}\,\frac{\frac{dE}{d\omega}+2\cos\omega\frac{E}{\sin\omega}}{1-4\cos^2\omega},\quad \psi = -\frac{RT}{\nu S}\,\frac{\frac{E}{\sin\omega}+2\cos\omega\frac{dE}{d\omega}}{1-4\cos^2\omega}.$$

$E(\omega)$ muss gewisse Bedingungen erfüllen, damit φ und ψ überall endlich bleiben; an den Polen soll $E = 0$ sein, in den Polabständen 60° und 120° sollen die Zähler in den Ausdrücken von φ und ψ zugleich mit dem Nenner verschwinden; das wäre nicht möglich, wenn auf der nördlichen Halbkugel E und $dE/d\omega$ überall gleich bezeichnet wären, beispielsweise wenn E positiv wäre, und vom Pol zum Äquator beständig zunähme.

In einer paren Welle ist am Äquator $\varphi = 0$ und $dE/d\omega = 0$, folglich wenn E positiv, ψ negativ. Angenommen φ sei positiv und ψ negativ zwischen einem Polabstande ω_1 auf der nördlichen Hemisphäre und dem Äquator, dann ist in diesem Breiteintervall, wenn daselbst am Boden der höchste Druck der ganztägigen Welle um 6^h früh eintritt

6^h früh Druckmaximum	Mittag Mittl. Druck	6^h Ab. Druckminimum	Mitternacht Mittl. Druck
Ostwind	Südwind	Westwind	Nordwind

Auf der südlichen Hälfte sind in einer paren Welle die meridionalen Winde umgekehrt, die zonalen ungeändert.

(Das Beispiel 1 hat negatives φ und in höheren Breiten positives ψ, demnach in der Nähe des Äquators auf der nördlichen Halbkugel die Windfolge Ost, Nord, West, Süd; in höheren Breiten West, Nord, Ost, Süd. Das Beispiel 2 (Reibung) hat überall die letztgenannte Aufeinanderfolge, wobei jedoch das Maximum des Westwindes beträchtlich später eintritt als das Druckmaximum.)

Dieselbe Beziehung zwischen φ, ψ und E gilt noch sehr angenähert, wenn man es, nicht wie hier mit einer dünnen Luftschale, sondern mit einer freien Atmosphäre zu thun hat; denn die verticale Geschwindigkeit ist gegenüber der horizontalen sehr klein, das Verhältniss der bezüglichen Amplituden ist von derselben Grössenordnung wie dasjenige zwischen der sogenannten Höhe der homogenen Atmosphäre und dem Erdradius. Wenn in einem höheren Niveau der tägliche Gang des Druckes entgegengesetzt ist demjenigen am Boden, so kann auch der tägliche Gang des Windes umgekehrt sein.

Für die halbtägige Welle hat man wieder $l = 0$ und

$$\varepsilon = E(\omega)\sin(2\lambda+2\nu t), \qquad b = \varphi(\omega)\cos(2\lambda+2\nu t),$$
$$c = \psi(\omega)\sin(2\lambda+2\nu t)$$

gesetzt:

$$\varphi = \frac{RT}{2\nu S}\,\frac{\frac{dE}{d\omega}+\cos\omega\frac{2E}{\sin\omega}}{\sin^2\omega}, \qquad \psi = -\frac{RT}{2\nu S}\,\frac{\frac{2E}{\sin\omega}+\cos\omega\frac{dE}{d\omega}}{\sin^2\omega}.$$

Wenn E vom Pol zum Äquator wächst und wenn das Maximum von ε um 10^h früh und 10^h Abends eintritt, so ist überall auf der nördlichen Hemisphäre

10h früh Druckmax.	1h Nm. Mittl. Druck	4h Ab. Druckmin.	7h Ab. Mittl. Druck	10h Ab. Druckmax.
Ostwind	Südwind	Westwind	Nordwind	Ostwind

u. s. f.

In einer paren Welle verschwinden die meridionalen Winde am Äquator und haben in mittleren Breiten ein Maximum der Amplitude. Die grössten Windgeschwindigkeiten werden, wenn die Druckamplitude am Äquator 1/760 bei 45° Breite 0·3/760 des mittleren Druckes beträgt, 0·2 bis 0·3 m.sec^{-1} sein.

Alles dies gilt für die halbtägige Welle zunächst nur unter der Annahme, dass sie durch eine Temperaturwelle erregt wird. Wäre sie durch eine periodische Kraft entstanden, deren Potential W ist, so müsste man $E - W/RT$ in den Gleichungen für φ und ψ an die Stelle von E setzen. Wenn aber die Periode der erzwungenen Welle sehr nahe gleich ist derjenigen einer freien Welle, so ist E gross im Vergleich mit W/RT und die Beziehung des Windsystems zur Druckvertheilung bleibt dieselbe wie zuvor.

Anhang I. Bewegungsgleichungen eines Massenpunktes in einer rotirenden Niveaufläche.

Die Bewegungsgleichungen eines Punktes von der Masse 1 haben im sphärischen Coordinatensystem folgende Gestalt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial r} &= \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 - r\sin^2\omega\left(\frac{d\lambda'}{dt}\right)^2 \\
\frac{\partial V}{r\,\partial\omega} &= r\frac{d^2\omega}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\omega}{dt} - r\cos\omega\sin\omega\left(\frac{d\lambda'}{dt}\right)^2 \\
\frac{\partial V}{r\sin\omega\,\partial\lambda'} &= r\sin\omega\frac{d^2\lambda'}{dt^2} + 2\sin\omega\frac{dr}{dt}\frac{d\lambda'}{dt} + 2r\cos\omega\frac{d\omega}{dt}\frac{d\lambda'}{dt}
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

t die Zeit, r Radiusvector des Punktes, ω sein Polabstand, λ' die (ostwärts gezählte) Länge; V das Potential der auf den Punkt wirkenden Kräfte.

Will man die Bewegung auf ein mit der constanten Rotationsgeschwindigkeit ν ostwärts drehendes Coordinatensystem beziehen, so ist $\lambda' = \lambda + \nu t$ zu setzen

$$\frac{d\lambda'}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} + \nu \quad (2)$$

wobei jetzt λ die Länge bezeichnet, östlich gezählt von einer bestimmten mitrotirenden Meridianebene.

Ein Punkt, welcher in Beziehung auf das rotirende System in Ruhe ist, hat eine radiale Beschleunigung $\nu^2 r\sin^2\omega$ und eine meridionale Beschleunigung $\nu^2 r\cos\omega\sin\omega$. Die aus dem Potential $v = -\frac{1}{2}\nu^2 r^2\sin^2\omega$ abgeleiteten Kräfte könnten den Punkt in relativer Ruhe im neuen System erhalten, wenn keine

andere Kraft auf ihn wirkt. Die möglichen freien Oberflächen einer Flüssigkeit, welche in relativer Ruhe zum rotirenden System verharrt, sind durch die Gleichung $V - v =$ Const. gegeben, wenn V das in der Flüssigkeit herrschende Potential bezeichnet.

Ist nun V eine Function von r, ω, λ, welche die Zeit nicht enthält, und setzt man

$$V = Y - \frac{1}{2}\nu^2 r^2 \sin^2\omega, \tag{3}$$

so ist $Y =$ Const. die Gleichung der Niveauflächen. Wenn man die Relationen (2) und (3) in die Gleichungen (1) einführt, folgt

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial Y}{\partial r} &= \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 - r\sin^2\omega\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 - 2\nu r\sin^2\omega\frac{d\lambda}{dt}\\
\frac{\partial Y}{r\partial\omega} &= r\frac{d^2\omega}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\omega}{dt} - r\cos\omega\sin\omega\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 - 2\nu r\cos\omega\sin\omega\frac{d\lambda}{dt}\\
\frac{\partial Y}{\sin\omega\,\partial\lambda} &= r\sin\omega\frac{d^2\lambda}{dt} + 2\sin\omega\frac{dr}{dt}\left(\frac{d\lambda}{dt} + \nu\right) + 2r\cos\omega\frac{d\omega}{dt}\left(\frac{d\lambda}{dt} + \nu\right)
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Die letzte Gleichung gibt, wenn Y von der Länge unabhängig ist, den Satz von der Erhaltung der Flächen in Beziehung auf die Rotationsaxe, da in diesem Falle

$$\frac{d}{dt}\left[r^2\sin^2\omega\left(\frac{d\lambda}{dt} + \nu\right)\right] = 0.$$

Multiplicirt man die erste der Gleichungen mit dr/dt, die zweite mit $rd\omega/dt$, die dritte mit $r\sin\omega\, d\lambda/dt$, addirt, und bildet das Zeitintegral, so erhält man

$$Y + \text{Const.} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + r^2\sin^2\omega\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2\right].$$

Die Gleichung führt zu dem Satze, dass, wenn der Punkt auf einer rotirenden Niveaufläche $Y =$ const. bleibt, die lebendige Kraft der relativen Bewegung sich nicht ändert. Diesen Satz hat Sprung abgeleitet.[1]

[1] Meteorologische Zeitschrift, 1890, S. 161.

Wir wollen jetzt annehmen, es sei V_1 das Potential eines mit den rotirenden Coordinaten verbundenen Massensystems, welches bewirkt, dass die Niveauflächen Kugeln sind. Zu diesem Zwecke muss man

$$V_1 = f(r) - \frac{1}{2} \nu^2 r^2 \sin^2 \omega$$

setzen.[1] Überdies sollen andere Kräfte, deren Potential W ist, auf den Punkt wirken.

Man hat dann in die Gleichungen (1), beziehungsweise in die Gleichungen (4) einzusetzen

$$\left.\begin{aligned} V &= f(r) - \frac{1}{2} \nu^2 r^2 \sin^2 \omega + W \\ Y &= f(r) + W \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Soll der Punkt auf einer Niveaufläche $r = S$ bleiben, so ist jetzt $dr/dt = 0$. Man hat es nur mehr mit den zwei letzten Bewegungsgleichungen zu thun, während die erste die Kraft angibt, welche der Punkt auf die Unterlage ausübt.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial W}{S \partial \omega} &= S\left[\frac{d^2\omega}{dt^2} - \cos\omega \sin\omega \left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 - 2\nu \cos\omega \sin\omega \frac{d\lambda}{dt}\right] \\ \frac{\partial W}{S \sin\omega \partial \lambda} &= S\left[\sin\omega \frac{d^2\lambda}{dt^2} + 2\cos\omega \frac{d\omega}{dt}\frac{d\lambda}{dt} + 2\nu \cos\omega \frac{d\omega}{dt}\right] \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Diese zunächst für eine kugelförmige Niveaufläche abgeleiteten Gleichungen gelten noch für eine sphäroidale Niveaufläche, welche von der Kugelgestalt sehr wenig abweicht, wenn man den Polabstand ω so, wie es in der Geodäsie gebräuchlich ist, definirt.

Die Bewegungsgleichungen der Luft in einer sphäroidalen Niveauschale lassen sich aus der Gleichung (6) leicht ableiten, wenn man beachtet, dass die Druckkräfte

$$-\frac{RT}{S}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega}, \qquad -\frac{RT}{S \sin\omega}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda}$$

[1] Vergl. v. Helmholtz, »Über atmosphärische Bewegungen«. Sitzungsberichte der Berliner Akademie, 1888.

in meridionaler und zonaler Richtung hinzukommen. Setzt man

$$b = S\frac{d\omega}{dt}, \qquad c = S\sin\omega\frac{d\lambda}{dt},$$

vernachlässigt die Glieder, welche in Beziehung auf b, c und deren Differentialquotienten nicht linear sind, so erhält man die Gleichungen

$$\frac{\partial(W-RT\varepsilon)}{S\partial\omega} = \frac{\partial b}{\partial t} - 2\nu\cos\omega\,.\,c$$

$$\frac{\partial(W-RT\varepsilon)}{S\sin\omega\,\partial\lambda} = \frac{\partial c}{\partial t} + 2\nu\cos\omega\,.\,b,$$

von denen wir theils in dieser Form, theils für $W = 0$, und auch unter Hinzufügung der Reibungsglieder $-l.b$, $-l.c$, Gebrauch gemacht haben.

Da die in §. 6 der Abh. 1890 gegebene Ableitung nicht ganz zureichend ist, schien es nicht überflüssig, sie in vollständiger Entwicklung zu wiederholen.

Anhang II. Erzwungene Schwingungen in einer verticalen Luftsäule und in einer Atmosphäre mit ebener oder cylindrischer Unterlage.

A. Verticale Luftsäule.

Für die verticale Bewegung der Luft, auf welche die constante Schwerkraft g wirkt und deren Temperatur im Ruhezustand T constant angenommen ist, gelten die folgenden Differentialgleichungen, wenn die Bewegung dadurch erzeugt wird, dass T in das variable $T(1+\tau)$ übergeht, und wenn τ ein kleiner Bruch ist

$$\frac{\partial w}{\partial t} = RT\left(\alpha\tau - \frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\right), \qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial\tau}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} - \alpha w = 0. \quad (1)$$

(Gleichungen (3) der Abh. 1890, für $u = 0$ und $\alpha = g/RT$ gesetzt; α^{-1} Höhe der homogenen Atmosphäre bei der Temperatur T).

Nach Elimination von w erhält man eine Gleichung zwischen dem relativen Überdruck ε und dem gegebenen τ.

demnach ν^2/RT sehr klein gegen α^2, oder auch gegen $\gamma\alpha$, wenn γ von gleicher Grössenordnung wie α angenommen ist. Man hat also mit sehr grosser Annäherung

$$B = -\frac{\alpha}{\gamma}A, \qquad \frac{\alpha A + \gamma B}{\beta_1} = \frac{\alpha}{\gamma}A, \qquad \beta_1 = \frac{\nu^2}{RT\alpha}, \qquad \beta_2 = \alpha,$$

ferner, da β_2 sehr gross gegen β_1,

$$K_1 = \frac{\alpha}{\gamma}A, \qquad K_2 = 0$$

und die Lösung der Gleichungen (1) nimmt — mit der Beschränkung auf Werthe von z die klein sind gegen Z — folgende Form an:

$$\left.\begin{aligned} \tau &= Ae^{-\gamma z}\sin\nu t; \\ \varepsilon = \frac{\alpha}{\gamma}A(1-e^{-\gamma z})\sin\nu t, &\qquad w = \frac{\nu}{\gamma}A(1-e^{-\gamma z})\cos\nu t \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Den Gleichungen (5) zufolge ist die Änderung des Druckes am Boden Null und in der Höhe z gleich derjenigen, welche in einer freien Säule durch die Erwärmung τ entstünde, wenn der statische Zustand wieder hergestellt wäre, oder gleich dem Überdruck, welchen die über das Niveau z gehobene Luftmasse bewirkt. Bei einer langsamen Schwingung bleibt die barometrische Höhenformel so nahe giltig, dass die Abweichungen tief unter den Werthen liegen, welche der Beobachtung zugänglich sind.

Wir dürfen demnach versuchen, eine Lösung abzuleiten aus der Annahme, dass die barometrische Höhenformel genau gilt, wie im Ruhezustande; die verticale Geschwindigkeit wird man aus der Continuitätsgleichung finden. Wir setzen statt der Gleichungen (1) die folgenden:

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial z} - \alpha\tau = 0,^{*} \qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial\tau}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} - \alpha w = 0. \tag{1*}$$

* Diese Gleichung ist in unserer Bezeichnung die barometrische Formel. Sie geht aus der gebräuchlichen Form hervor (p Druck, T Temperatur im Ruhezustande, Functionen der Höhe), wenn man in

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dz} = -\frac{g}{RT}$$

T durch $T(1+\tau)$ und p durch $p(1+\varepsilon)$ ersetzt, Quadrate von τ und ε vernachlässigt.

Setzt man

$$F = Ae^{-\gamma z},$$

so folgt

$$E = Be^{-\gamma z} + K_1 e^{\beta_1 z} + K_2 e^{\beta_2 z},$$

$$W = -\frac{RT}{n}\{(\alpha A + \gamma B)e^{-\gamma z} - e\beta_1 K_1{}^{\beta_1 z} - \beta_2 K_2 e^{\beta_2 z}\},$$

$$B = \frac{-\alpha(\gamma+\alpha) + \frac{n^2}{RT}}{\gamma(\gamma+\alpha) + \frac{n^2}{RT}} A, \qquad \alpha A + \gamma B = \frac{n^2}{RT} \cdot \frac{\gamma+\alpha}{\gamma(\gamma+\alpha) + \frac{n^2}{RT}} A.$$

Zur Bestimmung der Constanten K_1, K_2 braucht man zwei Grenzbedingungen; als erste setzen wir, dass die verticale Geschwindigkeit am Boden Null ist. Für eine freie Säule gäbe es keine ganz einwurfsfreie zweite Bedingung. Wir wollen desshalb eine Säule annehmen, welche in sehr grosser Höhe Z horizontal begrenzt ist, demnach für

$$z = 0, \quad W = 0 \quad \text{und für} \quad z = Z, \quad W = 0.$$

Daraus ergibt sich

$$K_1 = \frac{\alpha A + \gamma B}{\beta_1} \cdot \frac{e^{\beta_2 Z} - e^{-\gamma Z}}{e^{\beta_2 Z} - e^{\beta_1 Z}}, \qquad K_2 = -\frac{\alpha A + \gamma B}{\beta_2} \cdot \frac{e^{\beta_1 Z} - e^{-\gamma Z}}{e^{\beta_2 Z} - e^{\beta_1 Z}}.$$

Die Formeln werden weitaus einfacher und leichter zu überblicken sein, wenn man die Grössenverhältnisse der darin vorkommenden Werthe berücksichtigt. Nimmt man die Schwerkraft gleich derjenigen auf der Erde an, ferner trockene Luft von der Temperatur 273°, und ist die Periode der Erwärmung ein Tag,

$$g = 9\cdot806\,\text{m}.\text{sec}^{-2}, \quad RT = \frac{10333\,.\,9\cdot806}{1\cdot293} = 78365\,\text{m}^2.\text{sec}^{-2},$$

$$\frac{g}{RT} = \alpha = 0\cdot0001251\,\text{m}^{-1}, \quad n = \nu = \frac{2\pi}{24.60.60}\,\text{sec}^{-1},$$

so ist

$$\frac{\nu^2}{RT} = 10^{-14}.6\cdot75.\text{m}^{-2} \qquad \alpha^2 = 10^{-8}.1\cdot57.\text{m}^{-2},$$

gerechnet ist, hat man für verschiedene Höhen eine Übersicht der grössten Werthe von ε, $p\varepsilon$, w, y. Der Druck am Boden ist 760 gesetzt.

Höhe	Mittlerer Druck $[p]$	Temp.-Amplitude $[273°\tau]_{Max.}$	Relative Druck-Amplitude $[\varepsilon]_{Max.}$	Absolute Druck-Amplitude $[p\varepsilon]_{Max.}$	Grösste Geschwindigkeit	Grösste Erhebung
0 m	760	5°	0	0	0 m.sec^{-1}	0 m
1000	686·3	3·033	0·00180	1·24	0·00105	14·4
2000	591·9	1·839	289	1·71	168	23·1
4000	461·0	0·677	396	1·83	230	31·6
8000	279·6	0·092	450	1·26	261	35·9
16000	102·9	0·002	458	0·47	266	36·6
∞	0	0	458	0	266	36·6

Ganz anders verhält sich die Druckschwingung in einer verticalen Säule von der Höhe H, welche oben offen in die freie Atmosphäre mündet. Ist in grösserer Entfernung von der Säule die Luft in Ruhe, so hat man zur Bestimmung der Bewegung innerhalb der Röhre als Grenzbedingungen

$$z = 0, \quad w = 0; \qquad z = H, \quad \varepsilon = 0.$$

Man rechnet daraus die Constanten C_1, C_2 der Gleichungen (4*) und erhält zwischen 0 und H

$$\left.\begin{aligned} \tau &= Ae^{-\gamma z} \sin \nu t: \\ \varepsilon &= -\frac{\alpha}{\gamma} A(e^{-\gamma z} - e^{-\gamma H}) \sin \nu t \\ w &= \frac{\nu}{\gamma} A(e^{\alpha z}[1 - e^{-\gamma H}] - e^{-\gamma z} + e^{-\gamma H}) \cos \nu t \end{aligned}\right\} \qquad (6^*)$$

Die relative Druckamplitude am Boden

$$\frac{\alpha}{\gamma} A . (1 - e^{-\gamma H})$$

ist unter sonst gleichen Umständen desto grösser, je höher die offene Säule. Das Druckminimum tritt gleichzeitig mit dem Temperaturmaximum ein.

Man darf die Luft in einem tief eingeschnittenen Thale mit der Luft in unserer verticalen Röhre vergleichen und kann leicht die Änderungen berechnen, welche die ganztägige und halbtägige Druckschwankung in Hochgebirgsthälern erleidet. Angenommen, am Orte dieser Säule sei in der Höhe H der freien Atmosphäre die relative Druckschwingung gegeben durch

$$(\varepsilon) = D_1 \sin(\nu t + \eta_1) + D_2 \sin(\nu t + \eta_2)$$

und in der Säule finde eine Temperaturschwingung statt gemäss der Gleichung

$$\tau = A_1 e^{-\gamma_1 z} . \sin(\nu t + \zeta_1) + A_2 e^{-\gamma_2 z} \sin(2\nu t + \zeta_2).$$

Dann ist die Druckschwingung innerhalb der Säule (oder des engen Thales)

$$\varepsilon = D_1 \sin(\nu t + \eta_1) - \frac{\alpha}{\gamma_1} A_1 (e^{-\gamma_1 z} - e^{-\gamma_1 H}) \sin(\nu t + \zeta_1)$$
$$+ D_2 \sin(2\nu t + \eta_2) - \frac{\alpha}{\gamma_2} A_2 (e^{-\gamma_2 z} - e^{-\gamma_2 H}) \sin(2\nu t + \zeta_2).$$

Als Beispiel berechnen wir die Druckschwingung auf dem Boden der Säule mit folgenden Daten, die Zeit t von Mitternacht ab gezählt:

$$z = 0, \quad H = 1000, \quad D_1 = 0, \quad A_1 = \frac{5}{273}, \quad \zeta_1 = \text{arc}\, 210°,$$
$$D_2 = \frac{0 \cdot 3}{760}, \quad \eta_2 = \text{arc}\, 150°, \quad A_2 = \frac{1}{273}, \quad \zeta_2 = \text{arc}\, 30°,$$
$$\gamma_1 = \gamma_2 = 4\alpha, \qquad \alpha^{-1} = 8000.$$

Es ist danach in der Höhe von 1000 m nur eine halbtägige Druckschwingung angenommen, deren Maximum um 10^h früh und Abends eintritt; auf dem Boden der Säule eine ganztägige Temperaturschwingung mit der Amplitude 5°, Maximum 4^h Abends, und eine halbtägige Temperaturschwingung, Amplitude 1°, Maximum 2^h früh und Nachmittag, endlich die verticale Abnahme der Temperaturamplituden gleich wie im vorigen Beispiel.

Die resultirende Druckänderung am Boden ist

$$760\,\varepsilon = 1\cdot37 \sin(\nu t + \text{arc}\,30^\circ) + 0\cdot497 \sin(2\nu t + \text{arc}\,178^\circ5).$$

Das Maximum des ganztägigen Gliedes tritt um 4^h früh ein, gleichzeitig mit dem entsprechenden Temperaturminimum, das Maximum des halbtägigen Gliedes um $9^h\ 3^m$, fast eine Stunde früher, als in der Höhe ausserhalb der Säule.

Wenn der mittlere Druck am Boden 760 ist, hat die durch die Temperaturschwingung allein erzeugte ganztägige Druckschwingung die Amplitude 1·37; die halbtägige entsteht aus der Interferenz zweier Schwingungen, deren eine die Amplitude 0·3 und das Maximum um 10^h hat, während die Amplitude der anderen 0·274 ist, ihr Maximum auf 8^h fällt.

B. Fortschreitende Welle in einer Atmosphäre mit ebener oder cylindrischer Unterlage.

Es wird angenommen, dass die Temperatur T der Luft im Ruhezustande überall constant ist, dass sie dann in $T(1+\tau)$ übergeht,

$$\tau = A e^{-\gamma z} \sin(mx + nt),$$

so dass eine Temperaturwelle mit vertical abnehmender Amplitude nach der Richtung $-x$ wandert.

Zur Berechnung der damit verbundenen Druckwelle, der horizontalen Geschwindigkeit u, der verticalen w, hat man von den Gleichungen (3) der Abh. 1890 auszugehen.

Wenn aber die Periode und die Wellenlänge sehr gross sind, kann man sich die im vorigen Abschnitte gewonnene Erfahrung zunutze machen, dass die barometrische Höhenformel für langsam verlaufende Schwingungen mit ausreichender Genauigkeit giltig bleibt, und kann eine jener Gleichungen durch die genannte Formel ersetzen. Man hat

$$\left.\begin{aligned} &\alpha\tau - \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = 0, \quad -RT\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t}, \\ &\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} - \alpha w = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Schreibt man noch

$$\varepsilon = E(z)\sin(mx+nt), \qquad u = U(z)\sin(mx+nt),$$
$$w = W(z)\cos(mx+nt),$$

so folgt aus der ersten und zweiten

$$E = -\frac{\alpha}{\gamma}Ae^{-\gamma z}+C_1, \qquad U = -RT\frac{m}{n}E,$$

aus der dritten, wenn man zur Abkürzung setzt

$$c = RT\frac{m^2}{n^2},$$

$$W = -\frac{n}{\gamma}\left(1-\frac{\alpha}{\gamma+\alpha}c\right)Ae^{-\gamma z}+\frac{n}{\alpha}(1-c)C_1+C_2e^{\alpha z}.$$

Die Constanten C_1, C_2 sind mittels passender Bedingungen zu bestimmen. Soll die verticale Geschwindigkeit nicht mit z ins Unbegrenzte wachsen, so muss

$$C_2 = 0$$

gesetzt werden. Aus der Bedingung $w = 0$ für $z = 0$ folgt

$$C_1 = \frac{\alpha}{\gamma}\left(\frac{\alpha}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma}{\gamma+\alpha}\frac{1}{1-c}\right).$$

Die vollständige Lösung der Gleichungen (1) ist danach

$$\left.\begin{aligned}
\tau &= Ae^{-\gamma z}\sin(mx+nt):\\
\varepsilon &= A\left\{\frac{\alpha}{\gamma+\alpha}\frac{c}{1-c}+\frac{\alpha}{\gamma}(1-e^{-\gamma z})\right\}\sin(mx+nt)\\
u &= -RT\frac{m}{n}\varepsilon,\\
w &= A\frac{n}{\gamma}\left(1-\frac{\alpha}{\gamma+\alpha}c\right)(1-e^{-\gamma z})\cos(mx+nt)
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

das sind dieselben Werthe von ε, u, w, welche man erhält, wenn man statt der ersten der Differentialgleichungen (1) die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial w}{\partial t} = RT\left(\alpha\tau - \frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\right)$$

setzt, sobald man nur $n^2/(RT)-m^2$ gegen α^2 vernachlässigen darf. (Man vergl. §. 4 und 5 der Abh. 1890). Dies ist ohneweiters gestattet, wenn für die Schwingungsperiode ein Tag $n = \nu$, für die Wellenlänge der Umfang des Erdäquators $m^{-1} = S$ angenommen wird. Man hat dann mit $T = 273°$

$$\frac{\nu^2}{RT} = 10^{-14}.6\cdot75, \quad m^2 = 10^{-14}.2\cdot47, \quad \alpha^2 = 10^{-8}.1\cdot57\,[\mathrm{m}^{-2}].$$

Der relative Überdruck in einer Höhe z ist die Summe zweier Glieder $\varepsilon = \varepsilon_0 + \delta_z$,

$$\varepsilon_0 = A\frac{\alpha}{\gamma+\alpha}\cdot\frac{c}{1-c}\sin(mx+nt),$$

$$\delta_z = A\frac{\alpha}{\gamma}(1-e^{-\gamma z})\sin(mx+nt);$$

das erste gibt den relativen Überdruck am Boden an; das zweite denjenigen, welcher in einer unendlich hohen verticalen Säule in der Höhe z entstünde durch die Temperaturerhöhung $T\tau$. $p\delta_z$ ist also das Gewicht derjenigen Luftmasse, welche in der Säule vom Querschnitt 1 durch die Temperaturerhöhung $T\tau$ über das Niveau z gehoben wird.

(Das gilt nicht allein für die besondere Form der Temperaturwelle, welche oben angenommen wurde, sondern ganz allgemein, wenn die barometrische Höhenformel giltig bleibt; denn aus $\partial\varepsilon/\partial z = \alpha\tau$ folgt, wenn

$$\tau = F(z)\sin[mx+nt+\varphi(z)]$$

und in ε nur jene Glieder berücksichtigt werden, welche der erzwungenen fortschreitenden Welle angehören,

$$\varepsilon = E_0\sin(mx+nt+\eta)+\int_0^z \alpha\tau dz.$$

Der erste Theil auf der rechten Seite gibt die Druckwelle am Boden an (E_0, η Constante), der andere das δ_z.)

Wenn in verschiedenen Höhen Temperaturwellen von gleicher Periode und Länge, aber mit ungleichen Phasen wan-

dern, so erzeugt die τ-Welle jeder Schicht eine ε-Welle in der ganzen Atmosphäre und die Druckwelle in einer Höhe z ist die Summe der erzwungenen Wellen.

Es genügt eine τ-Welle zu betrachten, welche zwischen z_1 und z_2 die constante Amplitude A hat; in allen Höhen unter z_1 und über z_2 bleibe die Temperatur ungeändert; an den Grenzen der Schichten wird eine unstetige Änderung der Temperatur stattfinden. Der Druck und das Product der Dichte in die verticale Geschwindigkeit müssen stetig bleiben; die letzte Bedingung ist, da Producte von ε und w gegenüber den linearen Gliedern vernachlässigt werden, gleichbedeutend mit der Forderung, dass w eine stetige Function von z sei. Man hat es mit drei Lösungen der Gleichung (1) zu thun, je einer für jede Schicht.

Bevor wir diese zusammenstellen, notiren wir die Lösung für den Fall

$$\left.\begin{aligned} \tau &= A \sin(mx+nt): \\ \varepsilon &= (A\alpha z+K_1)\sin(mx+nt), \qquad u = -RT\frac{m}{n}\varepsilon \\ w &= \frac{n}{\alpha}[-cA+(1-c)(A\alpha z+K_1)+K_2 e^{\alpha z}]\cos(mx+nt) \end{aligned}\right\} \quad (2a)$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass diese durch die Bedingungen, w bleibe endlich für $z = \infty$ und $w = 0$ für $z = 0$, übergeht in dieselbe Lösung, welche aus (2) entsteht, wenn $\gamma = 0$ gesetzt wird.

Wir verwenden nun die Formeln $(2a)$ für die drei Schichten unserer oben beschriebenen Aufgabe und haben, wenn

$$\varepsilon = E(z)\sin(mx+nt), \qquad w = W(z)\cos(mx+nt),$$

von $z = 0$ bis z_1:

$$\tau = 0, \qquad E = K_1, \qquad W = \frac{n}{\alpha}[(1-c)K_1+K_2 e^{\alpha z}];$$

von z_1 bis z_2:

$$\tau = A\sin(mx+nt), \qquad E' = A\alpha z+K_1',$$

$$W' = \frac{n}{\alpha}[-cA+(1-c)(A\alpha z+K_1')+K_2' e^{\alpha z}];$$

von z_2 bis ∞:

$$\tau = 0, \qquad E = K_1'', \qquad W'' = \frac{n}{\alpha}(1-c)K_1''.$$

K_2'' wird gleich Null gesetzt gemäss der Bedingung, dass die verticale Geschwindigkeit mit der Höhe nicht ins Unbegrenzte wachse. Zur Bestimmung der fünf anderen Constanten K hat man ebenso viele Gleichungen

$$\begin{array}{lll} \text{für } z = 0, & W = 0, & \\ \text{für } z = z_1, & E = E', & W = W', \\ \text{für } z = z_2, & E' = E'', & W' = W''. \end{array}$$

Daraus erhält man

$$K_1 = A\frac{c}{1-c}(e^{-\alpha z_1} - e^{-\alpha z_2}).$$

Eine nur in der Höhenschicht z_1 bis z_2 fortschreitende Temperaturwelle

$$\tau = A \sin(mx+nt)$$

erzeugt eine Druckwelle, welche am Boden (und bis zur Höhe z_1) den Werth hat:

$$\varepsilon_0 = A\frac{c}{1-c}(e^{-\alpha z_1} - e^{-\alpha z_2}) \sin(mx+nt). \qquad (3)$$

Wenn $c = 1$ wird, also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Temperaturwelle n/m gleich derjenigen einer freien isothermen Welle $\sqrt{RT}$, so erhält man ε und u unendlich gross. Für eine in der Atmosphäre fortschreitende erzwungene Welle hat die kritische Fortpflanzungsgeschwindigkeit den gleichen Werth, wie in einer dünnen Schicht von constanter Dichte. Es ist wichtig, dies festzustellen für die Anwendung, welche wir von den früher geführten Rechnungen machen wollen. Wir dürfen, ohne die Entwicklungen für eine mit der Erde rotirende Atmosphäre auszuführen, annehmen, dass die Umlaufsdauer freier Wellen in einer solchen Luftschale von constanter Mitteltemperatur nahezu gleich ist der Umlaufsdauer analoger Wellen in einer dünnen rotirenden Niveauschale von derselben Temperatur.

Das zuletzt ausgeführte Beispiel wurde mit Beziehung auf Hann's Hypothese berechnet, Ursache der halbtägigen Druckschwankung sei die Erwärmung der höheren Luftschichten durch Absorption der Sonnenstrahlen.[1] Angenommen, in einer hohen Schicht finde ein regelmässiger täglicher Temperaturgang statt, dann lässt er sich als die Summe westwärts fortschreitender Wellen mit Perioden von 24, 12... Stunden darstellen; die Amplituden hängen von der Declination der Sonne und vom Polabstand des Ortes ab; die erzwungenen Druckwellen könnte man berechnen, wenn man eine Entwicklung ähnlich derjenigen, welche zur Gleichung (3) geführt hat, für die rotirende sphäroidale Atmosphäre ausführte. Das Ergebniss lässt sich jedoch schon mit Hilfe der bisher geführten Rechnungen voraussehen. Für die ganztägige Welle ist der dem $c/(1-c)$ entsprechende Factor klein, die Druckwelle am Boden fällt gering aus, wenn die Temperaturamplitude nicht sehr gross ist und die erwärmte Schicht hoch liegt; für die halbtägige Welle verhält es sich aber so, wie wenn c sehr nahe 1 ist, die Druckwelle hat eine im Verhältniss zur entsprechenden Temperatuschwankung grosse Amplitude.

Insoweit wäre die Annahme plausibel. Genauer liesse sie sich erst begründen, wenn man den Temperaturgang der oberen Schichten berechnen könnte; fände man, dass das Maximum oder Minimum des halbtägigen Temperaturgliedes auf 10^h fällt wie das halbtägige Druckmaximum, so hätte die Hypothese eine gute Stütze; der jährliche Gang der Druckamplitude — Maxima zur Zeit der Äquinoctien, Minima zur Zeit der Sonnenwende — liesse sich darauf zurückführen, dass die Amplituden des paren Theiles der Temperaturwelle (d. i. desjenigen Theiles, welcher in Beziehung auf den Äquator symmetrisch ist) in den erstgenannten Jahreszeiten grösser sind als in den anderen. Die impare Druckwelle hat wieder ein anderes c und desshalb relativ geringe Amplituden.

Alle diese Rechnungen gelten ebenso für eine Atmosphäre mit cylindrischer, wie für eine solche mit ebener Unterlage,

[1] Bemerkungen zur täglichen Oscillation des Barometers. Sitzungsber., Bd. XCIII (1886).

wenn S der Halbmesser des Cylinders sehr gross ist im Vergleich mit α^{-1}, der Höhe der homogenen Atmosphäre, und wenn man annimmt, dass die Luftbewegung nur nach der Länge λ und nach der Höhe z geschieht, von der Breite unabhängig ist. Es gelten dann die Differentialgleichungen (1), in denen x durch $S.\lambda$ ersetzt wird.

Wir notiren für späteren Gebrauch die Formeln, welche aus (2) hervorgehen, wenn man darin $j.\lambda$ statt mx einführt und

$$h = \frac{RT}{n^2 S^2}$$

setzt, also $c = j.h$.

$$\left.\begin{aligned}
\tau &= Ae^{-\gamma z} \sin (j\lambda + nt); \\
\varepsilon &= A\left\{\frac{\alpha}{\gamma+\alpha} - \frac{j^2 h}{1-j^2 h} + \frac{\alpha}{\gamma}(1-e^{-\gamma z})\right\} \sin (j\lambda + nt), \\
u &= -Aj\frac{RT}{nS}\left\{\frac{\alpha}{\gamma+\alpha} - \frac{j^2 h}{1-j^2 h} + \frac{\alpha}{\gamma}(1-e^{-\gamma z})\right\} \sin (j\lambda + nt), \\
w &= A\frac{n}{\gamma}\left(1 - \frac{\alpha}{\gamma+\alpha} j^2 h\right)(1-e^{-\gamma z}) \cos (j\lambda + nt).
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Die Werthe $j = 1$, $n = \nu$ gehören zu einer ganztägigen, die Werthe $j = 2$, $n = 2\nu$ zu einer halbtägigen Welle in der cylindrischen Atmosphäre.

C. Zusammenfassung der Beobachtungen über die ganztägige Barometerschwankung auf der Erde.[1]

Jener Bestandtheil des täglichen Luftdruckganges, welcher durch eine einfache Schwingung von der Periode 24 Stunden dargestellt wird, hat neben vielen örtlich unregelmässigen Erscheinungen einige beinahe regelmässige Merkmale, welche überall zutreffen — Küstenstriche, enge Thäler und Kessel ausgenommen.

[1] Hann, Untersuchungen über die tägliche Oscillation des Barometers. Denkschr. der kaiserl. Akad. Wien, 1889. Angot, Etude sur la marche diurne du baromètre. Annales du bureau central de Météor. für 1887. Paris, 1890. Hann, Weitere Untersuchungen etc., Denkschr., Wien, 1892.

Sowohl in den Tropen, wie in mittleren Breiten tritt das jener Schwingung zugehörende Maximum des Luftdruckes am Boden um 6^h früh ein. Darf man annehmen, dass der tägliche Gang des Luftdruckes in freien Höhen von 1700 bis 3000 m annähernd gleich ist demjenigen auf Berggipfeln gleicher Erhebung, so kann man auch anführen, dass die Amplitude anfangs mit der Höhe abnimmt, etwa bei 1500 m Null wird, von da ab mit der Höhe wächst, während die Phase um die halbe Schwingungsdauer gegen diejenige am Boden verschoben ist. In Höhen über 1500 m tritt das Maximum um 6^h Abends ein.

Bezeichnet ϑ die wahre Ortszeit von Mitternacht ab gezählt, $2\pi/\nu$ die Tagesdauer, und schreibt man für den relativen Überdruck

$$\varepsilon = -E(z) \sin \nu\vartheta,$$

so hat man den angeführten Beobachtungen gemäss E mit z stetig wachsend

$E(z)$ negativ von Null bis etwa 1500 m,
$E(z)$ positiv für grössere Höhen.

Die Amplitude ist nicht nur eine Function der Höhe, sondern auch der Länge und der Breite, bezüglich dieser Coordinaten aber eine sehr unregelmässige Function. Man kann nur anführen, dass der Werth von E am Boden in continentalen Gebieten vom Äquator bis zu Breiten von 50° zwischen $0 \cdot 5/760$ und $1/760$ beträgt, auf dem Meere $0 \cdot 3/760$ nicht übersteigt.

Dass die ganztägige Druckwelle eine Folge der täglichen Temperaturschwankung ist, schliesst man aus folgenden Beobachtungen: Die Amplituden sind unter sonst gleichen Umständen kleiner auf dem Meere als auf dem Festlande, kleiner im Winter als im Sommer und kleiner an trüben als an heiteren Tagen, ganz entsprechend den Temperaturamplituden. Dass nur ein Bestandtheil des täglichen Temperaturganges, nämlich die 24-stündige Schwingung, mit der ganztägigen Druckwelle in Zusammenhang zu bringen ist, folgt aus dem allgemein giltigen Gesetze, dass die erzwungene Schwingung die gleiche Periode hat, wie die erregende.

Die ganztägige Temperaturschwingung hat am Boden das Maximum um 3^h Nachmittag, auf Berggipfeln in den ersten

Nachmittagsstunden. Sehr wahrscheinlich ist der tägliche Gang der Temperatur in der freien Atmosphäre schon in Höhen von 1000 bis 3000 m weit verschieden von demjenigen auf Bergen gleicher Höhe. Man schliesst das aus der vorhin angeführten Beobachtung, dass $\partial\varepsilon/\partial z$ um 6^h Abends den grössten positiven Werth erreicht. Es muss also auch das Maximum von τ — zufolge der Gleichung $\alpha\tau = \partial\varepsilon/\partial z$ — auf dieselbe Zeit fallen. Man vermuthet demnach, dass der tägliche Temperaturgang, der am Boden beobachtet wird, nur für eine Schicht von geringer Dicke gilt, dass jedoch in grösseren Höhen das Maximum der Temperatur um 6^h Abends eintritt.[1]

Wenn man also annimmt, dass der tägliche Gang des Druckes in der freien Atmosphäre durch die Beobachtungen auf Berggipfeln gut dargestellt ist, so folgt, dass der tägliche Temperaturgang auf diesen Gipfeln ein ganz anderer ist, als in gleicher Höhe über ebenem Boden.

Der Kürze wegen soll für die ganztägige Temperaturschwingung in allen Höhen gleiche Phase und das Maximum auf 6^h Abends gesetzt werden,

$$\tau = F(z) \sin(\nu\vartheta + \pi);$$

F überall positiv. Führt man noch statt der Ortszeit ϑ die Zeit t des Meridians Null ein, daselbst von Mitternacht gezählt, $\vartheta = t + \lambda/\nu$, so sind die zusammengehörigen Werthe der 24-stündigen Temperatur- und Druckschwingung

$\tau = F(z) \sin(\lambda + \nu t + \pi)$ F positiv,

$\varepsilon = E(z) \sin(\lambda + \nu t + \pi)$ E negativ unter 1500 m, daselbst Null, darüber positiv.

In F und E ist nur die Höhe unter dem Functionszeichen hervorgehoben, obgleich beide auch Functionen der Länge und Breite sind.

Will man diese Formeln, welche die Erscheinungen im Allgemeinen richtig darstellen, mit den Ergebnissen der bisher geführten Rechnungen vergleichen, so ist dabei nur auf E_0 (den Werth von E am Boden) zu achten, da sich die Änderung von E

[1] Hann, Weitere Untersuchungen, l. c.

mit der Höhe aus τ mittels der barometrischen Höhenformel unmittelbar berechnen lässt.

In einer cylindrischen Atmosphäre erhält man, wenn F eine Function der Höhe allein und überall positiv ist, auch E_0 positiv, sobald

$$\frac{RT}{\nu^2 S^2} < 1.$$

Setzt man S gleich dem Radius des Erdäquators, so ist

$$\frac{RT}{\nu^2 S^2} = \frac{1}{2 \cdot 735}.$$

Das Maximum des Druckes am Boden fällt mit dem Maximum der Temperatur zusammen; das gleiche tritt noch ein, wenn für S der Radius des Breitekreises 30° gesetzt wird.

Die Rechnung ist vorhin für eine dünne rotirende Sphäroidschale ausgeführt worden und F als Function der Breite angenommen. Auch da ergab sich bei reibungsloser Bewegung E mit F gleichbezeichnet; in jedem Parallelkreise fällt ε-Maximum mit τ-Maximum zusammen.

Man kann danach mit Sicherheit voraussehen, dass, wenn in einer freien sphäroidalen Atmosphäre F als Function der Breite und der Höhe jedoch überall positiv und eine Temperaturwelle

$$\tau = F(z, \omega) \sin(\lambda + \nu t + \eta)$$

durch die Atmosphäre fortschreitend angenommen wird, in der erzwungenen Druckwelle

$$\varepsilon = E(z, \omega) \sin(\lambda + \nu t + \eta)$$

E überall, auch am Boden positiv sein muss; während man nach den vorliegenden zahlreichen Beobachtungen vermuthen möchte, dass auf einer regelmässigen Erde das ε-Maximum am Boden mit dem τ-Minimum zusammenfällt. Denn bemerkt man, wie weitaus überwiegend auf der Erde das ε_0-Maximum in der ganztägigen Welle um 6^h früh eintritt, so möchte man für sehr wahrscheinlich ansehen, dass es sich ebenso verhielte auf einer gleichartigen, von unregelmässigen Witterungserscheinungen freien Erde.



Doch erweist sich diese Vermuthung als ganz unberechtigt.

In Wirklichkeit gibt es auf der Erde kein Gebiet von grosser Ausdehnung, wo F eine Function der Breite und Höhe allein ist, sondern es erscheint vermöge der Vertheilung von Land und Wasser, der Unregelmässigkeit der Landoberfläche und der Bewölkung auch als eine Function der Länge und überdies als eine solche, die in nahen Orten sehr verschiedene Werthe hat: Es verhält sich dann an einem Tag beiläufig so, als ob in jedem kleinen Gebiete eine andere stehende Temperaturschwingung stattfände, unabhängig von denen in entfernten Gebieten.

Man hat nun die Aufgabe, die ε-Schwingung zu berechnen, welche zu einer stehenden τ-Schwingung auf einer Insel gehört, wenn auf dieser die Amplitude von τ constant, ausserhalb derselben Null ist.

Dieses Problem wollen wir für eine cylindrische Erde behandeln, auf welcher die Insel die Form eines der Axe parallelen Streifens hat; der Meridian Null soll durch die Mitte des Streifens gelegt, die Temperaturamplitude nur zwischen $-\lambda_1$ und λ_1 von Null verschieden sein. Die Längenausdehnung des Streifens $2\lambda_1 S$ wird gross angenommen im Vergleich mit α^{-1} der Höhe der homogenen Atmosphäre, aber klein im Vergleiche mit dem Umfang des Cylinders $2\pi S$.

D. Stehende Schwingungen in einem kleinen Theil der cylindrischen Atmosphäre.

Wenn die Temperaturschwingung in der Form

$$\tau = Ae^{-\gamma z}.f(\lambda)\sin\nu t \tag{1}$$

gegeben ist, so kann man $f(\lambda)$ durch eine periodische Function darstellen, und dadurch die Aufgabe ε, u, w zu finden, auf eine schon vorher gelöste zurückführen.

Es sei

$$f(\lambda) = 1 \text{ von } -\lambda_1 \text{ bis } \lambda_1,$$

$$f(\lambda) = 0 \text{ von } -\pi \text{ bis } -\lambda_1 \text{ und von } \lambda_1 \text{ bis } \pi.$$

Dann kann man f ersetzen durch eine Reihe

$$f(\lambda) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos\lambda + a_2 \cos 2\lambda + \ldots + a_j \cos j\lambda + \ldots$$

$$a_j = \frac{2}{\pi} . \int_0^\pi f(\lambda) \cos j\lambda . d\lambda = \frac{2}{\pi} \int_0^{\lambda_1} \cos j\lambda . d\lambda = \frac{2}{\pi} . \frac{\sin j\lambda_1}{j},$$

welche überall, die Unstetigkeitsstellen ausgenommen, die Function vollständig darstellt. Man hat nun τ als eine Summe, aus welcher wir das Glied

$$\tau_j = A e^{-\gamma z} . a_j \cos j\lambda . \sin \nu t$$

herausheben. Zu diesem gehören

$$\varepsilon_j = A \left\{ \frac{\alpha}{\gamma+\alpha} \frac{j^2 h}{1-j^2 h} + \frac{\alpha}{\gamma} (1-e^{-\gamma z}) \right\} a_j \cos j\lambda \sin \nu t,$$

$$u_j = -A \frac{RT}{\nu S} . \left\{ \frac{\alpha}{\gamma+\alpha} . \frac{j^2 h}{1-j^2 h} + \frac{\alpha}{\gamma} (1-e^{-\gamma z}) \right\} j a_j \sin j\lambda \cos \nu t,$$

$$w_j = A \frac{\nu}{\gamma} \left(1 - \frac{\alpha}{\gamma+\alpha} j^2 h\right) (1-e^{-\gamma z}) a_j \cos j\lambda . \cos \nu t.$$

Für $j = 0$ ist überall auf der rechten Seite der Factor $1/2$ hinzuzufügen. Diese Gleichungen ergeben sich aus (4) im Abschnitt B, wenn man zu ihnen diejenigen addirt, welche durch Vertauschung von j mit $-j$ daraus hervorgehen; ferner statt A setzt Aa_j, statt n setzt ν, so dass

$$h = \frac{RT}{\nu^2 S^2}.$$

Sowie nun τ sich aus den τ_j zusammensetzt, ist das zugehörende ε die Summe aller ε_j, $u = \Sigma u_j$, $w = \Sigma w_j$.

Die Entwicklung unterliegt gewissen Einschränkungen. Erstens ist der Fall auszuschliessen, dass h der inverse Werth des Quadrates einer ganzen Zahl j ist. Zweitens bemerkt man, dass zu sehr grossen j Schwingungen von kleiner Wellenlänge gehören, für welche unsere Rechnungen nicht gelten; denn diese sind unter der Annahme entstanden, dass m^2 oder $j^2 S^{-2}$ sehr klein ist gegen α^2. Das gilt noch, wenn $2\pi S = 4 \cdot 10^7$ m gesetzt wird, für $j = 100$, aber nicht mehr für $j = 1000$. Ferner

könnte, wenn man die Reihen ins Unendliche ausdehnt, der Ausdruck für ε unstetig werden, und die Reihen für u, w divergent.

Alle Schwierigkeiten, mit Ausnahme der für h geltenden Beschränkung,[1] vermeidet man, wenn man

$$f(\lambda) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^s a_j \cos j\lambda \tag{2}$$

setzt, worin a_j ebenso wie zuvor bestimmt, s aber gross genug gewählt wird, um zu bewirken, dass $f(\lambda)$ nur unbeträchtlich verschieden ist von 1 zwischen $-\lambda_1$ und λ_1 und sehr nahe Null ausserhalb dieses Gebietes. In der Nähe der Ränder vollzieht sich ein rascher, aber stetiger Übergang. (Je kleiner λ_1, desto langsamer ist die Convergenz der Reihe, umso grösser muss demnach s gewählt werden.)

Die endliche Reihe für ε wird nun auch im ganzen Gebiet stetig sein. Schreibt man wieder $\varepsilon = E \sin \nu t$ und beachtet, dass

$$\frac{j^2 h}{1-j^2 h} = \frac{1}{1-j^2 h} - 1,$$

so erhält man

$$E = A \frac{\alpha}{\gamma+\alpha} \left[\sum_1^s \left(\frac{a_j}{1-j^2 h} \cos j\lambda \right) + \frac{1}{2} a_0 - f(\lambda) \right] + A \frac{\alpha}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) f(\lambda),$$

$$\frac{1}{2} a_0 = \frac{\lambda_1}{\pi}, \qquad a_j = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin j\lambda_1}{j}.$$

Wenn λ_1 sehr klein ist, so ist $\frac{1}{2} a_0$ und jedes a_j sehr klein. In der Summe, welche hier zu berechnen ist, kommt aber a_j noch durch $1-j^2 h$ getheilt vor; desshalb haben nur wenige Glieder, die zu den ersten ganzen Zahlen j gehören, Einfluss auf den Werth des eingeklammerten Ausdruckes.

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^s \left(\frac{a_j}{1-j^2 h} \cos j\lambda \right)$$

ist dann für jedes λ klein, und im Gebiete $-\lambda_1$ bis λ_1 (die Ränder ausgenommen) klein gegen $f(\lambda)$, welches dort den Werth 1 hat.

---

[1] Wenn h gleich oder sehr nahe gleich wäre dem inversen Quadrat einer ganzen Zahl j, so müsste man das entsprechende ε_j mit Berücksichtigung der Reibung berechnen.

[Wir wollen das an einem Beispiel erläutern. Wenn $\lambda_1 = \text{arc } 7^\circ\!5$ angenommen wird, Längenausdehnung des Streifens 15°, $f(\lambda)$ sehr nahe 1 sein soll zwischen —7° und 7°, sehr nahe Null zwischen $-\pi$ und —8° und zwischen 8° und π, so müsste s in der Entwicklung von $f(\lambda)$ sehr gross genommen werden, mindestens $s = 100$. Die Reihe für f braucht man aber nicht, sondern diejenige für φ und dieses wird aus den zwölf ersten Gliedern mit ausreichender Genauigkeit bestimmt. Man hat $\varphi(0) = 0\cdot 1$ für $h = 1/2$. Je kleiner λ_1, desto kleiner wird auch $\varphi(0)$].

Man kann geradezu als erste Annäherung setzen

$$(E) = Af(\lambda)\left[-\frac{\alpha}{\gamma+\alpha}+\frac{\alpha}{\gamma}(1-e^{-\gamma z})\right],$$

also am Boden (E) negativ, in grösseren Höhen positiv.

Genauer ist, wenn

$$\tau = Ae^{-\gamma z}\sin(\nu t+\eta), \qquad \eta \text{ constant}$$

auf einem kleinen Längenintervall, an den Rändern rasch zu Null übergehend, und auf dem ganzen übrigen Gebiet $\tau = 0$,

$$\varepsilon = A\left[-\rho\frac{\alpha}{\gamma+\alpha}+\frac{\alpha}{\gamma}(1-e^{-\gamma z})\right]\sin(\nu t+\eta) \tag{3}$$

auf demselben Streifen, und ausserhalb desselben ε sehr nahe Null. ρ ist eine Function der Länge, innerhalb des Streifens nur wenig kleiner als 1.

Die folgende Tabelle enthält für einige Höhen die Werthe der Temperatur- und Druckamplituden ($T\tau$ und $p\varepsilon$) in der Mitte des Streifens, die letzteren einmal mit $\rho = 1$, das anderemal mit $\rho = 0\cdot 9$ gerechnet. Die dabei benützten Constanten sind

$$T = 273^\circ, \quad A = \frac{3}{273}; \quad \alpha = \frac{1}{8000}, \quad \gamma = 10\alpha = \frac{1}{800}\,[\text{m}^{-1}].$$

Es wird also eine sehr rasche Abnahme der Temperaturamplitude mit der Höhe angenommen. Der mittlere Druck am Boden ist 760 gesetzt und η so gewählt, dass das Temperaturmaximum auf 6^h Abends fällt. Mit $\rho = 1$ tritt die Umkehrung des Zeichens von E bei 1916 m ein, mit $\rho = 0\cdot 9$ bei 1362 m.

Höhe	Temperatur-Amplitude	Druckamplitude		Zeit des	
		(I, $\rho=1$)	(II, $\rho=0\cdot9$)	Temp.-Maximums	Druck-Maximums
0	3°	(—) 0·759	(—) 0·683	6h Abends	6h früh
1000m	0·86	(—) 0.140	(—) 0·079		»
2000	0·25	0·0057	0·065		6h Abends
4000	0·02	0·0427	0·091		»
8000	0·001	0·0279	0·056		»

Die Erscheinungen der ganztägigen Druckschwingung lassen sich also aus der Annahme ableiten: In kleinen Gebieten finden unabhängig von einander ganztägige Temperaturschwingungen statt, deren Amplitude mit der Höhe rasch abnimmt und deren Maximum auf 6^h Abends fällt.

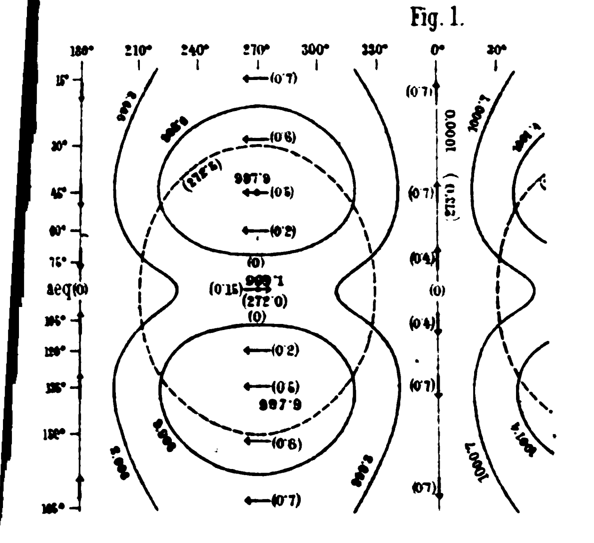
Statt der stehenden Temperaturschwingung könnte man auch eine Welle setzen, welche über ein kleines Längenintervall fortschreitet

$$\tau = A.f(\lambda, z) \sin(\lambda+\nu t+\eta),$$

mit einer ähnlichen Bestimmung für f wie zuvor. Man wird dann eine über den Streifen fortschreitende Druckwelle erhalten, deren Amplitude in der Mitte des Streifens nicht viel von der zuletzt berechneten abweicht.

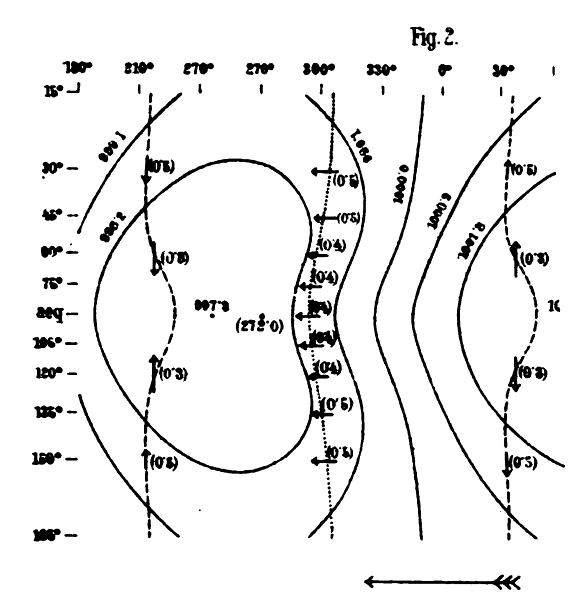
Ähnlich wie die ganztägigen werden auch die halbtägigen Temperaturschwingungen der unteren Schichten örtlich unregelmässige Druckschwingungen erzeugen. Die Amplituden dieser 12-stündigen sind gegenüber jenen der 24-stündigen Oscilationen in demselben Verhältniss kleiner, wie die entsprechenden Temperaturschwankungen, wenn das γ in beiden Fällen gleich anzunehmen ist. Die unregelmässigen Schwingungen interferiren mit denen einer regelmässigen Welle. Angot hat in der citirten Abhandlung den Versuch gemacht, die Bestandtheile der beobachteten halbtägigen Welle zu sondern.

Fig. 1.



Westwärts wandernde Temperaturwelle in der rotirenden ... 24 Stunden. Erzwungene Druckwelle erster Classe, bei reibun...

Fig. 2.



Temperaturwelle wie oben. Erzwungene Druckwelle ...

d. (1893).

...reihe verkehrt

folgende zu

bei solchem ...n z in der Vorzeichen ...ortschreitend



Berichtigungen

zum II. Theil dieser Abhandlung, Sitzungsberichte, CII. Bd. (1893).

In Fig. 4, Tafel I sind die Pfeile der mittleren Horizontalreihe verkehrt gesetzt.

S. 41, Zeile 12 von oben q und z statt q und r.

S. 45. Die letzten Zeilen des 8. Abschnittes sind durch folgende zu ersetzen:

»In Betreff des Vorzeichens der Wurzel in (8) kann bei solchem stufenweisen Vorgang kein Zweifel entstehen, wenn man z in der Form $Ze^{\zeta i}$ darstellt, da man mit sehr kleinem ξ dasselbe Vorzeichen wie bei reellem q anzuwenden hat und Z, ζ sich mit ξ stetig fortschreitend ändern.«

S. 55, Zeile 9 von unten 93·7 statt 187·5.













